

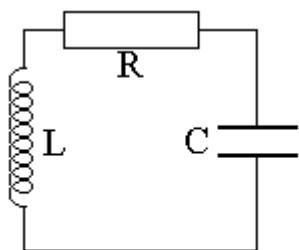
Электромагнит тебранишлар

Режа:

1. Тебраниш контури ҳақида тушунча.
2. Эркин электрик тебранишлари: механик ва электр тебраниш ўртасида ўхшашлик.
3. Мажбурий электр тебранишлар: механик ва электр тебраниш ўртасида ўхшашлик.
4. Аслик ва унинг хоссалари.

Таянч сўз ва иборалар: Тебраниш контури, сўниш коэффициенти, хусусий частота, ташқи мажбур этувчи куч частотаси, резонанс эгри чизиғи, кучланиш ва ток резонанси, аслик, резонанс эгри чизиғи кенглиги ён ўтказиш соҳаси ёки частоталар оралиғи.

1. Тебраниш контури ҳақида тушунча. Бу маърузада ҳам актив қаршилик, конденсатор ва ғалтақдан иборат кетма-кет уланган занжир ҳақида сўз боради. Бу ерда биз бундай занжирда рўй берадиган жараёнларни умумий



Расм 103

усул яъни дифференциал тенгламаларга асосланган услубда қараймиз. Электр тебранишларини индуктивлик ва сиғимга эга бўлган занжир орқали ҳосил бўлиши мумкин. Бундай занжирга тебраниш контури дейилади.

Расм 1 да кўрсатилган контурда $t=0$ да қандайдир ташқи таъсир кўрсатилди (конденсаторга заряд берилган ($q(0) \neq 0$) ёки контурда ток ўйғотилган ($I(0) \neq 0$) ёки бир вақтда шу иккала ҳол ҳам амалга оширилган бўлиб, сўнгра контур ўз-ўзича қўйиб юборилган.

2. Эркин электрик тебранишлари: механик ва электр тебраниш ўртасида ўхшашлик.

Тебраниш контурида қандай жараёнлар рўй беради?

Қаралаётган контур учун асосий дифференциал тенглама (13.19) куйидагича кўринишга эга бўлади:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (15.1)$$

манба бўлмагани учун ($\epsilon=0$). Сиз бундай тенглама билан механикада танишсиз - бу массаси m бўлган моддий нуқтанинг квазиэластик куч $f=-kx$ ва ишқаланиш кучи $f_x=-b(dx/dt)$ таъсирида ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасидир:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, (15.2)$$

(15.1) ва (15.2) тенгламалар математик жиҳатдан бир хилдир, улар функция ва коэффицентларнинг физик маъноси билан фарқ қилади, (15.1) тенглама (жадвалнинг чап устуни) ва ундаги катталикларни (15.2) тенгламадаги катталикларга алмаштирсак, (15.1) тенгламанинг ечими (жадвалнинг ўнг устуни) эга бўламиз.

Унча катта бўлмаган сўнишда ($\beta < \omega_0$) конденсатордаги заряд ва бошқа контурнинг ўзгарувчи катталиклари: $I(t)$, $U_R(t)$, $U_C(t)$, ва $U_L(t)$ — вақт бўйича сўниш қонуни бўйича ўзгаради. Контурдаги бу электр тебранишларга эркин тебраниш деб аталади, чунки улар ташқи таъсирсиз рўй беради. Амалий жиҳатдан кичик актив қаршиликка эга бўлган контурлар жуда муҳимдир, улар учун $\beta \ll \omega_0$ га тенг.

