

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА  
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ**

**Х. Т. ТУРАНОВ**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА  
В СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ  
ГРУЗОВЫХ ПЕРЕВОЗОК**



**НОВОСИБИРСК  
«НАУКА»  
2012**

УДК 531: 656.2

ББК 39.2

Т 86

**Туранов Х.Т.** Теоретическая механика в специальных задачах грузовых перевозок: учебн. пособие / Х.Т. Туранов. – Новосибирск: Наука, 2012. – 448 с.

**ISBN 978 – 5 – 02 – 018997 –3.**

Пособие состоит из двух основных разделов: «Кинематика» и «Кинетика». Изложены те разделы механики, которые имеют непосредственное отношение к специальным задачам грузовых перевозок (к обоснованию технологии размещения и крепления грузов в вагонах, формированию состава на сортировочной горке и др.). При этом важнейшие положения, законы механики, аксиомы статики, теоремы и принципы теоретической механики сопровождаются конкретными примерами их применения и решения большого количества специальных задач грузовых перевозок с привлечением системы MathCAD.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов вузов железнодорожного транспорта специальности 190701 – «Организация перевозок и управление на транспорте (железнодорожный транспорт)». Она может быть использована студентами механических и немеханических специальностей вузов и окажется полезной для аспирантов и преподавателей вузов железнодорожного транспорта.

Ил. 215. Библиогр.: 82 назв.

#### Р е ц е н з е н т ы

доктор физико-математических наук, профессор *С. А. Гапонов*

доктор технических наук, профессор *И. А. Добычин*

доктор технических наук, профессор *В. Е. Павлов*

Утверждено к печати

Уральским государственным университетом путей сообщения

**Без объявления**

**ISBN 978 – 5 – 02 – 018997 –3**

© Уральский государственный университет путей сообщения, 2011

© Х. Т. Туранов, 2011

Federal railway transportation agency  
Urals state university of railway transport (usurt)

**Khabibulla TURANOV**

**THEORETICAL MECHANICS  
IN SPECIAL TASKS  
ON CARGO TRASPORTATION**



**NOVOSIVIRSK  
«NAUKA»  
2012**

UTK 656.212

BBK 39.2

T86

**T u r a n o v Kh.** Theoretical Mechanics in Special Tasks on Cargo Transportation: Study Book / Kh.T Turanov. – Novosibirsk: Science, 2012. – 448 pp.

**ISBN** 978 – 5 – 02 – 018997 –3.

The study book consists of two major sections: "Kinematics" and "Kinetics". The book deals with those sections of mechanics which are directly related to special tasks of cargo transportation (to justification of technology of cargo location and fastening in wagons, train formation on a hump and so on). The most important statements, laws of mechanics, statics axioms, theorems and principles of theoretical mechanics are supported by concrete examples of their application and solution of a great number of special cargo transportation tasks involving MATH CAD system.

The study book is a teaching aid for Railway University students of specialty 190701 – "Organization of Transportation and Operation on transport (Railway Transport). It may be used by the students of mechanical and non-mechanical specialties of higher schools and can be quite useful for post graduate students and teachers of railway universities.

#### Reviewers

Doctor of physico-mathematical sciences, professor Gaponov S.A.

Doctor of technical sciences, professor Dobychin I.A.

Doctor of technical sciences, professor Pavlov V.E.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	11
ВВЕДЕНИЕ.....	17
<b>Раздел I. КИНЕМАТИКА .....</b>	<b>21</b>
<b>1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.....</b>	<b>21</b>
1.1. Основные понятия и определения кинематики точки.....	21
1.2. Система отсчёта. Относительность понятий движение и покой...	24
1.3. Основные задачи кинематики .....	26
1.4. Траектория .....	27
1.5. Методы решения задач кинематики.....	28
1.6. Способы задания движения точки.....	28
1.7. Скорость точки .....	33
1.8. Ускорение точки.....	36
1.9. Сложное движение точки.....	57
<b>Раздел II. КИНЕТИКА.....</b>	<b>73</b>
<b>2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ (ЭЛЕМЕНТАРНАЯ) СТАТИКА.....</b>	<b>73</b>
2.1. Введение в кинетику.....	73
2.1.1. Сила и масса.....	74
2.1.2. Понятие о материальной точке и массе тела.....	75
2.1.3. Основные законы (или аксиомы) механики.....	75
2.1.4. Понятие о механической системе точек и связях.....	88
2.1.5. Виды сил.....	108
2.1.6. Реакции связей.....	111
2.2. Разделение кинетики на статику и динамику.....	117
2.3. Пространственная система сил.....	120
2.3.1. Система сходящихся сил.....	120
2.3.2. Произвольная система сходящихся сил.....	122
2.4. Сила трения.....	140
2.4.1. Трение скольжения.....	140
2.4.2. Трение качения.....	155
2.5. Решение задач статики при пространственной системы сил.....	164
2.6. Центр тяжести штучных твёрдых тел.....	173
2.7. Статически определённые и статически неопределённые задачи..	179
2.8. Определение внутренних сил (усилий).....	184
2.9. Распределённые силы.....	187
2.10. опрокидывание или потеря устойчивости твёрдых тел.....	196
2.11. Равновесие систем твёрдых тел.....	202
2.12. Решение задач статики при плоской системе сил.....	209

<b>3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА</b> .....	222
3.1. Основные виды сил.....	223
3.2. Работа силы.....	231
3.3. Статика системы материальных точек.....	248
3.4. Принцип Д'Аламбера. Общее уравнение системы.....	269
3.5. Уравнения равновесия в обобщённых координатах.....	270
<b>4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ТОЧКИ</b> .....	274
4.1. Дифференциальные уравнения движения и решение задач динамики точки.....	274
4.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.....	276
4.3. Прямолинейное движение материальной точки.....	280
4.4. Общие теоремы динамики точки.....	281
4.4.1. Теоремы об изменении количества точки.....	283
4.4.2. Теоремы об изменении кинетической энергии точки.....	295
4.4.3. Примеры решения задач на применение теоремы об изме- нении кинетической энергии точки.....	301
4.5. Общий принцип механики (принцип Д'Аламбера).....	305
4.6. Относительное движение материальной точки.....	331
4.6.1. Дифференциальное уравнение относительного движения точки.....	331
4.6.2. Понятие о силе инерции Кориолиса.....	335
4.6.3. Отличие силы инерции в относительном движении точки от силы инерции в принципе Д'Аламбера.....	338
4.6.4. Теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении.....	342
4.6.5. Основные виды сил, воспринимаемых связями.....	343
4.6.6. Примеры решения задач на относительное движение материальной точки.....	353
<b>5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ</b> .....	380
5.1. Принцип Д'Аламбера для системы.....	380
5.2. Общее уравнение динамики системы.....	383
5.2.1. Классификация сил, действующих на систему.....	387
5.2.2. Дифференциальные уравнения движения системы в общем виде.....	387
5.2.3. Теорема о движении центра масс системы.....	389
5.2.4. Теорема об изменении количества движения системы.....	394
5.2.5. Примеры решения задач на применение теоремы о количе- стве движения системы.....	398
5.2.6. Теорема об изменении кинетической энергии системы.....	411

5.3. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщённых координатах.....	428
5.3.1. О возможных перемещениях системы в случае нестационарных связей.....	428
5.3.2. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщённых координатах.....	430
5.3.3. Уравнения Лагранжа II-го рода.....	432
5.3.4. Решения задач на применение уравнения Лагранжа II-го рода.....	435
<b>Библиографический список.....</b>	<b>448</b>

# CONTENTS<sup>1</sup>

<b>PREFACE</b> .....	11
<b>INTRODUCTION</b> .....	17
<b>Section I. KINEMATICS</b> .....	21
<b>1. KINEMATICS OF A POINT</b> .....	21
1.1. Basic notions and definitions of kinematics of a point.....	21
1.2. System of reference. Relativity of concepts of motion and rest.....	24
1.3. Basic tasks of kinematics.....	26
1.4. Trajectory.....	27
1.5. Methods of solution of kinematics tasks.....	28
1.6. Ways of setting a point in motion.....	28
1.7. Point speed.....	33
1.8. Point acceleration.....	36
1.9. Complicated motion of a point.....	57
<b>Section II. KINETICS</b> .....	73
<b>2. GEOMETRICAL (ELEMENTARY) STATICS</b> .....	73
2.1. Introduction to kinetics.....	73
2.1.1. Force and mass.....	74
2.1.2. Material point and body mass notion.....	75
2.1.3. Basic laws (or axioms) of mechanics.....	75
2.1.4. Notion of mechanical point system and constraints.....	88
2.1.5. Types of forces.....	108
2.1.6. Reactions of constraints.....	111
2.2. Separation of kinetics into statics and dynamics.....	117
2.3. Spatial system of forces.....	120
2.3.1. Concurrent system of forces.....	120
2.3.2. Arbitrary concurrent system of forces.....	122
2.4. Friction force.....	140
2.4.1. Sliding friction.....	140
2.4.2. Rolling friction.....	155
2.5. Statics task solution in spatial system of forces.....	164
2.6. Center of gravity of solid-state unit loads.....	173
2.7. Statically definite and statically indefinite tasks.....	179
2.8. Determination of internal forces (powers).....	184
2.9. Forces distribution.....	187
2.10. Turnover or loss of stability of rigid bodies.....	196
2.11. Equilibrium of rigid bodies systems.....	202
2.12. Statics problems solution in plain system of forces.....	209

---

<sup>1</sup> The translation is carried out by the lecturer of USURT “Foreign languages” department.

<b>3. ANALYTICAL STATICS</b> .....	222
3.1. Basic types of forces.....	223
3.2. Work of force.....	231
3.3. Statics of system of material points.....	248
3.4. D'Alembert Principle. General equation of the system.....	269
3.5. Equilibrium equations in generalized coordinates.....	270
<b>4. ANALYTICAL DYNAMICS OF A POINT</b> .....	274
4.1. Differential equations of motion and tasks solution of dynamics of a point.....	274
4.2. Differential equations of a material point motion.....	276
4.3. Rectilinear motion of a material point.....	280
4.4. General theorems of dynamics of a point.....	281
4.4.1. Theorems of alteration in quantity of a point.....	283
4.4.2. Theorems of alteration in kinetic energy of a point.....	295
4.4.3. Examples of solution of the problems on application of a theo- rem of alteration in kinetic energy of a point.....	301
4.5. D'Alembert Principle.....	305
4.6. Relative motion of a material point.....	331
4.6.1. Differential equation of relative motion of a point.....	331
4.6.2. Notion of a compound centrifugal force.....	335
4.6.3. Distinction of inertia force in relative motion of a point from in- ertia force in D'Alembert Principle.....	338
4.6.4. Theorem on alteration in kinetic energy of a point in relative motion.....	342
4.6.5. Basic types of forces taken by constraints.....	343
4.6.6. Examples of problems solution on relative motion of a material point.....	353
<b>5. ANALYTICAL DYNAMICS OF A SYSTEM</b> .....	380
5.1. D'Alembert Principle for a system.....	380
5.2. General equation of a system dynamics... ..	383
5.2.1. Classification of the forces acting on the system.....	387
5.2.2. Differential equations of a system motion in BEV.....	
5.2.3. Theorem on a system masses centre motion.....	387
5.2.4. Theorem on alteration in quantity of system motion.....	389
5.2.5. Examples of solution of problems on application of the theo- rem on quantity of the system motion.....	394
5.2.6. Theorem on alteration in kinetic energy of the system.....	411
5.3. Differential Equations of the system motion in generalized coordi- nates.....	428
5.3.1. About possible system movements in case of unstationary con- straints.....	428

5.3.2. Differential Equations of a system motion in generalized Coordinates.....	430
5.3.3. Lagrange equation, type II.....	432
5.3.4. Solutions of the problems on application of Lagrange equation 2-nd type.....	435
<b>Bibliographical list</b> .....	448

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Автор данной книги ставил перед собой задачу познакомить студентов – будущих специалистов по креплению грузов («грузовиков») – с идеями и методами теоретической механики, показать её практическую направленность. По мнению автора, наиболее сложная задача – научить студентов составлению расчётных и построению динамических моделей в задачах грузовых перевозок, достаточно корректно и точно описывающих механические явления, и научить их методике решения конкретных задач грузовых перевозок. Поставленная цель может быть достигнута углубленным изучением тех разделов механики, с использованием которых в настоящем пособии решены значительное количество специальных задач, занимающих почти половину объёма книги.

В пособии хорошо известный материал традиционного курса теоретической механики расположен в последовательности, принятой в фундаментальных изданиях<sup>2</sup>, где доказаны целесообразность и логическая оправданность деления классического курса механики на два основных раздела: «Кинематику» и «Кинетику».

В книге учтено, что механика является частью физики, а не прикладной математики. В механике применяются общие законы механического движения, а математические методы исследования играют существенную роль при изучении этого движения.

В связи с этим специальные задачи грузовых перевозок и задачи сортировочных горок решены с учётом взаимосвязанных понятий «механика – математика – вычислительная среда – анализ результатов» в следующей последовательности:

---

<sup>2</sup> *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Просвещение, 1965. – 538 с.

*Бухгольц Н.Н.* Основы курса теоретической механики. – М.: Наука, 1967. – Ч. 1. – 467 с.

*Голубева О.В.* Теоретическая механика. – М.: Высш. шк., 1968. – 487 с.

*Добычин И.А.* Кинематика: учеб. пособие для студентов высшего техн. профессионального образования. – Екатеринбург; 2003. – 161 с.

*Добычин И.А.* Геометрическая статика: учеб. пособие для студентов высшего техн. профессионального образования. – Екатеринбург; 2004. – 183 с.

*Добычин И.А.* Аналитическая статика: учеб. пособие для студентов высшего техн. профессионального образования. – Екатеринбург; 2004. – 107 с.

*Добычин И.А.* Динамика механической системы: учеб. пособие для студентов высшего техн. профессионального образования. – Екатеринбург; 2005. – 154 с.

*Добычин И.А.* Аналитическая динамика и вариационные принципы механики: учеб. пособие для студентов высшего техн. профессионального образования. – Екатеринбург; 2005. – 125 с.

– на основе изучения физической модели механической системы (объекта) с использованием важнейших принципов классической механики (например, принцип (аксиома<sup>3</sup>) освобожденности от связей геометрической статики) формировать расчетную модель;

– опираясь на известные методы (законы<sup>4</sup> Ньютона, принцип Д'Аламбера, основное уравнение динамики для относительно движения, теоремы<sup>5</sup> об изменении количества движения материальной точки, теорема об изменении кинетической энергии системы, метод составления уравнений движений по Лагранжу и т. д.), вывести уравнения движения тела;

– математически сформулировать (поставить) задачу;

– дать постановку начальных условий задачи там, где это необходимо;

– выполнить математическое или численное решение задачи;

– произвести анализ результатов математического решения задачи;

– сформулировать обобщающие выводы по результатам математического и/или численного решения задачи.

В разделе геометрической статики изложены основные законы (аксиомы) механики, понятия о механической системе точек и связях, определения и аксиомы статики, пространственная система сил, сила трения, устойчивость твердых тел от опрокидывания и другие важные положения механики, без знания которых не решается ни одна задача грузовых перевозок в частности и техники в целом. При этом там, где возможно, применение каждого важнейшего положения механики иллюстрировано фотографией и рисунками (т. е. реальными моделями объекта), что придает книге особую наглядность и доходчивость. Особое внимание уделено формированию расчетной модели объекта из реальной, поскольку расчетная модель – это упрощенная идеализированная модель, которая отражает наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение при воздействии внешних сил. Только правильно составленная расчетная модель способствует корректному построению математической модели (уравнения равновесия систем сил) объекта.

В разделе аналитической статики рассмотрены основные виды сил, воздействующих на средства креплений грузов при перевозке, определение работы этих сил, статика системы материальных точек, принцип возможных перемещений, общее уравнение системы и уравнения равновесия в обобщенных координатах с последующим приложением к задачам грузовых перевозок.

---

<sup>3</sup> *Аксиома* (греч. *axioma*), положение, принимаемое без логического доказательства в силу непосредственной убедительности; истинное исходное положение теории.

<sup>4</sup> *Закон*, необходимое существенное, устойчивое, повторяющееся отношение между явлениями в природе и обществе. Законы в механике относятся к специфическим или частным (например, закон сложения скоростей при плоско-параллельном движении твердого тела) и к общим для большинства групп явлений (например, закон сохранения и превращения энергии), а не к всеобщим или универсальным законам (например, законы диалектики).

<sup>5</sup> *Теорема* (греч. *theorema*, рассматриваю (в математике)), предложение (утверждение), устанавливаемое при помощи доказательства (противоположность аксиоме). Теорема обычно состоит из условия и заключения. Например, в теореме: если в треугольнике один из углов прямой, то два других – острые, после слова «если» стоит условие, а после «то» – заключение.

В разделе аналитической динамики точки приведены дифференциальные уравнения движения материальной точки, общие теоремы динамики точки, принцип Д'Аламбера для инерциальной системы отсчёта и относительное движение материальной точки с изложениями результатов решения задач на основе указанных положений. В разделе аналитической динамики системы изложены принцип Д'Аламбера для системы, общее уравнение динамики системы, теоремы о движении центра масс, теоремы об изменении кинетической энергии системы, дифференциальные уравнения движения системы в обобщённых координатах и уравнения Лагранжа II рода с последующим решением конкретных задач грузовых перевозок. При этом особое внимание уделено составлению математической модели (математическая формулировка задачи, условия задачи и принятые допущения, начальные условия задачи и решение) объекта на основе расчётной.

Таким образом, каждый раздел пособия насыщен конкретными примерами решения большого количества математически сформулированных специальных задач грузовых перевозок с привлечением вычислительной среды (большинство из которых составлены и решены автором), которые отличают данную книгу от аналогичных книг по теоретической механике.

Рассмотренные примеры и решенные специальные задачи окажутся весьма полезными не только для студентов вузов железнодорожного транспорта, но и для преподавателей, аспирантов и для специалистов-практиков. Приведённые в пособии задачи, которые не выходят за рамки программы курса теоретической механики, не могут дать полного представления о разнообразии специальных задач креплений грузов.

Ссылки на учебную литературу по теоретической механике, с использованием которых изложены основополагающие положения механики, указаны в соответствующих местах текста (в сносках).

При описании исторических данных людей науки использованы важнейшие сведения литературных источников<sup>6</sup>.

Автор выражает признательность рецензентам С. А. Гапонову (ИТПМ СО РАН), И. А. Добычину (НКП «ТОРМО») и В. Е. Павлову (ПГУПС) за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, позволившие улучшить содержание пособия.

---

<sup>6</sup> *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. – М.: Молодая гвардия, 1966. – 267 с.

*Боголюбов А.Н.* Математики механики: библиографический справочник. – Киев: Наук. думка, 1983. – 638 с.

*Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. – М.: Просвещение, 1983. – 78 с.

*Бородин А.И., Бугай А.С.* Выдающиеся математики: библиографический словарь-справочник. – Киев.: Рад. шк., 1987. – 654 с., – С.599.

Механика материалов и конструкций: справочные материалы: учеб. пособие / Ю.А. Окопный, В.П. Радин, В.Е. Хроматов и др.; под ред. В.П. Чиркова. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 124 с.

## P R E F A C E<sup>7</sup>

The author of this study-book defined its goal as introduction to the students – the future cargo fastening specialists (the so called “cargo-transporters”) the idea and methods of theoretical mechanics and demonstrating its practical orientation. According to the author’s opinion, the most complicated task here is to teach students to construct computing and mathematic models in cargo handling problems, the models which correctly and precisely describe mechanical phenomena and also to teach them the methods of solution of particular problems of cargo transportation. The set goal can be achieved by means of profound study of those sections of mechanics which were used in solving of a great number of special tasks covering nearly half of the study book’s volume.

The study book arranges the known material of the traditional course of theoretical mechanics in succession typical for fundamental editions<sup>8</sup> which accept the reasonability and logical justification of the division of the classical course of mechanics into two major sections “Kinematics” and “Kinetics”.

A special emphasis is made in the study book on the fact that mechanics is a part of physics but not of applied mathematics. Mechanics makes use of general laws of mechanical motion whereas mathematical research methods play a significant role in investigating this motion.

---

<sup>7</sup> Перевод осуществлен старшим преподавателем кафедры «Иностранные языки» УрГУПС

<sup>8</sup> *Kosmodjemjansky A.A.* The Course of Theoretical Mechanics. Part I. M: Education, 1965. – 538 pp.

*Buhkgolts N.N.* Fundamental Course of Teoretical Mechanics. – M: Science, 1967. – Part I. – 467 pp.

*Golubjeva O.V.* Teoretical Mechanics. – M: Higher School, 1968. – 487 pp.

*Dobychin I.A.* Kinematics: Teaching aid for higher technical education students. – Yekateringburg, 2003. – 161 pp.

*Dobychin I.A.* Geometrical statics: Teaching aid for higher technical education students. – Yekateringburg, 2004. – 183 pp.

*Dobychin I.A.* Analytical statics: Teaching aid for higher technical education students. – Yekateringburg, 2004. – 107 pp.

*Dynamics of Mechanical System:* Teaching aid for higher technical education students. – Yekateringburg, 2005. – 154 pp.

*Dobychin I.A.* Analytical Dynamics and Variational Principles of Mechanics: Teaching aid for higher technical education students. – Yekateringburg, 2005. – 125 pp.

Due to this special problems of cargo transportation and problems of humps are solved with allowing for interconnected notions “mechanics – mathematics – computing environment – result analysis” in the following succession:

- to form a computing model on the basis of studying a physical model of mechanical system (object) using the most important principles of classical mechanics (for example, the principle of release from geometrical statics constraints);

- to derive the equation of body motion basing on the known methods (Newton’s laws, D’Alembert principle, fundamental dynamics equation for relative motion, theorems of change in momentum of material point, theorem of change of system kinetic energy, method of motion equation set up according to Langrange and so on);

- formulate (set up) mathematically the task;

- state the task initial conditions when it is necessary

- perform mathematical or numerical solution of the task;

- carry out the analysis of the results of mathematical solution of the task;

- formulate summarizing conclusions according to the results of mathematical and/or numerical solution of the task.

The section of geometrical statics gives an account of fundamental laws (axioms) of mechanics, notions of mechanical point and constrain system, statics definitions and axioms, spatial force system, friction force, stability of solids against tripping and other important statements of mechanics without knowledge of which no task of cargo handling in particular and no technical task in general can be solved. Hereby, the application of every important statement of mechanics is when it is possible illustrated by a photo and drawings (that is, by real models of objects), which lends the book still greater illustrativeness and clarity. A special emphasis is made on forming a computing model of the object out of a real one as a computing model is a simplified idealized model that reflects the most significant features of the real object determining its behavior under the impact of external forces. It is a properly formed computing model that ensures a correct construction of a mathematical model (the equation of force system equilibrium) of the object.

The section of analytical statics deals with major kinds of forces affecting cargo fastening means during transportation, with evaluation of the work of these forces, with statics of material point system, with the principle of potential relocations, with general equation of the system and equilibrium equations in generalized coordinates with their subsequent application to the problems of cargo transportation.

The section of analytical point dynamics contains differential equations of the material point motion, general theorems of point dynamics, D’Alembert principle for inertial reference frame and relative motion of material point with an account of the results of problem solutions on the basis of the given statements.

The section of analytical dynamics deals with D’Alembert principle for the system, general equation of system dynamics, theorem on center-of-mass motion, theorems of system kinetic energy change, differential equations of system motion in generalized coordinates and quadratic Langrange equation with subsequent solution of particular problems of cargo transportation. Hereby, special attention is paid to

forming a mathematical model (problem specification, mathematical formulation of the task, man-made assumptions, problem initial conditions and solution) of the object on the basis of a computing one.

Thus, each section of the study book is full of concrete examples of solution of a great number of mathematically formulated specific cargo transportation tasks involving computing medium (the greater part of which are set up and solved by the author), the fact that distinguishes this book from similar books on theoretical mechanics.

The discussed examples and solved specific tasks will prove quite useful not only for Railway University students but also for teachers, post-graduate students and practical specialists. The tasks given in the study book which don't go beyond the scope of the program of the theoretical mechanics course cannot reveal full diversity of special problems on cargo fastening.

References on academic books on theoretical mechanics with the help of which fundamental statements of mechanics were presented are given in footnotes in corresponding places of the text.

In describing historical data there has been used important information of literary sources<sup>9</sup>.

The author expresses his gratitude to his reviewers Gaponov S.A. (Institute of Theoretical and Applied Mechanics Siberian Department of RAS), Dobychin I.A. (Scientific Production Association "TORMO") and Pavlov V.E. (PbSURT) for thorough reading of the manuscript and valuable commentary which made it possible to improve the content of the study book.

---

<sup>9</sup> *Einstein A., Infeld L.* Evolution of Physics. – M: Young Guard (Molodaja Gvardia), 1966. – 267 pp.

*Bogolubov A.N.* Mathematicians of Mechanics: Bibliographical reference book. – Kiev: Science Dumka, 1983. – 638 pp.

*Jakovlev A.Ja., Leonard Ailer.* – M; Education, 1983. – 78 pp.

*Borodin A.I., Bugai A.S.* Outstanding Mathematicians: bibliographical dictionary-reference book: - Kiev: Higher School, 1987. – 654 pp. – p.599.

*Okopny Ju.A., Radin V.P., Khromatov V.E.* at alias. Mechanics of Materials and Constructions: teaching aid; under the editorship of Chirkov V.P. – M.: Publishing House MEI, 2005. – 124 pp.

## Раздел I

### КИНЕМАТИКА

В кинематике, как в первой части механики, движение тел изучают с геометрической точки зрения, рассматривая изменение их положения относительно определённой системы отсчёта и принимая во внимание время, в течение которого это изменение происходит.

#### 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

##### 1.1. Основные понятия и определения кинематики точки<sup>10</sup>

Материальные свойства тел будут проявляться при кинематическом изучении движения только в качественных признаках: *геометрической форме* и *непроницаемости*. *Непроницаемость* – такое свойство материальных тел, в силу которого в одном и том же месте (в некотором объёме пространства), заполненном материей какого-либо тела, не могут находиться одновременно другие материальные тела. Это свойство присуще и самым малым элементам тела – материальным точкам, так что и две материальные точки не могут одновременно находиться в одном и том же месте.

Таким образом, в кинематике изучают движение материальных точек и тел как геометрических объектов.

От *геометрии* кинематика *отличается* тем, что при рассмотрении перемещения тел (или соответствующих геометрических образов) в пространстве *при-*

---

<sup>10</sup> *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики, Ч. 1. – М.: Просвещение, 1965. – 538 с.

*Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1967. – 467 с.

*Голубева О.В.* Теоретическая механика. – М.: Высш. шк., 1968. – 487 с.

*Добычин И.А.* Кинематика: учеб. пособие. – Екатеринбург; 2003. – 162 с.

нимается во внимание ещё и время перемещения. Поэтому, начиная с Лагранжа (1772), кинематику называют «геометрией четырёх измерений», понимая под четвёртым измерением (координатой) время  $t$  (англ. time). Последовательным значениям времени  $t$  соответствуют вполне определённые положения тела (или точки) по отношению к другим телам в трёхмерном евклидовом пространстве. Следовательно, в кинематике изучают пространственные соотношения между телами и изменения этих соотношений, происходящие с течением времени.

В механике, как известно, различают механику Ньютона и теорию относительности. В соответствии с этим представление кинематики как «геометрии четырёх измерений» оказалось весьма реальным в теории относительности, где при изучении движения учитывают взаимосвязь пространства и времени друг с другом и с движущейся материей. В механике Ньютона метрические свойства пространства считают не зависящими от движущейся в нём материи, и оно рассматривается как трёхмерное евклидово пространство, *однородное и изотропное* (т. е. *имеющее одинаковое свойство*) по всем направлениям. Время  $t$  в механике Ньютона также считают не связанным с движущейся материей, т. е. *абсолютным*, протекающим одинаково во всех точках пространства, на любых как угодно движущихся друг относительно друга в пространстве телах.

Трёхмерное евклидово пространство и абсолютное время  $t$  отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближённо, но это приближение даёт вполне достаточную для практики точность при изучении движений, рассматриваемых в механике Ньютона, т. е. движений со скоростями  $v$ , малыми по сравнению со скоростью света  $c = 300\,000\text{ км/с} = 3 \cdot 10^8\text{ м/с}$  ( $v \ll c$ , где  $c$  – первая буква латинского слова «солярис» – быстрота).

Движение тел (точки) в пространстве совершается с течением времени. Поэтому положение тела (геометрического образа) в пространстве определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ , которые изменяются при переходе тела (точки) в другое положение.

За единицу длины  $L$  при измерении расстояний в пространстве в России принят 1 метр (м).

В механике принято отсчёт времени  $t$  вести от некоторого начального момента ( $t = 0$ ), или за начало отсчёта брать точку  $O$ , которой каждый раз оговаривают. На оси времени начальному моменту  $t$  соответствует начальная точка  $O$  (рис. 1.1).

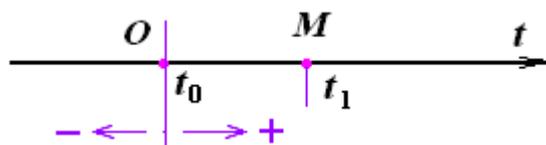


Рис. 1.1. Ось времени.

Если в геометрии отрезок прямой определяет расстояние между двумя точками (например,  $OM$ ), то здесь отрезок на оси времени  $t$  изображает «расстояние» между двумя моментами времени  $t_1$ , т. е. *промежуток времени*. Следовательно, всякий данный момент времени  $t$  определяют количеством секунд, прошедших от начального момента  $t_0$  до данного  $t_1$ . Разность между последовательными моментами времени  $t_1 - t_0$  называют *промежутком времени* ( $\Delta t = t_1 - t_0$ ). Далее, как и в геометрии, положение всякой точки  $M$  на оси времени  $t$  определяют её расстоянием  $OM$  от начальной точки  $O$ . Иначе, любой момент времени  $t$  определяют промежутком времени  $t_1$ , протекавшим до него от начального момента, т. е. величину  $t_1 = OM$  можно рассматривать как «координату» момента времени.

Известно, что в геометрии координаты точек геометрической прямой имеют *различные знаки* в противоположных направлениях от начала координат. Здесь также «координатам» моментов времени  $t$  можно придать тот или иной знак в зависимости от того, предшествуют ли соответствующие моменты началу отсчёта времени или следуют за ним. Отрицательные времена ( $-t$ ) соответствуют представлению «раньше», а положительные ( $+t$ ) – представлению «позже» начального момента (см. рис. 1.1).

*Время* считается *скалярной* величиной, которая изменяется непрерывно.

*Время* в механике считается *универсальным*, протекающим одинаково во всех системах отсчёта. За единицу времени  $t$  принимается 1 *секунда* (с).

Всякое тело, движение которого изучают в механике, мысленно можно считать состоящим из очень большого количества материальных частиц ничтожно малых размеров, характер связи между которыми зависит от свойств (изотропный или анизотропный) данного тела. Эти частицы называют *материальными точками*. Любое тело, таким образом, представляет собой *систему* (совокупность) *материальных точек*.

В *кинематике*, где движение изучают с геометрической стороны, массу материальной точки не учитывают и *материальную точку* рассматривают просто как *точку геометрическую*.

В теоретической механике *неизменяемой системой* называют систему материальных точек, в которой расстояние между любыми точками постоянно. При непрерывном распределении масс такая система даёт идеальный образ твёрдых тел и называется *абсолютно твёрдым телом*, хотя в природе таких тел не существует.

В силу особенности прикладных задач грузовых перевозок, *будем изучать только движение материальных точек*, т. е. *кинематику точки*, как *наиболее простой задачи механики*.

Вовсе опустим изучение кинематики системы материальных точек или твёрдого тела, поскольку в задачах грузовых перевозок груз (твёрдое тело) как отдельный объект является несвободным телом. Если и произойдёт перемещение груза (одного тела, а не систем тел) по какой-то траектории, то только в

плоскости пола вагона, либо вместе с наложенными связями (ограничениями в виде средств креплений), либо после их разрушения, создавая потенциально опасную ситуацию, угрожающую безопасности движения.

*Иначе говоря*, груз как абсолютно твёрдое тело (т. е. как механическая система, у которой взаимные расстояния между точками постоянны)<sup>11</sup> может совершать только *поступательное перемещение*. При этом считают, что *перемещения* всех точек груза *геометрически равны*. Допускают, что груз как твёрдое несвободное (закреплённое) тело практически не участвует *во вращательном движении* вокруг какой-либо оси в обычном понимании этого явления.

Особо отметим, что аналитические и геометрические методы, рассмотренные при отыскании основных кинематических закономерностей движения материальной точки, будут весьма полезны при изучении кинематики груза как твёрдого тела в случае, если в пути следования он потерял наложенные на него связи (ограничения в виде средств креплений) (см. пп. 2.1.2). Здесь вполне возможно, что произойдёт либо поступательное, либо угловое перемещение груза относительно первоначального положения. *Следовательно*, конечное положение груза получается из начального путём вращения вокруг собственной оси, либо относительно пола вагона, либо вокруг какой-либо (боковой или торцевой) грани. Угловое перемещение (*поворот*) груза относительно горизонтальной плоскости (т. е. плоскости пола вагона) может произойти лишь тогда, когда он полностью потерял наложенные на него дополнительные связи в виде гибких упругих элементов и упорных средств креплений, сохраняя при этом основную связь в виде пола вагона. Угловое перемещение (*вращение*) вокруг какой-либо (боковой или торцевой) грани (*вокруг этой прямой*) груза может произойти лишь тогда, когда он потерял наложенные на него связи в виде пола вагона и гибких упругих элементов креплений с сохранением упорных средств. В этом случае решают задачу опрокидывания твёрдого тела (т. е. устойчивость груза), используя понятие момента силы вокруг оси (см. пп. 2.3.2).

## 1.2. Система отсчёта. Относительность понятий движение и покой

Положение тела (или *геометрического образа*) в пространстве может быть определено только относительно произвольно выбранного другого *неизменяемого тела*, называемого *телом* или *системой отсчёта*.

В природе не существует неподвижных тел (или геометрических образов) и, следовательно, не может быть абсолютно неподвижных систем отсчёта. Обычно условно неподвижной системой отсчёта считают систему координатных осей, неизменно связанную с Землёй.

Для определения положения рассматриваемого объекта (например, вагона с жёстко закреплённым на нём грузом *B*) с телом отсчёта (например, станцией отправления *A*) неподвижно связывают какую-нибудь (*декартову* или иную)

---

<sup>11</sup> Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с..

систему координат (*систему ориентировки*)  $Oxyz$  (рис. 1.2). В этом случае система координат  $Oxyz$  для вагона с грузом  $B$  является *основной*.

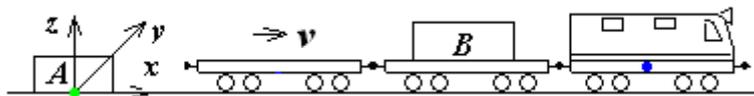


Рис. 1.2. Система отсчёта для вагона с грузом, связанная с Землей.

Для определения положения другого рассматриваемого объекта (например, груза) с другим телом отсчёта (например, вагоном) неподвижно связывают какую-нибудь (*декартову*) другую систему координат (*систему ориентировки*)  $O_1x_1y_1z_1$  (рис. 1.3). В данном случае система координат  $O_1x_1y_1z_1$  для груза является *основной*.

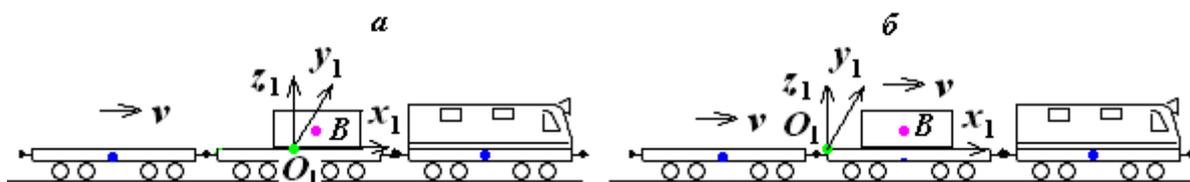


Рис. 1.3. Система координатных осей, связанных с подвижным телом.

Систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  можно связать с точкой пересечения продольной и поперечной оси симметрии вагона (см. рис. 1.3, а) или же с точкой пересечения продольной оси симметрии вагона с торцевой поверхностью борта (см. рис. 1.3, б).

Если для определения положения другого рассматриваемого объекта (например, груза) с другим телом отсчёта (например, станция отправления) неподвижно связывают *декартову* систему координат (*систему ориентировки*)  $Oxyz$ . В таком случае система координат  $Oxyz$  для груза как подвижного тела является *основной*.

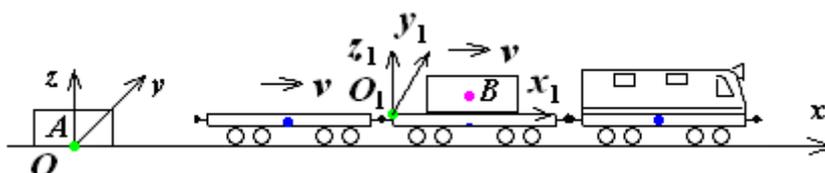


Рис. 1.4. Система отсчёта для подвижного тела, связанная с Землей.

Таким образом, в каждом конкретном случае движение тела (или геометрического образа) следует рассматривать по отношению к определённой системе отсчёта, которая называется *основной* и должна быть точно указана.

*Выбор системы отсчёта* в кинематике произволен, и все кинематические зависимости, полученные при изучении движения в какой-нибудь одной системе отсчёта, *будут справедливы и в другой системе отсчёта*.

Если положение тела (или *геометрической фигуры*) относительно выбранной системы отсчёта со временем не изменяется, то считают, что это тело *покоится* относительно данной системы отсчёта. Если же тело (или геометрический образ) изменяет свое положение относительно выбранной системы отсчёта со временем, то считают, что это тело (или геометрическая фигура) относительно выбранной системы отсчёта *движется*.

Иначе, *под движением* в механике понимается *изменение с течением времени* положения данного тела (или геометрического образа) в пространстве по отношению к другому телу, с которым связана система координат, которую называют *системой отсчёта*.

Итак, понятия «движение» и «покой» являются, по существу, *относительными* и имеют смысл только тогда, когда указана *система отсчёта*.

### 1.3. Основные задачи кинематики

В задачах кинематики время  $t$  принимают за независимую переменную (*аргумент*). Все другие переменные величины, такие как расстояние  $s$ , скорость  $\bar{v}$  (*англ. velocity*) и ускорение  $\bar{a}$  (*англ. acceleration*), рассматривают как изменяющиеся с течением времени, т. е. как функция времени  $t$ . Иначе,  $s = s(t)$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(t)$ ,  $\bar{a} = \bar{a}(t)$ . Отсчёт времени ведётся от некоторого *начального момента* ( $t = 0$ ), выбор которого в каждом случае фиксируют.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было *задано кинематически* или же *аналитически описано* (определен закон движения).

*Кинематически* задать движение или определить *закон движения тела* (точки) – это значит иметь возможность установить положение *тела относительно* данной системы отсчёта *в любой момент времени*  $t$ . Формулировка *математического описания движения точек* или *тел* связана с выбором способа задания движения и является *одной из важных задач* кинематики. Таким образом, *изучение движения* любого объекта *следует начинать с установления или рассмотрения способов задания* этого движения.

*Основная задача кинематики точки* (и твёрдого тела, движущегося поступательно, другие движения твёрдого тела пока не будем рассматривать) состоит в установлении на основе заданного закона движения точки (тела) всех кинематических параметров ( $\bar{v}$  и  $\bar{a}$ ), характеризующих данное движение.