Жадвал- 1

Механик тебранишлар	Электр тебранишлар
Тенгламалар	
$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, (15.2)$	$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, (15.1)$
X(t)	q(t)
m	L
b	R
k	1/C

Ечими	
$x(t) = A^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (15.4)$	$q(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (15.3)$
Суниш коэффиценти куйидагига тенг	
$\beta = b/2m, \quad (15.6)$	$\beta = R/2L, \quad (15.5)$
Айланма частота куйидагига тенг,	
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (15.8)$	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (15.7)$
бу ерда,	
$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad (15.10)$	$\omega_0 = \sqrt{1/LC}, \quad (15.9)$
А ва φ доимийлар бошлангич шартдан аникланади, яъни улар куйидагилар оркали аникланади.	
$X(0)$ ва $v(0)$	$q(0)$ ва $J(0)$

Бу ҳолда, β^2 ни ω_0^2 га нисбатан ташлаб юбориш мумкин. (15.5) ва (15.7) ни ҳисобга олсак, тебраниш частотаси учун куйидагига эга бўламиз:

$$\omega \approx \omega_0 = \sqrt{1/LC}, \quad (15.11)$$

Идеал контурда ($k=0$) сўниш коэффиценти β нолга интилади ва тебраниш сўнмайдиган бўлиб қолади. Соддалик учун (15.3) га бошлангич фазони нолга тенг десак, (15.3) ва (15.5) формулалар бўйича, ток кучи ва кучланишни топамиз:

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t;$$

$$J(t) = dq/dt = q_0 \omega_0 \cos(\omega t + \pi/2); \quad (J_0 = q_0 \omega_0)$$

$$U_C(t) = q/C = (q_0/C_0) \cos \omega_0 t; \quad (U_{C_0} = q_0/C_0), \quad (15.12)$$

$$U_L(t) = L(dJ/dt) = q_0 L \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \pi); \quad (U_{L_0} = q_0 L \omega_0^2)$$

Сигим ва индуктивлик кучланишлар қарама-қарши фазага эга бўлади (синусоидал ток қонунларидан сизларга маълум), уларнинг амплитуда қийматлари бир хил катталикка эга. Формула (15.12) дан келиб чиқадики:

$$U_{L_0} = q_0 L \omega_0^2 = q_0 L(1/LC) = q_0/C = U_{C_0}, \quad (15.13)$$

Идеал контур учун график ва вектор диаграммаси куйида расм 2 да келтирилган.

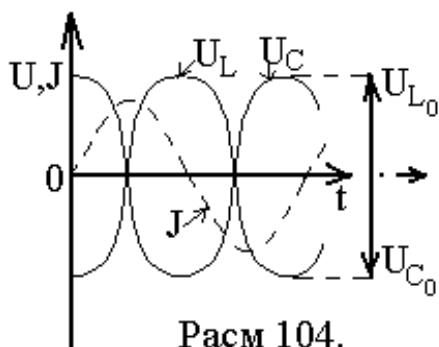
Тебраниш контури учун энергиянинг сақланиш қонуни кўринишга эга бўлади, бу ерда манба бўлмагани учун

$$dA_{\text{бегона}} = 0 \text{ деб олиш керак.}$$

$$d(W_{\text{э}} + W_{\text{м}}) = -dQ$$

яъни контурдаги энергия конденсатор электр майдон энергияси ва ғалтакнинг магнит энергиясидан иборат бўлади, систематик равишда камайиб боради, иссиқлик энергиясига айланиб боради. Идеал контурда $dQ=0$, чунки, $R=0$, натижада $d(W_{\text{э}} + W_{\text{м}}) = 0$ бўлади, демак:

$$W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \text{const}, \quad (15.14)$$



Расм 104.

бу шуни билдирадики, энергия фақат вақт бўйича конденсатор ва ғалтакда қайта тақсимланади, лекин тўла қийматини сақлайди.

Актив қаршилик R нинг ошиши билан эркин тебраниш манзараси ўзгаради.: тебранишнинг сўниши ортади, чунки сўниш коэффиценти $\beta = R /$