## 1.4. Траектория

Траекторией точки называют линию, описываемую движущейся точкой в пространстве относительно выбранной системы отсчёта (рис. 1.5).

Если траекторией является прямая линия, то движение точки называют *прямолинейным*, а если кривая – *криволинейным*. Пример прямолинейного движения – движение поезда на прямом участке пути (см. рис. 1.4), а криволинейного движения – на кривом участке пути (см. рис. 1.5).

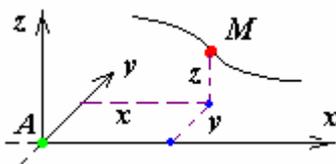


Рис. 1.5. Траектория точки.

При изучении движения точки необходимо различать *два важных* понятия: *пройденный путь* (перемещение) и *расстояние*. **Эти понятия часто используют в технике некорректно.**

*Расстояние* определяет положение точки на её траектории или в пространстве и отсчитывается от некоторого начала отсчёта. Например, если точка  $M$  движется в пространстве (рис. 1.6), то её положение в пространстве относительно начала отсчёта  $A$  по направлению оси абсцисс определяется расстоянием  $x$ , а на траектории – расстоянием  $s$ , измеренным по траектории от начала движения  $M_0$ .

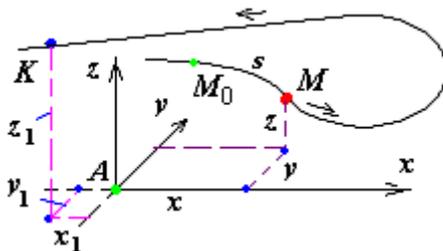


Рис. 1.6. Траектория точки.

*Расстояние* является алгебраической величиной (координатой), так как в зависимости от положения точки относительно начала отсчёта  $A$  или  $M_0$  и от принятого направления оси или возрастания координаты оно может быть и положительным, и отрицательным. Например, если точка  $M$  движется в пространстве в направлении точки  $K$  так, как показано на рис. 1.6, то положение точки  $K$  относительно начало отсчёта  $A$  по направлению осей координат в плоскости  $Axy$  определяется расстояниями (координатами)  $x_1$  и  $y_1$ , которые

имеют отрицательный знак. Точно так же, если при своем движении, например колебательном, точка  $M$  окажется левее начала отсчёта  $M_0$  (см. рис. 1.6), то расстояние  $s$  (криволинейная координата) будет отрицательным.

*Путь*, пройденный точкой, всегда определяется *положительным числом*. Путь совпадает с абсолютным значением расстояния только в случае, когда движение точки начинается от начала отсчёта и совершается по траектории в одном направлении.

## 1.5. Методы решения задач кинематики

Движение тела (или геометрического образа) по отношению к выбранной системе отсчёта ( $Oxyz$  или  $O_1x_1y_1z_1$ ) будет известно, если можно определить его положение относительно этой системы отсчёта в любой произвольный момент времени  $t$ .

Положение точки или тела относительно выбранной системы отсчёта определяют соответствующими параметрами (координатами, например в виде  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ ), а движение (или закон движения) – уравнениями, выражающими эти параметры как функции времени.

Поэтому одной из задач кинематики точки или тела является установление положения точки или тела (например, в виде  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ ) относительно выбранной системы отсчёта ( $Oxyz$  или  $O_1x_1y_1z_1$ ). Основная задача кинематики точки или тела состоит в том, чтобы по уравнениям, определяющим закон движения точек (тела), найти (исследованием или же вычислением) все кинематические характеристики этого движения (траектории различных точек  $s(t)$ , скорости  $v(t)$  и ускорения  $a(t)$ ) для любого момента времени  $t$ . Если положение, траектория, скорость и ускорения точки определяют вычислениями методом математического анализа, то такой приём решения основной задачи кинематики называют *аналитическим методом*. Если положение, траектория, скорость и ускорения точки определяют графическими построениями, то такой метод решения называют *графическим* или *геометрическим*.

Рассмотрим аналитические методы изучения движения точки при теоретических исследованиях. При решении практических задач обычно применяют два метода: *естественный*, или *натуральный*, и *координатный*.

## 1.6. Способы задания движения точки

Известны три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

1. *Векторный способ задания движения точки*. Пусть точка  $M$  движется по отношению к некоторой системе отсчёта  $Oxyz$ . Положение точки  $M$  в любой

момент времени  $t$  можно определить, задав её радиус-вектор  $\vec{r}$ , проведённый из начала координат  $O$  в точку  $M$  (рис. 1.7, а).

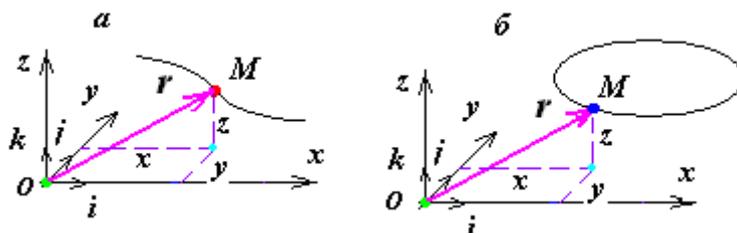


Рис. 1.7. Траектория точки, заданная радиус-вектором  $\vec{r}$ .

При движении точки  $M$  вектор  $\vec{r}$  с течением времени *изменяется и по модулю, и по направлению*. Следовательно,  $\vec{r}$  является *переменным вектором* (вектор-функцией), зависящим от аргумента  $t$  [Бухгольц, 1967]:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Зависимость (1.1) определяет закон (уравнения) движения точки в векторной форме, так как позволяет в любой момент времени построить соответствующий вектор  $\vec{r}$  и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место конца изменяющегося вектора  $\vec{r}$ , называемое *годографом* этого вектора (рис. 1.7, б), определяет траекторию движущейся точки.

Аналитически (алгебраически) вектор задается его проекциями на координатные оси. В прямоугольных декартовых координатах для вектора  $\vec{r}$  [Бухгольц, 1967]:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z,$$

где  $x, y, z$  – декартовы координаты точки (см. рис. 1.7).

Если ввести единичные векторы (орты)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  координатных осей, получим для  $\vec{r}$  *векторное* выражение (см. [Бухгольц, 1967])

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.2)$$

Зависимость (1.2) эквивалентна (1.1), если координаты  $x, y, z$  точки заданы как *функции времени* (см. [Бухгольц, 1967]).

Вектор  $\vec{r}$  может быть задан также геометрически его модулем и углами, образованными направлением вектора с осями координат (см. [Бухгольц, 1967]).

2. *Координатный способ задания движения точки.* Положение точки можно непосредственно определять ее декартовыми координатами  $x, y, z$ , которые при движении точки будут с течением времени изменяться (см. рис. 1.5). Чтобы знать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени. Иначе, надо знать зависимости

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (1.3)$$

Выражения (1.3) представляют собой *уравнения движения точки* в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе движения. Движение точки также можно задать *полярной* или *сферической* системами координат.

В частном случае, если движение точки происходит все время в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость  $Oxy$  (рис. 1.8, а), получим два уравнения движения:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad (1.4)$$

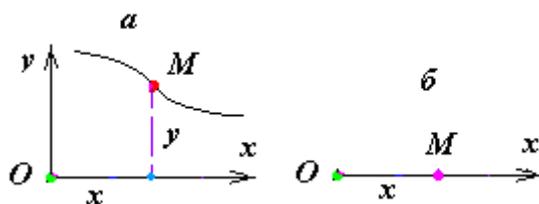


Рис. 1.8. Траектория точки в декартовых координатах.

В другом частном случае, при *прямолинейном движении точки*, если вдоль её траектории направить координатную ось  $Ox$  (см. рис. 1.8, б), движение будет определяться одним уравнением (законом прямолинейного движения)

$$x = x(t). \quad (1.5)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) представляют собой одновременно *уравнения траектории точки в параметрической форме*, где параметром является время  $t$ . Исключив из уравнений движения параметр (время)  $t$ , можно найти *уравнение траектории в обычной форме*, т. е. в виде, дающем зависимость между декартовыми координатами точки

$$y = f(x). \quad (1.6)$$

Пример 1. Пусть движение точки  $M$  в плоскости  $Oxy$  дано уравнениями:

$$x = 4t, \quad y = 80t^2, \quad (1.7)$$

где  $x$  и  $y$  выражены в миллиметрах,  $t$  – в секундах.

По этим уравнениям можно найти, что в момент времени  $t = 0$  точка  $M$  находится в положении  $M_0(0, 0)$ , т. е. в начале координат; в момент времени  $t = 2$  точка  $M$  – в положении  $M_1(8, 320)$  и т. д.

Таким образом, уравнение (1.7) действительно определяет положение точки  $M$  в любой момент времени. Давая  $t$  разные значения, легко можно вычислить координаты  $x, y$  и построить траекторию точки (рис. 1.9).

$$t := 0, 1..10$$

$$x(t) := 4 \cdot t \quad y(t) := 80 \cdot t^2$$

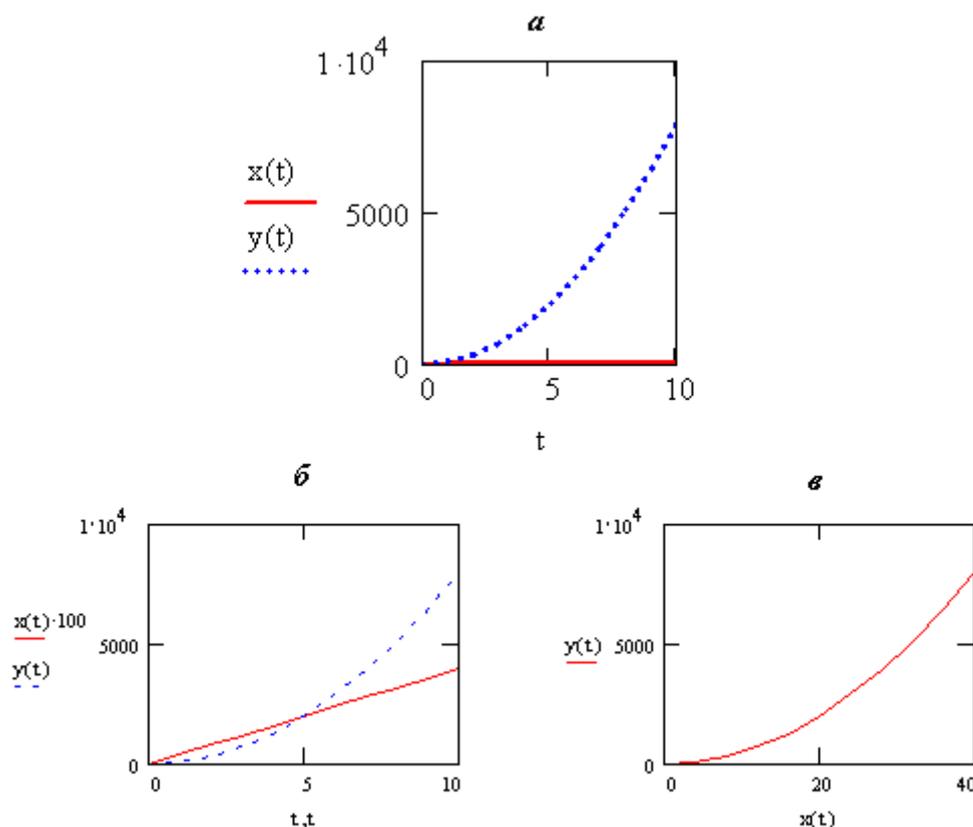


Рис. 1.9. Координаты и траектория точки  $M$ .

На рис. 1.9, б координата  $x$  увеличена в 100 раз для лучшей видимости характера изменения этой координаты. График рис. 1.9, в представляет траекторию движения точки, построенной по вычисленным координатам.

Другим способом траекторию можно найти, исключив  $t$  из уравнений (1.7). Из первого уравнения (1.7) находим  $t = x/4$  и, подставив это значение  $t$  во второе уравнение, получаем  $y = 5x^2$ . Следовательно, траекторией точки  $M$  является парабола с вершиной в начале координат и осью, параллельной оси  $Oy$  (рис. 1.10).

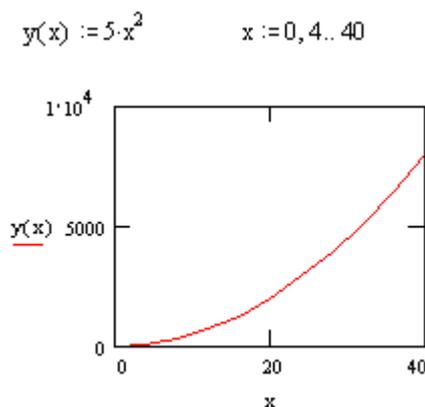


Рис. 1.10. Траектория точки  $M$ .

3. *Естественный способ задания движения точки.* Такой способ задания движения используют, если заранее известна траектория движения точки  $M$ . Чтобы знать положение точки  $M$  в любой момент времени  $t$  на траектории, надо знать зависимость, выражающую закон движения точки  $M$  по траектории:

$$s = s(t). \quad (1.8)$$

Поскольку траектория движения точки  $M$  задана, уравнение (1.8) определяет также положение точки в пространстве.

Таким образом, чтобы задать движение точки в пространстве этим способом, надо задать:

- траекторию точки;
- начало отсчёта на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчёта;
- закон движения точки вдоль траектории в виде (1.8).

*Особо отметим*, что величина  $s$  в уравнении (1.8) определяет *положение* движущейся точки  $M$  (т. е. её криволинейную координату), а не *пройдённый* ею путь.

## 1.7. Скорость точки

Если точка за равные промежутки времени проходит равные отрезки пути, то её движение называется *равномерным*.

Движение точки в пространстве определяют *скоростью*, которая характеризует *быстроту* и *направление движения точки* в данный момент времени. Скорость, как векторная величина, является *одной из основных кинематических характеристик* движения точки.

Модуль скорости равномерного движения  $\bar{v}$  является постоянной величиной и измеряется отношением пути  $s$ , пройденного точкой за некоторый промежуток времени  $t$ , к величине этого промежутка времени:

$$\bar{v} = \frac{s}{t}. \quad (1.9)$$

Скорость измеряется в метрах в секунду (м/с), километрах в час (км/ч) (1 км/ч = 0,278 м/с).

Если точка за равные промежутки времени проходит *неравные отрезки пути*, то её движение называется *неравномерным*.

Скорость неравномерного движения *есть переменная величина* и является *функцией времени* или вектор-функцией (см. [Бухгольц, 1967]):

$$\bar{v} = \bar{v}(t). \quad (1.10)$$

Рассмотрим точку  $M$ , которая перемещается по заданной траектории по некоторому закону  $s = s(t)$  (рис. 1.11, а).

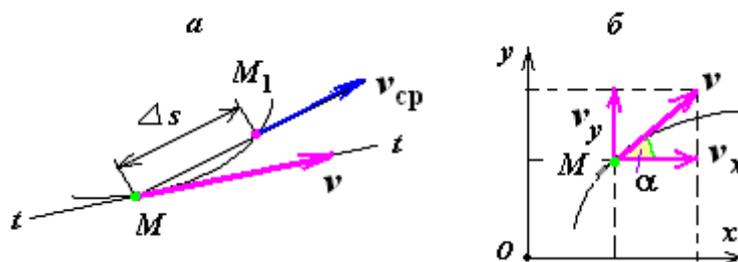


Рис. 1.11. К определению скорости точки.

За промежуток времени  $\Delta t$  точка  $M$  переместится в положение  $M_1$  по дуге  $MM_1$ . Если промежуток времени мал, то дугу можно заменить её хордой и *найти* в первом приближении *среднюю* скорость движения точки:

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.11)$$

*Замечание.* Можно отметить, что  $v_{\text{cp}} = (v_{M_1} - v_M)/2$ , где  $v_M$  – скорость (или начальная скорость) точки  $M$ ,  $v_{M_1}$  – скорость (или конечная скорость) точки  $M_1$ . Так можно поступить лишь тогда, когда известна конечная скорость точки  $M_1 - v_{M_1}$ .

Средняя скорость *направлена* по хорде от точки  $M$  к точке  $M_1$ . Скорость в данный момент времени найдём, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  (см. [Бухгольц, 1967]):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

или

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.12)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  направление хорды в пределе совпадает с направлением касательной к траектории в точке  $M$ .

*Вектор скорости  $\bar{v}$  в данной точке траектории направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.*

Значение скорости точки определяют как производную расстояния (криволинейной координаты)  $s$  этой точки по времени  $t$ . Направление скорости совпадает с касательной к криволинейной траектории в данной точке.

Если известны проекции скорости на оси координат  $v_x = \frac{dx}{dt}$  и  $v_y = \frac{dy}{dt}$ , можно найти её модуль и направление (см. [Бухгольц, 1967] и рис. 1.11, б):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad (1.13)$$

$$\cos(\bar{v}_x, \bar{v}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\bar{v}_y, \bar{v}) = \frac{v_y}{v}.$$

**Пример 2.** Точка  $M$  движется в плоскости  $Oxy$  (рис. 1.12). Закон движения задан уравнениями (1.4) в виде

$$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1 \quad \text{и} \quad y = 2 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right), \quad (1.14)$$

где  $x$  и  $y$  выражены в сантиметрах (см),  $t$  – в секундах (с).

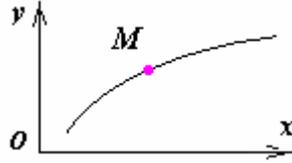


Рис. 1.12. Закон движения точки  $M$ .

Требуется найти уравнение траектории точки и определить скорость точки  $M$  для момента времени  $t = 1$  с.

**Решение.** Для определения уравнения траектории точки  $M$  исключим из заданных уравнений движения параметр  $t$ . Поскольку  $t$  входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \text{или} \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha. \quad (1.15)$$

Из уравнений движения (1.14) находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1.15):

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{x+1}{2} \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = \frac{2-y}{4}.$$

Подставляя последние выражения в (1.15), получим

$$2 \frac{(x+1)^2}{4} = 1 - \frac{2-y}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки  $M$  (парабола, рис. 1.13):

$$y = 2((x+1)^2 - 1). \quad (1.16)$$

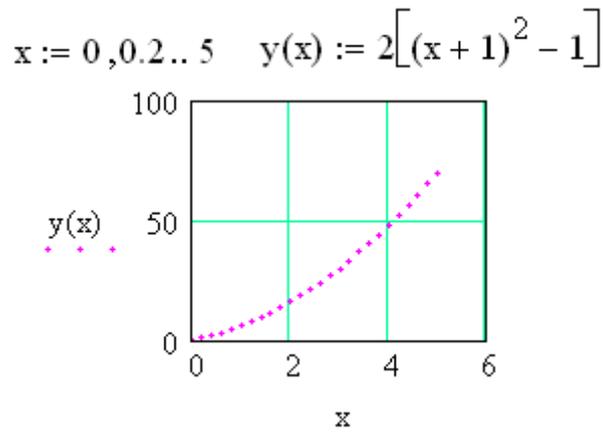


Рис. 1.13. Графическая зависимость  $y = f(x)$ .

Скорость точки определим по её проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right); \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right); \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при  $t = 1$  с в системе MathCAD

$$v_x := \frac{\pi}{3} \cdot 0.867 \quad v_x = 0.908 \quad v_y := \frac{\pi}{3} \cdot 0.256 \quad v_y = 0.268$$

$$v := \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad v = 0.947.$$

## 1.8. Ускорение точки

При движении по криволинейной траектории скорость точки может изменяться и по направлению, и по величине.

Векторную величину, характеризующую изменение с течением времени модуля и направления скорости точки, называют ускорением.

Ускорение  $\bar{a}$  (англ. acceleration) измеряется в метрах на секунду в квадрате ( $\text{м/с}^2$ ).

Пусть точка  $M$  движется по какой-то криволинейной траектории и за время  $\Delta t$  переходит из положения  $M$  в положение  $M_1$  (рис. 1.14, а).

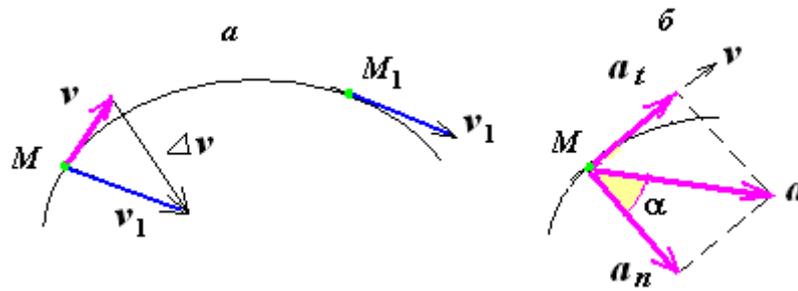


Рис. 1.14. К определению ускорения точки.

Расстояние, пройденное точкой  $M$ , представляет собой дугу  $MM_1$ . Пусть длина этой дуги  $\Delta s$ . Пусть в положении  $M$  точка имела скорость  $\bar{v}$ , а в положении  $M_1$  – скорость  $\bar{v}_1$ . Геометрическую разность скоростей, как приращение скорости  $\Delta\bar{v}$ , найдем, построив из точки  $M$  вектор  $\bar{v}_1$ .

Скорость  $\bar{v}$  точки  $M$  при её перемещении из этого положения в положение  $M_1$  изменяется и по величине, и по направлению. Среднее значение ускорения, характеризующего изменение вектора скорости  $\Delta\bar{v}$  за соответствующее время движения:

$$\bar{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \quad (1.17)$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим ускорение точки в данный момент времени как производную от вектора скорости (см. [Бухгольц, 1967]):

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

или

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (1.18)$$

Найденное ускорение характеризует *изменение численного значения скорости и её направления*. Ускорение может быть разложено на две взаимно перпендикулярные составляющие по касательной и нормали к траектории движения (см. рис. 1.14, б):

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau. \quad (1.19)$$

Касательная составляющая  $\bar{a}_\tau$  совпадает по направлению со скоростью  $\bar{v}$  или противоположна ей (см. рис. 1.14, б). Она характеризует *изменение модуля скорости*, соответственно её определяют как производную от функции модуля скорости:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta |\bar{v}|}{\Delta t}$$

или

$$a_\tau = \frac{d|\bar{v}|}{dt}. \quad (1.20)$$

Нормальная составляющая  $\bar{a}_n$  перпендикулярна к направлению скорости точки  $\bar{v}$  (см. рис. 1.14, б) и не характеризует изменение скорости по величине. Нормальная составляющая ускорения определяет *изменение направления вектора скорости*.

Численное значение нормального ускорения [Бухгольц, 1967]

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (1.21)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке  $M$ .

Касательная и нормальная составляющие  $\bar{a}_\tau$  и  $\bar{a}_n$  взаимно перпендикулярны, поэтому значение полного ускорения, а также её направляющие косинусы находят по формулам (см. рис. 1.14, б)

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \quad (1.22)$$

$$\cos(\bar{a}_n, \bar{a}) = \frac{a_n}{a}, \quad \cos(\bar{a}_\tau, \bar{a}) = \frac{a_\tau}{a}.$$

Если известны проекции ускорения на оси координат  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  и  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ , можно определить его модуль и направление:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad (1.23)$$

$$\cos(\bar{a}_x, \bar{a}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\bar{a}_y, \bar{a}) = \frac{a_y}{a}.$$

Дифференцируя по времени равенство (1.13), представленное в виде

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

можно найти касательное ускорение  $\bar{a}_\tau$ :

$$2v \frac{dv}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt}.$$

Учитывая, что  $\frac{dv_x}{dt} = a_x$  и  $\frac{dv_y}{dt} = a_y$ , из последнего выражения имеем

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \quad (1.24)$$

Нормальное ускорение  $\bar{a}_n$  точки можно получить из (1.22):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (1.25)$$

**Пример 3.** Для исходных данных примера 2 найти полное, касательное и нормальное ускорения точки  $M$  и радиус кривизны  $\rho$  в данной точке траектории.

**Решение.** Полное ускорение точки найдём по формуле (1.23):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right); \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{36} \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при  $t = 1$  с в системе MathCAD

$$a_x := -\left(\frac{\pi^2}{6} \cdot 0.5\right) \quad a_x = -0.822 \quad a_y := \frac{\pi^2}{36} \cdot 0.966 \quad a_y = 0.265$$

$$a := \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad a = 0.864.$$

Касательное ускорение найдем по формуле (1.24). Числовые значения всех величин, входящих в последнее равенство, известны. Подставив эти числа, получим, что при  $t = 1$  с

$$a_\tau := \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} \quad a_\tau = -0.714$$

Нормальное ускорение точки определим по (1.22). Подставляя сюда известные значения  $a$  и  $a_\tau$ , получим при  $t = 1$  с

$$a_n := \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \quad a_n = 0.487$$

Радиус кривизны  $\rho$  траектории в данной точке  $M$  найдем по (1.21). Подставляя сюда известные значения  $v$  и  $a_n$ , получим при  $t = 1$  с

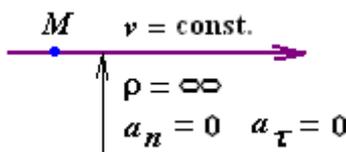
$$\rho := \frac{v^2}{a_n} \quad \rho = 1.841,$$

где  $\rho$  – в сантиметрах.

### ***Виды движения точки в зависимости от ускорения***

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Р а в н о м е р н о е п р я м о л и н е й н о е д в и ж е н и е. Это движение, описываемое уравнением  $s = \bar{v}t$ , характеризуется тем, что скорость движения точки  $M$  постоянна по величине и направлению  $\bar{v} = \overline{\text{const}}$ , а радиус кривизны траектории её движения равен бесконечности  $\rho = \infty$  (рис. 1.15).



*Рис. 1.15.* Прямолинейное движение точки.

Тогда нормальная составляющая ускорения  $a_n = v^2/\rho = 0$  (см. (1.21)). В этом случае касательное ускорение также равно нулю, так как модуль скорости не изменяется ( $\bar{v} = \text{const}$ ):

$$a = a_\tau = \frac{d|\bar{v}|}{dt} = 0. \quad (1.26)$$

Значит, и полное ускорение  $\bar{a} = 0$ .

Таким образом, *единственным движением*, в котором ускорение точки всё время равно нулю ( $\bar{a}_n = \bar{a}_\tau = 0$  и  $\bar{a} = 0$ ), является *равномерное прямолинейное движение*.

Данное движение может соответствовать установившемуся движению поезда по прямому участку пути.

В таком движении путь, скорость и ускорение точки графически будут представлены в виде рис. 1.16:

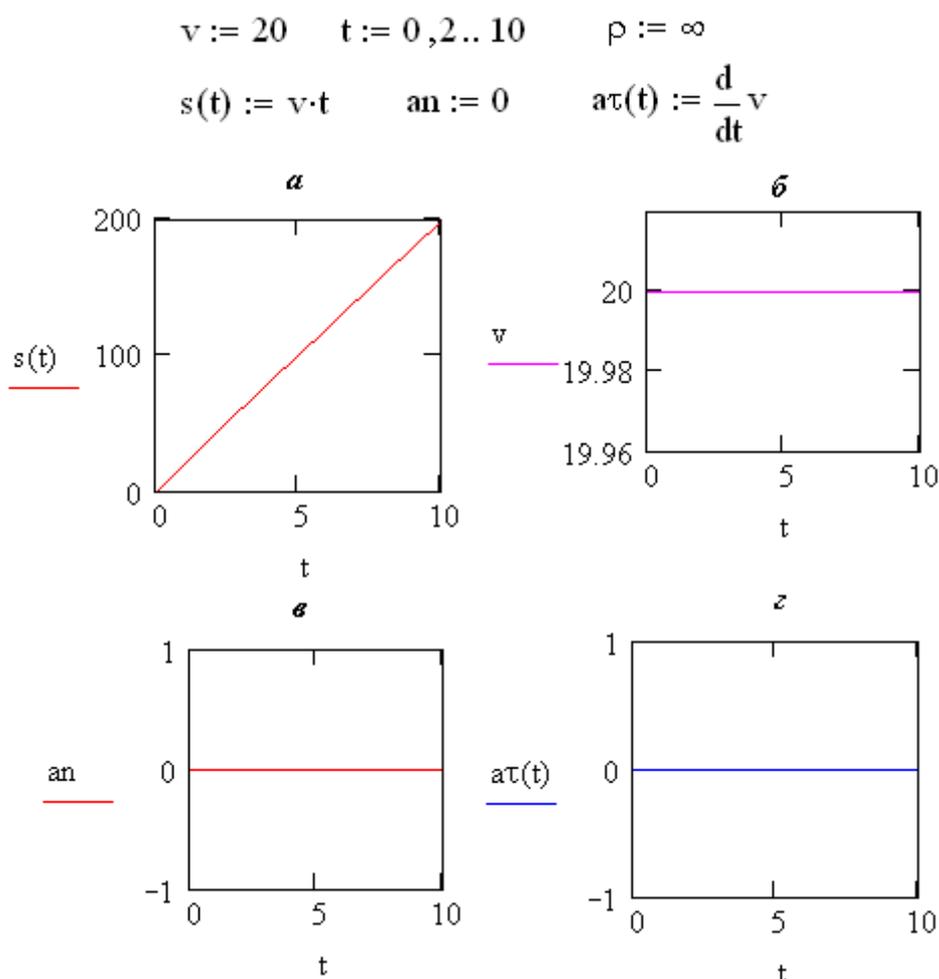


Рис. 1.16. Графические зависимости параметров прямолинейного движения точки от времени.

2. Равномерное криволинейное движение. Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором численное значение скорости всё время остается постоянным:  $\bar{v} = \text{const}$  (рис. 1.17).

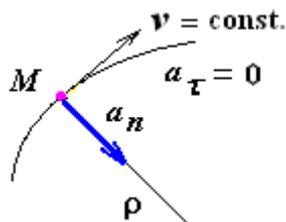


Рис. 1.17. Криволинейное движение точки.

В этом случае касательное ускорение равно нулю, так как  $\bar{v} = \text{const}$  ( $\bar{a}_\tau = d\bar{v}/dt = 0$ ).

Полное ускорение точки  $\bar{a}$  равно только нормальному ускорению, поскольку  $\rho \neq 0$ :

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1.27)$$

Вектор ускорения  $\bar{a}$  направлен все время по нормали к траектории точки. Здесь ускорение появляется только за счёт изменения направления скорости.

Данное движение может соответствовать установившемуся движению поезда по кривому участку пути.

Особо отметим, что нормальное ускорение  $a_n$  в криволинейном движении оказывается равным нулю в точках перегиба  $M$  траектории  $L_0$  и  $L_1$ , в которых  $\rho = \infty$  (рис. 1.18).

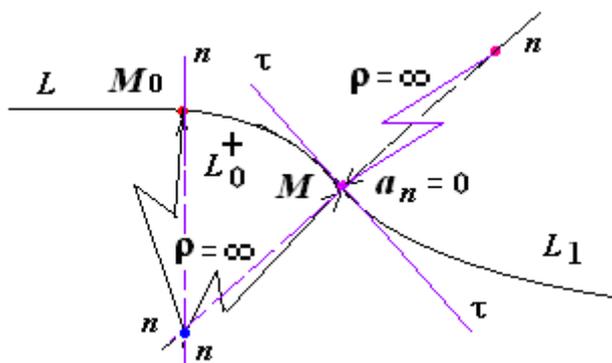


Рис. 1.18. Траектория точек  $M$  и  $M_0$  с перегибами.

В точках перегиба изменяется на противоположное направление движения точки по данной траектории, в эти моменты производная  $\frac{dx}{dt} = v$ , меняя знак, становится равной нулю.

*Замечание:* Данная ситуация может возникать при движении поезда в месте перехода с кривого участка пути на прямой ( $LM_0$  и  $M_0M$ ) или на кривой участок ( $ML_1$ ) другого знака кривизны (см. рис. 1.18) и наоборот. Наличие нормального ускорения при движении по криволинейному пути (закруглению) в математической модели учитывают посредством *так называемой нормальной составляющей силы инерции Д'Аламбера* в абсолютном движении (см. п. 4.5, (4.47)) [Туранов, 2009; 2011]. Движение поезда по кривому участку пути может вызывать неравномерный износ рельсов и гребней колёс и, в худшем случае, вкатывание колёс на упорный рельс, приводящее к сходу грузового вагона. Для плавного перехода от прямолинейного участка к закруглению или от одной кривой к другой используют специальные переходные кривые. Однако изменение значения от бесконечности до конечной, пусть и большой, величины радиуса кривизны всё равно не может быть плавным. Поэтому внезапное появление нормального ускорения всегда вызывает резкий поперечный толчок со всеми вытекающими из него последствиями.

Найдём закон равномерного криволинейного движения. Из (1.12) имеем  $ds = \bar{v}dt$ . Пусть в начальный момент времени ( $t = 0$ ) точка находится от начала отсчёта на расстоянии  $s_0$ . Взяв от левой и правой частей последнего равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим (см. (1.12)):

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t \bar{v} dt$$

или с учётом того, что  $\bar{v} = \overline{\text{const}}$ , имеем

$$s - s_0 = \bar{v}t .$$

Отсюда закон равномерного криволинейного движения точки примет вид

$$s = s_0 + \bar{v}t . \tag{1.28}$$

Если в (1.28) считать  $s_0 = 0$ , то  $s$  – это путь, пройденный точкой за время  $t$ :

$$s = \bar{v}t . \tag{1.28a}$$

Следовательно, при равномерном криволинейном движении *путь*, пройденный точкой, *растёт пропорционально времени*, а скорость точки имеет постоянное значение, равное отношению пути ко времени:

$$\bar{v} = s/t. \quad (1.29)$$

В этом движении кинематические параметры точки графически будут представлены в виде прямых (рис. 1.19):

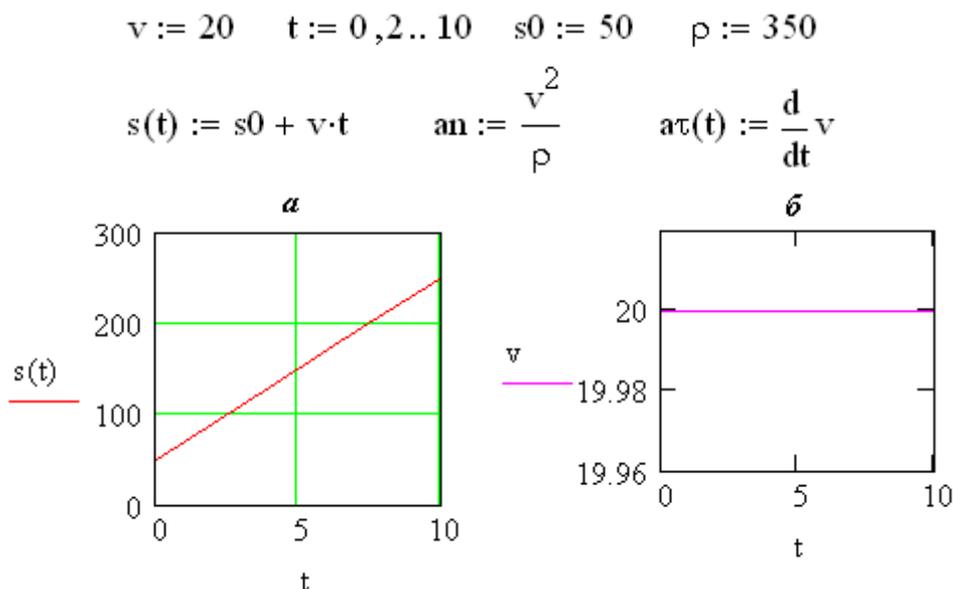


Рис. 1.19. Графические зависимости параметров криволинейного движения точки от времени.

3. **Неравномерное прямолинейное движение.** Это движение характеризуется тем, что скорость движения точки  $M$  изменяется по величине  $\bar{v} = \text{var}$  (переменный (англ.) – *variable*), а радиус кривизны траектории ее движения равен бесконечности  $\rho = \infty$  (рис. 1.20).

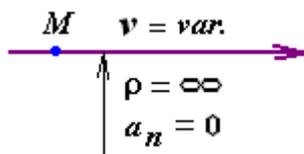


Рис. 1.20. Неравномерное прямолинейное движение точки.

Здесь касательное ускорение не равно нулю  $a_\tau = d|\bar{v}|/dt \neq 0$ , а нормальное ускорение равно нулю  $\bar{a}_n = 0$ , поскольку  $\rho = \infty$ .

Следовательно, полное ускорение точки при неравномерном прямолинейном движении равно касательному ускорению, т. е.  $\bar{a} = \bar{a}_\tau$ . Данное движение может соответствовать движению поезда на прямом участке пути.

4. **Неравномерное криволинейное движение.** Это движение характеризуется тем, что скорость движения точки  $M$  изменяется по величине  $\bar{v} = \overline{var}$ , а радиус кривизны траектории её движения – величина конечная  $\rho = \text{const}$  (рис. 1.21).

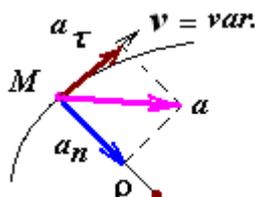


Рис. 1.21. Неравномерное криволинейное движение точки.

В этом случае касательное и нормальное ускорения не равны нулю, т. е.  $a_\tau = d|\bar{v}|/dt \neq 0$  и  $a_n = v^2/\rho \neq 0$  (см. (1.26), (1.27)).

Следовательно, полное ускорение при неравномерном криволинейном движении равно геометрической сумме касательного  $\bar{a}_\tau$  и нормального  $\bar{a}_n$  ускорений (см. (1.19)). Модуль и направление полного ускорения определяют по (1.22).

Данное движение может соответствовать движению поезда по кривому участку пути.

Особо отметим, что при неравномерном движении касательное ускорение обращается в нуль в те моменты, когда производная  $ds/dt$  достигает максимума или минимума, так как в эти моменты вторая производная  $ds^2/dt^2$  равна нулю.

5. **Равнопеременное криволинейное движение.** Равнопеременным называют такое криволинейное движение, при котором касательное ускорение точки остаётся все время постоянным:  $\bar{a}_\tau = \text{const}$ .

Ускорение можно определить через значения скорости в начале и в конце произвольного промежутка времени:

$$a_\tau = (v - v_0)/t. \quad (1.30)$$

Найдем закон этого движения, считая, что при  $t = 0$   $s = s_0$ , а  $v = v_0$ , где  $v_0$  – начальная скорость точки.

Согласно (1.20), запишем

$$d\bar{v} = \bar{a}_\tau dt . \quad (1.31)$$

Так как  $\bar{a}_\tau = \overline{\text{const}}$ , то, взяв от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим (см. [Бухгольц, 1967])

$$\int_{v_0}^v d\bar{v} = \int_0^t \bar{a}_\tau dt .$$

Отсюда с учётом того, что  $\bar{a}_\tau = \overline{\text{const}}$ , имеем формулу для определения скорости равнопеременного криволинейного движения точки

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}_\tau t . \quad (1.32)$$

С учётом (1.12), где  $ds/dt = \bar{v}$ , последнее равенство представим в виде

$$\frac{ds}{dt} = \bar{v}_0 + \bar{a}_\tau t$$

или

$$ds = \bar{v}_0 dt + \bar{a}_\tau t dt .$$

Вторично интегрируя полученное выражение:

$$\int_{s_0}^s ds = \bar{v}_0 \int_{t_0}^t dt + \bar{a}_\tau \int_{t_0}^t t dt ,$$

найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки

$$s = s_0 + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}_\tau t^2}{2} . \quad (1.33)$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называют ускоренным, а если убывает – замедленным.

Поскольку изменение модуля скорости характеризуется касательным ускорением, то движение будет ускоренным, если величины  $\bar{v}$  и  $\bar{a}_\tau$  имеют одинаковые знаки (угол между скоростью  $\bar{v}$  и полным ускорением  $\bar{a}$  острый

(рис. 1.22, а)), и замедленным, если разные (угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$  тупой (рис. 1.22, б)).

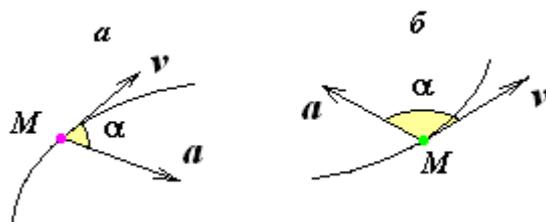


Рис. 1.22. К ускоренному и замедленному движению точки.

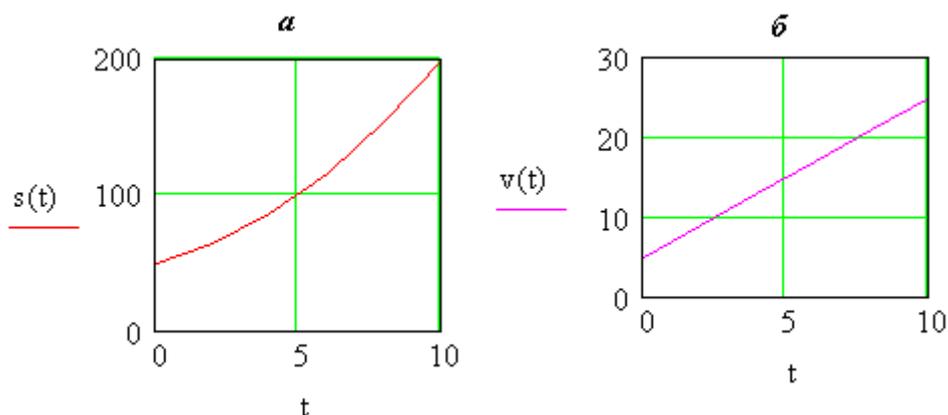
В частности, при равнопеременном движении точки, если в равенстве (1.28) и (2.32)  $\bar{v}$  и  $\bar{a}_\tau$  имеют одинаковые знаки, то движение будет *равноускоренным*, а если разные знаки – *равнозамедленным*.

Кинематические параметры *равноускоренного движения* точки определяют формулы (1.28), (1.32) и (1.33).

Графически кинематические параметры *равноускоренного движения* точки представлены на рис. 1.23:

$$v_0 := 5 \quad t := 0, 2.. 10 \quad s_0 := 50 \quad \rho := 350 \quad a_\tau := 2$$

$$s(t) := s_0 + v_0 \cdot t + a_\tau \cdot \frac{t^2}{2} \quad v(t) := v_0 + a_\tau \cdot t \quad a_n(t) := \frac{v(t)^2}{\rho}$$



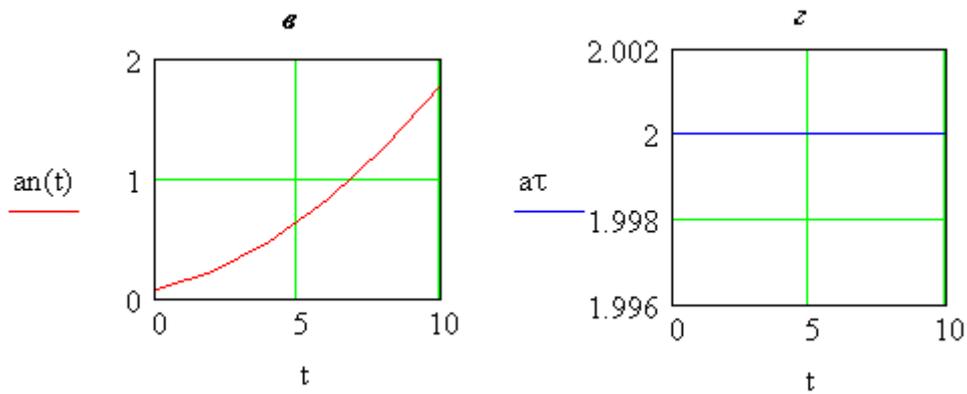


Рис. 1.23. Графическое представление кинематических параметров равноускоренного движения точки.

Кинематические параметры *равнозамедленного* движения точки в прикладной механике определяют по формулам

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2}; \quad (1.34)$$

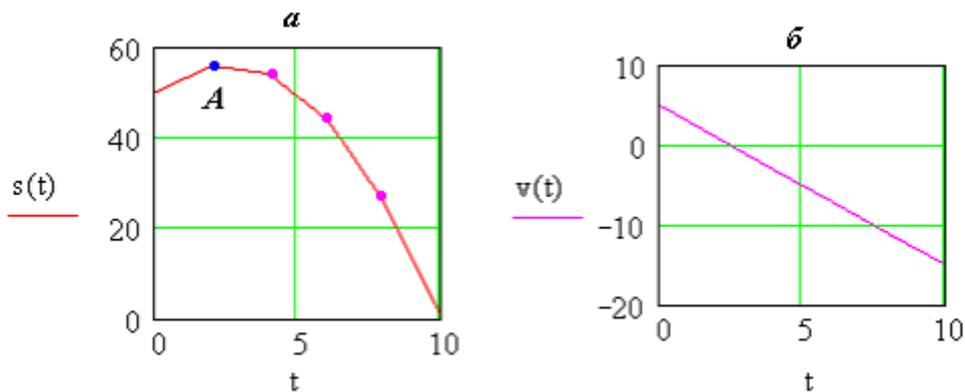
$$v = v_0 - a_\tau t, \quad (1.35)$$

хотя в теоретической механике касательное ускорение обладает знаком и (1.32) и (1.33) могут быть использованы непосредственно для равнозамедленного движения с учётом того, что  $\bar{a}_\tau < 0$  (отрицательное).

Графически кинематические параметры *равнозамедленного* движения точки представлены на рис. 1.24:

$$v_0 := 5 \quad t := 0, 2.. 10 \quad s_0 := 50 \quad \rho := 350 \quad a_\tau := 2$$

$$s(t) := s_0 + v_0 \cdot t - a_\tau \cdot \frac{t^2}{2} \quad v(t) := v_0 - a_\tau \cdot t \quad an(t) := \frac{v(t)^2}{\rho}$$



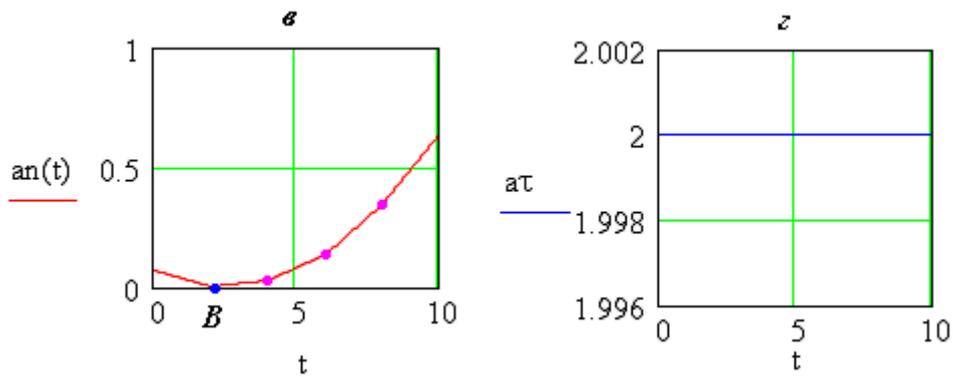


Рис. 1.24. Графическое представление кинематических параметров равнозамедленного движения точки.

6. Прямолинейное равнопеременное движение точки также определяют по (1.28), (1.32), (1.33).

7. Кинематика колебаний (т. е. движение точки). Гармонические колебания. Колебаниями (или колебательным процессом) называют такое изменение некоторой величины, при котором она последовательно возрастает и убывает. Простейшим и в то же время важнейшим типом колебаний является гармоническое колебательное движение.

Рассмотрим прямолинейное движение точки, при котором ее расстояние  $x$  от начала координат изменяется со временем по гармоническому закону

$$x = A \sin(kt), \quad (1.36)$$

где  $A$  и  $k$  – соответственно амплитуда (мм) и круговая частота колебаний (или просто частота) (рад./с) точки  $M$ , являющиеся постоянными величинами.

Колебания, происходящее по закону (1.36), играют большую роль в технике при решении различных задач. Например, при определении вертикального переносного ускорения вагона от неровности профиля пути, которая переносится на размещённый в нём груз.

Пусть точка  $M$  (рис. 1.25) при этом движении совершает колебания между положениями  $M_0(+A)$  и  $M_1(-A)$ .

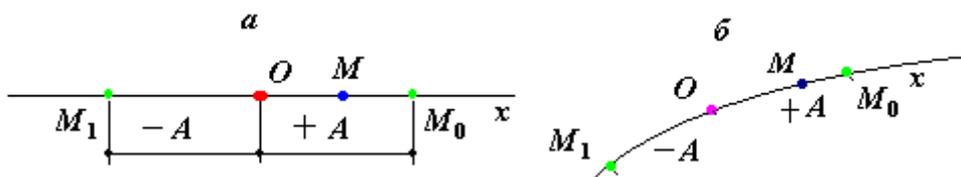


Рис. 1.25. К гармоническому колебанию точки.

Из рис. 1.25 ясно, что, начиная движение в момент  $t = 0$  из положения  $M_0$ , точка вновь придет в это положение в момент времени  $t_1$ , для которого  $\sin(kt_1) = 1$ , т. е.  $kt_1 = \pi/2$ . Промежуток времени  $T = t_1 = \pi/2k$ , в течение которого точка совершает одно полное колебание, называют *периодом колебаний*.

Период колебаний  $T$  связан с длиной волны неровности пути  $L$  и скоростью поезда  $v$  зависимостью  $T = L/v$ , с.

Взяв производные от  $x$  по времени  $t$ , найдём зависимость скорости и ускорения точки при прямолинейном гармоническом движении:

$$v = v_x = Ak \cos(kt), \quad (1.37)$$

$$a = a_x = -Ak^2 \sin(kt). \quad (1.38)$$

Аналогичные колебания происходят и при законе  $x = A \cos(kt)$ , только движение в этом случае начинается из точки  $M_0$ .

При движении точки *вдоль любой кривой* (см. рис. 1.25 б) появляется касательное ускорение

$$a = a_\tau = -Ak^2 \sin(kt). \quad (1.38a)$$

При движении вдоль любой кривой точка будет иметь ещё *нормальное ускорение*, определяемое по (1.27).

*Особо отметим*, что при колебательном движении нормальное ускорение становится равным нулю в те моменты, когда изменяется на противоположное направление движение точки по данной траектории, так как в эти моменты

производная  $\frac{dx}{dt} = v$ , меняя знак, становится равной нулю.

### Пример расчёта в системе MathCAD

Исходные данные:

$$\begin{aligned} A &:= 5 && \text{- амплитуда колебаний, мм;} \\ \rho &:= 350 \cdot 10^2 && \text{- радиус кривизны кривой, мм;} \\ k &:= 1.2 && \text{- частота собственных колебаний, Гц;} \\ t &:= 0, 0.1..8 && \text{- текущее время, с;} \\ T &:= \frac{(2 \cdot \pi)}{k} && T = 5.236 \text{ - период собственных колебаний, с;} \end{aligned}$$

$x(t) := A \cdot \sin(k \cdot t)$  - движение точки по синусоидальному закону, мм;

$v(t) := A \cdot k \cdot \cos(k \cdot t)$  - скорость точки, мм/с;

$a_{\tau}(t) := -A \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot t)$  - касательная составляющая ускорение точки, мм/с<sup>2</sup>;

$a_n(t) := \frac{v(t)^2}{\rho}$  - нормальное ускорение точки, мм/с<sup>2</sup>.

Графически кинематические параметры гармонического (синусоидального) движения точки без сдвига по фазе представлены на рис. 1.26.

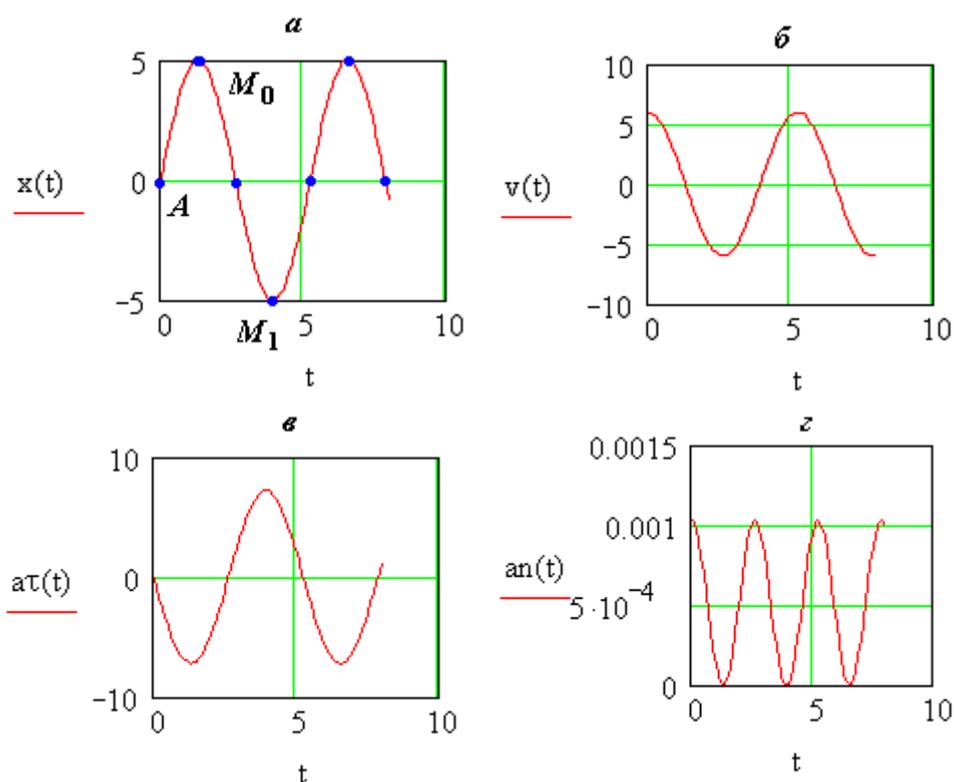


Рис. 1.26. Графическое представление кинематических параметров синусоидального движения точки.

В синусоидальном законе движения точки движение начинается из точки  $A$  к точке  $M_0$ , затем к точке  $A$ , после чего к точке  $M_1$ , а затем снова к точке  $A$  и т. д. (см. рис. 1.26, а).

Графически кинематические параметры гармонического движения точки с положительным сдвигом по фазе представлены на рис. 1.27.

$\gamma := 30 \cdot \frac{\pi}{180}$  - сдвиг по фазе колебаний, рад;

$$xM(t) := A \cdot \sin(k \cdot t + \gamma) \quad vM(t) := A \cdot k \cdot \cos(k \cdot t + \gamma)$$

$$a_{\tau}M(t) := \frac{v(t)^2}{\rho} \quad a_{\tau}M(t) := -A \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot t + \gamma).$$

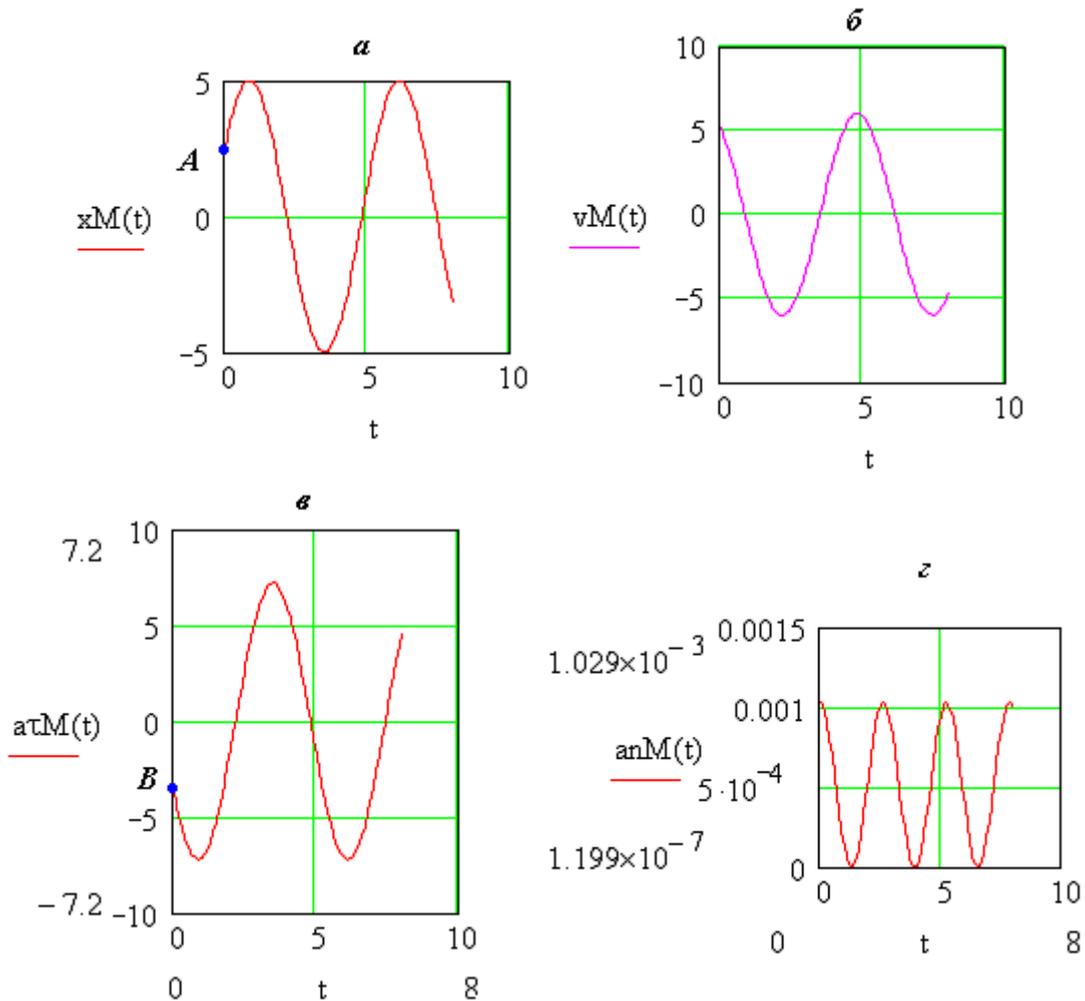


Рис. 1.27. Графическое представление кинематических параметров синусоидального движения точки с положительным сдвигом по фазе.

Графически кинематические параметры гармонического движения точки с отрицательным сдвигом по фазе представлены на рис. 1.28:

$$xM(t) := A \cdot \sin(k \cdot t - \gamma) \quad vM(t) := A \cdot k \cdot \cos(k \cdot t - \gamma)$$

$$a_nM(t) := \frac{v(t)^2}{\rho} \quad a_{\tau}M(t) := -A \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot t - \gamma).$$

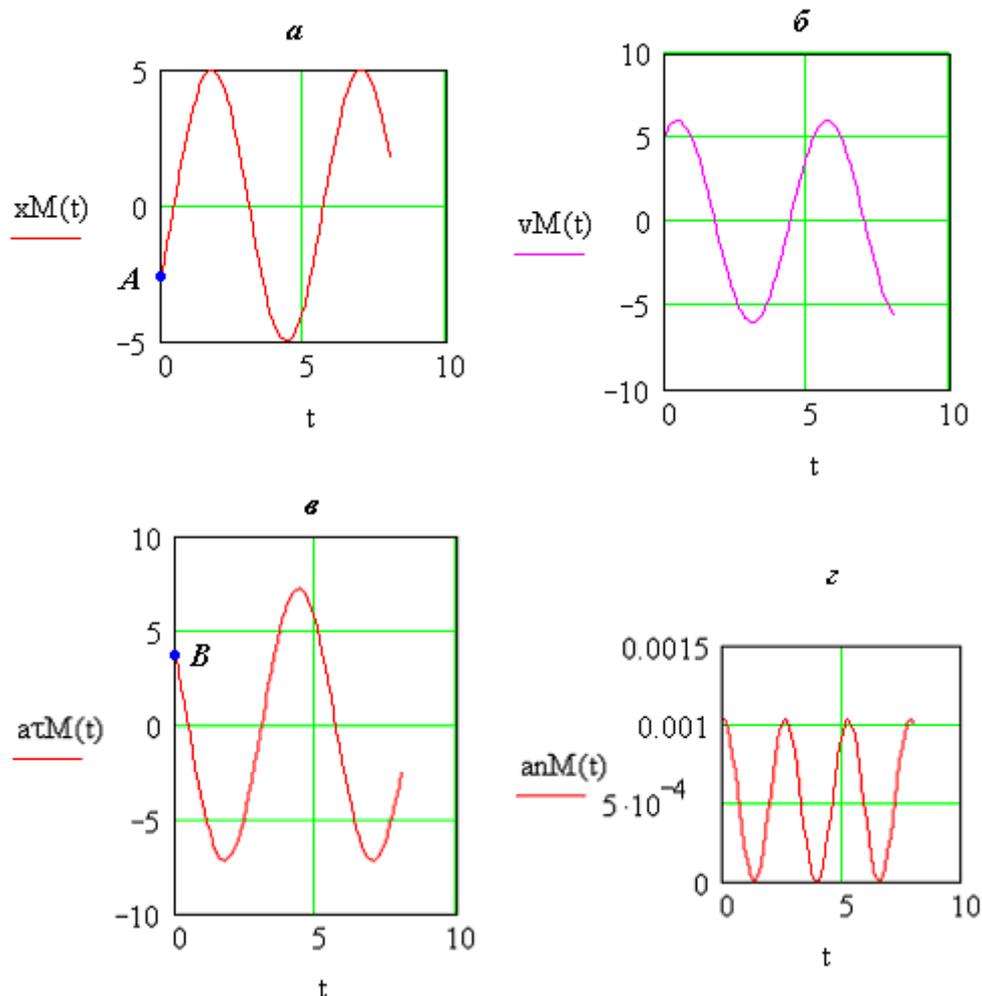


Рис. 1.28. Графическое представление кинематических параметров синусоидального движения точки с отрицательным сдвигом по фазе.

Анализ графических зависимостей кинематических параметров синусоидального движения точки показывает, что при сдвиге по фазе колебаний (см. рис. 1.27, а, в и рис. 1.28, а, в) происходят, соответственно, положительные или отрицательные сдвиги графиков *пути* и *касательной составляющей ускорения* точки, в то время как графики скорости и нормальной составляющей ускорения точки практически остаются без изменений.

Графически кинематические параметры *косинусоидального движения* точки без сдвига по фазе представлены на рис. 1.29:

$$x(t) := A \cdot \cos(k \cdot t) \quad - \text{ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО КОСИНУСОИДАЛЬНОМУ ЗАКОНУ, ММ,}$$

$$v(t) := -A \cdot k \cdot \sin(k \cdot t) \quad - \text{СКОРОСТЬ ТОЧКИ, ММ/С;}$$

$$a_{\tau}(t) := -A \cdot k^2 \cdot \cos(k \cdot t) \quad - \text{КАСАТЕЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ, ММ/С^2;}$$

$$an(t) := \frac{v(t)^2}{\rho} \quad \text{- нормальное ускорение точки, мм/с}^2.$$

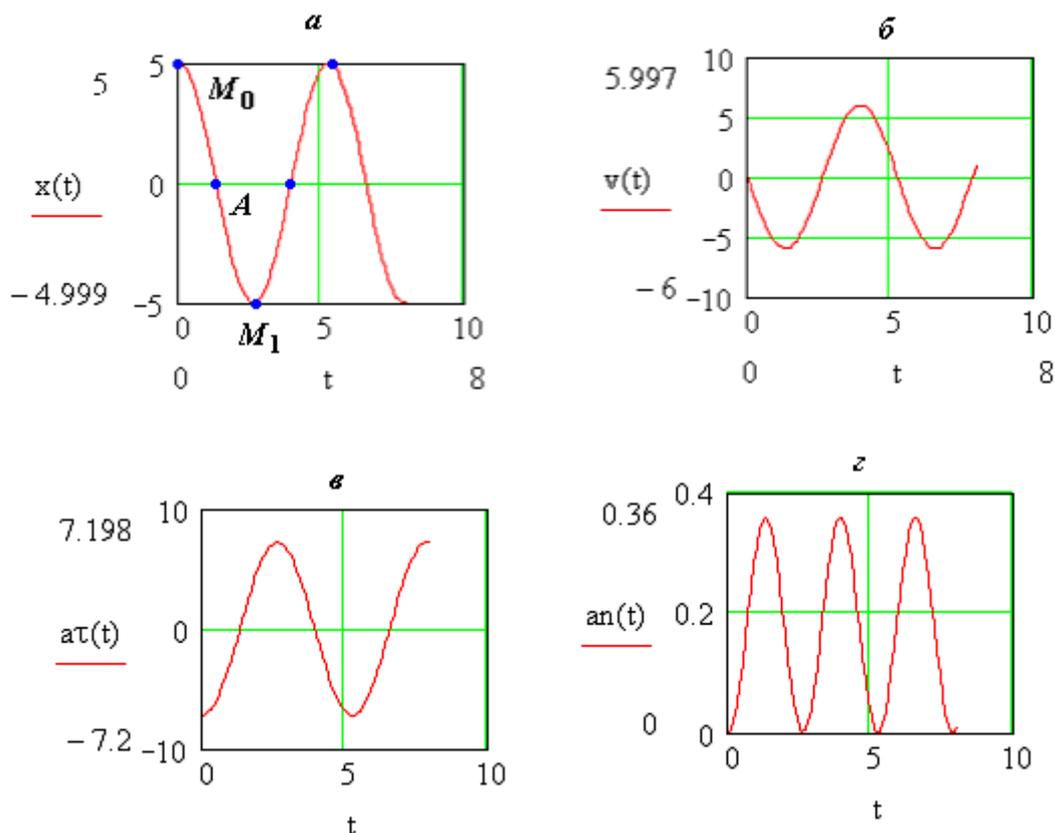


Рис. 1.29. Графическое представление кинематических параметров косинусоидального движения точки без сдвига по фазе.

В косинусоидальном законе движения точки движение начинается из точки  $M_0$  к точке  $A$ , затем к точке  $M_1$ , после чего к точке  $A$ , а затем снова к точке  $M_0$  и т. д. (см. рис. 1.29, а).

**Пример 1.** Рассмотрим блок 2 с неподвижной осью вращения, закреплённый на вершине поворотной стрелы 1 стрелового крана на железнодорожном ходу КЖДЭ-4-25м (рис. 1.30).

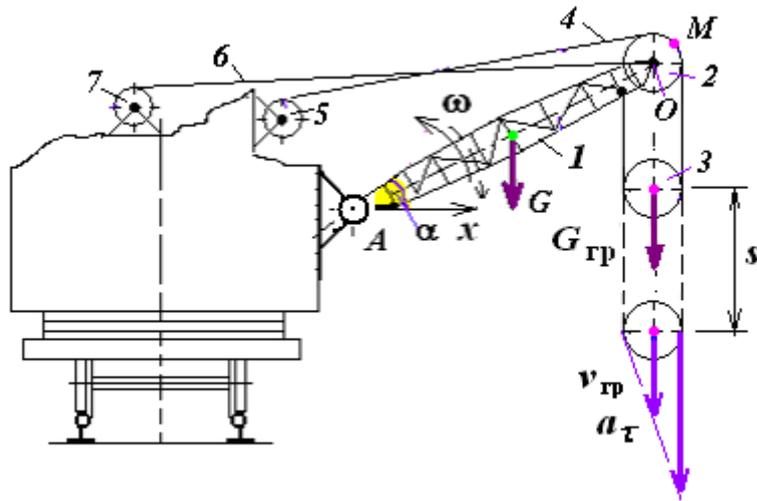


Рис. 1.30. Стреловой кран на железнодорожном ходу  
 1 – поворотная стрела; 2 и 3 – блоки с неподвижным и подвижным осями вращения; 4 и 6 – канаты; 5 – блок, соединённый с приводным барабаном и через редуктор с валом электродвигателя подъёма и опускания груза;  
 7 – блок, соединённый с приводным барабаном и посредством редуктора с валом электродвигателя подъёма и опускания поворотной стрелы

На блок 2 с неподвижной осью вращения радиусом  $R$ , вращающейся вокруг горизонтальной оси  $O$ , накручен канат, к которому посредством блока 3 с подвижной осью вращения подвешен груз. Пусть движение груза определяется, согласно (1.33), законом  $s = a_{\tau} t^2 / 2$ , где  $a_{\tau}$  – ускорение (касательное) груза.

Найти полное ускорение точки  $M$ , лежащей на окружности неподвижного блока.

*Решение.* Воспользуемся формулами для определения скорости и ускорения точки при *неравномерном криволинейном движении* (см. 4-й вид движения), при котором  $a_{\tau} = d\bar{v}/dt \neq 0$  и  $a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$ .

Из закона движения груза, согласно (1.35), найдём его скорость  $\bar{v}_{\text{гр}} = ds/dt = \bar{a}_{\tau} t$ . Так как скорость точки  $M$  по модулю равна удвоенной скорости груза (мгновенный центр скоростей (МЦС) находится в точке касания подвижного блока с неподвижной ветвью), то  $v_M = 2v_{\text{гр}} = 2a_{\tau} t$ . Тогда ускорение точки  $M$ , согласно (1.31),  $a_M = 2dv_{\text{гр}}/dt = 2a_{\tau}$ . Поскольку для окружности радиус равен радиусу блока ( $\rho = R$ ), нормальное ускорение (см. (1.21))

$$a_n = \frac{v_M^2}{\rho} = \frac{(2a_{\tau} t)^2}{R}.$$

Полное ускорение точки  $M$  неподвижного блока 2 равно (см. (1.22)) составит

$$a_M = \sqrt{4a_\tau^2 + \frac{16a_\tau^4 t^4}{R^2}} = \frac{2a_\tau^2}{R} \sqrt{R^2 + 4a_\tau^2 t^4}.$$

**Пример 2.** Рассмотрим движение поезда по кривому участку пути с радиусом кривизны этого участка  $\rho = 650$  м (рис. 1.31). Пусть скорость поезда при переходе с прямого участка на кривой участок пути равна  $v_0 = 20,8$  м/с ( $\sim 75$  км/ч). Поезд, двигаясь по кривому участку пути, через  $t = 10$  с приобрёл скорость  $v = 27,8$  м/с ( $\sim 100$  км/ч).

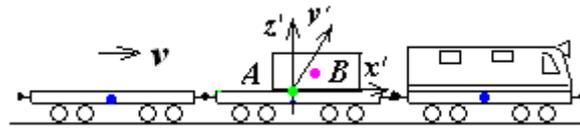


Рис. 1.31. К движению поезда по кривому участку пути.

Установить закон движения поезда и найти полное ускорение точки  $B$  вагона, совпадающей с центром тяжести груза после перехода поезда с прямого участка пути на кривой.

*Решение.* Воспользуемся формулами для определения скорости и ускорения точки при *неравномерном криволинейном движении* (см. 4-й вид движения), при котором

$$a_\tau = d|\vec{v}|/dt \neq 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0.$$

Из (1.30) найдём касательное ускорение  $a_\tau$  поезда

$$a_\tau = (v - v_0)/t = (27,8 - 20,8)/10 = 0,7 \text{ м/с}^2.$$

Закон движения поезда определяют по (1.33). Поскольку для кривого участка пути постоянного радиуса кривизна кривой  $\rho$ , то нормальное ускорение находят по (1.27).

Полное ускорение точки  $B$  вагона, согласно (1.22), равно

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho^2 a_\tau^2 + v^4} = \frac{1}{650} \sqrt{650^2 \times 0,7^2 + 27,8^4} = 1,38 \text{ м/с}^2.$$

## 1.9. Сложное движение точки<sup>12</sup>

Применительно к сфере грузовых перевозок отметим, что движение груза относительно пола вагона, совершающего пространственные колебательные движения относительно рельсовых нитей (железнодорожный путь), можно рассматривать как *сложное движение* точки (тело). При этом происходит продольное и поперечное движение груза по отношению к вагону, а также поворот груза вокруг вертикальной оси по отношению к плоскости пола вагона. Движение частиц воздуха (ветер) по отношению к движущемуся вагону, особенно при его скатывании с горки, также следует рассматривать как сложное движение. Поэтому нахождение относительной скорости частиц воздуха является важной задачей, позволяющей определять давление воздуха на груз или на вагон при перевозке грузов и формировании подвижного состава на сортировочной горке.

### *Абсолютное, переносное и относительное движение точки*

Представим себе, что наблюдается движение центра тяжести  $C$  груза в виде сплошного цилиндрического катка  $2$  по отношению к некоторой системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с платформой  $1$ , которая сама движется относительно осей  $Axyz$  (рис. 1.32). Значит, систему осей  $Axyz$  *условно* будем считать *неподвижной* (инерциальной), если эта система движется равномерно и прямолинейно. Систему отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$  («подвижные» оси) назовем *неинерциальной* системой отсчёта.

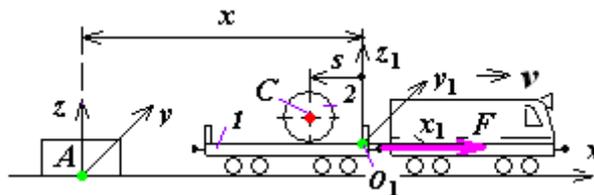


Рис. 1.32. Система неподвижных и подвижных координатных осей.

Здесь за основную (*условную*) неподвижную систему отсчёта  $Axyz$  приняли систему координат, связанную со станцией отправления поезда  $A$ . Для изучения движения груза  $2$  *относительно* платформы  $1$  за *подвижную* систему отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$  приняли систему координат, жестко связанную с платформой (см. рис. 1.32). Считаем, что каток  $2$  катится по отношению к платформе без скольжения на расстояние  $s$ .

<sup>12</sup> Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1966. – 596 с.

В этом случае движение центра тяжести  $C$  груза 2 по отношению к подвижным осям  $O_1x_1y_1z_1$  (платформа) будет *относительным* движением (англ. *relative motion*). Движение подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$  по отношению к неподвижной  $Axyz$  (станция отправления поезда  $A$ ) (подразумеваемая при этом движение той точки  $C_e$  подвижной системы отсчёта, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка  $C$ ) будет *переносным* движением (англ. *transportation*). При движении поезда по кривому участку пути переносными будут угловая скорость  $\bar{\omega}_e$  и угловое ускорение  $\bar{\varepsilon}_e$  подвижной системы отсчёта. Движение центра тяжести  $C$  груза 2 относительно неподвижных осей  $Axyz$  будет *абсолютным* движением.

*Абсолютное движение* точки (или тела) (англ. *absolute motion*) можно назвать также *сложным* или *результатирующим* движением, поскольку его можно рассматривать как *результат сложения относительного и переносного движений*. Эти движения по отношению к абсолютному движению являются *составляющими*.

Основная задача кинематики в случае сложного движения точки заключается в том, чтобы, зная относительное движение точки и переносное движение, т. е. движение подвижной системы отсчёта, найти абсолютное движение точки и, следовательно, определить её траекторию, скорость и ускорение в этом движении. Также встречаются задачи, в которых, зная абсолютное движение точки (например, частиц воздуха) и переносное движение (например, скорость вагона), т. е. движение подвижной системы отсчёта, найти относительное движение точки (т. е. частиц воздуха (скорость ветра)).

При этом, желая изучить *относительное* движение точки, *следует мысленно остановить переносное движение* и изучать движение далее по законам и правилам абсолютного движения точки.

Если необходимо изучить *переносное* движение точки, *следует мысленно остановить относительное движение* и рассматривать далее движение точки по формулам кинематики точки в абсолютном движении.

Уравнения движения точки  $M$  в относительном движении *в параметрическом виде* определяют выражениями (см. уравнения (1.3))

$$x_1 = f_1(t), \quad y_1 = f_2(t), \quad z_1 = f_3(t), \quad (1.39)$$

где  $x_1, y_1, z_1$  – координаты движущейся точки  $M$  в относительной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  (рис. 1.33).

Для определения относительной траектории точки  $M$  в *координатной форме* необходимо исключить время  $t$  из системы уравнений (1.39).

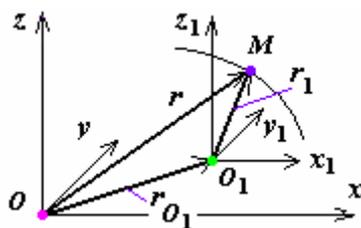


Рис. 1.33. К определению траектории движения точки в относительной системе координат.

Зависимость между  $\bar{r}$  – радиус-вектором точки  $M$  в абсолютной системе координат (*инерциальная* система отсчёта),  $\bar{r}_1$  – радиус-вектором той же точки  $M$  в относительной системе координат (*неинерциальная* система отсчёта) и  $\bar{r}_{O_1}$  – радиус-вектором начала подвижной, относительной системы координат задают выражениями (см. *метод проекций* [Бухгольц, 1967])

$$\bar{r} = \bar{r}_{O_1} + \bar{r}_1, \quad (1.40)$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (1.40a)$$

$$\bar{r}_{O_1} = x_{O_1}\bar{i} + y_{O_1}\bar{j} + z_{O_1}\bar{k}, \quad (1.40б)$$

$$\bar{r}_1 = x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1. \quad (1.40в)$$

В этих выражениях  $x, y, z$  и  $x_1, y_1, z_1$  – абсолютные и относительные координаты точки  $M$ ;  $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$  – координаты точки  $O_1$  начала относительной системы координат по отношению к системе  $Oxyz$ .

Выражение (1.40) определяет уравнение *абсолютного* движения точки  $M$  в векторном виде с учётом (1.40а–в). Выражение (1.40в) даёт векторное уравнение движения точки  $M$  в *относительном* движении.

**П р и м е р 1.** Груз 2 скользит относительно платформы (см. рис. 1.32). Скорость платформы (поезда)  $V_e = 27$  м/с. Скорость груза 2 по отношению к неподвижной платформе  $V_r = 0,01$  м/с. Требуется составить уравнения относительного и абсолютного движений груза 2.

**Р е ш е н и е.** Выберем начало относительной и абсолютной систем координат в той точке, где находился груз в начальный момент времени. Движение платформы (поезда) примем за переносное движение  $x_e$ . Относительная система координат  $O_1x_1y_1z_1$  составляет одно целое с движущимся грузом, следовательно, она участвует в переносном движении со скоростью  $V_e = 27$  м/с.

Чтобы составить уравнение относительного движения груза, *остановим* мысленно движение груза. Тогда легко получить уравнение относительного движения

$$x_r = v_r t = 0,01t .$$

Абсолютное движение груза – это движение по отношению к станции  $A$ , к системе координат  $Oxyz$ , жёстко связанной с землей. Уравнение абсолютного движения в данном случае будет

$$x_a = x_e + x_r ,$$

где  $x_e = AO_1$  – абсцисса начала относительной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  по отношению к неподвижной станции  $A$ .

Зависимость абсциссы от времени  $x_e$  определяют равенством

$$x_e = v_e t = 27t .$$

Следовательно, уравнение абсолютного движения груза имеет вид

$$x_a = x_e + x_r = 27t + 0,01t = 27,01t.$$

#### ***Относительные, переносные и абсолютные скорость и ускорение точки***

Абсолютной скоростью  $\bar{v}_a$  (англ. *absolute of velocity*) и абсолютным ускорением  $\bar{a}_a$  (англ. *absolute of acceleration*) точки  $M$  называют её скорость и ускорение, вычисленные относительно *неподвижной* системы отсчёта  $Axyz$ .

Относительной скоростью  $\bar{v}_r$  (англ. *relative of velocity*) и относительным ускорением  $\bar{a}_r$  (англ. *relative of acceleration*) точки  $M$  называют её скорость и ускорение, вычисленные относительно *подвижной* системы отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$ .