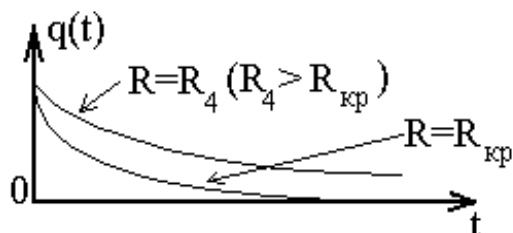
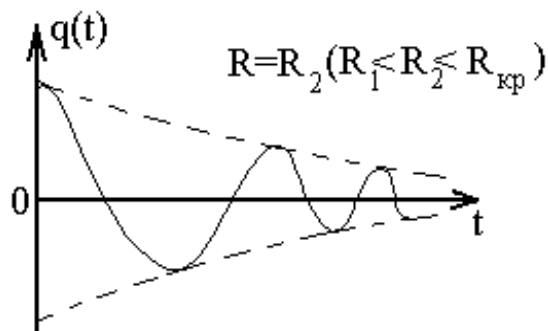
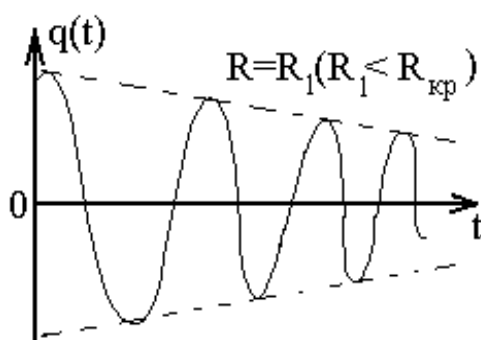
$2L$ ошади ва унинг частотаси

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)} \text{ камаяди.}$$

Қаршиликнинг баъзи бир критик қиймати $R_{\text{кр}}$ да у

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{кр}}^2}{4L^2} \text{ шартидан аниқланади, частота нолга тенг бўлади ва}$$

қаршиликнинг катта қийматларида мавҳум бўлиб қолади, яъни сўнувчи тебраниш кўринишидаги ечим ўз маъносини йўқотади. Бу вақтда (15.1) тенгламанинг ечими апернодик характерга эга бўлади. Расм 3 да $q(t)$ нинг бир хил C ва L , лекин турли хил R учун ($R_1 < R_2 < R_{\text{кр}} < R_4$) графиги келтирилган. Бу вақтда бошланғич шартлар куйидагича олинади: $q(0) \neq 0$, $I(0) = 0$.



Расм 105.

3.Мажбурий электр тебранишлар.

Контурда эркин тебранишлар актив қаршилик туфайли ҳаммавақт сўнади. Агар контурга даврий равишда ташқаридан таъсир кўрсатиб турилса,

бошқача бўлади, масалан $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ қонун бўйича ўзгарувчи манба таъсирида бўлса. Бу схема ўзгарувчан ток занжиридан иборат бўлади, уни аввал вектор диаграмма орқали ўрганган эдик (синусоидал ток қонунларида).

Ҳозир биз бу занжирни бошқа томондан — контурдаги мажбурий тебраниш нуқтаи назаридан қараймиз. Асосий дифференциал тенглама (15.1) бу ҳолда қуйидагича бўлади:

$$\underbrace{L \frac{d^2 q}{dt^2}}_{U_L} + \underbrace{R \frac{dq}{dt}}_{U_R} + \underbrace{\frac{1}{C} q}_{U_C} = \underbrace{\varepsilon_0 \sin \omega t}_{\varepsilon}, \quad (15.15)$$

Бундай тенглама билан ҳам силар механикада дуч келгансиз — квазиэластик куч $f_x = -kx$, ишқалиш кучи $f_x = -b(dx/dt)$ ва даврий мажбурий куч $f_x = f_0 \sin \omega t$ таъсирида моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича эди:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \sin \omega t, \quad (15.16)$$