Переносной скоростью  $\bar{v}_e$  (англ. *transportation of velocity*) и переносным ускорением  $\bar{a}_e$  (англ. *transportation of acceleration*) точки  $M$  называют скорость и ускорение точки, *принадлежащей* подвижной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , *совпадающей* в данный момент с движущейся точкой  $M$  и *вычисленной* относительно *неподвижной* системы отсчёта  $Axyz$ .

### 1.9.1. Теорема сложения скоростей

Согласно *теореме сложения скоростей* при сложном движении<sup>13</sup> абсолютная скорость точки  $\bar{v}_a$  равна геометрической сумме переносной  $\bar{v}_e$  и относительной  $\bar{v}_r$  скоростей (см. правила сложения двух векторов)<sup>14</sup>:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (1.41)$$

Для определения относительной скорости точки *следует мысленно остановить переносное движение* и вычислить относительную скорость по правилам кинематики точки.

Для получения переносной скорости точки *следует мысленно остановить относительное движение* и искать переносную скорость по правилам кинематики точки как скорость той точки подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , с которой совпадает в данный момент движущаяся точка  $M$ .

Модуль абсолютной скорости точки может быть определен двумя способами:

1) *рассчитан* как диагональ параллелограмма, построенного на переносной и относительной скоростях по *правилу сложения двух векторов*, вытекающую из теоремы косинусов (рис. 1.34, а):

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 - 2v_e v_r \cos(\varphi)}, \quad (1.42)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\bar{v}_e$  и  $\bar{v}_r$ ;

2) определён *методом проекций* [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]. Для этого следует выбирать оси координат  $Oxy$  и спроецировать на них равенство (1.41) (рис. 1.34, б). Тогда зависимость между абсолютной, переносной и относительной скоростями точки  $M$  определится формулами:

$$\left. \begin{aligned} v_{ax} &= v_{ex} + v_{rx}, \\ v_{ay} &= v_{ey} + v_{ry}. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

<sup>13</sup> Бутенин Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В 2 т. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 736 с.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 768 с.

<sup>14</sup> Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980. – 976 с.

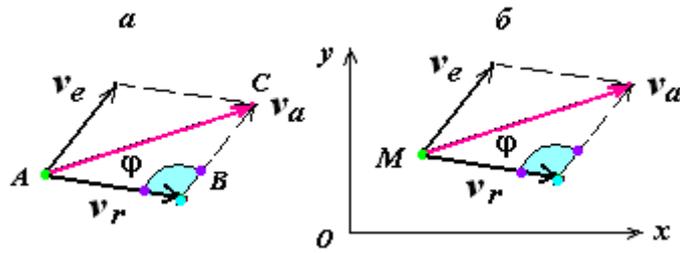


Рис. 1.34. К сложению векторов.

Проекции абсолютной скорости точки  $v_{ax}$  и  $v_{ay}$  могут быть представлены через производные по координатам точки на оси  $Ox$  и  $Oy$ :  $v_{ax} = \frac{dx}{dt}$  и  $v_{ay} = \frac{dy}{dt}$ . В этом случае после интегрирования может быть получена траектория точки  $M$ .

Величину модуля абсолютной скорости и направление этой скорости находят по её проекциям и направляющими косинусами [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980].

В частном случае, если  $\varphi = 0$ , т. е. скорости  $\bar{v}_e$  и  $\bar{v}_r$  направлены по одной прямой в одну сторону, то  $\cos(\varphi) = 1$  и абсолютная скорость точки равна алгебраической сумме переносной и относительной скоростей. Поэтому для модуля абсолютной скорости получаем

$$v_a = v_e + v_r. \quad (1.44)$$

Если  $\varphi = 180^\circ$ , т. е. скорости  $\bar{v}_e$  и  $\bar{v}_r$  направлены по одной прямой в противоположные стороны, то  $\cos(\varphi) = -1$  и абсолютная скорость точки также равна алгебраической сумме переносной и относительной скоростей. Тогда для модуля абсолютной скорости имеем

$$v_a = |v_e| - |v_r|. \quad (1.45)$$

Если  $\varphi = 90^\circ$ , то абсолютная скорость точки равна (теорема Пифагора)

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}. \quad (1.46)$$

Нередко в задачах требуется найти относительную скорость точки  $\bar{v}_r$ , зная её абсолютную  $\bar{v}_a$  и переносную  $\bar{v}_e$  скорости. В данном случае из равенства (1.41) находят

$$\bar{v}_r = \bar{v}_a - \bar{v}_e, \quad (1.47)$$

что соответствует *правилу вычитания векторов* [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980].

**Пример 2.** Вагон движется поступательно с переносной скоростью  $\bar{v}_e$  (рис. 1.35). Скорость дождевой капли  $M$ , как абсолютная скорость, направлена по вертикали вниз и равна  $\bar{v}_a$ . Найти скорость дождевой капли относительно вагона  $\bar{v}_r$  (относительно подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$ , связанных с вагоном).

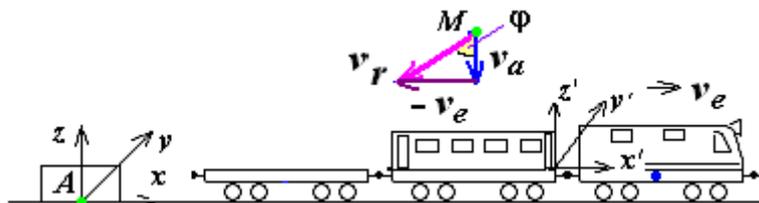


Рис. 1.35. К определению скорости дождевой капли.

**Решение.** Поскольку переносная скорость точки  $M$  равна скорости вагона  $\bar{v}_e$ , то согласно выражению (1.47), для решения задачи нужно к абсолютной скорости  $\bar{v}_a$  этой точки геометрически прибавить скорость, равную  $-\bar{v}_e$  (по *правилу вычитания векторов* [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]). Диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $\bar{v}_a$  и  $-\bar{v}_e$ , определяет искомую относительную скорость  $\bar{v}_r$ . Так как угол между векторами  $\bar{v}_a$  и  $\bar{v}_e$  равен  $90^\circ$ , то согласно (1.46), имеем

$$v_r = \sqrt{v_a^2 - v_e^2}. \quad (1.47a)$$

Угол наклона  $\varphi$  относительной скорости  $\bar{v}_r$  к вертикали находят из равенства

$$\operatorname{tg} \varphi = v_e / v_a. \quad (1.48)$$

Этим объясняется **явление**, что *пассажиру, едущему в вагоне, вертикально падающий дождь всегда кажется косым.*

**Пример 3.** Вагон движется поступательно с переносной скоростью  $\bar{v}_e = \bar{v} = \bar{v}_B$  (отыскиваемая величина) с сортировочной горки (рис. 1.36).

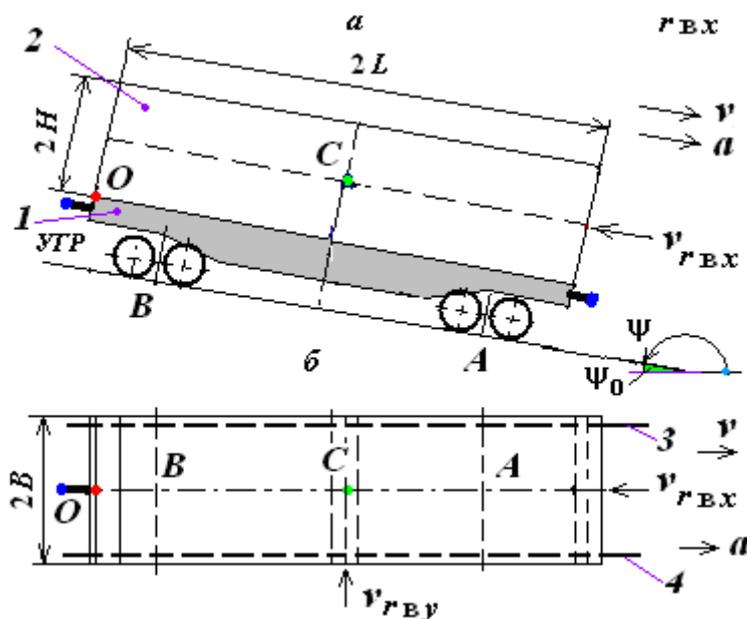


Рис. 1.36. Схема скатывания вагона с сортировочной горки.

$a$  – вид с боку;  $b$  – вид сверху:

1 – вагон; 2 – груз; 3 и 4 – наружная и внутренняя рельсовые нити/

Скорость ветра по отношению к вершине горки (земле) (т. е. абсолютная скорость частиц воздуха)  $\bar{v}_{a.в}$  (по данным гл. 5 СНиП «Строительная климатология и геофизика» *величина задаваемая*) направлена по горизонтали по оси  $Ox_{uz}$ . Найти проекции относительной скорости частиц воздуха (скорость ветра)  $\bar{v}_{r.в}$  (относительно подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$ , связанных с вагоном).

На рис. 1.36 обозначено:  $2L$ ,  $2B$  и  $2H$  – соответственно длина, ширина и высота груза, м;  $\psi$  (или  $\psi_0$ ) – уклон профиля сортировочной горки относительно горизонтали, рад.

**Решение.** Покажем зависимости проекции относительной скорости частиц воздуха (скорость ветра)  $\bar{v}_{r.в}$  (*вычисляемая величина*) от скорости ветра по отношению к вершине горки (земле)  $\bar{v}_{a.в}$  (*величина задаваемая*) и скорости вагона  $\bar{v} = \bar{v}_B$  (*отыскиваемая величина*). Допускаем, что вагон скатывается с вершины горки с переносной скоростью  $\bar{v}_e = \bar{v} = \bar{v}_B$  относительно неподвижной системы координат  $Ox_{uz}$ . Примем, что с вагоном жёстко связана подвиж-

ная система координат  $O_1x_1y_1z_1$ , а частицы воздуха, в свою очередь, движутся со скоростью  $\bar{v}_{rv}$  относительно подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  (т. е. вагона) (рис. 1.37).

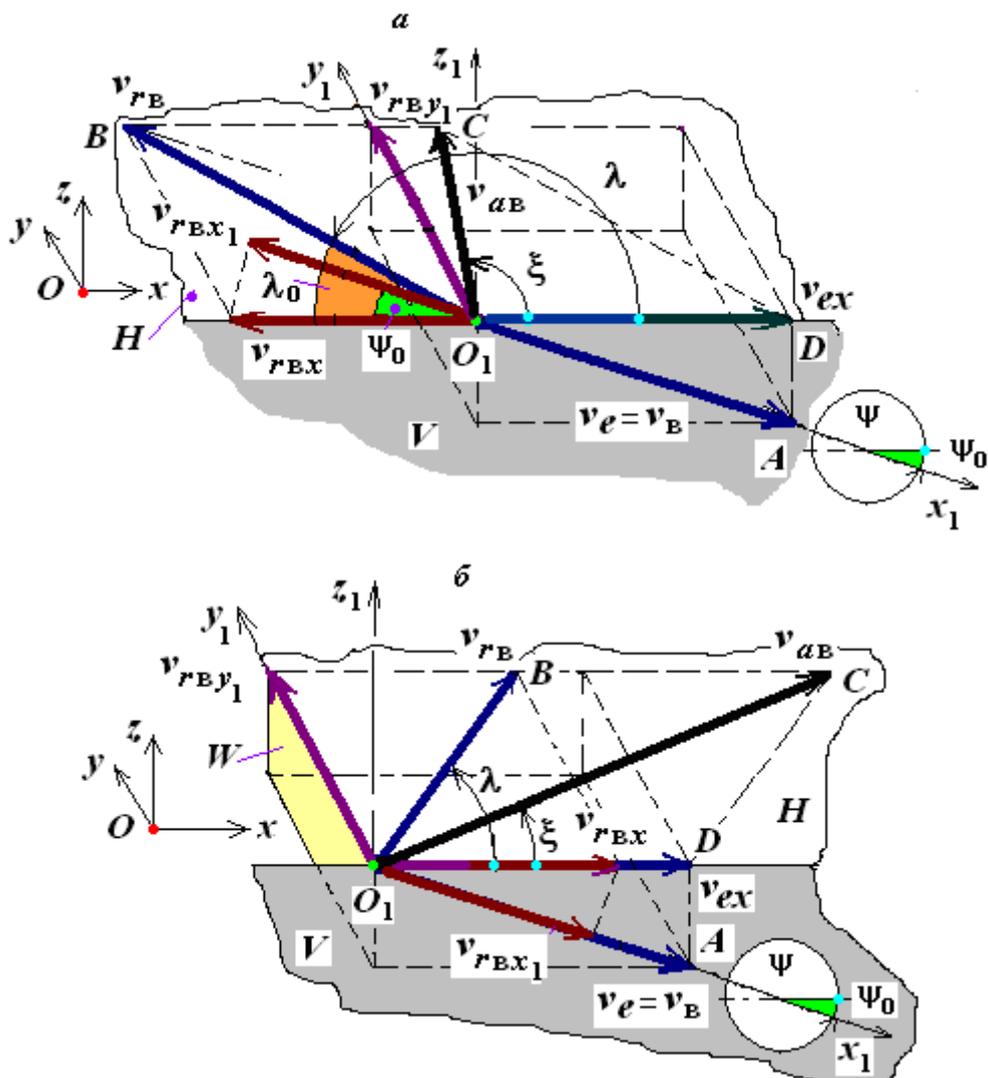


Рис. 1.37. Векторная диаграмма скорости вагона и ветра.  
 а – встречный ветер; б – попутный

На рис. 1.37 обозначено:  $O$  – начало неподвижной системы координат  $Oxyz$ , жёстко связанной с вершиной горки;  $O_1$  – начало подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , жёстко связанной с вагоном;  $H$ ,  $V$  и  $W$  – горизонтальная, вертикальная и фронтальная плоскости;  $\psi_0$  – угол спуска (в соответствии с профилем горки *величина задаваемая*);  $\bar{v}_{rv}$  – относительная скорость частиц воздуха (скорость ветра) по отношению к подвижной системе отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$  (вагон) (*величина вычисляемая*);  $\lambda$  – направляющий угол вектора относительной

скорости частиц воздуха по оси  $Ox$  (вычисляемая величина);  $\bar{v}_{ав}$  – абсолютная скорость частиц воздуха по отношению к земле (к вершине горки) (величина задаваемая);  $\xi$  – направляющий угол вектора абсолютной скорости частиц воздуха по оси  $Ox$  (величина задаваемая).

Считаем, что относительная скорость частиц воздуха (скорость ветра)  $\bar{v}_{rв}$  расположена на горизонтальной плоскости  $H$  и направлена под углом  $\lambda$  (или  $\lambda_0$ ) к горизонту (ось  $Ox$ ), а переносная скорость (скорость вагона)  $\bar{v}_e = \bar{v} = \bar{v}_в$  – на вертикальной плоскости  $V$  и направлена под углом спуска горки  $\psi$  (или  $\psi_0$ ) к горизонту (ось  $Ox$ ).

Согласно теореме о сложении скоростей при сложном движении [Бутенин и др., 1998; Яблонский, Никифорова, 1998], запишем (см. (1.41))

$$\bar{v}_{ав} = \bar{v}_e + \bar{v}_{rв} . \quad (1.49)$$

где  $\bar{v}_{ав}$  – абсолютная скорость частиц воздуха (скорость ветра);  $\bar{v}_{ex} = \bar{v}_x = \bar{v}_{вx}$  – проекция переносной скорости (скорость вагона)  $\bar{v}_e = \bar{v} = \bar{v}_в$  на ось  $Ox$ :

$$v_{ex} = v_x = v_{вx} = v_e \cos(\psi_0) \quad (1.49a)$$

с учётом того, что  $\psi$  (или  $\psi_0$ ) – угол спуска горки к горизонту (ось  $Ox$ );  $\bar{v}_{r.в}$  – относительная скорость частиц воздуха (скорость ветра) по отношению к вагону.

Будем иметь в виду, что для рис. 1.37, а, где направление ветра противоположно направлению движения вагона (т. е. встречный ветер), проекция (1.49), согласно правилу вычитания векторов (см. (1.47)), запишется в виде

$$\bar{v}_{ав} = \bar{v}_{ex} + (-\bar{v}_{rв}) , \quad (1.50)$$

откуда

$$\bar{v}_{rв} = \bar{v}_{ex} - \bar{v}_{ав} . \quad (1.51)$$

В последнем выражении модуль относительной скорости частиц воздуха (т.е. скорость ветра относительно вагона)  $\bar{v}_{r.в}$  находят по теореме косинусов (см. (1.42)):

$$v_{rB} = \sqrt{v_{ex}^2 + v_{aB}^2 - 2v_{ex}v_{aB} \cos(\bar{v}_{ex}, \bar{v}_{aB})}. \quad (1.52)$$

В (1.52), если ветер встречный, то угол между векторами  $\bar{v}_{ex}$  и  $\bar{v}_{aB}$   $\cos(\bar{v}_{ex}, \bar{v}_{aB}) = \cos(\xi)$  тупой, а если попутный, то острый ( $\xi$  – угол между векторами  $\bar{v}_{ex}$  и  $\bar{v}_{aB}$ )<sup>15</sup>.

В (1.51) направляющий угол  $\lambda$  относительной скорости частиц воздуха (скорость ветра)  $\bar{v}_{rB}$  находят по теореме синусов

$$\frac{\sin(\xi)}{\sin(\pi - \lambda)} = \frac{v_{rB}}{v_{aB}},$$

или, учитывая, что  $\sin(\pi - \lambda) = \sin(\lambda)$  (см. рис. 1.37, а),

$$\sin(\lambda) = \frac{v_{aB}}{v_{rB}} \sin(\xi). \quad (1.53)$$

Для рис. 1.37, а, где направление ветра противоположно направлению движения вагона (т. е. встречный ветер), проекция (1.51) на ось  $Ox$  имеет вид

$$v_{rB.x} = v_e \cos(\psi_0) - v_{aB} \cos(\xi), \quad (1.54)$$

где  $\xi$  – угол между результирующим вектором  $\bar{v}_{aB}$  (абсолютная скорость частиц воздуха (скорость ветра)) и продольной осью  $Ox$ , рад.

Для рис. 1.37, б, где направление ветра совпадает с направлением движения вагона (т. е. попутный ветер), проекция (1.49) на ось  $Ox$  имеет вид

$$v_{aB} \cos(\xi) = v_e \cos(\psi_0) + v_{rB.x},$$

откуда

$$v_{rB.x} = v_{aB} \cos(\xi) - v_e \cos(\psi_0). \quad (1.55)$$

<sup>15</sup> Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. – Минск: Вышэйш. шк., 1988. – 269 с.

### 1.9.2. Теорема сложения ускорений

Ускорение точки при переносном поступательном и произвольном переносном движении определяют по *теореме сложения ускорений* (или теоремой Кориолиса<sup>16</sup>), согласно которой абсолютное ускорение точки  $\bar{a}_{\text{абс}}$  равно геометрической сумме переносного ускорения  $\bar{a}_e$ , относительного ускорения  $\bar{a}_r$  и ускорения Кориолиса  $\bar{a}_C$ :

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_C. \quad (1.56)$$

Ускорение Кориолиса точки называют ещё *поворотным*, так как оно появляется при наличии *вращения* (поворота) подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$ . Применительно к перевозке груза на железнодорожном транспорте, например, ускорение Кориолиса появляется *при движении подвижного состава по кривым участкам пути*, где за подвижную ось  $O_1x_1y_1z_1$  можно принять любую точку вагона с грузом.

**Одна из причин появления ускорения Кориолиса кинематическая** – движение подвижной системы отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с платформой, а **другая причина** заключается в том, что переносная угловая скорость изменяет направление относительной скорости, а относительное движение влияет на переносное (относительная скорость изменяет относительные координаты точки и соответственно переносную скорость точки)<sup>17</sup>.

Таким образом, причин появления ускорения Кориолиса две. В формуле для ускорения Кориолиса учтена эта двойка (см. (1.57)).

Применительно к грузу, размещенному в вагоне, одной из основных причин появления переносных ускорений  $a_{ex}$ ,  $a_{ey}$  и  $a_{ez}$  также будет *кинематическая* – движение подвижной системы отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с платформой, т. е. с подвижным составом, движущимся со скоростью поезда  $\bar{v}$  по кривому участку пути с радиусом кривизны  $\rho$  траектории в данной точке (см. пп. 4.6.1). Следовательно, в неинерциальной системе отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$  груз получает ускорение в результате ускоренного движения самой системы отсчёта.

---

<sup>16</sup> Кориолис Гюстав Гаспар – французский учёный в области механики (1792–1843). Преподавал на кафедре прикладной механики в Школе мостов и дорог (до 1837 г.).

<sup>17</sup> Бугаенко Г.А., Маланин В.В., Яковлев В.И. Основы классической механики. – М.: Высш. шк., 1999. – С.366.

Для определения относительного ускорения точки *следует мысленно остановить переносное движение* и вычислить относительное ускорение по правилам кинематики точки.

Для определения переносного ускорения точки *следует мысленно остановить относительное движение* и вычислить переносное ускорение по правилам кинематики точки как ускорение той точки подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , с которой совпадает в данный момент движущаяся точка  $M$ .

Ускорение Кориолиса в геометрическом равенстве (1.56) запишется в виде векторного произведения двух векторов  $\overline{\omega}_e$  и  $\overline{v}_r$  :

$$\overline{a}_C = 2[\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r], \quad (1.57)$$

где  $\overline{\omega}_e$  – вектор угловой скорости переносного движения (подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$  по радиусу кривизны  $\rho$  траектории данной точки кривой);  $\overline{v}_r$  – вектор относительной скорости точки.

Модуль ускорение Кориолиса определяют согласно *правилу векторного произведения двух векторов* [Бронштейн, Семендяев, 1980; Воднев и др., 1988]

$$a_C = 2\omega_e v_r \sin(\overline{\omega}_e, \overline{v}_r) = 2\omega_e v_r \sin \varphi, \quad (1.58)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\overline{\omega}_e$  и  $\overline{v}_r$ .

Отметим, что в (1.58) угловая скорость переносного движения  $\omega_e$  – *величина вычисляемая*, рад/с ( $\omega_e = v^2 / \rho$ ,  $v$  – скорость поезда, м/с;  $\rho$  – радиус кривизны траектории в данной точке кривого участка пути, м), а относительная скорость точки  $v_r$  – *отыскиваемая величина*, м/с.

Из (1.57) вытекает, что ускорение Кориолиса  $\overline{a}_C$  всегда перпендикулярно относительной скорости движения  $\overline{v}_r$  ( $\overline{a}_C \perp \overline{v}_r$ ), а значит, и касательной к относительной траектории точки.

Из формул (1.57) и (1.58) следует, что *ускорение Кориолиса обращается в нуль*, если угловая скорость переносного движения  $\overline{\omega}_e$  параллельна относительной скорости  $\overline{v}_r$ , т. е. если  $\sin(\overline{\omega}_e, \overline{v}_r) = 0$  (согласно *правилу векторного произведения двух векторов* [Воднев и др., 1988]).

Ускорение Кориолиса *обращается в нуль*, если  $\overline{\omega}_e$  или  $\overline{v}_r$  равны нулю (т. е. когда *переносное движение является поступательным*).

*Направление* ускорения Кориолиса  $\overline{a}_C$  определяют по *правилу векторного произведения* [Воднев и др., 1988]. *Направление* этого ускорения определяют

также по правилу Н.Е. Жуковского<sup>18</sup>: спроецируют относительную скорость  $\bar{v}_r$  на плоскость, перпендикулярную к угловой скорости  $\bar{\omega}_e$  и поворачивают проекцию в этой плоскости на угол  $90^\circ$  в сторону вращения определяемого  $\bar{\omega}_e$  – это и будет направление ускорения Кориолиса.

Покажем, как находят направление ускорения Кориолиса. Пусть вагон с грузом, с которым неподвижно связана система координат  $O_1x_1y_1z_1$ , движется по кривому участку пути  $M_1M_2$  по траектории  $L$  с переносной скоростью  $\bar{v}_e$ , равной заданной скорости поезда  $\bar{v}_п$ , относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ . В момент времени  $t$  пусть вагон с грузом занимает положение  $M$ . Через точку  $M$  проводим касательную  $\tau - \tau$  и нормаль  $n - n$  так, как показано на рис. 1.38.

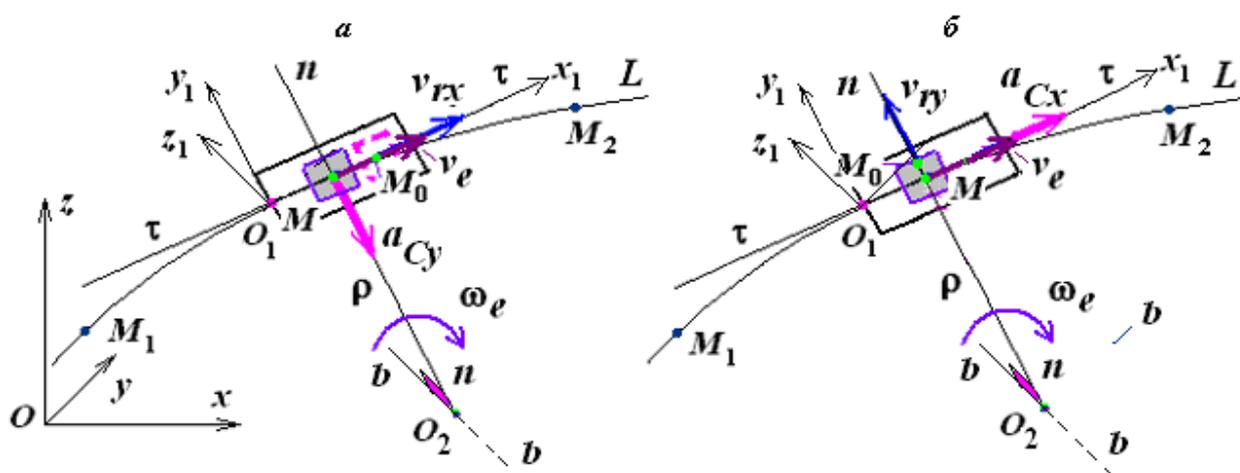


Рис. 1.38. К определению направления ускорения Кориолиса.

Рассмотрим случай, когда в момент времени  $t$  произойдёт продольный сдвиг груза относительно вагона со скоростью  $\bar{v}_r$  (пока отыскиваемая величина) по касательной  $\tau - \tau$  на расстояние  $MM_0$  (см. рис. 1.38, а). При этом появляется ускорение Кориолиса  $\bar{a}_C$ , модуль которого определяют по (1.58), всегда

<sup>18</sup> Жуковский Николай Егорович – крупный русский учёный–механик (17.01.1847 – 17.03.1921). Родился в семье инженера путей сообщения. В 1858 г. поступил на физико-математический факультет Московского университета. В 1872 г. обучался в Московской Практической академии коммерческих наук для преподавания механики. В 1874 г. утверждён доцентом кафедры аналитической механики училища. В 1876 г. защитил диссертацию по теме: «Кинематика жидкого тела» и получил степень магистра прикладной механики. В 1882 г. защитил докторскую диссертацию. С 1890 г. академик Санкт-Петербургской Академии наук. В 1890 году начал заниматься теорией полёта аппарата тяжелее воздуха. Основные работы Н. Е. Жуковского посвящены гидродинамике и механике полёта самолётов.

направленное по нормали  $n - n$  к центру кривизны  $\rho$  (для рассматриваемого профиля пути величина известная) рассматриваемой точки  $M$  траектории  $L$ .

*Рассмотрим второй случай*, когда в момент времени  $t$  произойдёт поперечный сдвиг груза относительно вагона со скоростью  $\bar{v}_r$  (пока отыскиваемая величина) по нормали  $n - n$  на расстояние  $MM_0$  (см. рис. 1.38, б). При этом также появляется ускорение Кориолиса  $\bar{a}_c$ , модуль которого определяют по (1.58), всегда направленное по касательной  $\tau - \tau$  к кривизне  $\rho$  рассматриваемой точки  $M$  траектории  $L$ .

*Рассмотрим третий случай*, когда в вагоне размещён легковесный груз (груз, вес которого почти в 2 раза меньше тары вагона) и в момент времени  $t$  из-за сложности условий перевозок (наличие волны неровности пути и др.) произойдёт его вертикальный сдвиг (т. е. «подпрыгивание») относительно пола вагона со скоростью  $\bar{v}_r$  по бинормали  $b - b$  (параллельно оси  $O_1z_1$ , перпендикулярной плоскости движения вагона с грузом) на какое-то расстояние (на рис. 1.38 такой случай не показан). При этом груз вынужден двигаться параллельно оси вращения  $O_2O_2$ , совпадающей с бинормалью  $b - b$  и с осью  $O_1z_1$ . Тогда вектор относительной скорости  $\bar{v}_r$ , направленной параллельно оси  $O_1z_1$ , будет параллелен вектору переносной угловой скорости  $\bar{\omega}_e$ , направленной по бинормали  $b - b$  вниз от плоскости чертежа (на рис. 1.38 показан штрихами) и в (1.58)  $\sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 0$ .

***Теорема сложения ускорений в случае, когда относительное движение точки является криволинейным***

Если траектории точек подвижной системы координат *не прямолинейны* и *относительное движение точки также является криволинейным*, то целесообразно вычислять переносное ускорение как геометрическую сумму нормального и касательного переносных ускорений, относительное ускорение – как геометрическую сумму нормального и касательного относительных ускорений. Тогда геометрическое равенство (1.56) записывается в виде

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_c. \quad (1.59)$$

где  $\bar{a}_e^n, \bar{a}_r^n$  – соответственно нормальные ускорения в переносном и относительном движениях;  $\bar{a}_e^\tau, \bar{a}_r^\tau$  – соответственно касательные ускорения в переносном и относительном движениях.

*Теорема сложения ускорений при использовании метода проекций*

Выбирая неподвижную систему координат  $Oxyz$  и проецируя равенство (1.59) на каждую из этих осей, согласно методу проекций векторов [Воднев и др., 1988], имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{ax} &= \bar{a}_{ex}^n + \bar{a}_{ex}^\tau + \bar{a}_{rx}^n + \bar{a}_{rx}^\tau + \bar{a}_{Cx}, \\ \bar{a}_{ay} &= \bar{a}_{ey}^n + \bar{a}_{ey}^\tau + \bar{a}_{ry}^n + \bar{a}_{ry}^\tau + \bar{a}_{Cy}, \\ \bar{a}_{az} &= \bar{a}_{ez}^n + \bar{a}_{ez}^\tau + \bar{a}_{rz}^n + \bar{a}_{rz}^\tau + \bar{a}_{Cz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

При этом *модуль и направление абсолютного ускорения* находят по её проекциям из (1.60) и направляющими косинусами.

Отметим, что в задачах грузовых перевозок отсутствует примеры применения (1.60).

## Раздел II

### КИНЕТИКА

В данном разделе изложены важнейшие положения геометрической (элементарной) и аналитической статики с последующим описанием содержаний аналитической динамики материальной точки и системы.

#### 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ (ЭЛЕМЕНТАРНАЯ) СТАТИКА

Геометрическая статика рассматривается как статика абсолютного твёрдого тела (или просто твёрдого тела). При этом начинается статика с введения в кинетику, где приведены основополагающие законы классической механики и понятия о материальной системе, что позволило разделить статику на геометрическую (элементарную) и аналитическую.

В геометрической статике в основном представлены те разделы механики, которые имеют непосредственное отношение к задачам грузовых перевозок (например, погрузке–выгрузке грузов, к обоснованию технологии размещения и крепления грузов в вагонах, формированию подвижного состава на сортировочной горке и др.).

##### 2.1. Введение в кинетику<sup>19</sup>

**Кинетика** (от греч. kinētikós – *приводящий в движение*) изучает движение и равновесие материальных тел под действием сил. Основной задачей кинетики

---

<sup>19</sup> Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. – Ч. 1. – 467 с.  
Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики, Ч. 1. – М.: Просвещение, 1965. – 538 с..  
Добычин И.А. Геометрическая статика: учеб. пособие. – Екатеринбург, 2004. – 183 с.

является определение законов механического движения тел при известных действующих силах.

### 2.1.1. Сила и масса

Кинетика, как вторая часть механики, посвящена изучению движения материальных тел в зависимости от факторов, обуславливающих характер или закон рассматриваемого движения. Эти факторы зависят как от тел, окружающих данное тело, так и от свойств самого тела.

Влияние окружающих тел заключается в том, что они взаимодействуют с данным телом, изменяя его движение (или вызывая деформацию тела). Например, в задаче грузовых перевозок для груза (как данного тела), размещённого в вагоне, окружающими телами являются гибкие (растяжки, обвязки из отожжённой проволоки) и упорные (деревянные бруски) средства креплений. В данном случае, указанные окружающие тела, непосредственно взаимодействуя с грузом, препятствуют линейным и угловым перемещениям груза. Эффект взаимодействия тел зависит от свойств взаимодействующих тел (сплошной или пустотелый, т. е. от массы тел) и от их расположения в пространстве. Величину, являющейся мерой механического взаимодействия материальных тел, в механике называют *силой*.

Кроме внешних воздействий, т. е. сил, движение любого материального тела определяют ещё его *инертностью*, или *инерцией* (англ. inertia неторопливый, ленивый). *Инертность* (или *инерция*) – одно из основных *свойств* материи. Оно проявляется в способности тела сохранять своё движение при отсутствии сил и изменять его под действием сил не сразу, а постепенно, тем медленнее, чем больше вещества (материи) содержится в теле (из сочинения М. В. Ломоносова, которую рецензировал Л. Эйлер<sup>20</sup>). Таким образом, чем больше вещество заключено в теле, тем больше его инерция. Величину  $m$ , являющуюся *мерой инертности* тела, называют *массой*<sup>21</sup> (англ. mass) этого тела. *Иначе*, количество вещества, содержащееся в данном геометрическом объёме и пропорциональное его весу, называют *массой тела*. Единица измерения массы – килограмм (кг).

*Сила* и *масса* представляют собой *основные понятия кинетики*. Поэтому *величины*, зависящие *от силы и массы*, носят название *кинетических*, тогда как *величины*, зависящие *от расстояния*, проходимого телом в пространстве, и *от времени*, называют *кинематическими*.

---

<sup>20</sup> Яковлев А.Я. Леонард Эйлер. – М.: Просвещение, 1983. – 78 с.

<sup>21</sup> Более подробно о массе тела см. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. 1. Статика. Кинематика. Ч. 2. Динамика. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 768 с.

### 2.1.2. Понятие о материальной точке и массе тела

Будем рассматривать тело столь малых размеров, что различием в движении его частиц можно пренебречь. Такое тело называют *материальной точкой* (или *материальной частицей*). Материальную точку можно представлять в виде точки (геометрической), обладающей *массой*  $m$ , размеры которой в конкретных условиях можно не учитывать. Поэтому в дальнейшем материальную точку будем называть просто *точкой* (частицей).

Поступательно движущееся тело *можно* всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела, поскольку в этом случае движения скорости и ускорения точек тела одинаковы. *Например*, груз, размещённый в вагоне без учёта его поворота относительно пола вагона по вертикальной оси, можно принимать как материальную точку с массой, равной массе всего груза.

Произведение массы точки  $m$  на его скорость  $\bar{v}$  (англ. velocity) называют *количеством движения* (или *импульсом*) точки –  $m\bar{v}$ . Единица измерения количества движения – килограмм–метр в секунду (кг·м/с).

Поскольку масса  $m$  величина скалярная, положительная и постоянная для каждого материального тела, направление  $m\bar{v}$  совпадает с направлением скорости точки  $\bar{v}$ .

*Количество движения*  $m\bar{v}$  есть *вектор*, всегда совпадающий с направлением скорости точки  $\bar{v}$  (рис. 2.1).

*Количество движения* является одной из основных динамических характеристик движения точки.



Рис. 2.1. К направлению количества движения.

### 2.1.3. Основные законы механики

Основные понятия *кинетики* – силу и массу – вводят в механику соответствующими определениями, а соотношения между ними устанавливают системой аксиом, или законов, которые составляют основу механики.

**Первый закон** (закон инерции, открытый Галилеем Галилео<sup>22</sup> 1638 г.). *Изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерно-прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит этого состояния.*

*Иначе, изолированной материальной точкой* называют точку, которая перемещается в пространстве и времени. При этом исключают воздействие на точку окружающей среды – сил (например, силы аэродинамического сопротивления).

Равномерное и прямолинейное движение материальной точки (т. е. движение с постоянной скоростью  $\bar{v} = \text{const}$ ) является движением по инерции. Под состоянием равновесия материальной точки и твёрдого тела понимают не только состояние покоя, но и движение по инерции. Для твёрдого тела не только прямолинейное движение, но и равномерное вращение вокруг неподвижной оси (т. е. при  $\bar{\omega} = \text{const}$ ) также является движением по инерции.

Таким образом, свойство материальной точки сохранять свою скорость **даже при отсутствии действующих сил** называют *инерцией* (англ. inert). *Иначе, движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называют движением по инерции.*

Например, движение свободного тела (или материальной точки) при его падении под углом к горизонту. При отсутствии сопротивления движению среды (воздух) горизонтальная скорость тела остается постоянной, поскольку отсутствуют горизонтальные силы. Математическое доказательство первого закона инерции приведено в (4.17) (см. пп. 4.6.1)

Свойства точки сопротивляться действию силы также называют *инертностью*.

Систему отсчёта, в которой справедлив закон инерции, называют *инерциальной* (или *галилеевой*) *системой отсчёта*. Инерциальной можно считать систему отсчёта, жёстко связанной с Землёй, если пренебречь вращением Земли.

### **Примеры применения закона инерции**

**Пример 1.** Рассмотрим физику «срыва» груза относительно пола вагона (при этом неважно, что они закреплены к вагону или же уложены без креплений). При соударениях вагонов с грузами с группой неподвижно стоящих на пути нагруженных до полной грузоподъёмности инертным грузом (например,

---

<sup>22</sup> Галилей Галилео (15.02.1564 – 08.01.1642) – итальянский физик, механик, астроном, один из основателей точного естествознания. Галилей установил принципы, лёгшие в основу дальнейшего развития механики: принцип относительности, закон инерции (1638), закон независимости действия сил (чётко сформулированный И. Ньютоном в виде четвёртого закона динамики в 1687 г.). Ввёл понятия: скорости в данной точке, ускорения, сложения движений. Они составили фундамент для построения динамики, созданной в XVII в. Рене Декартом, Христианом Гюйгенсом и Исааком Ньютоном (04.01.1643 – 31.03.1727).

песком, щебнем и т. п.) полувагонов («стенкой») или при маневровых соударениях при формировании состава на железнодорожной станции *происходит «срыв»* груза вдоль вагона (точнее, относительно пола вагона) *по инерции*. Иначе, движение груза вдоль вагона происходит из-за свойства груза, согласно закону инерции, сохранять свою скорость, с которой он двигался вместе с вагоном. Причём скорость «срыва» груза с места  $\bar{v}_0$  равна скорости вагона с грузом до соударения  $\bar{v}_1$  (см. пп. 5.2.4, задача 2). Такое же явление происходит при экстренном торможении поезда как при движении по прямому участку пути, так и по кривому при спуске. Здесь скорость «срыва» груза с места  $\bar{v}_0$  равна скорости движения поезда  $\bar{v}$ . Доказательство этих гипотез математически представлено уравнением (4.17) (см. пп. 4.4.1) при условии, что моменты соударения вагонов и торможения поезда происходит в инерциальной системе отсчёта.

**Пример 2.** Выясним *физику срыва груза с места* (например, среднетоннажного или крупнотоннажного контейнера), *подвешенного на погрузочно-разгрузочных машинах* (ПРМ) (козловые и стреловые краны, автопогрузчики и др.), *при их внезапной остановке*. Такое явление может привести к опрокидыванию ПРМ относительно опор, расположенных со стороны возможного отклонения груза (см. п. 2.10). Для примера рассмотрим козловой кран для переработки крупнотоннажных контейнеров (рис. 2.2).



Рис. 2.2. Кран козловой КК-24, предназначенный

для переработки крупнотоннажных контейнеров.  
 1 – ферма крана; 2 – грузовая тележка с электроприводами, которая размещена на ферме крана; 3 – опоры крана; 4 – ветви пространственного полиспаста для подъёма и опускания спредера 5; 6 – крупнотоннажный контейнер.



Рис. 2.3. Козловой кран КК–20М 2 со спредером, предназначенный для переработки крупнотоннажных контейнеров.

1 – одна из ножек крана; 2 – ферма крана; 3– спредер для подъёма и опускания крупнотоннажного контейнера.

Напомним, что *полиспаст* – это устройство, которое образовано соединением нескольких блоков с подвижными осями вращения и одного с неподвижной осью вращения посредством систем гибких нерастяжимых нитей (стальных тросов и/или канатов). *Спредер* – специальное грузозахватное устройство, предназначенное для застропки (захвата) и отстропки (освобождения) крупнотоннажного контейнера (см. рис. 2.2, 2.3)<sup>23</sup>. Для реализации таких функций спредер оснащён электродвигателем, редуктором, открытыми цилиндрическими зубчатыми колёсами и рабочими органами специальной конфигурации (поворотный кулачок).

При внезапной остановке крана груз (контейнер) вместе со спредером, согласно закону инерции, начнёт вращаться относительно точки  $O$  подвеса канатов полиспаста (рабочего барабана грузовой тележки, на который намотаны канаты) со скоростью  $\bar{V}$ , равной переносной скорости крана до остановки  $\bar{V}_e$ , т.

<sup>23</sup> Туранова Х.Т. Прикладная механика в сфере грузовых перевозок. Екатеринбург: УрГУПС, 2008. – 365 с.

е.  $\bar{v} = \bar{v}_e$  (рис. 2.4). Причём переносная скорость крана является начальной скоростью  $\bar{v}_e = \bar{v}_0$ .

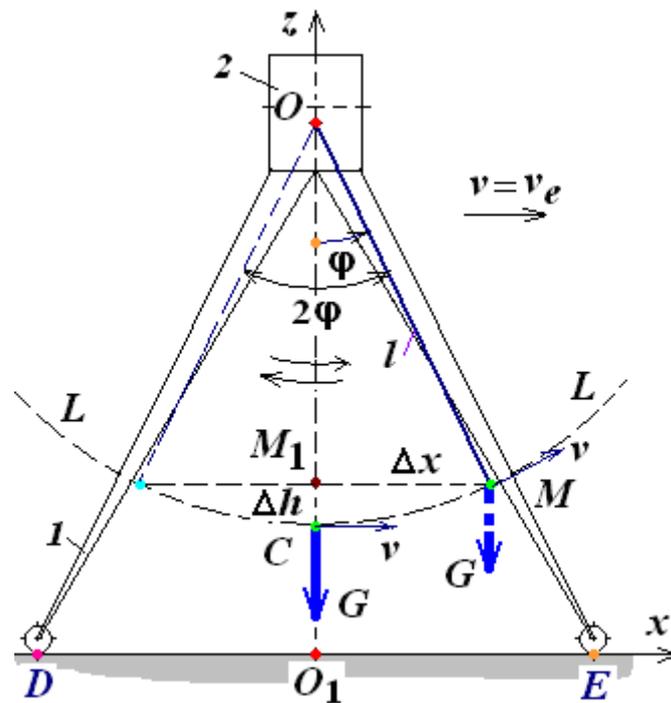


Рис. 2.4. Перемещение груза относительно корпуса крана по горизонтали.  
 $l$  – ножки крана; 2 – ферма крана, на которой размещена грузовая тележка.

На рис. 2.4 обозначено:  $C$  и  $G$  – общий центр масс и сила тяжести системы «спредер – груз»;  $L - L$  – траектория движения центра масс системы;  $M$  – точка, на которую может подняться система при внезапной остановке крана;  $D$  и  $E$  – опоры крана (точки контакта двухребордных колёс ножек крана с подкрановыми путями);  $\varphi = \varphi_{\max}$  – максимальный угол, на который может отклониться груз относительно вертикали, рад;  $2\varphi$  – максимальный угол размаха центра масс системы, рад;  $l$  – длина канатов полиспаста, м;  $\Delta x$  – расстояние, на которое по горизонтали может переместиться груз, м.

Отметим, что нахождение общего центра масс системы «спредер – груз»  $C$  выполняют по методике, описанной в п. 2.6.

При внезапной остановке крана приобретённая кинетическая энергия груза вместе со спредером  $E$  (англ. energy) (см. (4.31)), согласно закону сохранения энергии, переходит в потенциальную  $P$  (англ. potential), в результате чего имеют

$$\frac{Mv^2}{2} = Mg\Delta h, \quad (2.1)$$

где  $M$  – масса системы «спредер – контейнер» (в дальнейшем – груз), кг;  $\bar{v}_0$  – начальная скорость груза, равная переносной скорости крана  $\bar{v}_e$ , м/с;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\Delta h$  – высота, на которую может подняться груз, м.

Отсюда та высота, на которую может подняться груз, м:

$$\Delta h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (2.2)$$

Подчеркнём, что для определения высоты, на которую может подняться груз, следует вместо закона сохранения энергии применить теорему об изменении кинетической энергии для несвободной материальной точки в конечной форме (см. п. 4.4.2, (4.41)).

Из  $\Delta OMM_1$  находят то расстояние  $\Delta x$ , м, на которое по горизонтали может переместиться груз:

$$\Delta x = \sqrt{l^2 - (l - \Delta h)^2},$$

или, после преобразований,

$$\Delta x = \sqrt{\Delta h(2l - \Delta h)}, \quad (2.3)$$

где  $l$  – длина канатов полиспаста м.

Из  $\Delta OMM_1$  расстояние  $\Delta x$  может быть получено как

$$\Delta x = l \sin \varphi, \quad (2.3a)$$

где  $\varphi$  – угол, на который может отклониться груз относительно вертикали, рад:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{l - \Delta h}{l}\right).$$

В дальнейшем задача на опрокидывание крана может быть решена по методике п. 2.10 (см. (2.136)). Также может быть решена задача малых свободных угловых колебаний системы «спредер – контейнер».

**Пример 3.** Изучим физику падения пассажира с верхней полки купейного или плацкартного вагона поезда. Действие закона инерции ощущает на себе пассажир пассажирского поезда при резком движении поезда вперёд, произо-

шедшего из-за неопытности машиниста локомотива, или при внезапном торможении поезда из-за исключения случаев столкновения состава с каким-либо случайно появившимся на железной дороге объектом. При резком торможении поезда возможно падение пассажира с верхней полки у задней стенки купе по ходу движения поезда.

**Пример 4.** Выясним *физику падения пассажира, свободно стоящего в коридоре купейного или плацкартного вагона поезда при его вхождении в кривой участок пути.* Действие закона инерции испытывает на себе пассажир при вхождении пассажирского поезда из прямого в кривой участок пути, поскольку внезапное появление нормальной составляющей полного ускорения (см. пп. 1.8, рис. 1.18) всегда вызывает резкий поперечный толчок со всеми вытекающими из него последствиями. При этом возможно (и/или происходит) падение пассажира поперёк вагона из-за свойства пассажира как материального тела согласно закону инерции, сохранять свое прямолинейное движение, с которым он двигался вместе с вагоном или относительно него. Особо отметим, что на пассажира не действуют никакие внешние силы при отсутствии источника (т. е. объекта) в виде определённого тела (см. п. 4.5, (4.44)). Поэтому падение пассажира происходит естественным образом по закону инерции, если он не держится, например, за горизонтальные подручники вагона. При этом действие этого закона больше всего испытывает пассажир, стоящий лицом поперёк вагона (в сторону бокового стекла), и менее всего – вдоль вагона с широко расставленными ногами. При математическом описании явления падения пассажира в этом случае учитывают движение вагона с ускорением, которое зависит от скорости движения поезда  $\bar{V}$  и радиуса кривизны траектории  $\rho$  в данной точке кривого участка пути (см. (4.47)). Поэтому, возможно, «говорят», что причиной падения пассажира в рассматриваемом случае является действие силы инерции, хотя никакой силы на него не действует.

**Пример 5.** Рассмотрим *физику «срыва» с места пассажира автотранспорта.* Согласно закону инерции, возможен удар головой о лобовое стекло пассажира (свободно сидящего в автомобиле, не пристёгнутого ремнём безопасности) при резком торможении или столкновении автомобиля с другим подвижным или неподвижным объектом со скоростью автомобиля  $\bar{V}$  до столкновения или до удара.

**Пример 6.** Рассмотрим *физику «срыва» стальной футерованной трубы с кузова грузового автотранспорта* (рис. 2.4, а).

Согласно закону инерции, при внезапном торможении автотранспорта возможен «срыв» незакреплённой стальной футерованной трубы с места с той скоростью  $\bar{V}$ , с которой ехал автотранспорт до торможения на перекрёстке.



Рис. 2.4, а. Реальный срыв стальной трубы с места при внезапном торможении автотранспорта.

**Пример 7.** Изучим физику «срыва» с места пассажира воздушного лайнера. Согласно закону инерции, при внезапном падении лайнера вниз («воздушная яма») возможен удар головы пассажира, не пристегнутого ремнем безопасности, о потолок салона или во время посадки и руления самолёта – о переднее сиденье.

**Второй закон** (закон зависимости между количеством движения и силой, или *основной закон динамики материальной точки*, открытый Исааком Ньютоном в 1687 г. в знаменитом научном труде «Математические начала натуральной философии»). *Производная по времени от количества движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчёта равна геометрической сумме приложенных к точке сил.*

Математически данный закон записывают в виде уравнения

$$\frac{d(m\bar{v}_{\text{абс}})}{dt} = \bar{F} \quad (2.4)$$

Этот закон справедлив лишь по отношению к инерциальной системе отсчёта.

Из (2.4) следует, что сила, представляющая собой эффект взаимодействия данной точки с другими телами или точками, является фактором, изменяющим количество движения.

В классической механике масса частицы считается постоянной ( $m = \text{const}$ ), поэтому уравнение (2.4) представляют ещё в виде

$$m \frac{d\bar{v}_{\text{abc}}}{dt} = \bar{F}. \quad (2.5)$$

Умножая обе части (2.5) на  $dt$ , получают

$$m d\bar{v}_{\text{abc}} = \bar{F} dt.$$

Интегрируя полученное соотношение в пределах от  $\bar{v}_{\text{abc}.0}$  до  $\bar{v}_{\text{abc}}$ , соответствующие времени от  $t_0$  до  $t$ , И. Ньютон, вывел

$$m \int_{v_0}^v d\bar{v}_{\text{abc}} = \int_{t_0}^t \bar{F} dt,$$

откуда получил математическое представление второго закона динамики в виде<sup>24</sup>

$$m(\bar{v}_{\text{abc}} - \bar{v}_{\text{abc}.0}) = \bar{F}(t - t_0). \quad (2.5a)$$

Л. Эйлер в своем научном труде «Механика» (1736), обозначая  $\bar{v}_{\text{abc}} - \bar{v}_{\text{abc}.0} = \Delta\bar{v}_{\text{abc}}$  и  $t - t_0 = \Delta t$ , разделил обе части (2.5a) на  $\Delta t$ :

$$m \frac{\Delta\bar{v}_{\text{abc}}}{\Delta t} = \bar{F},$$

а затем, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$m \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta\bar{v}_{\text{abc}}}{\Delta t} = m \frac{d\bar{v}_{\text{abc}}}{dt},$$

представил левую часть как произведение массы тела  $m$  на производную от вектора скорости в данный момент времени

---

<sup>24</sup> Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. Динамика. – М.: Высш. шк., 1966. – 411 с.

$$m \frac{d\bar{v}_{\text{абс}}}{dt} = \bar{F},$$

или, учитывая, что  $\frac{d\bar{v}}{dt}$ , т. е. производная от вектора скорости в данный момент времени есть ускорение точки  $\bar{a}_{\text{абс}}$ , получил

$$m\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{F}, \quad (2.6)$$

где  $\bar{a}_{\text{абс}}$  – абсолютное ускорение точки.

Отсюда ясно, что второй закон устанавливает связь между силой и кинематической величиной – абсолютным ускорением  $\bar{a}_{\text{абс}}$ . Иначе, произведение массы точки (при  $m = \text{const}$ ) на её абсолютное ускорение равно действующей на точку силе.

Направление абсолютного ускорения  $\bar{a}_{\text{абс}}$  всегда совпадает с направлением силы  $\bar{F}$  (рис. 2.5). Единица измерения силы – ньютон ( $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ ).

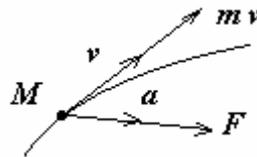


Рис. 2.5. К направлению абсолютного ускорения.

Можно дать другую формулировку основного закона динамики: *произведение массы материальной точки на абсолютное ускорение, которое оно получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление абсолютного ускорения всегда совпадает с направлением силы.*

Второй закон, как и первый, применим только в инерциальной (неподвижной) системе отсчёта.

Из этого закона непосредственно следует (см. уравнение (2.6)), что мерой инертности материальной точки является её масса, поскольку при действии данной силы точка, масса которой больше, т. е. более инертная, получит меньшее ускорение и наоборот, т. е. ускорение обратно пропорционально массе тела.

Сила тяжести в пустоте всем телам, независимо от их массы, сообщает постоянное ускорение (называемое *ускорением свободного падения*), равное  $g = 9,81 \text{ м}/\text{с}^2$  (величина данного ускорения изменяется с изменением широты местности

и высоты над уровнем моря). Поэтому, если вес материальной точки обозначим через  $\bar{G}$ , то уравнение (2.6) примет вид

$$m\bar{g} = \bar{G},$$

отсюда

$$m = \frac{\bar{G}}{\bar{g}}. \quad (2.7)$$

Масса материальной точки равна её весу, разделённому на ускорение свободного падения. Единица измерения массы – ньютон секунда в квадрате на метр ( $\text{Н}\cdot\text{с}^2/\text{м}$ ), что равносильно килограмму (кг).

Если сила на точку не действует, т. е.  $\bar{F} = 0$ , то  $m\bar{a}_{\text{абс}} = 0$  или  $m \frac{d\bar{v}_{\text{абс}}}{dt} = 0$ , отсюда ясно, что  $\bar{v} = \text{const}$ .

Итак, эффект действия силы на материальную точку заключается в том, что точка получает ускорение. При отсутствии силы ускорение точки равно нулю, т. е. точка движется по инерции, что согласуется с законом инерции.

Основной закон динамики устанавливает количественную связь между кинематическими факторами, обуславливающими движение точки, т. е. между действующей силой (внешний фактор)  $\bar{F}$  и массой точки (внутренний фактор)  $m$ , с одной стороны, и кинематической величиной ускорением  $\bar{a}$  – с другой.

Таким образом, действие силы на точку зависит от массы точки, которая является мерой её инерции.

Особо отметим, что второй закон динамики – фундаментальный закон естествознания в инерциальной системе отсчёта. Дифференциальная форма записи основного закона динамики (см. (2.5)) позволяют рассмотреть многочисленные прикладные задачи, где движение определяют переменными силами.

**Третий закон** (закон равенства действия и противодействия, открытый Исааком Ньютоном в 1687 г. Этот закон ясно понимал ещё и Роберт Гук (1635 – 1703)). Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки (тело), всегда равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны. Можно дать другую формулировку этого закона: всякому действию соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие (рис. 2.6).

Математически этот закон выражается равенством

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2. \quad (2.8)$$

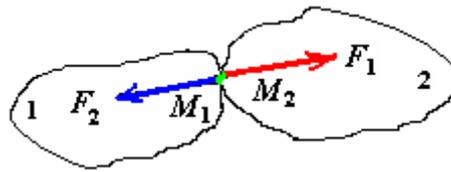


Рис. 2.6. К взаимодействию двух тел.

Третий закон устанавливает зависимость между действующими на материальные точки силами и является основой динамики системы материальных точек. Этот закон утверждает, что в природе нет односторонних действий.

Третий закон, как первый и второй, применим только в инерциальной (неподвижной) системе отсчёта.

### Практическое применение третьего закона механики

В технике вообще и в железнодорожном транспорте в частности решение любой практически важной задачи начинают с использования закона равенства действия и противодействия механики, на основе которого определяют реакции связей (определение связи будет дано ниже).

Например, если вагону сообщают ускорение  $\bar{a}_{\text{абс}}$  посредством автосцепки, то необходимая для этого сила равна  $\bar{F} = m\bar{a}_{\text{абс}}$  ( $m$  – масса вагона). Эта сила и есть реакция связи (автосцепки), приложенная к объекту (вагону). По закону равенства действия и противодействия на связь (автосцепка и связанный с ней, например, локомотив) действует сила  $\bar{R}'$ , равная силе действия сцепки на вагон и направленная в противоположную сторону. И эту силу должна преодолеть так называемая сила тяги локомотива  $\bar{F}_T$ , максимальное значение которой равно максимальной силе трения скольжения ведущих колесных пар локомотива (т. е.  $\bar{F}_T^{\text{max}} = \bar{F}_{\text{тр}}^{\text{max}}$ ).

В последующем будет показано весьма широкое использование этого закона в задачах грузовых перевозок для нахождения реакций связи.

**Четвертый закон** (закон независимости действия сил – закон Галилея Галилео). Если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то полученное этой точкой ускорение равно геометрической сумме ускорений, вызываемых каждой силой в отдельности.

Пусть на точку действует сумма сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ . Каждая сила в отдельности сообщает точке ускорение:

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{F}_1}{m}, \quad \bar{a}_2 = \frac{\bar{F}_2}{m}, \quad \dots, \quad \bar{a}_n = \frac{\bar{F}_n}{m}.$$

Тогда, согласно данной аксиоме (см. *правила сложения векторов* [Бронштейн, Семендяев, 1980]),

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n,$$

или

$$\bar{a} = \frac{1}{m}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n).$$

Учитывая, что

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \tag{2.9}$$

последнему равенству придадим вид

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \bar{R},$$

где  $\bar{R}$  – равнодействующая данной системы сил.

Следовательно,

$$m\bar{a} = \bar{R}. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) совпадает с уравнением (2.6).

Следовательно, если на материальную точку действуют несколько сил, то они могут быть заменены *равнодействующей*  $\bar{R}$ .

Равенство (2.9) выражает известный из геометрической статики *закон сложения сил*: равнодействующая нескольких сил, приложенных к данной точке, равна их геометрической сумме (см. (2.40)).

Если в уравнении (2.10) ускорение  $\bar{a} = 0$ , т. е. материальная точка *в соответствии с первым законом механики* движется прямолинейно и равномерно

или находится в покое, то  $\bar{R} = 0$  или  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0$ . В этом случае систему сил

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  называют *уравновешенной системой*

$$\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \tag{2.11}$$

Это следствие представляет собой обобщённый закон параллелограмма сил<sup>25</sup> как векторных величин.

#### 2.1.4. Понятие о механической системе точек и связях<sup>26</sup>

##### *Система материальных точек*

Совокупность (множество) материальных точек (частиц) называют системой материальных точек (частиц). Если движение каждой точки в системе материальных точек зависит от положения и движения остальных точек системы, то такую систему называют *механической системой* материальных точек. Иначе, механической системой точек (далее системой) называют совокупность конечного или бесконечного числа точек ( $i = \overline{1, n}$ ), в которой положение (характеризуемое координатами, т. е. радиус-векторами  $\vec{r}_i$ ) и движение (характеризуемое скоростями  $\vec{v}_i$  и ускорениями  $\vec{a}_i$  каждой точки) зависит от положения и движения остальных точек.

Следовательно, для того чтобы система была механической, необходимо, чтобы точки системы были каким-либо образом связаны между собой, т. е. на движение точек наложены какие-то ограничения, называемые связями. Примером связей являются *физические тела* в виде твёрдых и/или гибких тел, которые ограничивают движения других тел (материальных систем). При этом между точками системы будут действовать силы взаимодействия.

Иначе, в механике под *материальной системой* понимают совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.

Всякая совокупность материальных тел, так или иначе связанных между собой, также образует механическую систему. Примером всякой совокупности материальных тел в задачах грузовых перевозок могут быть груз без грузовых петель в виде твёрдого тела, деревянные подкладки, вагон, упорные и распорные бруски. Груз и вагон связаны между собой посредством деревянных подкладок и/или гибких упругих элементов, и/или упорных деревянных брусков, которые являются связями, ограничивающими движение груза в том или ином направлении. При этом между грузом и вагоном будут действовать силы взаимодействия в виде реакции связи. В соответствии с этим «груз – деревянные подкладки – вагон», или «груз – деревянные подкладки – гибкий упругий элемент – вагон», или «груз – деревянные подкладки – вагон – упорный деревянный брусок», или «груз – деревянные подкладки – гибкий упругий элемент – упорный деревянный брусок – вагон» образуют механическую систему. Если

<sup>25</sup> *Стевин Симон* – голландский математик и механик (1548 – 1620). Установил закон сложения сил по правилу параллелограмма, хотя аналогичный закон сложения сил был указан ещё Архимедом.

<sup>26</sup> *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. Ч. 1. – 460 с.

груз с грузовыми петлями, то механическую систему образуют те же системы, возможно, что и без деревянных подкладок.

Если точки или тела системы связаны между собой неизменно, т. е. так, что взаимное расстояние между любыми точками остаётся постоянным, то такую систему называют *неизменяемой системой*, а тело – *абсолютно твёрдым телом*; в противном случае систему называют *изменяемой*, а тело *деформируемым*. Примером неизменяемой механической системы в задачах грузовых перевозок является или жёсткое крепление груза к вагону, или крепление груза к вагону, если к боковым и торцевым сторонам груза к полу вагона крепёжными изделиями (гвоздь) прикреплены деревянные упорные и/или распорные бруски до момента начала выворачивания упорных брусков или раскалывания распорных брусков.

Положение системы определено, если известно положение каждой из точек, составляющих систему, и наоборот.

### *Связи и их классификация*

Рассмотрим движение системы материальных точек  $M_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат  $Oxuz$ . Как отмечено ранее, обычно состояние (положение и движение) механической системы задаётся координатами (т. е. радиус-векторами  $\bar{r}_i$ ), скоростями  $\bar{v}_i$  и ускорениями  $\bar{a}_i$  её точек. Очень часто при движении системы положение, скорости и ускорения её точек не могут быть произвольными.

*Ограничения*, налагаемые на величины  $\bar{r}_i$ ,  $\bar{v}_i$  и  $\bar{a}_i$  систем материальных точек  $M_i$ , которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называют *связями* (англ. constraint). Иначе, *условия*, налагающие ограничения на положение и движения точек системы, называют *связями*.

Если на систему не наложены связи, то её называют *свободной*. Солнечная система является примером свободной механической системы. При наличии одной или нескольких связей систему называют *несвободной*.

Если связь налагает ограничение только на положение системы  $\bar{r}_i$  или на относительное положение точек  $M_i$ , составляющих систему, из-за чего его элементы не могут занимать произвольного положения в пространстве (т. е. исключено  $\bar{r}_{i-1}$  или  $\bar{r}_{i+1}$ ), то такую связь называют *геометрической* (голономной).

Геометрические связи делят на *удерживающие* (двусторонние, неосвобождающие) и *неудерживающие* (односторонние, освобождающие), *идеальные* и *неидеальные*<sup>27</sup>, а также на *внешние* и *внутренние*.

<sup>27</sup> Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2 (специальные главы механики). – М.: Наука, 1966. – 663 с. – С. 335–338.

Примерами *идеальных* связей являются идеально гладкие плоскости и поверхности, абсолютно жёсткий стержень, абсолютно твёрдое тело (например, тело качения в подшипнике качения, рельсовые нити) и т. д., а *неидеальных* связей – негладкие плоскости (например, пол вагона) и поверхности. Определение идеальных и неидеальных связей будет дано в п. 3.3.

Связи математически записывают в виде уравнений или неравенств в зависимости от их характера.

Связи обладают такими *важными свойствами*, как *способность сохраняться* (остаться неразрушенными), *возникать* (появляться вновь) или *исчезать* (покидать, или быть разрушенными) в зависимости от величины и характера действующих на систему сил (приложенных статически или внезапно)<sup>28</sup>.

Примером *удерживающей* (*двусторонней, неосвобождающей*) связи в задачах грузовых перевозок является жёсткое (*но разъёмное*) крепление специального устройства, на которое уложен твёрдотельный груз (*в дальнейшем груз*), к стоечным скобам вагона (рис. 2.7).

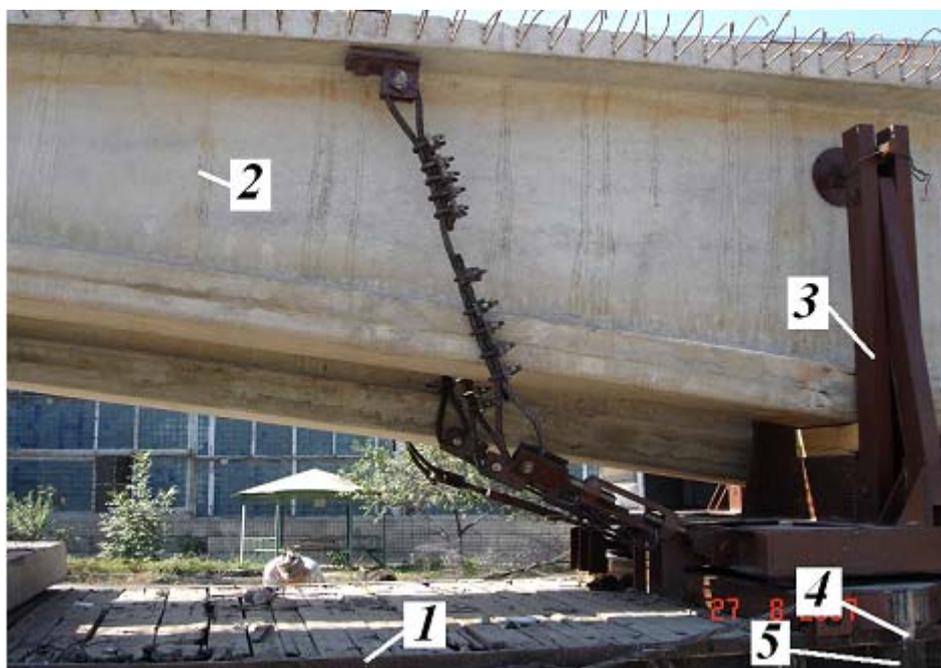


Рис. 2.7. Применение удерживающей связи (стержень) для крепления груза.

1 – платформа; 2 – груз; 3 – специальное устройство, на которое размещён груз; 4 – двусторонняя связь (стержень); 5 – стоечная скоба платформы.

При этом любые точки этого устройства не могут ни приблизиться к стоечным скобам платформы, ни отдалиться от него.

Другим примером является размещение нижних труб в полувагоне, вплотную контактирующих с боковыми стенками вагона (см. рис. 2.8, а, б) или огра-

<sup>28</sup> Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Добычин И.А. Основы теории механического удара с приложениями к задачам железнодорожного транспорта: учеб. пособие. – Екатеринбург, 1994. – 144 с..

ничение поперечного сдвига трубы большого диаметра упорными брусками на платформе (см. рис. 2.8, в).

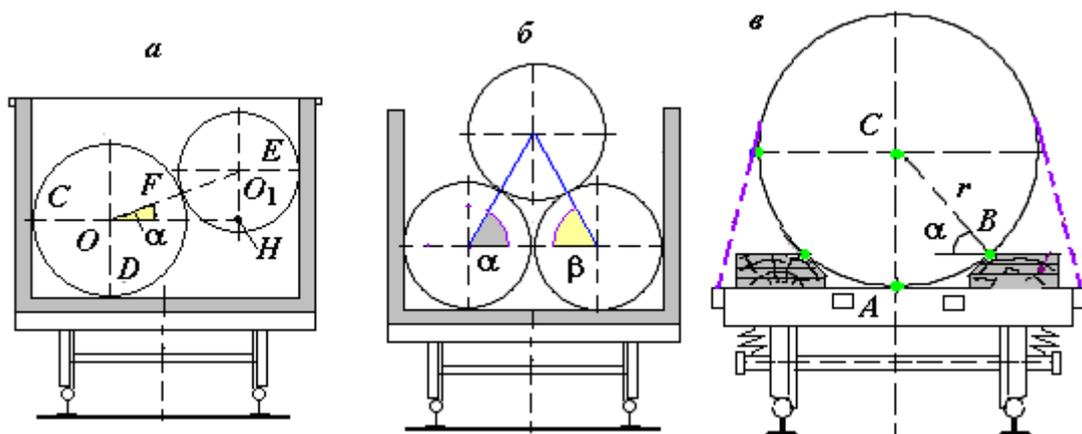


Рис. 2.8. Размещение труб большого диаметра на вагоне.

Таким образом, *удерживающая* геометрическая связь математически выражается координатами точек материальной системы:

$$f(\bar{r}_i) = 0,$$

или

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (2.12)$$

Связи называют *неудерживающими*, если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, но допускают перемещения в прямо противоположных направлениях. Желая подчеркнуть, что при некоторых условиях связь теряет своё назначение – ограничивать положение системы, такую связь называют *неудерживающей, освобождающей*. Неудерживающие связи могут прекращать своё действие в одном направлении и сохранять в другом, поэтому их иногда называют *односторонними* связями в отличие от *двусторонних* (удерживающих).

Примером *неудерживающей (односторонней)* связи в задачах грузовых перевозок является крепление груза к вагону посредством либо гибких упругих элементов, либо упорных деревянных брусков (см. размещение упорного бруска на платформе на рис. 2.8, в), либо их сочетанием. Другой пример такой связи – размещение верхних труб в полувагоне, вплотную контактирующих с нижними трубами (см. рис. 2.8, а, б).

На практике двусторонние связи (стержень) (см. рис. 2.7) после их разрушения могут превратиться в *неудерживающие (односторонние, освобождающие) связи* (рис. 2.9).



Рис. 2.9. Разрушение сварного шва металлического уголка, как двусторонней (удерживающей, неосвобождающей) связи.

Пр и м е р 1. Пусть материальная точка  $M$  принуждена двигаться только в заданной плоскости  $H$  (или  $Oxy$ ), проходящей через начало координат  $O$  (рис. 2.10). Применительно к задачам грузовых перевозок точка  $M$  соответствует грузу, размещённому в вагоне, у которого разрушены все средства креплений (как гибкие упругие, так и упорные элементы).

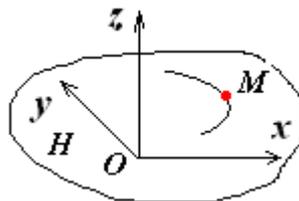


Рис. 2.10. Движение материальной точки на плоскости.

Тогда плоскость  $H$  будет по отношению к точке  $M$  геометрической связью. Если ось  $Oz$  декартовой системы координат направить перпендикулярно плоскости  $H$ , в которой движется точка  $M$ , то  $z = 0$  – уравнение связи. Или уравнением связи, налагающим ограничения на координаты  $x$  и  $y$  несвободной точки  $M$  в плоскости  $H$ , является

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Если  $z \neq 0$ , то это означает отрыв (потеря связи) точки  $M$  относительно плоскости  $H$ , чему в задачах грузовых перевозок соответствует «отрыв» легкового груза относительно пола вагона.

Таким образом, плоскость  $H$  по отношению к точке  $M$  является *неудерживающей (односторонней, освобождающей)* геометрической связью.

**Пример 2.** Пусть две материальные точки  $A$  и  $M$  (или  $A_1$  и  $M_1$ ) связаны нерастяжимой нитью длиной  $l$ . Применительно к креплению груза в вагоне точка  $A$  (или  $A_1$ ) соответствует увязочному устройству вагона, точка  $M$  (или  $M_1$ ) – грузовой петле груза, а нерастяжимая нить  $l$  – гибкому упругому элементу крепления (рис. 2.11).

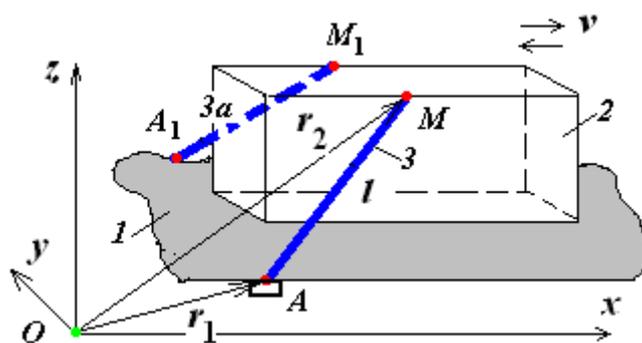


Рис. 2.11. Крепление груза на вагоне.

1 – пол вагона; 2 – груз; 3 и  $3a$  – элементы креплений.

В этом случае, при условии движения груза влево, приводящем к ослаблению нити 3, связь (потерянная) задается соотношением

$$(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 \leq l^2, \quad (2.13)$$

а вправо, приводящем к натягиванию нити 3, –

$$(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 \geq l^2. \quad (2.13a)$$

Эти уравнения связывают между собой шесть независимых координат системы:  $x_A, y_A, z_A$  и  $x_M, y_M, z_M$ , причём  $z_A = 0$ .

В общем случае связь задают соотношением

$$f(\bar{r}_i, \bar{v}_i, \bar{a}_i, t) \geq 0. \quad (2.14)$$

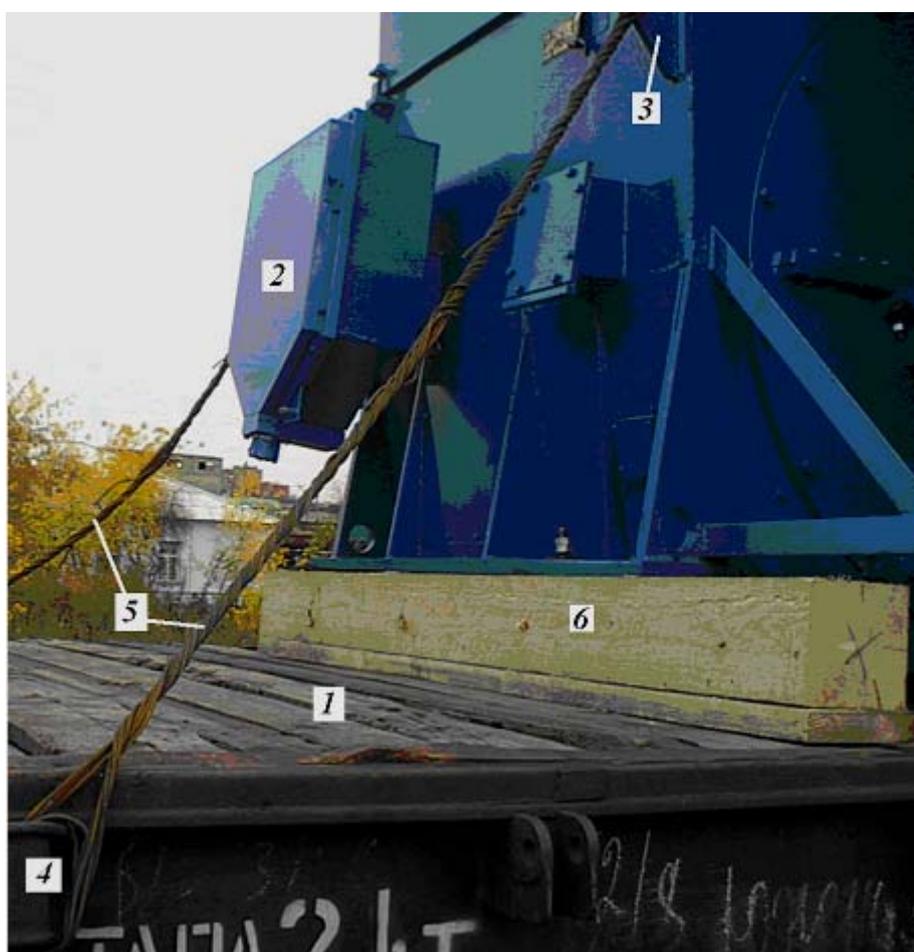
Если в этом соотношении реализуется только знак равенства (см. (2.12)), то связь называют *удерживающей (двусторонней, неосвобождающей)*.

В примере 1 и 2 связь в виде плоскости  $H$  – удерживающая, поскольку влияние связи не может прекратиться, или, иначе, система (в данном случае точка  $M$  или груз 2) не может освободиться от связи. Для точки  $M$  и груза 2 уравнением связи является  $z = 0$ . Исключение составляет случай, когда груз легкового (вес груза меньше тары вагона) и он может покинуть связь (т. е. оторваться от поверхности) (см. пример 1).

Если в (2.13) и/или (2.14) реализуются знаки как равенства, так и неравенства, то связь называют *неудерживающей (односторонней, освобождающей)*.

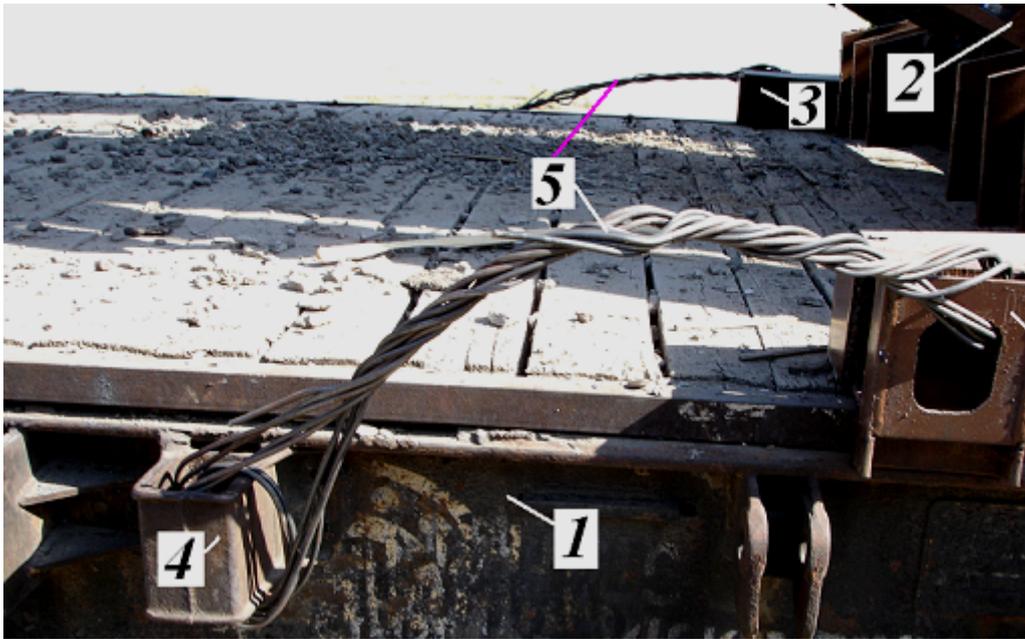
В примере 2 связь *1* *неудерживающая (односторонняя, освобождающая)* при условии движения груза влево. Здесь груз *2* при движении влево может покинуть связь, поскольку связь действует тогда, когда нити *3* и *3a* натянуты. При движении груза вправо связь *удерживающая (двусторонняя, неосвобождающая)*. Здесь груз *2* не может покинуть связь (нити *3* и *3a*) до момента её разрушения, хотя связь предварительно натянута. В соответствии с этим элементы крепления *3* и *3a* относятся к классу *неудерживающей (односторонней, освобождающей)* связи.

Примеры потери *неудерживающей (односторонней, освобождающей)* связи в практике перевозки грузов в вагонах представлены на рис. 2.12, 2.13.