ЖАДВАЛ 2

Механик тебранишлар	Электр тебранишлар
Тенглама,	
$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \sin \omega t,$	$\underbrace{L \frac{d^2 q}{dt^2}}_{U_L} + \underbrace{R \frac{dq}{dt}}_{U_R} + \underbrace{\frac{1}{C} q}_{U_C} = \underbrace{\varepsilon_0 \sin \omega t}_{\varepsilon}$
Ечими,	
$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (15.18)$	$q(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (15.17)$
Бу ерда,	
$A = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$	$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, (15.19)$
$tg \varphi = - \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	$tg \varphi = - \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Биз биламизки, бу тенгламанинг ечими мажбурий тебраниш (жадвал 2 нинг чап устуни). Бу ечимда $X|t|$, m, b, b_0 к ларни мос равишда $q(t)$, L, R , ва $1/C$ га алмаштириб, шунингдек t_0 ни ε_0 га биз (15.15) нинг ечимини топган бўламиз. (жадвал 2 нинг ўнг устуни) (15.5) дан $\beta = R / 2L$ ва (15.7) $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ ларни ҳисобга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (15.20)$$

$$tg \varphi = \frac{R}{L\omega - (1 / \omega C)} \quad (15.21)$$

Конденсатор заряди $q(t)$ вақт бўйича ўзгаришини билсак, (15.17) формула бўйича контурнинг барча элементларидаги ток кучи ва кучланишини топамиз:

$$J = dq/dt = d [q_0 \sin(\omega t + \varphi)] / dt = q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2) ;$$

$$U_R = R I = q_0 \omega R \sin (\omega t + \varphi + \pi / 2) ;$$

$$U_C = q / C = q_0 / C \sin (\omega t + \varphi) ; \quad , \quad (15.22)$$

$$U_L = L(dJ/dt) = L (d [q_0 \cos(\omega t + \varphi)] / dt) = q_0 L \omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi) ;$$

Шундай қилиб, тебраниш контурига , унинг элементларига ўзгарувчан кучланиш манбаи уласак, контурда мажбурий электр тебраниш ҳосил бўлади, барча ўзгарувчан электр катталиклар $I(t)$, $q(t)$, $U_C(t)$, $U_L(t)$ манба частотаси, амплитуда ва фазаси билан (контур параметрларига боғлиқ бўлган) гармоник ҳаракат қилади. Мажбурий тебранишлар учун резонанс ҳодисаси характерлидир, ташқи таъсир частотаси тебраниш контурининг хусусий частотасига яқинлашганда амплитуда кескин ошиб кетади.

Ток кучининг амплитудаси (15.20) ва (15.22) формула бўйича куйидагича бўлади:

$$J_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad , \quad (15.23)$$

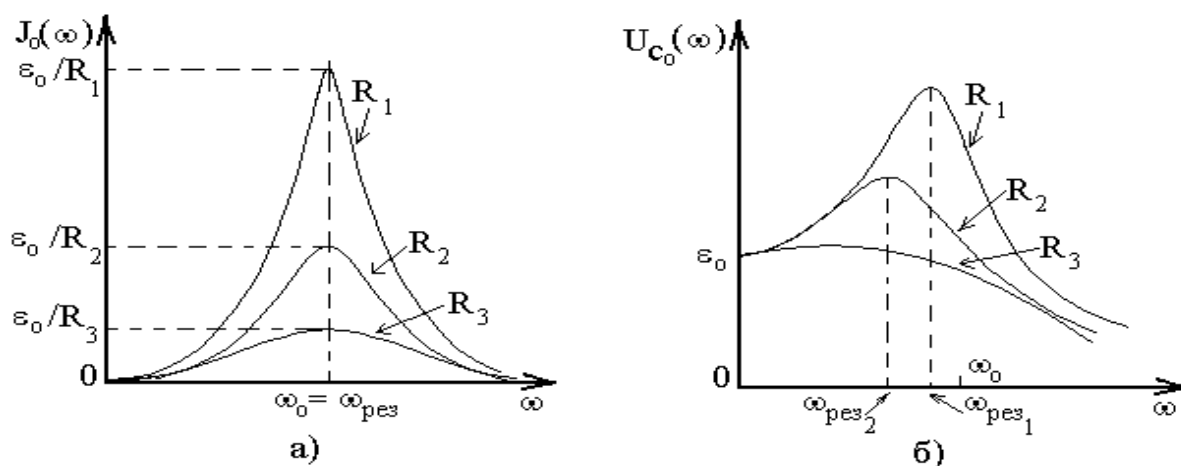
Бу формуладан кўринадикки $\omega \rightarrow 0$ ва $\omega \rightarrow \infty$ бўлганда $I_0(t) \rightarrow 0$,

$L\omega - (1/\omega C) = 0$, $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ бўлганда ток кучи амплитудаси ўзининг максимал қийматига эришади.

$$I_0^{\max} = \varepsilon_0 / R , \quad (15.24)$$

Бу формуладан келиб чиқадики, R ошганда ток кучи камаяди, яъни $I_0(\omega)$ эгри чизиғи пастга жойлашади. Расм 4. а да $I_0(\omega)$ нинг график боғланиши, яъни ток кучининг резонанс эгри чизиғи актив қаршиликнинг 3 та қиймати $R_1 < R_2 < R_3$ учун L ва C ўзгармас бўлган ҳол учун кўрсатилган.

Шуни қайд қиламизки, ток кучининг резонанс частотаси эркин сўнмайдиган частота ω_0 мос келади, резонансдан аниқ кўринадикки, контурнинг актив қаршилиги қанча кичик бўлса:



Расм 106.

Конденсатордаги кучланиш амплитудаси $U_{C_0} = q_0 / C$ () нинг формуласига кўра () да q_0 учун ифодага () қўйсак қуйидагига эга бўламиз:

$$U_{C_0} = \frac{\varepsilon_0}{CL\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (15.25)$$

$U_C(\omega)$ функцияси $U_{C_0}(0) = \varepsilon_0$ ҳамма вақт мусбат, функциянинг экстремумини топиш учун ҳосила олиш керак:

$$dU_C / d\omega = 0.$$

Белгилаб қўямизки, бу функциянинг экстремуми илдиз остида турган ифоданики билан

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = 0 \quad \text{максимум, яъни}$$

бундан $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

Бу частотада $U_{C_0}(\omega)$ функциянинг максимуми тўғри келади, демак, кейинги формула резонанс частотасини аниқлайди:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (15.26)$$

Расм б да резонанс эгри чизиғи $U_{C0}(\omega)$ нинг C ва L бир хил бўлган ва R қиймати ҳар хил ($R_1 < R_2 < R_3$) қиймат учун келтирилган. R камайиши билан эгри чизиқлар юқорига жойлашади, бу формула (15.26)дан ҳам кўриниб турибди. R камайиши билан β ҳам камаяди, демак, ошади. () дан келиб чиқадики, конденсатордаги кучланиш учун резонанс частота камайиб ω_0 дан кичик. Амалий мақсадлар учун ишлатиладиган контурлар учун ($\beta \ll \omega_0$) $2\beta^2$ хади () дан ташлаб юбориш мумкин. Бу ҳолда резонанс ҳамма ўзгарувчан электр катталикларда (q, I, U_R, U_C, U_L) руй беради.

Кучланиш манбаининг частотаси, сўнмайдиган эркин тебраниш частотасига тенг

$$\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = \sqrt{1/LC} \text{ бўлади:}$$

, (15.27)

Аксинча, катта сўнишга эга бўлган контурларда конденсатордаги кучланиш частотаси ω_0 дан фарқ қилади. Манба контур элементлари билан кетма - кет уланганда рўй берган резонанс ҳодисасига кучланиш резонанси дейилади.

4. Асллиқ ва унинг хоссалари.

Контур параметрлари R, L , ва C дан ўлчамсиз катталик ҳосил қилиш мумкин.

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad , \quad (15.28)$$

ва унга контурнинг асллиғи дейилади ва унинг асосий хоссасини характерлайди. Асллиқ учун бир нечта формула ҳосил қилиш мумкин ва улар унинг физик маъносини очиб беради. Бунинг учун () шарт бажарилади деб ҳисоблаймиз, демак, $\omega_{\text{рез}} = \omega_{\text{хус}} = \omega_0$.