*Рис. 2.12.* Потеря односторонних связей (ослабление гибких элементов креплений) противоположного направления.

Здесь и на рис. 2.13: *1* – платформа; *2* – груз; *3* – грузовая проушина; *4* – стоечная скоба платформы; *5* – гибкие упругие элементы креплений; *6* –деревянные подкладки.



*Рис. 2.13. Потеря удерживающей связи (гибких элементов креплений) груза с грузовыми петлями на подкладках.*

Пример одновременной потери (разрушение) *неудерживающей (односторонней, освобождающей)* и *удерживающей (двусторонней, неосвобождающей)* связей в практике перевозки грузов в вагонах представлен на рис. 2.14.



*Рис. 2.14. Разрушение односторонней (гибких элементов креплений) и двусторонней (стоечных скоб) связей груза с грузовыми петлями на подкладках.*

*1 – гибкие упругие элементы креплений; 2 – стоечная скоба платформы.*

В результате потери двусторонней связи (стержень) произошёл сдвиг груза на величину  $\Delta x$  с разрушением деревянных подкладок (рис. 2.15).

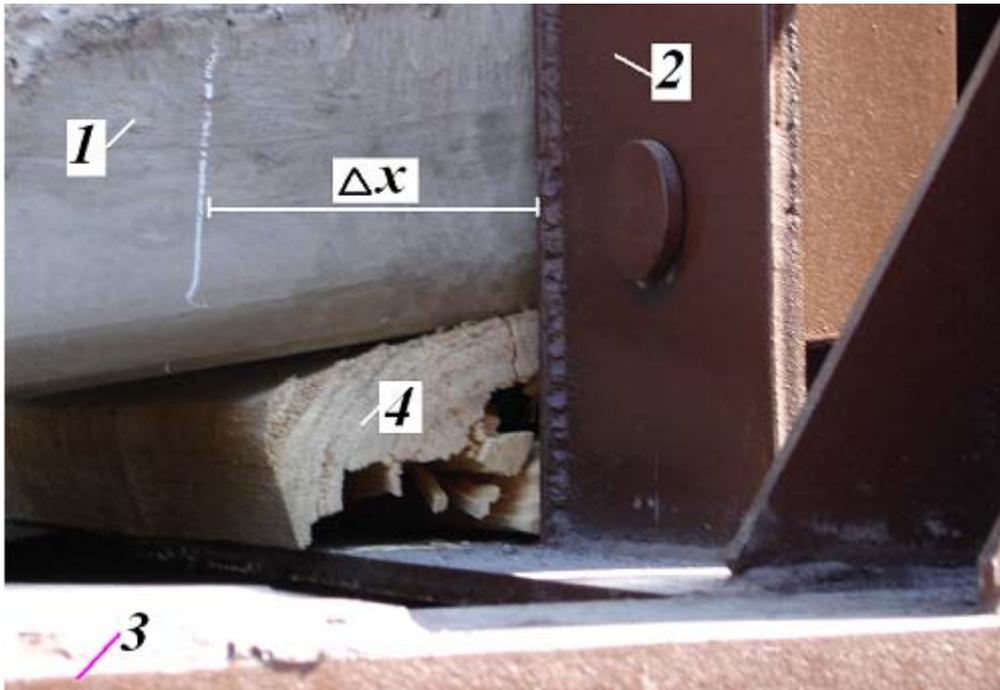


Рис. 2.15. Сдвиг груза относительно специального устройства.  
 1 – груз (ЖБИ); 2 – специальное устройство; 3 – платформа;  
 4 – разрушение подкладки под груз.

Вспомним, что если на точки системы заранее наложены ограничения геометрического характера (т. е. только на положение системы  $\bar{r}_i$ , где исключено  $\bar{r}_{i-1}$  или  $\bar{r}_{i+1}$ ), то такие связи называют *геометрическими* (конечные, голономные).

Если же связь, кроме того, налагает ограничения ещё и на кинематические элементы (например, на скорости  $\bar{v}_i$  и ускорения  $\bar{a}_i$ ) (см. (2.14)), то такую связь называют *кинематической* (неголономной).

Связи также делят на *стационарные* (не зависящие от времени) и *нестационарные* (зависящие от времени).

Если в уравнение (2.12) время  $t$  явно не входит, то связь называют *стационарной* или *склерономной* (по терминологии Больцмана). Математически такая связь представлена в виде уравнения (2.12) или (2.13).

В общем виде математически *геометрические связи* записывают как *уравнения поверхности*, содержащей координаты точек системы:

$$(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 + (z_A - z_M)^2 - l^2 \leq 0. \quad (2.15)$$

Уравнения кинематической связи, налагающей ограничения не только на положения, но и на скорости и ускорения точек системы, имеет вид

$$f(x, y, z, \dots, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = 0. \quad (2.16)$$

*Стационарные связи* встречаются только в задачах геометрической статики.

Если в уравнение (2.12) в качестве аргумента явно входит время  $t$  (см. (2.14)), то связь называют *нестационарной* или *реономной*. Математически такую связь записывают в виде

$$f(\bar{r}_i, t) = 0,$$

или

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0. \quad (2.17)$$

Примером нестационарной связи в задачах грузовых перевозок является математическое описание движения груза  $A$  как материальной точки во время его подъёма (или опускания), осуществляемого канатами полиспаста грузоподъёмной машины (см. рис. 2.2, 2.4). При равномерном наматывании (или разматывании) канатов на рабочий барабан со скоростью  $\bar{v}$  длина их свисающей части изменяется по закону  $l = l_0 \mp vt$ , где знак «минус» соответствует случаю наматывания каната, а «плюс» – разматывания;  $l_0$  – длина свисающей части канатов в начальный момент. Так как груз может раскачиваться, то уравнение этой связи имеет вид

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - (l_0 \mp vt)^2 = 0,$$

т. е. содержит время  $t$  в явном виде.

Если же в уравнение связи  $f(\bar{r}_i, \bar{v}_i, \bar{a}_i, t) = 0$  входят проекции скоростей  $\bar{v}_i$  и ускорений  $\bar{a}_i$  точек системы, то связь называют *дифференциальной* (кинематической). Дифференциальную связь  $f(\bar{r}_i, \bar{v}_i, \bar{a}_i, t) = 0$  называют *интегрируемой*, если её можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи).

Связи, как отмечали ранее, делят также на *голономные* и *неголономные*.

*Связи называют голономными (интегрируемыми)*, если они накладывают ограничения на положения точек  $\bar{r}_i$  материальной системы. Вместе с тем после дифференцирования по времени уравнения голономных связей могут представлять ограничения, накладываемые на скорости точек системы. *Иначе*, после дифференцирования уравнения связи по времени можно получить также зависимость между координатами и скоростями точек системы.

Таким образом, геометрические и интегрируемые дифференциальные связи являются голономными. Различие их в том, что интегрируемые связи, после их интегрирования, включают в себя константы интегрирования.

*Связи называют неголономными (неинтегрируемыми)*, если они накладывают ограничения и на координаты, и на скорости  $\bar{v}_i$  точек системы. Эти связи

выражают зависимость между координатами  $\bar{r}_i$  и скоростями  $\bar{v}_i$  точек системы. Независимо от дифференциальных уравнений движения системы уравнения этих связей не могут быть проинтегрированы [Бать и др., 1966].

Примером неголономных связей является математический маятник переменной длины<sup>29</sup>. Уравнением связи, налагающим ограничения на координаты  $x$  и  $z$  несвободной точки  $M$  в вертикальной плоскости  $V$ , будет

$$x^2 + z^2 = l(t)^2,$$

где  $l(t)$  – переменная длина маятника.

В специальных задачах грузовых перевозок будем рассматривать только *голономные* связи.

Изложим интерпретацию (толкование) связи и их классификацию применительно к специальным задачам грузовых перевозок.

### *Примеры применения связей и их реакций в задачах грузовых перевозок*

Отметим, что тела, которые ограничивают движение рассматриваемого тела, в механике называют *связями*.

В задачах грузовых перевозок под понятие «рассматриваемого тела» как объекта подпадает твёрдотельный груз, перевозимый на открытом подвижном составе (вагоны – платформа, полувагон, транспортер и др.). Под понятие «тела, которые ограничивают движение рассматриваемого тела» подпадают вагоны, гибкие упругие элементы (проволочные растяжки, обвязки), упорные и распорные (деревянные бруски) средства креплений груза. При этом гибкие упругие элементы и упорные средства креплений предусмотрены технологией креплений груза.

Связи в механике классифицируют на *внешние* и *внутренние*. При этом *важны их свойства*, особенно такие, как *способность сохраняться* (не разрушаясь), *возникать* (приобретая другую связь в виде оси вращения, проходящей через грань) или *исчезать* (быть разрушенными) при соударении вагонов о стоящие вагоны на подорожном парке, при служебном торможении при движении подвижного состава на спуск и при экстренном торможении<sup>30</sup>. Например, контейнер после внезапной остановки вагона за время удара мгновенно потеряет одну связь (пол вагона как горизонтальную поверхность) и приобретает другую связь в виде оси вращения, проходящей через одну из граней, в сторону которого он будет опрокидываться. В результате движение контейнера изменится

---

<sup>29</sup> Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с. – С. 302–306.

<sup>30</sup> Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Добычин И.А. Основы теории механического удара с приложением к задачам железнодорожного транспорта: учеб. пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1944. – 144 с.

мгновенно из поступательного со скоростью  $\bar{V}$  во вращательное с некоторой угловой скоростью  $\bar{\Omega}$ .

В специальных задачах грузовых перевозок с целью обеспечения безопасности движения, сохранности перевозимого груза и транспортных сооружений, надёжности деталей подвижного состава важным является сохранение связей в виде гибких упругих элементов и упорных средств креплений, которые предусмотрены технологией креплений груза.

Рассмотрим состояние *несвободного* тела, которое всегда либо опирается на другое тело, либо связано с другим телом гибкими нерастяжимыми нитями.

*Примером* несвободного тела применительно к специальности «Управление процессами перевозок» является *крупнотоннажный контейнер* (твёрдое тело) весом  $\bar{G}$ , где отверстия у нижних фитингов используются для постановки контейнеров на упоры специализированной платформы или автомобильного полуприцепа (рис. 2.16, а). Здесь для контейнера рама специализированной платформы или пол автомобильного полуприцепа являются внешними связями, поскольку они препятствуют перемещению груза как по вертикали вниз и вокруг неё, так и по горизонтали.

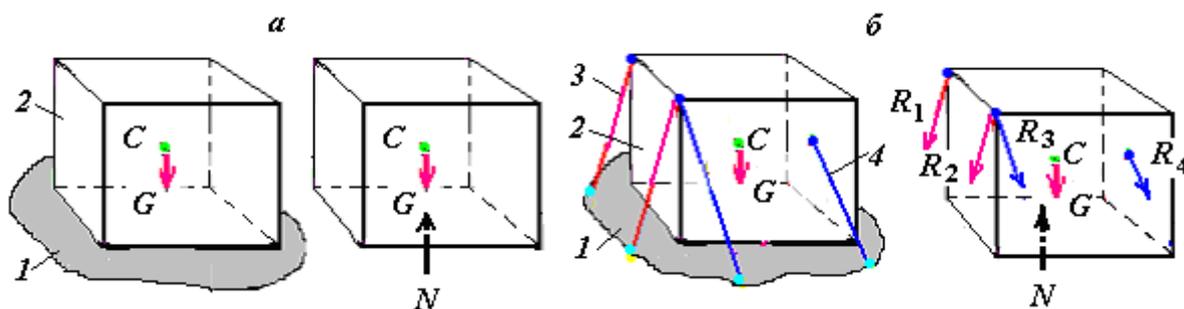


Рис. 2.16. К пояснению связей.

1 – вагон; 2 – груз; 3 – гибкие элементы креплений.

Примером также служит *штучный груз* (твёрдое тело) силой тяжести  $\bar{G}$ , опирающийся на платформу и закреплённый к нему  $n$  гибкими элементами креплений (растяжками) (рис. 2.16, б).

Для данного примера внешними *связями* для штучного груза являются платформа и гибкие элементы креплений (растяжки, обвязки). Здесь пол платформы препятствует перемещению груза по вертикали вниз и вокруг неё, а гибкие элементы креплений ограничивают перемещения груза по плоскости пола вагона.

Для штабельного груза (рис. 2.17, а) с общим весом  $\bar{G}$ , размещённого на вагоне несколькими ярусами и закреплённого к нему  $n$  гибкими элементами креплений, внешними *связями* для верхних ярусов являются ниже расположенные подкладки и грузы и гибкие элементы креплений.

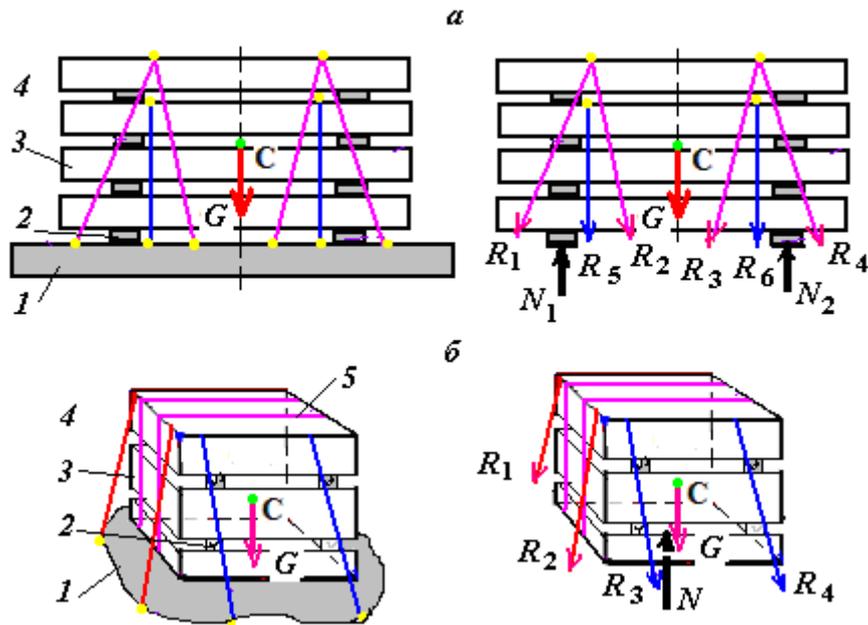


Рис. 2.17. К пояснению связей.

1 – вагон; 2 – подкладки; 3 – груз; 3 – гибкие элементы креплений; 5 – увязка.

Другим примером является **укрупнённое грузовое место** (система твёрдых тел) с общим весом  $\bar{G}$ , образованное из единиц грузов (отдельных твёрдых тел) посредством **увязок**, которое опирается на платформу и закрепляется к ней гибкими элементами креплений (рис. 2.17, б). Здесь **увязки** играют роль **внутренних** связей.

Примером **внутренней связи** служит также конструкция балки, состоящая из системы двух твёрдых тел  $AK$  и  $KL$ , соединённых шарниром в точке  $K$  (рис. 2.18). Шарнир  $K$  является **внутренней связью**, соединяющей две балки, на которые действуют внешние сосредоточенные силы  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  и распределенная сила  $\bar{q}$  (см. п. 2.9).

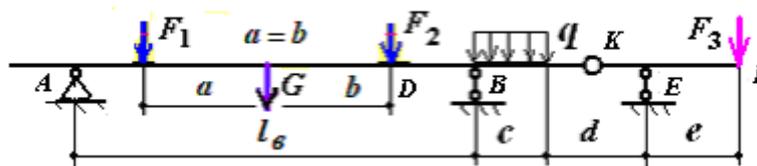


Рис. 2.18. К пояснению внутренней связи.

Таким образом, **связи** в механике могут быть **внешними** и **внутренними** в виде материальных тел, твёрдых и гибких.

Тело (груз) под действием приложенных к нему внешних сил (продольных, поперечных и вертикальных переносных сил инерции (см. пп. 4.6.1) и силы аэродинамического сопротивления (см. (3.9 – (3.12))) стремится к перемещению по опорной поверхности (пол вагона).

Однако связь (пол вагона) будет препятствовать этому перемещению. Поэтому тело будет действовать на связь с некоторой силой, называемой *силой давления*  $\bar{Q}$  на связь. Одновременно, согласно закону равенства действия и противодействия механики, связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой  $\bar{N}$ , т. е.  $\bar{N} = \bar{Q}$  (см. рис. 2.16, а). Это справедливо только для случая, когда груз размещён на вагоне без применения гибких упругих элементов креплений.

Силу, с которой связь (вагон) действует на тело (груз), препятствуя тем или иным его перемещениям, *называют силой реакции связи* или просто *реакцией связи* (англ. – reaction constraint) –  $\bar{R}$ . Иначе, реакция связи – это сила, которая заменяет эффект действия связи на материальную точку (на тело).

Если считать силу, с которой твёрдое тело (груз) действует на связь (вагон), *действием*, то реакция связи является *противодействием*. При этом сила (действие) приложена к связи, а реакция связи – к твёрдому телу. В нетвёрдых (т. е. деформируемых или гибких упругих) телах понятие «реакция связи» имеет иное определение. К гибким упругим телам относят отождествлённые стальные проволоки, нити, канаты, тросы, цепи, ремни и др. В них силу (противодействие), удерживающую твёрдое тело от перемещения в каком либо направлении, называют *натяжением* (упругой силой) –  $\bar{R}_i$ . Натяжение (противодействие) направлено от твёрдого тела (объект) к точке закрепления гибкого тела к другому подвижному или неподвижному твёрдому телу. Иначе, упругая сила (натяжение) направлено противоположно реакции связи.

Согласно закону равенства действия и противодействия механики, *сила (действие)* приложена к *связи* (если связь представляет собой твёрдое тело), а *реакция связи* приложена к *твёрдому телу*. Данное утверждение не распространяется на гибкие упругие элементы крепления.

Реакцией (англ. reaction) связи  $\bar{R}$  для объекта, показанного на рис. 2.16, а, представляемой виде *гладкой поверхности*, является  $\bar{N}$  – нормальная составляющая реакции связи (англ. normal reaction of constraint). Для реальной системы опирания контейнера с установкой фитингов на упоры, препятствующие горизонтальному смещению, рассматривают две компоненты равнодействующей полных реакций от каждого из упоров –  $\bar{N}$  и  $\bar{R}_{x(y)}$ , где  $\bar{N}$  – вертикальная (нормальная) и  $\bar{R}_{x(y)}$  – горизонтальная составляющие.

*Утверждение 1.* Направление реакции связи противоположно тому направлению, по которому связь препятствует движению данного тела.

*Примечание 1.* Для свободно лежащего на платформе груза (см. рис. 2.16, а), согласно аксиоме равенства действия и противодействия механики, сила тяжести груза  $\bar{G}$  и нормальная составляющая реакции связи  $\bar{N}$  имеют равные модули и противоположные направления, т. е.  $\bar{N} = -\bar{G}$ .

*Примечание 2.* Для закреплённого в вагоне гибкими элементами крепления груза (см. рис. 2.16, б и 2.17)  $\bar{N} > \bar{G}$ , а координаты приложения реакции связи  $x_N$  и  $y_N$  смещены относительно проекции центра тяжести груза на плоскость пола вагона. Так происходит потому, что груз от сдвига удерживается ещё и предварительно натянутыми гибкими упругими элементами креплений. Кроме того, возможна несимметричная постановка связей в соответствии с технологией размещения и крепления груза<sup>31</sup>. При этом координаты точки приложения равнодействующей  $x_N$  и  $y_N$  подлежат определению так же, как величина реакции связи  $\bar{N}$  из уравнений равновесия механической системы «путь – вагон – крепление – груз».

*Примечание 3.* После замены связей их реакциями  $\bar{R}$  на объекте связи не показывают (см. рис. 2.16, б; 2.17, б).

Нахождение реакции связей является одной из наиболее важных задач геометрической статики, широко встречающихся, например, в теории размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах и теории скатывания вагона с горки.

Рассмотрим наиболее распространенные виды связей, встречающиеся в задачах геометрической статики.

1. Связь в виде гладкой плоскости или поверхности (см. рис. 2.16, а). В этом случае реакция связи  $\bar{N}$  всегда направлена по общей нормали к опорной поверхности. Такую связь относят к классу *неудерживающей (односторонней, освобождающей)* связи и называют *идеальной*, а поверхность *гладкой*.

2. Связь в виде контакта цилиндрической или шаровой поверхности с плоскостью (рис. 2.19 и 2.20). Такая связь является *неудерживающей (односторонней, освобождающей)* и относится к классу *идеальных* связей.

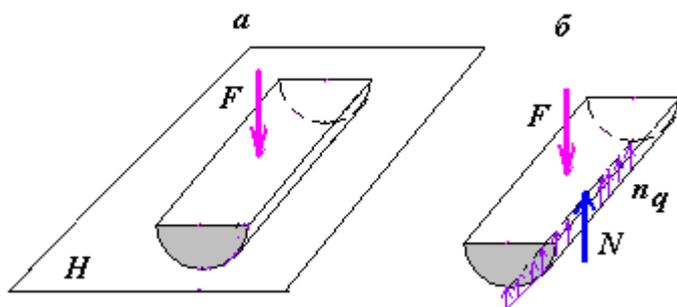


Рис. 2.19. Связь в виде контакта цилиндрической поверхности с плоскостью.

<sup>31</sup> Туранов Х.Т. Взаимодействие открытого подвижного состава и твёрдотельного груза. – М.: ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2011. – 374 с.

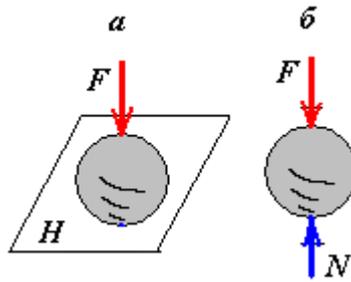


Рис. 2.20. Связь в виде контакта шаровой поверхности с плоскостью.

В данном случае реакция связи  $\bar{N}$  (для цилиндрической поверхности как результирующая сила равномерно распределенной по длине цилиндра реакции связей  $\bar{n}_q$ ) также направлена по нормали к опорной поверхности.

3. Связь в виде шероховатой (с трением) поверхности с плоскостью (рис. 2.21). Такая связь является *неудерживающей* (односторонней, освобождающей), и её относят к классу *неидеальной*, а поверхность называют *шероховатой*.

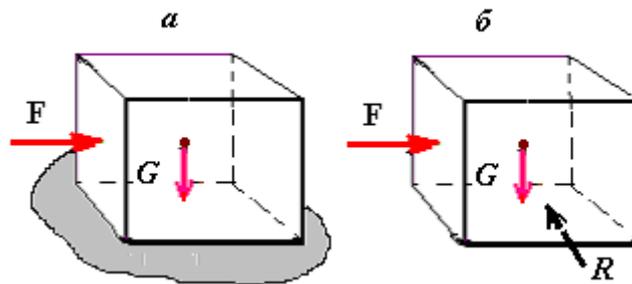


Рис. 2.21. Связь в виде шероховатой поверхности.

Здесь от силы тяжести  $\bar{G}$  груза и действия на груз внешней силы  $\bar{F}$  возникает реакция связи (пола вагона)  $\bar{R}$ , направленная противоположно направлению результирующей сил  $\bar{G}$  и  $\bar{F}$ .

4. *Гибкая связь*, осуществляемая физическими телами в виде гибких нерастяжимых элементов креплений (отожжённая проволока (см. рис. 2.16, б и 2.17, б), нить, трос или канат, цепь и т. п.) (рис. 2.22). Гибкие нити относят к классу *неудерживающих* (односторонних, освобождающих) и *неидеальных* связей.

На рис. 2.22, а гибкая связь представлена в виде троса, на рис. 2.22, б – в виде растяжек, а на рис. 2.22, в – в виде каната, перекинутого через блоки с подвижной и неподвижной осями вращения.

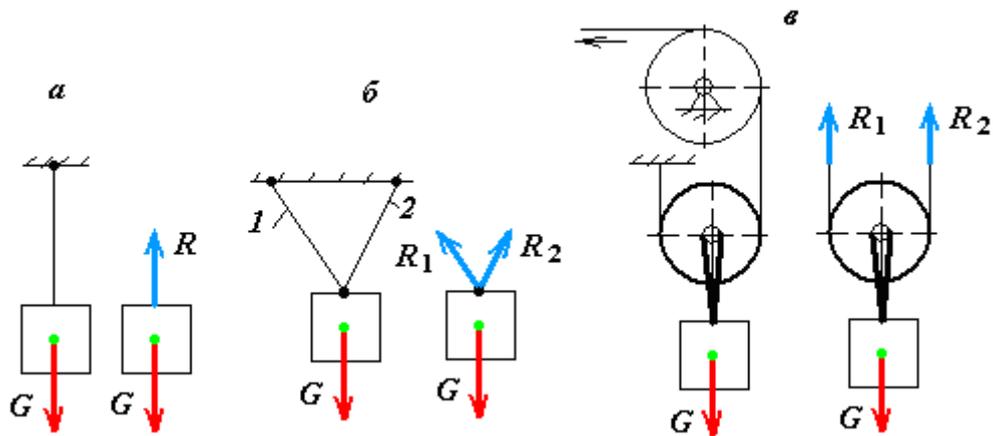


Рис. 2.22. Примеры применения гибких связей.

Гибкие связи не дают телу удаляться от точки подвеса нити по её направлению. Поэтому реакции гибких связей  $\bar{R}$ ,  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  направлены вдоль связей к точке её подвеса.

Примером применения каната, перекинутого через блоки с подвижными и неподвижными осями вращения, являются компенсированные контактные подвески с регулированием натяжения контактных проводов и несущего троса электрифицированных железных дорог (рис. 2.23).

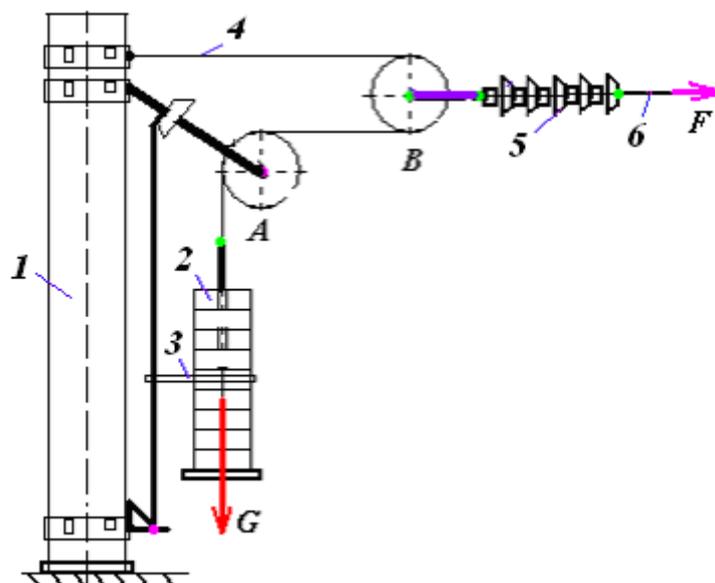


Рис. 2.23. Крепление контактного провода полукомпенсированной подвески.

- 1 – опора; 2 – груз (специальный компенсатор натяжения контактных проводов);  
 3 – ограничитель; 4 – стальной трос; 5 – изолятор; 6 – контактный провод;  
 А – блок с неподвижной осью вращения; В – блок с подвижной осью вращения.

*Утверждение 2.* Гибкая связь может работать только на растяжение. Реакция гибкой нити всегда направлена по нити и равна натяжению нити [Бухгольц, 1967].

5. Связь в виде абсолютно жёсткого прямого стержня с шарнирным закреплением концов (рис. 2.24). Такая связь является удерживающей (двусторонней, неосвобождающей), и её относят к классу идеальных связей. Здесь реакции  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$  и  $\bar{R}_3$  всегда направлены вдоль осей стержней (рис. 2.24, б). Стержни при этом могут быть как растянутыми, так и сжатыми.

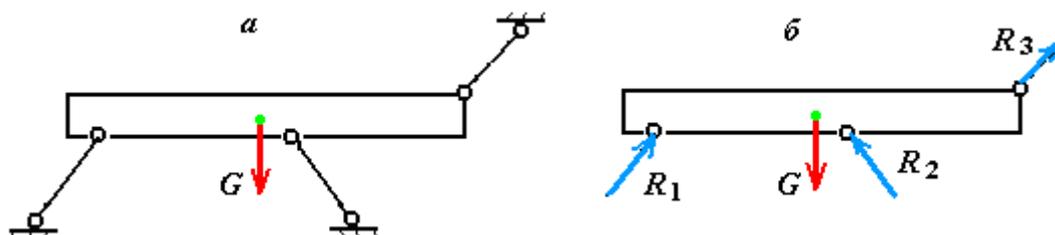


Рис. 2.24. Связь в виде жёсткого прямого стержня с шарнирным закреплением концов.

6. Связь, осуществляемая ребром двугранного угла или точечной опорой (рис. 2.25). Такую связь относят к классу недерживающих (односторонних, освобождающих) идеальных связей. Реакции таких связей  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  и  $\bar{R}_C$  направлены перпендикулярно к поверхности опирающегося тела (рис. 2.25, б).

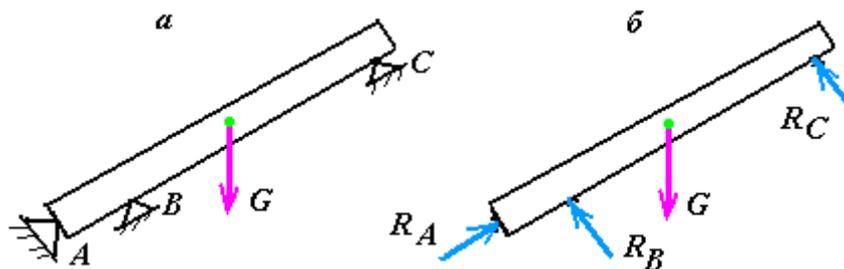


Рис. 2.25. Связь, осуществляемая ребром двугранного угла или точечной опорой.

7. Связь, осуществляемая в виде шарнирно-неподвижной (A) и шарнирно-подвижной (B) опор (рис. 2.26). Шарнирно-неподвижная опора (A) как связь является удерживающей (двусторонней, неосвобождающей), а шарнирно-подвижная опора (B) – недерживающей (односторонней, освобождающей), и их относят к классу идеальных связей.

Проекции реакции  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  в опоре A перпендикулярны и направлены вдоль оси балки (рис. 2.26, б), если на балку действует плоская система сил. Ре-

акция  $\bar{R}_B$  в связи  $B$  направлена только перпендикулярно плоскости расположения опоры (рис. 2.26, б), независимо от направления действия плоской системы сил.

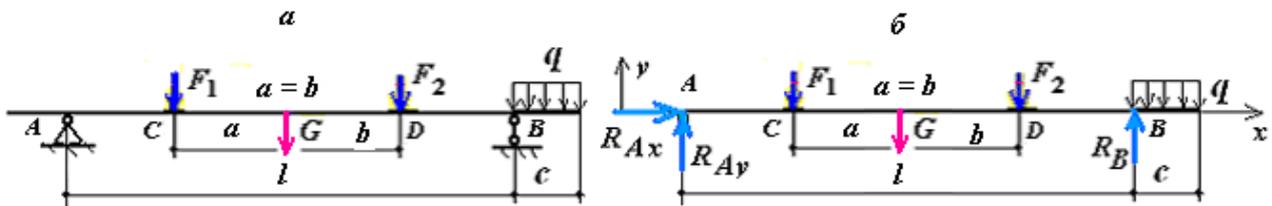


Рис. 2.26. Связь, осуществляемая в виде шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опор.

В случае если на балку действуют пространственные системы сил, то в шарнирно-неподвижной опоре  $A$  возникают три реакции связей ( $\bar{R}_x$ ,  $\bar{R}_y$  и  $\bar{R}_z$ ), направленных вдоль этих осей. В шарнирно-подвижной опоре  $B$  всегда возникает одна реакция связи  $\bar{R}_B$ , направленная перпендикулярно плоскости расположения опоры.

8. Связь, осуществляемая в виде жёсткой заделки (защемление) (рис. 2.27). Такую связь относят к классу удерживающих (двусторонних, неосвобождающих) идеальных связей.

Реакции в таких связях  $\bar{R}_x$ ,  $\bar{R}_z$  и  $M_y$  направлены вдоль и перпендикулярно оси балки (рис. 2.27, б), если на балку действует плоская система сил.

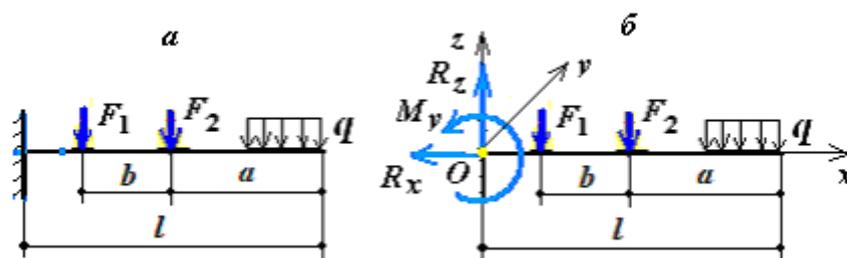


Рис. 2.27. Связь, осуществляемая в виде жёсткой заделки.

В том случае, если на балку действуют пространственные системы сил, в заделке возникают шесть реакций связей ( $\bar{R}_x$ ,  $\bar{R}_y$ ,  $\bar{R}_z$  и  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ), направленных вдоль и вокруг этих осей.

Отметим, что в задачах грузовых перевозок отсутствуют какие-либо примеры применения связи в виде жёсткой заделки. Поэтому такую связь в дальнейшем рассматривать не будем.

9. Связь в виде цилиндрического шарнира (подшипники качения и скольжения)  $A$  (рис. 2.28). Такая связь является удерживающей (двусторонней, неосвобождающей) в плоскости  $Oxy$  и неудерживающей (односторонней, освобождающей) вдоль оси  $Oz$ . Данную связь относят к классу неидеальных из-за возможного углового перемещения тела  $B$  вокруг шарнира  $A$ .

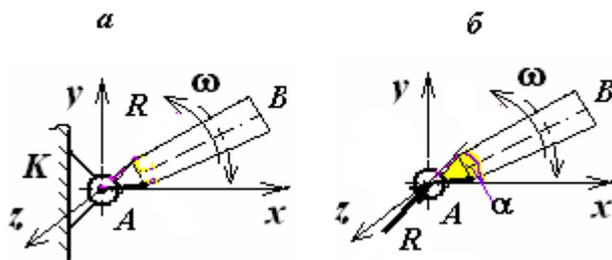


Рис. 2.28. Связь в виде цилиндрического шарнира.

Цилиндрический шарнир (просто *шарнир*)  $A$  осуществляет такое соединение двух тел ( $B$  и  $K$ ), при котором одно тело ( $B$ ) может вращаться относительно другого ( $K$ ) вокруг общей оси  $Az$ , называемой *осью шарнира*.

Шарнир  $A$  ещё допускает перемещение тела  $B$  относительно тела  $K$  вдоль оси  $Az$ . Поэтому такой шарнир является двухподвижным.

В шарнире реакция связи  $\bar{R}$  может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, т. е. в плоскости  $Axy$ . Здесь *неизвестными* являются модуль и направление (угол  $\alpha$ ) реакции связи  $\bar{R}$ .

На практике такой шарнир использован в соединении поворотной стрелы (тело  $I$ ) с корпусом стрелового крана на железнодорожном ходу (рис. 2.29). Этот кран широко используется на грузовых пунктах станций для погрузки и выгрузки груза.

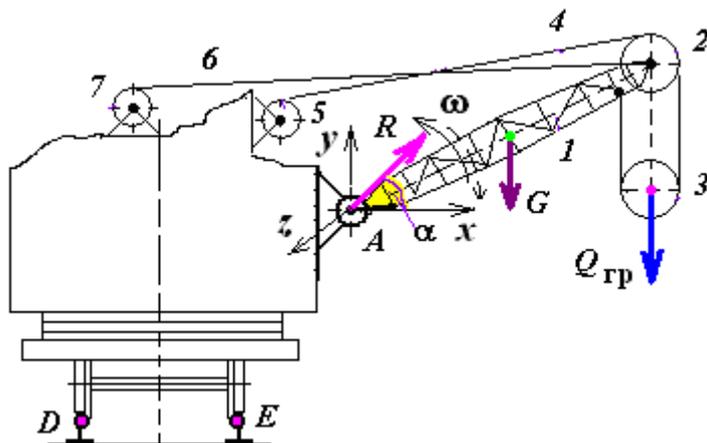


Рис. 2.29. Пример применения цилиндрического шарнира и гибких нитей в стреловом кране.

$1$  – поворотная стрела;  $2$  и  $3$  – блоки с неподвижной и подвижной осью

вращения; 4 и 6 – канаты; 5 – рабочий барабан, соединённый через редуктор с валом электродвигателя подъёма груза; 7 – рабочий барабан, который соединён с валом электродвигателя подъёма и опускания поворотной стрелы через редуктор.

Для стрелового крана рельсовые нити являются *неудерживающими (односторонними, освобождающими) идеальными* связями.

10. *Связь в виде сферического шарнира* (рис. 2.30). Такая связь является *удерживающей (двусторонней, неосвобождающей)*, и её относят к классу *идеальных* связей.

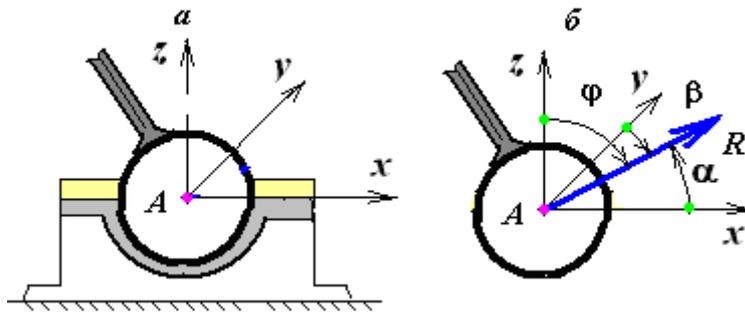


Рис. 2.30. Связь в виде сферического шарнира.

Тела, соединённые сферическим шарниром, могут поворачиваться относительно друг друга вокруг центра шарнира  $A$ . Такой шарнир является трёхподвижным. Следовательно, реакция  $\bar{R}$  сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. Для данной реакции *неизвестными* являются модуль и направление относительно оси координат, т. е. углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\varphi$  реакции  $\bar{R}$  с осями  $Axyz$ .

Примером применения на практике такого шарнира служат соединения *турникетных опор* для перевозки длиномерного груза [Туранов, 2011] и подвески передних колёс к корпусу автомобиля.

### 2.1.5. Виды сил

Силой ( $\bar{F}$  – англ. Force) называют величину, характеризующую меру действия материальных тел друг на друга. В результате такого взаимодействия происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация).

Материальные тела могут действовать друг на друга или непосредственным соприкосновением, или на расстоянии. В зависимости от этого силы, дей-

ствующие на систему, разделяют на две категории: *поверхностные* или *объёмные* (или массовые)<sup>32</sup>.

*Поверхностные* силы действуют на точки поверхности тела. Они возникают при действии одного тела на другое непосредственным соприкосновением и приложены к той части поверхности тела, в которой взаимодействующие тела касаются друг друга. Естественно, что тела касаются друг друга вдоль некоторой поверхности с элементарной площадью  $dA$ . Тогда на элемент  $dA$  площади контакта будет действовать сила  $dF$ . Если на очень малый элемент поверхности действует конечная сила  $F$ , то, пренебрегая размером этого элемента, в пределе можно считать, что к телу в одной точке приложена сосредоточенная сила. К поверхностным силам относят также и силы аэродинамического сопротивления. В дальнейшем в задачах грузовых перевозок все силы, условно приложенные на рассматриваемый объект (например, груз), будем считать сосредоточенными.

Объёмные силы действуют на все частицы тела. К ним относят силы тяжести  $\bar{G}$ .

### *Силы, действующие на механическую систему*

Силы, действующие на механическую систему, можно разделить на *внешние* и *внутренние*.

На движущееся тело действуют как постоянные, так и переменные *внешние* и *внутренние* силы, модули и направления которых при движении тела изменяются.

Все силы, действующие на твёрдое тело, можно разделить на две группы: *силы активные* и *реакции связей* (реактивные силы). Активными следует считать все силы, не являющиеся реакциями связей. Таким образом, какая-либо неизвестная сила, не являющаяся реакцией связи, является активной силой.

*Активной* обычно называют силу ( $\bar{F}^{(a)}$ ), которая, начав действовать на покоящееся тело, *может* привести его в движение.

*Переменные силы* могут зависеть от времени  $t$ , положения тела  $\bar{r}_i$  и его скорости  $\bar{v}_i$ . При этом *переменными* могут быть и заданные (*активные*) силы, и *реакции связей* (реактивные силы).

От времени зависит так называемая сила тяги локомотива  $\bar{F}_T$  и движущая сила погрузочно-разгрузочных машин (козловых и мостовых кранов, кранов на железнодорожном ходу и др.) в период трогания с места или нормальная составляющая силы инерции  $\bar{I}_n$  (см. (4.47)), учитывая которую описывают колебания фундамента при работе мотора, центр тяжести вала которого не совпадает

---

<sup>32</sup> Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. Ч. 1. – 467 с.

ет с его геометрической осью вращения (эксцентриситет вала). Силы сопротивления упругого элемента (пружины, нити, канаты (или тросы), цепи, растяжки и обвязки из отожжённой проволоки) зависят от степени их деформации в данном положении тела, т. е.  $F_z = f(z)$  и  $F_{\text{упр.х}} = f(x)$ . Сила сопротивления среды (например, воздух) зависит от относительной скорости частиц воздуха  $\bar{v}_{rB}$ , т. е.  $\bar{F}_{rB} = f(\bar{v}_{rB})$  (см. (3.9) – (3.12)).

Силы, с которыми действуют друг на друга точки, входящие на систему, называют *внутренними* силами –  $\bar{F}^i$  ( $i$  – франц. *interieur* – внутренний). Согласно закону равенства действия и противодействия механики, внутренние силы попарно равны и противоположны.

В средствах креплений в виде гибких упругих элементов (растяжки и обвязки, изготовленные из отожжённой проволоки), используемых для закрепления штучных твёрдых грузов, перевозимых на открытом подвижном составе, появляются *внутренние* силы  $\bar{R}_i$ , связанные с напряженно-деформированным состоянием этих элементов. Такие силы часто называют *натяжениями* (или *усилиями*), которые подлежат определению. По существу, *внутренние* силы  $\bar{R}_i$  являются силами упругости этих средств креплений. При рассмотрении, *например*, штабельного груза как одного объекта силы взаимодействия между отдельными слоями штабеля также являются внутренними (см. рис. 2.17, б).

Силы, с которыми действуют на точки системы точки тела, не входящие в систему, называются *внешними* силами –  $\bar{F}^e$  ( $e$  – франц. *exterieur* – внешний).

Известно, что согласно ТУ для обеспечения возможности механизированной погрузки и выгрузки грузов на ОПС, предохранения опорной поверхности груза и/или вагона от повреждения между грузом и полом вагона устанавливают подкладки. При рассмотрении *подкладки в качестве объекта* (см. рис. 2.17, а) к внешним силам относится сила давления на подкладку со стороны груза, равная реакции подкладки при рассмотрении *груза в качестве объекта*, реакция пола вагона, силы трения между грузом и подкладкой, а также между подкладкой и полом вагона, если она свободно уложена. Если она дополнительно закреплена, *например*, крепёжными элементами (гвоздями), то добавляется горизонтальная реакция крепёжных элементов. От действий этих внешних сил происходят деформации (смятие, сдвиг) подкладок.

Применительно к твёрдотельному штучному грузу *внешней* силой, приложенной к нему, является сила аэродинамического сопротивления на груз  $\bar{F}_{rB}$  (см. (3.9) – (3.12)). Кроме того, к такому грузу условно приложены сила тяжести и реактивные силы в виде нормальной  $\bar{N}$  и касательной  $\bar{F}_\tau$  составляющей (возникающая благодаря трению (см. п. 2.4)) реакции основной связи (пол вагона)  $\bar{R}$ , если груз непосредственно уложен на пол вагона (см. рис. 2.16, а),

или силы трения между грузом и подкладками, если он уложен на них. Все эти силы являются внешними для рассматриваемого объекта.

*Активной единственной* силой, действующей на груз, является *сила тяжести* (как объёмная сила) (см. рис. 2.16). Все остальные силы – реактивные по той лишь причине, что они заменяют собой отброшенные связи. Сила аэродинамического сопротивления (см. (3.9) – (3.12)) – это результат учёта отбрасываемой среды. Как и другая реакция, она препятствует движению, в данном случае относительно скорости движения воздушного потока.

### 2.1.6. Реакции связей

Напомним, что *связью* называют материальное тело, ограничивающее перемещение данного тела в пространстве. *Например*, для груза, *свободно размещённого в вагоне* (среднетоннажный контейнер), *связью* будет опорная плоскость (пол вагона), не дающая грузу свободно перемещаться по вертикали вниз. Для груза, *закреплённого на вагоне* (платформа, полувагон) *гибкими упругими средствами креплений* (растяжки, обвязки) и *упорными брусками, связями*, в дополнение к уже имеющейся связи (пол вагона), будут те средства креплений, которые препятствуют свободному перемещению груза относительно пола вагона как вдоль, так и поперёк него. Заметим, что большинство используемых связей для крепления грузов являются *односторонними* (неудерживающими) (см. пп. 2.1.4), т. е. препятствующими перемещению только в одном направлении, например пол вагона, гибкие упругие элементы креплений и упорный брусок. Обычно гибкие упругие связи (растяжки, обвязки) крепятся с предварительным натяжением и их можно рассматривать как двухсторонние с точки зрения сохранения взаимодействия с объектом. Однако следует иметь в виду, что гибкие связи работают только на растяжение (см. Утверждение 2), поскольку *при расслаблении связи* вследствие возникновения пластических деформаций при динамических воздействиях на груз такая связь вообще может исключаться из работы при малых перемещениях, т. е. *она перестаёт быть связью*.

*Реакция связи*, или сила реакции (противодействие) связи, – это сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным перемещениям. *Например*, для груза, *свободно размещённого в вагоне* (контейнере) (см. рис. 2.16, *а*), реакцией связи (пол вагона)  $\bar{R}$  является нормальная  $\bar{N}$  и касательная  $\bar{F}_\tau$  прямоугольные составляющие этой связи, ограничивающие свободное перемещение груза по вертикали вниз и вдоль и/или поперёк вагона. Для штучных твёрдотельных грузов, дополнительно *закреплённых на вагоне* гибкими упругими (растяжки и обвязки) (см. рис. 2.16, *б*) и упорными (брусками) средствами крепления, реакциями связей будут натяжения (усилия)  $\bar{R}_i$  упругих и реакции  $\bar{R}_{бр.х}$  и  $\bar{R}_{бр.у}$  упорных средств креплений, препятствующие сво-

бодному перемещению груза относительно пола вагона как вдоль и/или поперёк него, так и относительно вертикальной оси.

Напомним, что *подлежит* определению:

– нормальная составляющая  $\bar{N}$  реакции связи  $\bar{R}$  и координаты точки её приложения  $x_N$  и  $y_N$  относительно выбранных осей координат  $Oxy$ ;

– касательная составляющая  $\bar{F}_\tau$  реакции связи  $\bar{R}$ , действующая в плоскости пола вагона, возникающая благодаря трению между контактируемыми поверхностями (сила трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , вдоль вагона  $\bar{F}_{\text{тр},x}$ , а поперёк  $\bar{F}_{\text{тр},y}$  (см. п. 2.4, (2.63)));

– упругие силы (натяжения)  $\bar{R}_i$  ( $i$  – количество креплений) гибких упругих и реакции  $\bar{R}_{\text{бр},x}$  и  $\bar{R}_{\text{бр},y}$  упорных средств креплений.

**Основное отличие** реакции связей *от всех других сил* состоит в том, что реакция связи не вполне определяется самой связью; её модуль, а иногда и направление зависят ещё и от других сил, действующих на систему, и от движения системы.

Таким образом, под **системой сил** в геометрической статике понимают заданные силы и реакций связей отдельных точек механической системы.

## 2.2. Разделение кинетики на статику и динамику<sup>33</sup>

Кинетика, как известно, посвящена изучению движения и равновесия механической системы (в частности, материальной точки) в зависимости от действующих на систему сил. Кинетику обычно разделяют на *статику* – учение о равновесии механической системы под действием сил и *динамику* – учение о движении системы под действием сил.

Если на материальную точку никакие силы не действуют, то она по отношению к инерциальной системе отсчёта находится в покое или движется по инерции, т. е. прямолинейно и равномерно (по закону инерции механики). Абсолютное твёрдое тело при отсутствии действующих сил (т. е.  $\bar{R} = 0$ ), согласно уравнению (2.10), может совершать поступательное, равномерное и прямолинейное (или вращательное) движения также по инерции. При действии сил движение материальной точки или системы отличается от инерциального.

---

<sup>33</sup> Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. – Ч. 1. – 467 с.  
Голубева О.В. Теоретическая механика. – М.: Высш. шк., 1968. – 487 с.  
Добычин И.А. Геометрическая статика: учеб. пособие. – Екатеринбург, 2004. – 183 с.

Однако может случиться так, что при действии некоторой совокупности (системы) сил материальная точка или механическая система будет оставаться в покое или двигаться инерциально, т. е. вести себя так же, как и при отсутствии сил. Такая система сил находится в равновесии. Следовательно, определение условий, при которых точка или механическая система могут находиться в равновесии, сводятся к нахождению условий равновесия, действующих на точку или систему сил. В соответствии с этим *статику* называют *учением о равновесии сил*, действующих на механическую систему.

## Определения и аксиомы статики

### *Элементарная и аналитическая статика*

Статика есть часть кинетики, посвящённая изучению условий равновесия механической системы под действием сил, или, иначе, условий равновесия сил, действующих на механическую систему. Статику можно, в свою очередь, разделить на: *элементарную (геометрическую)* и *аналитическую*.

*Элементарная (геометрическая) статика* представляет собой в основном статику абсолютного твёрдого тела. В ней силы рассматривают как некоторые определённые заданные величины и изучают методы замены различных сил, действующих на абсолютно твёрдое тело, простейшими системами, а затем находят условия равновесия этих сил.

Так как сила, действующая на абсолютно твёрдое тело есть вектор скользящий, то к изложению *элементарной статики* может быть применён обширный материал *геометрии скользящих векторов* [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980], вследствие чего *изложение получает геометрический характер*.

Отметим, что основоположником *геометрической статики* является Архимед. Он нашёл строгими геометрическими рассуждениями *положение центра тяжести параллелограмма, треугольника, трапеции* и даже, применяя так называемый метод «исчерпания», *определил центр тяжести параболического сегмента и центр тяжести площади параболы, заключённой между двумя параллельными линиями*<sup>34</sup>.

*Аналитическая статика* представляет собой развитие одного из основных принципов механики, именно принципа виртуальных (возможных) перемещений, который даёт общий критерий равновесия механической системы, вследствие чего выводы аналитической статики относятся к какой угодно механической системе. В *аналитической статике* широко применяется *математический анализ*, поэтому *изложение носит аналитический характер*.

---

<sup>34</sup> Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1967. – 571 с.

## Сила

Понятие силы в элементарной статике является основным. Согласно основному закону динамики, сила, действуя на материальную точку, сообщает ей ускорение, направленное по направлению силы (см. уравнение (2.10)). Поэтому действие силы на точку зависит от направления и численного значения силы. Направление силы есть то направление, по которому свободная материальная точка, находящаяся в покое, начинает двигаться под действием силы. Прямую, по которой направлена сила, называют *линией действия силы*.

*Сила – векторная величина. Поэтому силы изображают векторами*, и по отношению к ним применимы все положения и операции, которые относятся к векторам вообще [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980].

Если *сила есть вектор, связанный с точкой приложения* (закреплённый вектор), то её относят к *неподвижному вектору*. Сила как *неподвижный вектор* характеризуется тремя параметрами: *точкой приложения, направлением и модулем*.

Если *сила есть вектор, остающийся неизменным вдоль линии своего действия*, то её относят к *скользящему вектору*. В этом случае силу как *скользящий вектор*, характеризуют двумя параметрами: *направлением и модулем*.

### Основные определения

Элементарная (геометрическая) статика имеет систему определений и аксиом, посредством которых вводят основные понятия [Бухгольц, 1967; Добычин, 2004].

**Определения** 1. *Совокупность сил* (т. е.  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ ), действующих на какую-либо механическую систему, в частности на твёрдое тело, называется *системой сил*.

2. Система сил (т. е.  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ ), которая, действуя на свободное твёрдое тело, находящееся в покое, не сообщает ему никакого движения, находится в *равновесии* или, иначе говоря, *эквивалентна нулю* (т. е.  $\sum_{k=0}^n \bar{F}_k \cong 0$ ).

### Аксиомы статики

Отметим, что как инженер Стевин Симон (1548 – 1620) сделал значительный вклад в механику и, в частности, установил закон сложения сил по правилу параллелограмма (хотя аналогичный закон сложения сил был указан ещё Ар-

химедом)<sup>35</sup>. Стивен исследовал законы равновесия тел по наклонной плоскости и в результате пришёл к выводу *основных законов геометрической статики* (аксиом).

Основная задача статики – выяснение условий, которым должна удовлетворять система сил, приложенных к телу, чтобы оно находилось в состоянии равновесия.

Кроме того, задачей статики является преобразование системы сил, приложенных к абсолютно твёрдому телу, и замена её другой системой, ей эквивалентной. Преобразование системы сил производится либо присоединением, либо отбрасыванием системы сил, эквивалентной нулю, либо заменой двух сил одной, статической, ей эквивалентной.

Пользуясь условиями равновесия, можно определять неизвестные реакции связи.

Решения задач геометрической статики основываются на применении ряда аксиом<sup>36</sup> и их следствий.

**Аксиома 1.** *Твёрдое тело находится в равновесии под действием двух сил только в том случае, если силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия* (рис. 2.31):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (2.18)$$

**Аксиома 2.** *Не нарушая состояния (движения или покоя) твёрдого тела, можно добавлять и отбрасывать уравнивающие силы. Эти две силы называют уравнивающими.*

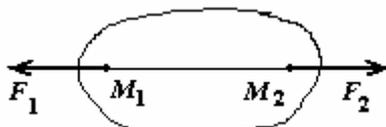


Рис. 2.31. К пояснению аксиомы 1.

Иначе, силы называют *уравнивающими*, если твёрдое тело, к которому приложены эти силы, находится в покое.

**Следствие аксиомы 2.** Не нарушая состояния твёрдого тела, силу можно переносить по линии её действия в любую точку тела.

Две системы сил называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния твёрдого тела.

*Равнодействующей* называют силу, которая эквивалентна данной системе сил.

<sup>35</sup> Березкин Е.Н. Лекции по теоретической механике. Ч. 1. Механика. Статика, динамика точки. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – 314 с.

<sup>36</sup> Аксиома (греч. *axiōta*), положение, принимаемое без логического доказательства в силу непосредственной убедительности; истинное исходное положение теории.

**Аксиома 3.** *Равнодействующая двух сил ( $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ), приложенных в одной точке  $M$ , приложена в той же точке, равна по модулю диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, и направлена вдоль этой диагонали (рис. 2.32).*

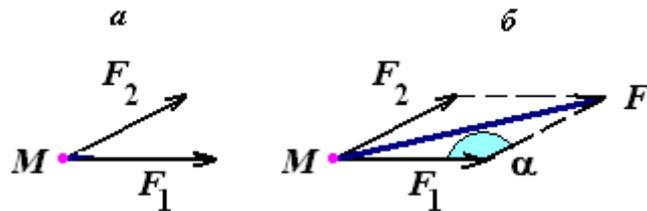


Рис. 2.32. К пояснению аксиомы 3.

По модулю равнодействующая  $\vec{F}$  равна (см. правило сложения двух векторов, вытекающее из теоремы косинусов [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]):

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (2.19)$$

**Аксиома 4** (закон отвердевания). *Равновесие нетвёрдого тела не нарушается при его затвердевании.*

Силы, приложенные к нетвёрдому телу (гибкий упругий элемент – нить, трос, проволочная растяжка и обвязка и т. д.), должны удовлетворять условиям равновесия твёрдого тела и, кроме того, добавочным условиям, зависящим от физических свойств данного тела, например равновесие гибкого упругого элемента возможно только при его растяжении (см. пп. 2.1.4, Утверждение 2).

#### ***Несвободное твёрдое тело. Аксиома связей***

Тела в механике могут быть *свободными* и *несвободными*. Твёрдое тело является *свободным*, если его движение ничем не ограничено. В большей части технических задач встречаются лишь несвободные твёрдые тела. *Несвободным* называется такое твёрдое тело (например, груз, перевозимый на открытом подвижном составе), на движение которое *наложены ограничения* в некоторых направлениях (например, по вертикали вниз). *Эти ограничения* называется ***связями***.

Напомним, что *сила*, характеризующая действие связи на твёрдое тело (объект), называется *реакцией связи*. Если считать силу, с которой твёрдое тело действует на связь, *действием*, то реакция связи, согласно закону равенства действия и противодействия, является *противодействием*. При этом сила – действие – приложена к связи, а реакция связи – к твёрдому телу. В нетвёрдых телах (гибкий упругий элемент) понятие «реакция связи» имеет несколько иное

определение. В них силу (противодействие), удерживающую твёрдое тело от перемещения в каком либо направлении, называют *натяжением*. При этом натяжение (противодействие) направлено от твёрдого тела (объект) к точке закрепления нетвёрдого тела к другому подвижному или неподвижному твёрдому телу. Иначе, натяжение направлено противоположно реакции связи.

Все силы, действующие на твёрдое тело, можно разделить на две группы: *силы активные* и *реакции связи* (силы реактивные). При этом активными следует считать все силы, не являющиеся реакциями связей.

Более подробно о связях изложено в п. 2.1.

**Аксиома 5** (*аксиома связей*, или *принцип освобожденности от связей*, сформулированный как *следствие* закона равенства действия и противодействия механики). Не изменяя движения (а следовательно, и равновесия) любое *несвободное* тело можно рассматривать как *свободное*, если его мысленно освободить от связей и их действия *заменить* соответствующими реакциями связей.

Этот *принцип даёт возможность* применить к несвободному твёрдому телу (груз) условия равновесия, справедливые для любого свободного твёрдого тела. При этом следует, отбросив связи (гибкие элементы креплений и пол вагона), наложенные на твёрдое тело (груз), заменить их соответствующими реакциями связей. После замены связей, наложенных на твёрдое тело, реакциями связей надлежит рассмотреть *равновесие несвободного твёрдого тела* как *свободного под действием активных сил и реакций связей*.

*Утверждение 3.* Активные силы не зависят от связей (твёрдые и/или гибкие тела), а значит, и от реакций связей, наложенных на твёрдое (или гибкое) тело. Реакции же связей зависят от активных сил.

*Утверждение 4.* В задачах креплений груза на открытом железнодорожном подвижном составе величины реакций связей в виде гибких упругих проволок  $\bar{R}_i$  ( $i = \bar{1}, n$ , где  $n$  – количество гибких упругих элементов креплений груза) и нормальная составляющая реакции связи (пол вагона)  $\bar{N}$ , координаты точки приложения нормальной реакции связи  $x_N$  и  $y_N$ , проекции касательной составляющей реакции связи в виде силы трения  $\bar{F}_{\text{тр}x}$  и  $\bar{F}_{\text{тр}y}$  (см. п. 2.4, (2.63)) *подлежат определению* из рассмотрения условия равновесия пространственной системы сил, действующих на механическую систему «вагон – крепление – груз».

Согласно принципу освобожденности от связей геометрической статики, нормальная  $\bar{N}$  и касательная  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{\text{тр}}$  составляющие реакции основной связи  $\bar{R}$  полностью *заменяют* опорную поверхность (пол вагона), а дополнительная связь  $\bar{R}_i$  – гибкие упругие элементы креплений груза. Поэтому *на расчётной модели* их можно и не показывать (рис. 2.33).

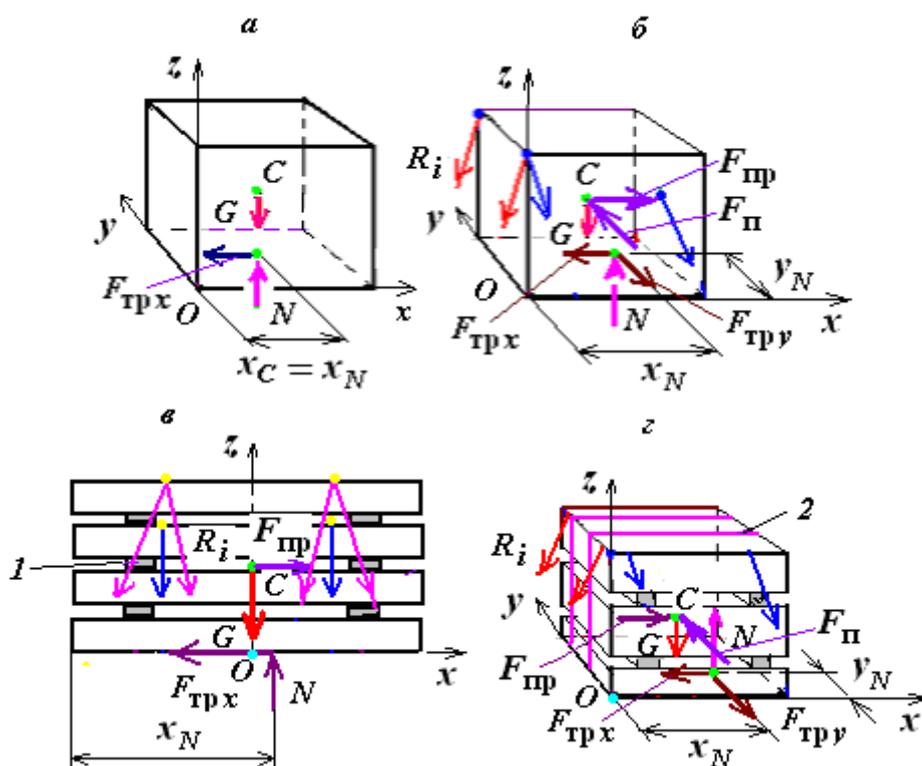


Рис. 2.33. Замена опорной плоскости и гибких упругих элементов креплений груза реакциями связей  $\bar{N}$  и  $\bar{R}_i$ .

1 – подкладка; 2 – увязка.

Расчётной моделью (схемой) назовём упрощённую идеализированную модель, которая отражает наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение при воздействии внешних нагрузок<sup>37</sup>.

На расчётной модели обозначены: активные силы – вес груза  $\bar{G}$ , динамические продольная  $\bar{F}_{пр} = \bar{F}_x$  и поперечная силы  $\bar{F}_{п} = \bar{F}_y$ ; реактивные силы – реакции связей  $\bar{R}_i$ ; нормальная составляющая  $\bar{N}$  реакции связи (пол вагона) и координаты её точек приложения  $x_N$  и  $y_N$ , а также касательные составляющие в виде силы трения  $\bar{F}_{трx}$  и  $\bar{F}_{трy}$ .

Примерами расчётных моделей могут быть модели, показанные на рис. 2.22; 2.24, б – 2.28, б, а также на рис. 2.34 (см. рис. 2.29).

<sup>37</sup> Механика материалов и конструкций: Справочные материалы: учебн. пособие / Ю.А. Окопный, В.П. Радин, В.Е. Хроматов и др.; под ред. В.П. Чиркова. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 124 с.

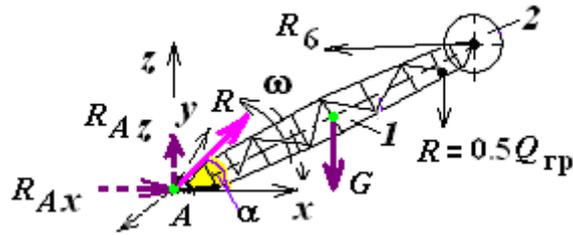


Рис. 2.34. К определению неизвестных реакции связей  $\bar{R}$  и  $\bar{R}_6$ .

### Задачи элементарной статики

В элементарной статике рассматривают различные системы сил, действующие на абсолютное твёрдое тело, с целью замены их наиболее простыми системами, им эквивалентными, и нахождения необходимых и достаточных условий равновесия этих систем. Процесс *замены систем сил простейшими системами*, в частности одной равнодействующей, называется ещё *процессом приведения сил*. Однако следует помнить, что это не «сложение сил». *Операция замены одной силы системой сил, ей эквивалентной, называется «разложением» сил.*

Для решения различных задач в элементарной статике пользуются или аналитическим, или геометрическим методом. При аналитическом методе данные и искомые величины определяются численно, причём векторные величины даются своими проекциями на оси координат. При геометрическом (или графическом) методе процесс нахождения искомых величин производят посредством соответствующих геометрических построений. При этом все величины могут задаваться и определяться графически. В дальнейшем будем придерживаться только аналитического метода, как более точного, реализуемого на ЭВМ, нежели геометрического.

## 2.3. Пространственная система сил

### 2.3.1. Система сходящихся сил

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 2.35).

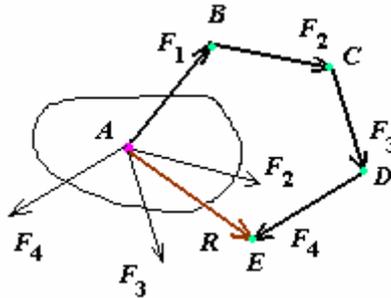


Рис. 2.35. К сложению систем сил.

Поскольку сила является *неподвижным* (или приложенным) *вектором*, сложение сходящихся сил выполняется аналогично правилу сложения векторов [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980].

#### *Пространственная система сходящихся сил*

Пространственная система сходящихся сил (например,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ) приводится к равнодействующей:  $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$  (см. (2.9)).

Равнодействующая  $\vec{R}$  пространственной системы сходящихся сил приложена в точке пересечения  $A$  линий действия слагаемых сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  и является замыкающей стороной многоугольника, построенного на этих силах.

Силовой многоугольник пространственной системы сходящихся сил представляет собой ломаную пространственную линию.

#### *Аналитический метод проекций пространственной системы сходящихся сил*

Разложение силы на прямоугольные составляющие, ортогональная проекция силы на ось, модуль и направляющие косинусы полностью определяются согласно векторным правилам [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980].

Разложение силы на составляющие, т. е. по ортам  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  осей  $x, y, z$  декартовых координат:

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k} . \quad (2.20)$$

Ортогональная проекция силы на ось [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]:

$$F_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} ; F_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} ; F_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} . \quad (2.21)$$

Модуль и направляющие косинусы полностью определяются согласно векторным правилам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} ; \quad (2.22)$$

$$\cos(x, \bar{F}) = \frac{F_x}{F} ; \cos(y, \bar{F}) = \frac{F_y}{F} ; \cos(z, \bar{F}) = \frac{F_z}{F} . \quad (2.22a)$$

В частном случае, когда имеет место плоская система сходящихся сил, из (2.20) – (2.22) получим

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F_x \bar{i} + F_y \bar{j} , \\ F_x &= \sum_{k=1}^n F_{kx} , F_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} ; F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} . \\ \cos(x, \bar{F}) &= \frac{F_x}{F} , \cos(y, \bar{F}) = \frac{F_y}{F} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

#### **Уравнения равновесия твёрдого тела при наличии пространственной системы сходящихся сил**

Для равновесия твёрдого тела, к которому приложена пространственная система сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая была равна нулю:  $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0$ , т. е. чтобы силовой многоугольник был замкнут.

При этом уравнения равновесия в проекциях на оси координат (т. е. в аналитической форме) имеют вид (см. (2.21))

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (2.24)$$

В частном случае уравнения равновесия твёрдого тела при наличии плоской системы сходящихся сил имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (2.25)$$

### 2.3.2. Произвольная система сходящихся сил

#### *Момент силы относительно точки при пространственном расположении сил*

Отметим, что Леонардо да Винчи первым открыл новое понятие механики – *момента силы относительно точки*. Исследуя равновесие сил, действующих на блок, он установил, что роль плеча играет длина перпендикуляра, опущенного из неподвижной точки блока на направление верёвки, несущей груз. Равновесие блока возможно только в том случае, если произведения силы на длины соответствующих перпендикуляров будут равны.

При пространственном расположении сил момент силы относительно точки  $O$  определяется как векторное произведение [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]

$$m_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.26)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведённый из точки  $O$  в точку приложения силы  $A$ .

Таким образом, вектор  $m_0(\vec{F})$  направлен перпендикулярно к плоскости, содержащей линию действия силы и точку  $O$  так, что сила с конца этого вектора видна направленной вокруг точки по направлению отсчёта углов (или против часовой стрелки) (рис. 2.36).

Модуль вектора  $m_0(\vec{F})$  равен произведению модуля силы на расстояние от точки  $O$  до линии действия силы (плечо)  $h$ , т. е.

$$|m_0(\vec{F})| = Fh. \quad (2.27)$$

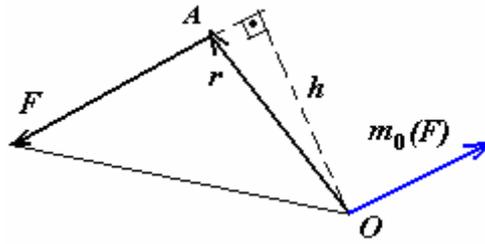


Рис. 2.36. К определению момента силы относительно точки.

*Плечо силы* – это *кратчайшее расстояние* данной точки до линии действия силы.

Единицей измерения момента силы является ньютон на метр (Н·м), килоньютон на метр (кН·м).

**Момент силы относительно точки при плоском расположении сил**

1. Как частный случай при плоском расположении сил момент силы относительно точки определяют согласно моменту вектора относительно точки в плоскости (рис. 2.37).

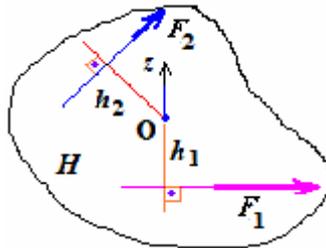


Рис. 2.37 К определению момента силы относительно точки.

*Момент силы относительно точки*  $m_O(\bar{F})$  – алгебраическая величина, численно равная произведению силы на плечо.

Математически момент силы относительно точки имеет вид

$$m_O(\bar{F}) = \pm Fh, \quad (2.28)$$

где  $\bar{F}$  – сила, приложенная на тело;  $h$  – плечо силы  $\bar{F}$ .

Моменты силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  относительно точки  $O$  запишутся в виде

$$m_O(\bar{F}_1) = F_1 h_1; \quad m_O(\bar{F}_2) = -F_2 h_2. \quad (2.28a)$$

Сумма моментов дает меру механического действия, связанного с поворотом рассматриваемого тела относительно центра  $O$ .

Пользуясь (2.28), можно определить моменты любых сил относительно выбранного центра.

2. Пара сил (*метод Л. Пуансо*<sup>38</sup>). Систему двух параллельных сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , равных по модулю и направленных в разные стороны, называют парой сил (рис. 2.38). Расстояние между линиями действия этих сил называют плечом пары ( $h$ ).

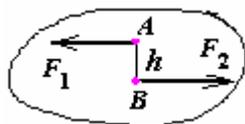


Рис. 2.38. К определению пары сил.

При этом твёрдое тело, к которому приложена пара сил, не находится в равновесии. Пара сил стремится повернуть твёрдое тело, к которому она приложена. Таким образом, момент этой пары позволяет оценить *вращательный эффект* данной системы сил.

*Мерой действия пары сил является алгебраическая величина, называемая её моментом.* Момент пары сил равен по абсолютной величине произведению модуля одной из сил пары на плечо:

$$m = \pm F_1 h. \quad (2.29)$$

3. Теоремы пары сил: а) *не нарушая состояния твёрдого тела, пару сил можно перенести в плоскости ее действия.* Отсюда следует, что вектор-момент пары  $\vec{m}$  можно переносить параллельно самому себе. Поэтому можно утверждать, что *вектор-момент пары сил есть вектор свободный*;

б) *пара сил, моменты которых равны, эквивалентны.* Это значит, что, не нарушая состояния твёрдого тела, можно изменять величину плеча либо величину силы, сохраняя при этом неизменным момент пары сил;

<sup>38</sup> Пуансо Луи – французский инженер, механик и геометр (1777 – 1859). Родился в Париже. Окончил знаменитую Политехническую школу (1797). Работал профессором математики в лицее Бонапарта, потом экзаменатором в Политехнической школе, а с 1809 г. в ней – профессором анализа и механики. В книге «Элементы статики» (1804) Л. Пуансо совершенствовал геометрические методы исследования задач механики, изложил учение о равновесии твёрдых тел и их систем на основе единого закона сложения и разложения сил и *пар сил (теория пар)*. Л. Пуансо дал *наглядную геометрическую картину движения твёрдого тела* в случае, исследованного аналитически Л. Эйлером. Ему принадлежит и ряд других работ, в частности геометрии, которые касаются звёздчатых многогранников. Четыре правильных выпуклых многогранника, описанные им в 1809 г., получили название «тела Пуансо».

в) при сложении нескольких пар сил на плоскости получают равнодействующую пару, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k ,$$

или

$$\sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n (\pm F_k h_k) . \quad (2.30)$$

4. Приведение системы сил к данной точке. При приведении силы к данной точке добавляется пара сил, момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения.

Это значит, что, не нарушая состояния твёрдого тела, можно силу приложить к точке  $B$  (рис. 2.39), добавив присоединенную пару сил, момент которой равен моменту заданной силы  $\bar{F}$  относительно центра приведения  $B$ .

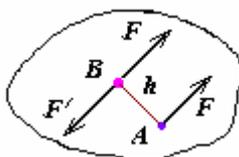


Рис. 2.39. К приведению сил к данной точке.

#### Момент силы вокруг оси

Момент силы вокруг оси  $m_z(\bar{F})$  (рис. 2.40, а) определяется как алгебраическая величина, абсолютное значение которой равно произведению модуля проекции силы  $\bar{F}_H$  на плоскость  $H$ , перпендикулярную к оси  $z$ , на расстояние  $h_H$  от точки  $O$  пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы на плоскость  $\bar{F}_H$ , т. е.

$$m_z(\bar{F}) = |\bar{F}_H| h_H = \pm F_H h_H . \quad (2.31)$$

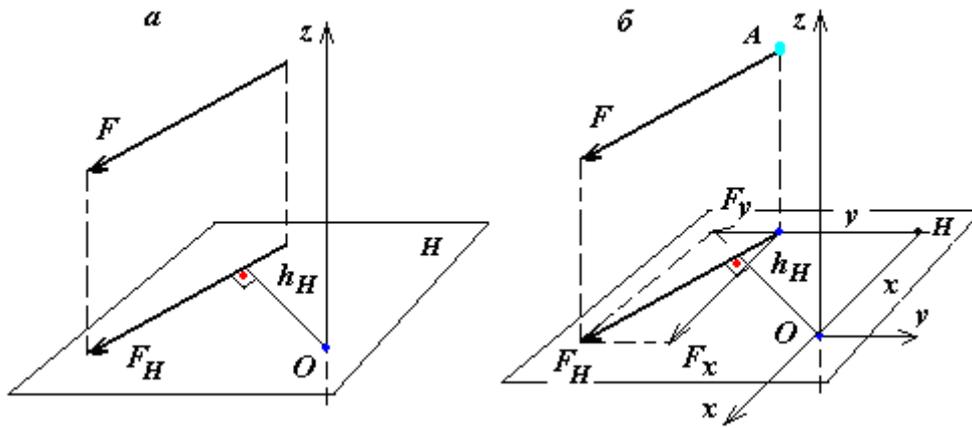


Рис. 2.40. К определению момента силы относительно точки.

Выражение момента силы вокруг оси  $z$  декартовых координат через проекции силы на эту ось можно выразить в виде (рис. 2.40, б):

$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x, \quad (2.32)$$

где  $F_x, F_y$  – проекции силы  $\bar{F}$  на оси декартовых координат,  $x, y$  – координаты точки  $A$  приложения силы.

Здесь  $F_x, F_y$  и  $x, y$  подставляются в (2.32) с учётом знака.

Таким образом, момент силы относительно точки – *вектор*, момент силы вокруг оси – *алгебраическая величина*.

Если точка лежит на оси, то момент силы вокруг оси равен проекции момента силы относительно точки на эту ось (рис. 2.41), т. е.

$$m_z(\bar{F}) = m_{Oz}(\bar{F}). \quad (2.33)$$

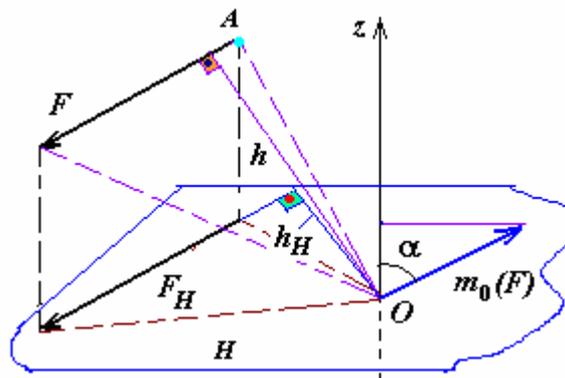


Рис. 3.41. К определению момента силы вокруг оси.

Зная моменты сил вокруг осей декартовых координат  $m_x(\bar{F})$ ,  $m_y(\bar{F})$ ,  $m_z(\bar{F})$ , можно определить величину момента силы  $m_o(\bar{F})$  относительно начала координат  $O$  и направляющие косинусы [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]:

$$|m_o(\bar{F})| = \sqrt{m_x^2(F) + m_y^2(F) + m_z^2(F)}, \quad (2.34)$$

$$\cos(x, m_o(\bar{F})) = \frac{m_x(F)}{|m_o(\bar{F})|};$$

$$\cos(y, m_o(\bar{F})) = \frac{m_y(F)}{|m_o(\bar{F})|}; \quad \cos(z, m_o(\bar{F})) = \frac{m_z(F)}{|m_o(\bar{F})|}, \quad (2.34a)$$

причём можно записать

$$m_o(\bar{F}) = m_x(F)\bar{i} + m_y(F)\bar{j} + m_z(F)\bar{k}. \quad (2.35)$$

В общем виде выражения моментов силы вокруг осей декартовых координат через проекции силы на эти оси (рис. 2.42) запишутся так:

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= yF_z - zF_y, & m_y(\bar{F}) &= zF_x - xF_z, \\ m_z(\bar{F}) &= xF_y - yF_x, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы  $\bar{F}$  на оси декартовых координат;  $x, y, z$  – координаты точки  $A$  приложения силы.

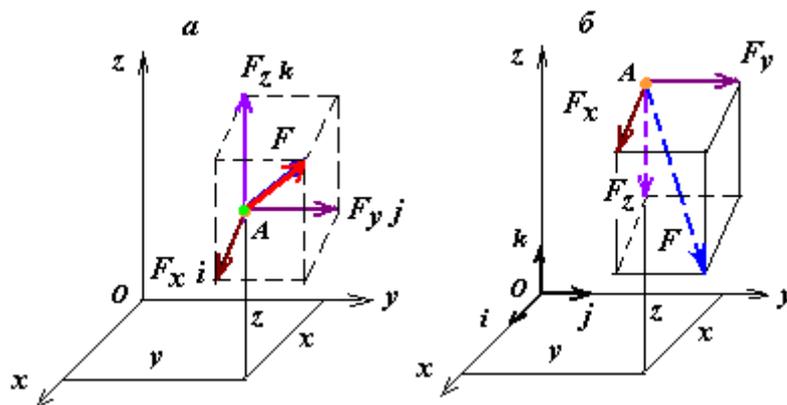


Рис. 2.42. К определению момента силы вокруг осей.