Биринчидан, аслик сўнишнинг логарфмик декрементига тескари пропорционал:

$$Q = \pi / \lambda, \quad (15.29)$$

механика, курсидан маълумки,

$$\lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+1)}} = \ln e^{-\beta T} = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega}$$

Бу ерга $\beta = R / 2L$ ни ва $\omega = \omega_0 = \sqrt{1/LC}$ ни қўйсак (15.29) формулага келамиз.

$$Q = \pi / \lambda, \text{ га эга буламиз.}$$

Иккинчидан, у контур энергиясининг нисбий камайишига $\Delta W / W$ тескари пропорционал (эркин тебраниш даври)

$$Q = 2\pi (W / \Delta W), \quad (15.30)$$

Контурдаги энергия $W = L J_0^2 / 2$, билан аниқланади.

Ҳақиқатда, ток кучи максимал бўлган ($I(t) = I_0$), конденсатордаги заряд о га тенг, контурдаги барча энергия ғалтакда тўпланган бўлади ва () формула билан аниқланади. Давр ичида энергиянинг камайиши () га кўра $\Delta W = J_0^2 R T / 2$, ифода билан аниқланади.

Агар $T = 2\pi / \omega$, ва $\omega = \omega_0 = \sqrt{1/LC}$ ни ҳисобга олсак, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\Delta W = J_0^2 R \pi \sqrt{LC},$$

$$\text{Шундай қилиб, } 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q, \quad (15.31)$$

Учинчидан, аслик шуни кўрсатадики, конденсатордаги кучланиш амплитудаси резонанс вақтида $U_{Co}^{(рез)}$ (расм 4 б), манба ЭЮК амплитудасида қанча катта эканлигини кўрсатди:

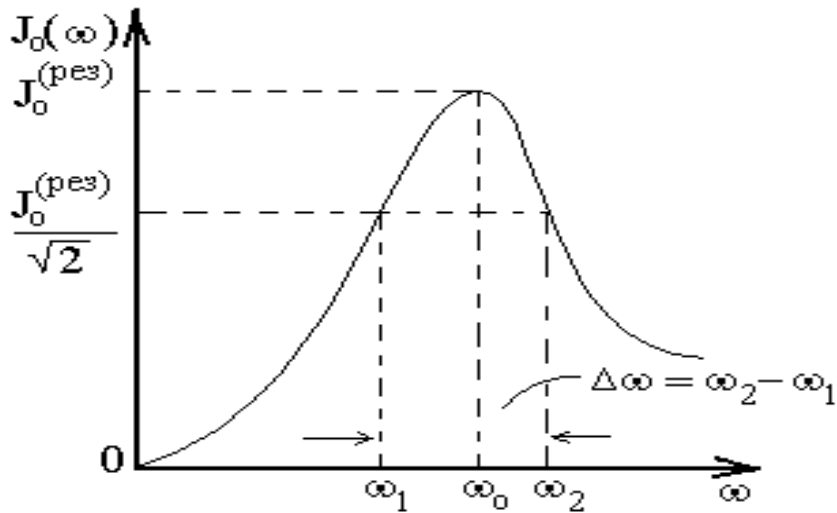
$$Q = U_{Co}^{(рез)} / \varepsilon_0, \quad (15.32)$$

Ҳақиқатда () га асосан, $U_{Co} = (1 / \omega C) J_0$. Резонанс вақтида

$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \sqrt{1/LC} \text{ ва } J_0^{(\text{рез})} = \varepsilon_0 / R.$$

$$\text{Бундан, } U_{C_0}^{(\text{рез})} = \frac{\varepsilon_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 Q, \text{ бу эса () ни беради.}$$

Тўртинчидан, у резонанс эгри чизиғининг кенглигига тескари пропорционал:



Расм 107.

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega, \quad (15.33)$$

Резонанс эгри чизиғи кенглиги ёки ўтказиш полосаси деб $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ частота интер-валига айтилади, яъни амплитуда резонанс амплитудасига нисбати $\sqrt{2}$ марта кичик бўлади. (расм). $\Delta\omega / \omega_0$ нисбатга резонанс эгри чизиғининг нисбий кенглиги деб айтилади.

Демак, катта асликка эга булган контурларда эркин тебраниш секин сунади.