Полученные формулы удобнее записать в виде детерминанта [Бронштейн, Семендяев, 1980]:

$$\begin{aligned}
 m_x(\bar{F}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, & m_y(\bar{F}) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \\
 m_z(\bar{F}) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Момент силы вокруг оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости (рис. 2.43), т. е.

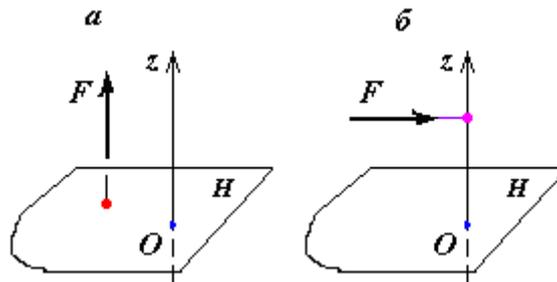


Рис. 2.43. К определению момента силы вокруг оси.

- а) если сила параллельна оси (при этом проекция  $\bar{F}_H$  силы  $\bar{F}$  на плоскость, перпендикулярной оси, обращается в нуль:  $\bar{F}_H = 0$ ) (рис. 2.43, а);
- б) если линия действия силы пересекает ось (при этом  $h_H = 0$ ) (рис. 2.43, б).

#### Случай произвольной пространственной системы сил

В случае пространственной системы сил *главным моментом*  $\bar{m}_0$  относительно центра  $O$  называют *сумму моментов сил, приложенных к твёрдому телу, относительно этого центра*:

$$\bar{m}_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k).
 \tag{2.38}$$

Главным моментом пространственной системы сил вокруг оси называют сумму моментов всех сил системы относительно этой оси:

$$m_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k), \quad m_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k), \quad m_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k), \quad (2.39)$$

т. е.

$$m_x = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \quad m_y = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}),$$

$$m_z = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \quad (2.39a)$$

Зная главные моменты системы сил вокруг осей декартовых координат, можно определить модуль главного момента относительно начала координат  $O$  и его направляющие косинусы так же, как и (2.34) и (2.34a).

#### **Приведение к одному центру сил, произвольно расположенных в пространстве**

Главным вектором  $\bar{R}^*$  системы сил называют векторную сумму этих сил:

$$\bar{R}^* = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (2.40)$$

Проекции  $R_x^*, R_y^*, R_z^*$  главного вектора  $\bar{R}^*$  на оси декартовых координат равны сумме проекций сил на соответствующие оси (см. (2.11)):

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z^* = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (2.41)$$

Модуль и направляющие косинусы определяются так же, как (2.22) и (2.22a).

Величина и направление главного вектора  $\bar{R}^*$  не зависят от центра приведения системы. Главный момент системы при перемене центра меняется.

Главный момент  $\bar{m}_0$  через проекции на оси декартовых координат определяют [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980] с учётом того, что  $m_x, m_y, m_z$  – главные моменты системы сил вокруг осей декартовых координат  $x, y, z$ , которые находят по (2.39a).

Таким образом, главные моменты системы сил  $m_x, m_y, m_z$  вокруг осей декартовых координат  $x, y, z$  одновременно являются проекциями главного момента  $\bar{m}_0$  относительно начало координат  $O$  на соответствующие оси.

Зная  $m_x, m_y, m_z$ , можно получить модуль  $m_0$  и направляющие косинусы [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980].

В частном случае, главный момент  $\bar{m}_A$  плоской системы сил относительно нового центра приведения  $A$  равен сумме главного момента этой системы сил относительно старого центра  $O$  и момента относительно нового центра  $A$  главного вектора  $\bar{R}^*$ , приложенного к старому центру  $O$ :

$$\bar{m}_A = \bar{m}_0 + m_A(\bar{R}_0^*). \quad (2.42)$$

Не следует отождествлять силу  $\bar{R}^*$  с равнодействующей  $\bar{R}$ , так как *равнодействующая* – это одна сила, которая эквивалентна данной системе сил, а сила  $\bar{R}^*$  эквивалентна данной системе сил только в совокупности с парой сил, момент которой равен главному моменту  $\bar{m}_0$ .

#### *Частные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости*

Рассмотрим следующие частные случаи:

а)  $\bar{R}^* = 0, \bar{m}_0 \neq 0$ . Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту  $\bar{m}_0$ . В этом случае главный момент не зависит от центра приведения;

б)  $\bar{R}^* \neq 0, \bar{m}_0 = 0$ . Главный вектор  $\bar{R}^*$  приводится к равнодействующей  $\bar{R}^* = \bar{R}$ , приложенной в центре приведения системы;

в)  $\bar{R}^* \neq 0, m_0 \neq 0$ . Система сил приводится к равнодействующей  $\bar{R} = \bar{R}^*$ , линия действия которой отстоит от линии действия силы  $\bar{R}^*$  на расстоянии  $h = \frac{m_0}{R^*}$ . Положение линии действия равнодействующей  $\bar{R}$  должно быть та-

ким, чтобы знак момента силы  $\bar{R}$  относительно центра приведения  $O$  совпадал со знаком главного момента системы сил  $\bar{m}_0$  относительно центра  $O$ .

Сила  $\bar{R}^*$  и равнодействующая  $\bar{R}$  равны по модулю и параллельны (рис. 2.44).

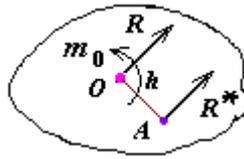


Рис. 2.44. Приведение системы сил к равнодействующей.

Теорема Вариньона<sup>39</sup> для произвольной плоской системы сил. Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки:

$$m_0(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k); \quad (2.43)$$

г)  $\bar{R}^* = 0$ ,  $\bar{m}_0 = 0$ . Твёрдое тело, к которому приложена данная система сил, находится в равновесии.

**Теорема Вариньона для системы сходящихся сил  
(теорема о моменте равнодействующей)**

**Теорема:** Если система сходящихся сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  имеет равнодействующую  $\bar{R}$ , то момент этой равнодействующей относительно произвольного центра  $O$  равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.

Пусть некоторая система сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  имеет равнодействующую  $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ , приложенную в точке  $O_1$  (рис. 2.45).

<sup>39</sup> Вариньон (Varignon) Пьер – французский механик и математик (1654 – 1722). Труды по теоретической механике, геометрии, гидромеханике и др. Дал систематическое изложение учения о сложении и разложении сил, о моментах сил. Вывел (1687) теорему, названную его именем: момент равнодействующей системы сил относительно любого центра (оси) равен сумме моментов сил этой системы относительно того же центра (оси).

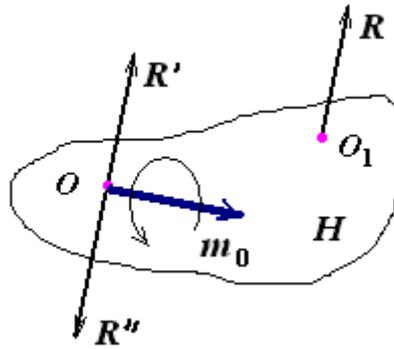


Рис. 2.45. К образованию момента пары сил.

Перенесём равнодействующую  $\bar{R}$  в произвольную точку  $O$ . При этом добавится пара  $(\bar{R}, \bar{R}'')$  с моментом

$$m_0 = m_0(\bar{R}). \quad (2.44)$$

С другой стороны,  $m_0$  есть главный момент системы относительно центра  $O$  и равен сумме моментов всех сил относительно этого центра:

$$m_0(\bar{R}) = m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n), \quad (2.44a)$$

где  $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ .

Сравнивая (2.44) и (2.44a), получаем теорему Вариньона

$$m_0(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k). \quad (2.45)$$

Проецируя обе части (2.45) на любую ось, проходящую через центр  $O$ , найдём, что теорема Вариньона справедлива и для моментов относительно оси.

Удобство применения теоремы Вариньона заключается в том, что, минуя непосредственное определение равнодействующей, можно вычислить её момент относительно точки, зная моменты всех слагаемых сил относительно той же точки.

***Равновесие твёрдого тела под действием произвольной пространственной системы сил***

Для равновесия твёрдого тела под действием произвольной пространственной системы сил *необходимо и достаточно*, чтобы суммы проекций всех

данных сил на произвольно выбранные оси декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и суммы моментов всех сил вокруг этих осей равнялись нулю (*аналитическая форма записи* [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad (2.46)$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0. \quad (2.47)$$

Первые три уравнения называются *уравнениями проекций*; они обеспечивают равенство нулю главного вектора  $\bar{R}^*$ . Три последних уравнения называются *уравнениями моментов*; они обеспечивают равенство нулю главного момента  $\bar{m}_0$ .

Уравнения равновесия пространственной системы сил, параллельных оси  $z$ , имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0. \quad (2.48)$$

В частном случае *равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей данных сил и направлена в ту же сторону* (рис. 2.46):

$$R = F_1 + F_2. \quad (2.49)$$

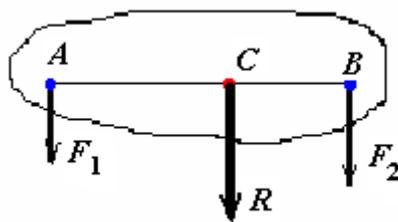


Рис. 2.46. О равнодействующей двух параллельных сил.

Линия действия равнодействующей делит внутренним образом расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (2.49a)$$

**Уравнения равновесия твёрдого тела под действием произвольной плоской системы сил**

Рассмотрим следующие частные случаи:

а) для равновесия твёрдого тела под действием произвольной плоской системы сил *необходимо и достаточно*, чтобы сумма проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат  $x$  и  $y$  и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки  $O$  равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = 0; \quad (2.50)$$

б) можно ограничиться составлением одного уравнения проекций, например на ось  $x$ , но при этом составить два уравнения моментов относительно двух произвольных точек:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad (2.51)$$

в) можно составить уравнения моментов относительно трёх произвольных точек:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad (2.52)$$

с) уравнения равновесия твёрдого тела под действием плоской системы *параллельных сил* имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = 0 \quad (2.53)$$

или

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0. \quad (2.53a)$$

**Разложение произвольной пространственной системы сил по координатным осям**

При расчёте креплений грузов в вагонах рассматриваются произвольные пространственные системы сил, приложенные к грузам. При составлении уравнений равновесия таких систем удобно *реакции* в гибких упругих элементах

креплений (растяжка, обвязка) разложить по трём заданным направлениям, не параллельным одной плоскости, *например* по трём взаимно перпендикулярным координатным осям [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]. Разложение результирующей силы (реакции) по координатным осям (на три составляющие) состоит в замене одной силы тремя взаимно перпендикулярными силами, эквивалентными данной силе<sup>40</sup>.

На основании правил параллелепипеда достаточно построить такой параллелепипед, рёбра которого имели бы заданные направления, и диагональю которого являлась бы данная реакция (рис. 2.47).

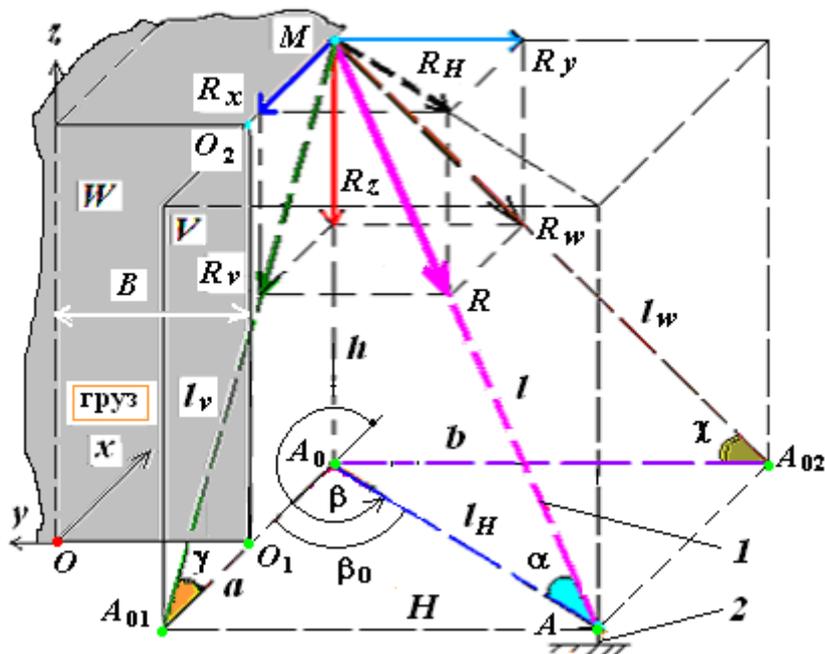


Рис. 2.47. К определению проекции упругих сил элемента крепления на оси координат.

1 – гибкий упругий элемент крепления; 2 – стоечная скоба вагона.

Рассмотрим *параллелепипед* со сторонами:  $a$  (длина),  $b$  (ширина) и  $h$  (высота). Одна из боковых сторон параллелепипеда касается боковой вертикальной поверхности  $V$  груза, а нижняя горизонтальная его поверхность  $H$  совпадает с полом вагона. На боковых сторонах вагона расположены увязочные устройства (или стоечные скобы). На стоечную скобу вагона закрепляют один из концов гибкого упругого элемента крепления (растяжки и обвязки). Стороны *параллелепипеда*  $a$ ,  $b$  и  $h$  соответствуют проекциям гибкого упругого элемента крепления на координатные оси.

<sup>40</sup> Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н., Власова Н.А. Крепления грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 286 с.

На рис. 2.47 обозначено:  $M$  – точка, совпадающая с серединой увязочного устройства груза;  $A$  – точка, совпадающая с серединой увязочного устройства вагона;  $A_0$  – проекция монтажной петли груза к полу вагона;  $A_{01}$  и  $A_{02}$  – проекции точки  $A$  на вертикальную  $V$  и фронтальную  $W$  поверхности параллелепипеда, совпадающие с боковой вертикальной поверхностью груза;  $AM$  – длина растяжки, равная одной из диагоналей параллелепипеда;  $\gamma$  – угол, образованный между следом растяжки  $MA_{01}$ , расположенной на боковой поверхности груза, и линией  $A_0A_{01}$ , лежащей параллельно оси абсцисс;  $\chi$  – угол, образованный между следом растяжки  $MA_{02}$ , расположенной на фронтальной поверхности  $W$ , и линией  $A_0A_{02}$ , лежащей параллельно оси ординат;  $\alpha$  – угол наклона растяжки  $AM$  к горизонтальной плоскости  $H$  (например, к полу вагона);  $\beta$  – угол между проекцией  $AA_0$  линии  $AM$  (например, длины растяжки  $l$ ) на горизонтальную плоскость  $H$  и продольной осью  $x$ ;  $a$ ,  $b$  и  $h$  – проекции растяжки  $AM$  на продольную  $x$ , поперечную  $y$  и вертикальную  $z$  оси. Проекция  $a$ ,  $b$  и  $h$  растяжки *берутся* из схемы размещения груза в вагоне в соответствии с принятым масштабом чертежа.

*Иначе*,  $h$  – высота точки закрепления растяжки на грузе (монтажная или грузовая петля) относительно уровня пола вагона (т. е. с учётом высоты  $h_0$  деревянных подкладок). Пусть  $l_H, l_V, l_W$  – проекции растяжки  $AM$  (т. е. длины растяжки  $l$ ) на горизонтальную  $H$ , фронтальную  $W$  и вертикальную  $V$  плоскости;  $\bar{R}$  – реакция (а не натяжение) растяжки, приложенная в точке  $M$  (монтажная петля) груза после освобождения связи, согласно *принципу освобожденности от связей статики* (аксиома связей). Согласно закону равенства действия и противодействия механики, натяжение в растяжке равно этой реакции, которая далее будет отождествляться с натяжением растяжки;  $\bar{R}_x, \bar{R}_y$  и  $\bar{R}_z$  – проекции на координатные оси реакции в растяжке;  $\bar{R}_H, \bar{R}_V$  и  $\bar{R}_W$  – проекции на горизонтальную  $H$ , вертикальную  $V$  и фронтальную  $W$  поверхности параллелепипеда реакции в растяжке  $\bar{R}$ .

Проекция реакции в растяжке на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  определяются методом двойного проектирования (см. рис. 2.47):

$$R_x = R_H \cos \beta; R_y = R_H \sin \beta; R_z = R \sin \alpha, \quad (2.54)$$

где  $R_H$  – проекция на горизонтальную плоскость (пол вагона) натяжения в растяжке:

$$R_H = R \cos \alpha . \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55) в первое и второе равенство (2.54), получим:

$$R_x = R \cos \alpha \cos \beta ; \quad R_y = R \cos \alpha \sin \beta ; \quad R_z = R \sin \alpha . \quad (2.56)$$

Представим проекции координат монтажных (грузовых) петель груза  $M(x, y, z)$  на оси  $x, y$  и  $z$ :

$$x = O_1 A_0 = O_2 M = a ; \quad y = -OO_1 ; \quad z = O_1 O_2 = A_0 M = h , \quad (2.57)$$

где  $O_1 A_0 = O_2 M$  – расстояние от торца груза до увязочного устройства (стоечная скоба)  $M$ ;  $OO_1$  – расстояние между продольной осью  $x$  и монтажной петлей груза  $M$  или в частном случае – половина ширины груза  $B$ ;  $O_1 O_2 = A_0 M$  – высота от основания до монтажной петли груза  $x$ .

Проекция растяжки на координатные оси в соответствии со схемой размещения и крепления груза можно представить

$$\begin{aligned} \Delta x &= -A_{01} A_0 = -a ; \\ \Delta y &= -[(OO_1 + A_0 A_{02}) - B] = -(B_{\text{в}} - B) = -b ; \\ \Delta z &= -A_0 M = -h , \end{aligned} \quad (2.57a)$$

где  $A_{01} O_1$  – расстояние от торца груза до увязочного устройства (стоечная скоба)  $A$ ;  $B_{\text{в}}$  – половина полезной ширины платформы (для моделей 13-401, 13-4012, 134019 и 13-Н451 –  $2B_{\text{в}} = 2770$  мм).

Теперь можно отыскать значения функции одного угла<sup>41</sup>:

$$\sin \alpha = \frac{\Delta z}{l} ; \quad \cos \alpha = \frac{l_H}{l} ; \quad \cos \beta = \frac{\Delta x}{l_n} ; \quad \sin \beta = \frac{\Delta y}{l_H} , \quad (2.58)$$

где  $l_H$  – проекция растяжки  $AM$  на горизонтальную плоскость  $H$  (т. е. длина растяжки  $l$  к полу вагона):

$$l_H = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} ;$$

$l$  – длина нити  $AM$  (т. е. растяжки)<sup>42</sup>:

<sup>41</sup> Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1980. – 976 с.

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.59)$$

Учитывая формулу (2.55), можно получить произведение функции двух углов

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{l_H}{l} \frac{\Delta x}{l_H} = \frac{\Delta x}{l}, \quad (2.60)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{l_H}{l} \frac{\Delta y}{l_H} = \frac{\Delta y}{l}. \quad (2.60a)$$

Имея в виду (2.58), (2.60) и (2.60a), окончательно можно получить формулы для определения проекции натяжений (усилий) в растяжке на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  в удобном для вычисления виде (заменой тригонометрических функций отношениями проекции растяжек к их длине):

$$R_x = R \frac{\Delta x}{l}; \quad R_y = R \frac{\Delta y}{l}; \quad R_z = R \frac{\Delta z}{l}. \quad (2.61)$$

или с учётом (2.57a)

$$R_x = -R \frac{a}{l}; \quad R_y = -R \frac{b}{l}; \quad R_z = -R \frac{h}{l}. \quad (2.61a)$$

Таким образом, при составлении уравнения равновесия груза *должны быть учтены знаки* проекции реакции растяжки на оси координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

При необходимости можно выразить проекции усилий  $\bar{R}_V$  и  $\bar{R}_W$  через реакции в растяжке  $\bar{R}$  по формулам

$$R_V = R \cos \gamma; \quad R_W = R \cos \chi, \quad (2.62)$$

где

$$\cos \gamma = \frac{l_V}{l}; \quad \cos \chi = \frac{l_W}{l} \quad (2.62, a)$$

с учётом того, что в них  $l_V$  и  $l_W$  – проекции растяжек соответственно на вертикальную и фронтальную плоскости:

$$l_V = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}; \quad l_W = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

---

<sup>42</sup> Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

Таким образом, получены компоненты натяжения (усилия) растяжки в виде проекций на координатные оси:

$\overline{R}_x$  – проекция усилия растяжки на *продольную* ось вагона (или на пол вагона);

$\overline{R}_y$  – проекция усилия растяжки на *поперечную* ось вагона;

$\overline{R}_z$  – проекция усилия растяжки на *вертикальную* ось вагона (или на боковую поверхность груза).

Полученные компоненты (или проекции) активно используются при составлении уравнений равновесия прикреплённого в вагоне груза как в проекциях, так и в моментах вокруг оси.

**Основная теорема статики (теорема Л. Пуансо)  
(теорема о трёх непараллельных силах)**

**Теорема.** *Если твёрдое тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (необходимое условие). При этом силовой треугольник должен быть замкнутым (достаточное условие).*

Данная теорема облегчает решение задач на равновесие твёрдого тела в тех случаях, когда направление одной из трёх уравновешивающих сил неизвестно. Действительно, определив точку пересечения линии действия двух сил, направления которых известны, можно указать направление линии действия третьей силы, так как она должна пройти через точку приложения этой силы и точку пересечения линии действия первых двух сил. Например, задачи на выдергивание гвоздя из доски [Туранов, Бондаренко, 2006] и устойчивости трубы большого диаметра, размещённого на платформе (см. пп. 2.12) [Туранов, 2007], могут быть решены с применением этой теоремы.

## 2.4. Сила трения

### *Понятие о силе трения*

Известно, что Леонардо да Винчи первым *определил коэффициент трения*, изучил *трение* в машинах и движение тел по наклонной плоскости<sup>43</sup>.

Сила трения (*англ.* frictional force) для движущихся элементов в технике является чрезвычайно вредной, поскольку приводит к потере энергии в кинематических парах механизма и износу их трущихся элементов. В большинстве случаев стремятся уменьшить коэффициент трения между трущимися поверхностями, применяя различные смазочные материалы. Однако в задачах грузовых перевозок сила трения оказывается весьма *полезной*. Она *способствует удерживанию груза* от сдвига как вдоль, так и поперёк вагона, а также поворота вокруг вертикальной оси, при любых условиях движения поезда. Сила трения *препятствует* движению груза с поглощением значительной части работы сдвигающих сил (продольной и поперечной переносной сил инерции (см. п. 4.6), силы аэродинамического сопротивления при попутном ветре (см. (3.11) и (3.12))). Поэтому в случаях изменения климатических условий перевозок грузоотправитель должен предпринимать технологические и профилактические меры, способствующие увеличению коэффициента трения между контактирующими поверхностями груза и пола вагона, например засыпать пол вагона песком<sup>44</sup>.

Движение одного тела относительно другого может происходить в режимах сухого и жидкостного трения<sup>45</sup>. Рассмотрим только режимы сухого трения. Случай, когда между телами имеется слой жидкой смазки, требует специального изучения. Так, в условиях жидкостного режима трения работают подшипники скольжения коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания.

### 2.4.1. Трение скольжения

Различают два понятия силы трения – сила трения в покое (*сила сцепления*) и сила трения в движении (*сила трения скольжения*).

Силу трения, проявляющуюся между покоящимся телом и шероховатой опорной плоскостью как противодействия со стороны этой плоскости возможному смещению тела (как реакцию связи), называют *силой сцепления* и обозначают  $\overline{F}_{\text{сц}}$ .

---

<sup>43</sup> Боголюбов А.Н. Математики механики. Библиографический справочник. – Киев: Наук. дум., 1983. – 638 с.

<sup>44</sup> Приложение 14 к СМГМ «Правила размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах». – М.: Планета, 2005. – 191 с.

<sup>45</sup> Решетов Д.Н. Детали машин. – М.: Машиностроение, 1987. – 496 с.

Силу трения, возникающую при движении тела по шероховатой поверхности, а также при скольжении одного тела относительно другого, называют *силой трения скольжения* (англ. sliding friction) и обозначают  $\overline{F}_{\text{тр}}$ .

Силу трения часто в обоих случаях обозначают одинаково через  $\overline{F}_{\text{тр}}$ .

*Сила сцепления*  $\overline{F}_{\text{сц}}$  направлена по касательной к опорной поверхности в сторону возможного смещения тела по этой поверхности. Модуль силы сцепления  $\overline{F}_{\text{сц}}$  изменяется от нуля до максимального значения  $F_{\text{сц}}^{\text{max}}$  в момент начала движения. Модуль максимальной силы сцепления  $F_{\text{сц}}^{\text{max}}$  пропорционален нормальному давлению  $N$  (нормальной составляющей реакции связи) тела на плоскость (см. рис. 2.16, 2.17):

$$F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}} N,$$

где  $f_{\text{сц}}$  – коэффициент сцепления, *величина безразмерная*.

Модуль силы сцепления  $\overline{F}_{\text{сц}}$  всегда удовлетворяет условию  $F_{\text{сц}} \leq f_{\text{сц}} N$ .

*Сила трения*  $\overline{F}_{\text{тр}}$  направлена по касательной к трущимся поверхностям *противоположно относительной скорости* скольжения тела.

Сила трения  $\overline{F}_{\text{тр}}$  может рассматриваться как касательная составляющая полной реакции  $\overline{R}$  шероховатой поверхности  $\overline{F}_{\text{т}}$ , а  $\overline{N}$  – как нормальная составляющая этой реакции (рис. 2.48). В связи с этим *результатирующая* (полная) *реакция опорной поверхности*

$$R = \sqrt{N + F_{\text{тр}}}.$$

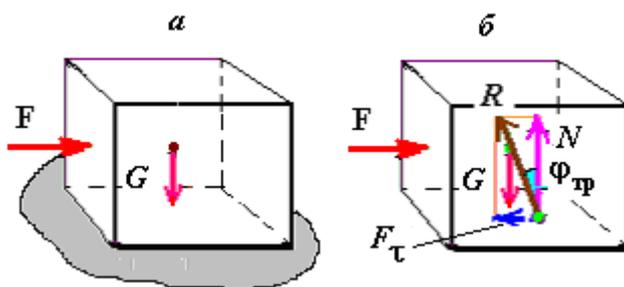


Рис.2.48. К пояснению угла трения.

Полная реакция связи  $\bar{R}$  отклонена относительно нормали к поверхности на угол трения  $\varphi_{\text{тр}}$ . В этом случае такую связь называют *неидеальной*, а поверхность – *шероховатой*. В предельном состоянии покоя  $\varphi_{\text{тр}} = \varphi_{\text{сц}}$  ( $\varphi_{\text{сц}}$  – угол сцепления).

Угол трения  $\varphi_{\text{тр}}$  (англ. – angle of friction) – угол между полной реакцией связи  $\bar{R}$  и её нормальной составляющей  $N$  (см. рис. 2.48).

### Законы Кулона<sup>46</sup>

1. Величина силы трения зависит от активных сил (движущая сила и сила тяжести) и может принимать любые значения от нуля и до  $F_{\text{пр}} = F_{\text{сц}}^{\text{max}}$ , называемого предельной силой трения. Предельная сила трения достигается в момент выхода тела из положения равновесия, т. е.

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{пр}} = F_{\text{сц}}^{\text{max}}.$$

Иначе, равновесие, имеющее место, когда сила трения скольжения  $F_{\text{тр}}$  равна предельной силе трения (т. е.  $F_{\text{тр}} = F_{\text{пр}}$ ), называется **предельным равновесием**.

Сила трения скольжения  $F_{\text{тр}}$  направлена по касательной к трущимся поверхностям *противоположно скорости* рассматриваемого движущегося тела.

2. Модуль силы трения  $F_{\text{тр}}$  численно равен произведению коэффициента трения при скольжении между контактирующими поверхностями тел (груз и пол вагона) на нормальную составляющую реакции связи (пол вагона), т. е.

$$F_{\text{тр}} = fN, \tag{2.63}$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения (англ. – static coefficient friction);  $N$  – нормальная составляющая реакции  $\bar{R}$  внешней связи, приложенная к телу

---

<sup>46</sup> Шарль Огюстен Кулон – выдающийся французский механик (1736–1806), сформулировавший четыре закона сухого трения в своём знаменитом научном произведении «Теория простых машин» (1781). Автор работ по вязкости жидкости (1801) и магнетизму (1806). Впервые описал упрочнение материала (1784), показав, что «если проволока подвергнута предварительной деформации далеко за предел упругости, то материал в дальнейшем становится более твёрдым и его предел упругости повышается». До сих пор используют его теории трения, кручения и прочности, а также законы электростатических и магнитных взаимодействий.

(груз). В частном случае, когда груз (например, среднетоннажный контейнер) размещён на поверхности пола вагона без креплений,  $|N| = G$  (см. рис. 2.16, а).

3. Коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента трения сцепления (т. е.  $f < f_{\text{сц}}$ ), *зависит* от материала, физического состояния трущихся поверхностей и относительной скорости движущихся тел. Обычно с увеличением скорости коэффициент трения скольжения убывает, стремясь к некоторому постоянному значению. Коэффициент трения сцепления *зависит* от материала и физического состояния трущихся поверхностей (степень шероховатости, влажность, температура и другие условия), но *не зависит* от значения нормального давления.

Величина коэффициента сцепления в зависимости от различных условий устанавливается экспериментально. Значения коэффициента трения сцепления для некоторых материалов: кирпич по бетону  $f_{\text{сц}} = 0,76$ ; железобетон по дереву  $f_{\text{сц}} = 0,55$ ; дуб по дубу (волокна параллельны)  $f_{\text{сц}} = 0,62$ ; дуб по дубу (волокна перпендикулярны)  $f_{\text{сц}} = 0,54$ ; сталь по дереву  $f_{\text{сц}} = 0,4$ ; металл по металлу  $f_{\text{сц}} = 0,15 \div 0,25$ ; сталь по льду  $f_{\text{сц}} = 0,027$ .

4. Значение силы трения  $F_{\text{тр}}$  при прочих равных условиях не зависит от размеров (площади соприкосновения) трущихся поверхностей. Из этого закона следует, что для того чтобы сдвинуть, например, *прямоугольное тело*, надо приложить одну и ту же силу независимо от того, какой гранью оно положено на поверхность, широкой или узкой.

В нарушение этого закона в п. 10.3.2 ТУ<sup>47</sup> приводится расчёт силы трения между грузом и контактируемыми поверхностями пола платформы.

Этот закон *экспериментально установил* французский ученый Амонтон (1663 – 1705), а французский физик Кулон *сформулировал* его.

Из первых двух законов следует, что при равновесии

$$F_{\text{тр}} < F_{\text{пр}} = F_{\text{сц}}^{\text{max}},$$

или

$$F_{\text{тр}} \leq fN. \quad (2.64)$$

*Отличие силы трения от других реакций связей заключается* в том, что:

- её модуль не может превысить определенного предела (т. е.  $F_{\text{тр}} \leq F_{\text{пр}}$ );
- она резко меняет своё направление при изменении направления скольжения;
- её величину можно считать постоянной.

*Особо отметим*, что сила трения в зависимости от условия задачи может быть отнесена к *активным* (движущим) или *реактивным* (оказывающим сопро-

---

<sup>47</sup> Приложение 14 к СМГМ «Правила размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах». – М.: Планета, 2005. – 191 с.

тивление движению) силам. Например, во всех задачах креплений грузов она является *реактивной* (удерживающей) *силой*. Для заднего колеса автомобиля сила трения – активная сила, а для переднего колеса – реактивная. Для человека сила трения между подошвой обуви и поверхностью опирания является активной (движущей) силой. Для колес колесных пар локомотивов и двухребордных колёс козловых (см. рис. 2.3) и мостовых кранов сила трения (сцепления) – активная сила, а для колёс колёсных пар вагонов – реактивная.

### *Некоторые замечания*

*Замечания.* 1. Сила трения скольжения возникает лишь тогда, когдадвигающая сила превышает силу трения сцепления (покоя). Иначе, *сила трения скольжения возникнет только тогда, когда произойдёт сдвиг тел.*

С другой стороны, применительно к грузу, прикреплённому к вагону гибкими упругими связями, появление или изменение натяжений в таких связях происходит только при возникновении действительного сдвига (перемещения) груза. *Иначе, при отсутствии сдвига груза не изменяются натяжения (усилия) в креплениях.*

2. *Максимальное значение* силы трения, используемое при расчёте предельного равновесия, определяют только по (2.64).

3. Координата точки приложения нормальной реакции опорной плоскости, как равнодействующая реакции этой поверхности, может не совпадать с координатой проекции центра тяжести на опорную плоскость и в общем случае *подлежит определению*. В частном случае, когда тело свободно лежит на поверхности,  $x_N = 0$ , поскольку  $F = 0$ , и только тогда  $N = G$  (см. рис. 2.16, а).

Когдадвигающая тело сила приложена так, как показано на рис. 2.49, а, то  $x_N$  определяют из условия предельного равновесия тела вокруг ребра  $AB$  (рис. 2.49, б):

$$m_y(F) = Fz_F + Gx_C - Nx_N = 0.$$

Отсюда имеем

$$x_N = \frac{Fz_F + Gx_C}{N}, \tag{2.65}$$

где  $z_F$  – координата точки приложения силы  $\bar{F}$ , м;  $x_C$  – координата центра тяжести тела, м;  $N = G$  – из условия равновесия в проекциях по оси  $z$ .

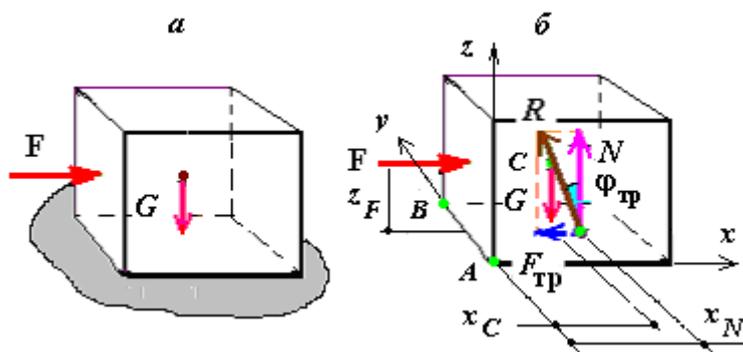


Рис. 2.49. К определению координаты точки приложения нормальной реакции поверхности.

Результат (2.65) может быть получен геометрически, непосредственно из основной теоремы статики – *теоремы о трёх непараллельных силах* (см. пп. 2.3.2)

$$x_N = \frac{F}{G} \frac{1}{z_F} + x_C. \quad (2.65a)$$

Для грузов с малой опорной плоскостью смещение точки приложения нормальной реакции  $\bar{N}$ , вычисленное, например, по (2.65), может превысить горизонтальный размер груза в направлении сдвигающей силы, что означает переход к другой форме потери устойчивости – *опрокидыванию* груза относительно ребра, противоположного ребру  $AB$  (см. п. 2.10).

4. Когда действующая на тело (груз) сила  $\bar{R}$  направлена под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 2.50), нормальная составляющая реакции связи  $\bar{N}$  и координата точки её приложения  $x_N$  определяются из условия равновесия тела

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 : -R_y - G + N = 0 ;$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0 : R_x z_{R_x} - G x_C + N x_N = 0 ,$$

откуда получим

$$N = R_y + G ; \quad (2.66)$$

$$x_N = \frac{R_x z_{R_x} - G x_C}{N} , \quad (2.66a)$$

где  $R_x = R \cos \alpha \cos \beta$  и  $R_y = R \sin \alpha$  – проекции натяжений в гибком упругом элементе на продольную и вертикальную оси.

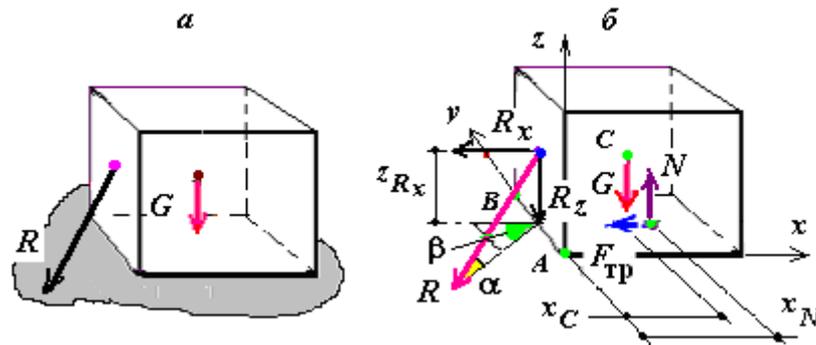


Рис. 2.50. К определению нормальной реакции связи и координаты точки её приложения.

### Равновесие при наличии трения

Изучение равновесия тел с учётом трения скольжения можно свести к рассмотрению *предельного равновесия*, которое имеет место, когда  $\bar{F}_{тр} = \bar{F}_{пр}$ .

1. При аналитическом решении реакцию неидеальной (шероховатой) связи представляют двумя её составляющими (рис. 2.51, а). Затем составляют обычные уравнения равновесия и присоединяют к ним равенство  $F_{тр} \leq fN$  (см. (2.64)). Из полученной таким способом системы уравнений и определяют искомые величины.

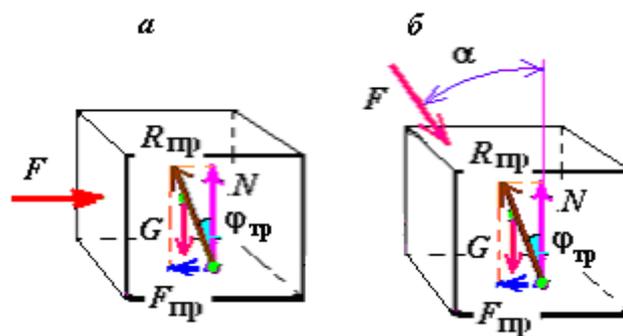


Рис. 2.51. Графическое пояснение предельного равновесия.

Связь между *тангенсом угла трения* и коэффициентом трения:

$$\operatorname{tg}\varphi_{\text{тр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{N},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi_{\text{тр}} = f.$$

При полном равновесии полная реакция  $\bar{R}_{\text{пр}}$  в зависимости от сдвигающих сил может проходить где угодно внутри угла трения  $\varphi_{\text{тр}}$ . Когда равновесие становится предельным, реакция  $\bar{R}_{\text{пр}}$  будет отклонена от нормали на угол трения.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу  $\bar{F}$ , образующую угол  $\alpha$  с нормалью (см. рис. 2.51, б), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающая сила  $F \sin \alpha$  будет больше  $F_{\text{пр}} = fN = fF \cos \alpha$  (если пренебречь весом тела). Тогда неравенство  $F \sin \alpha > fF \cos \alpha$ , в котором  $f = \operatorname{tg}\varphi_{\text{тр}}$ , выполняется только при  $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi_{\text{тр}}$ , т. е. при  $\alpha > \varphi_{\text{тр}}$ . Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол  $\alpha$ , меньший угла  $\varphi_{\text{тр}}$ , тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. *Этим объясняют известные явления заклинивания или самоторможения тел* [Решетов, 1987].

2. Если в задаче требуется определить условия равновесия при всех значениях, которые может иметь сила трения, т. е. при  $\bar{F}_{\text{тр}} \leq \bar{F}_{\text{пр}}$ , то её тоже можно решить, рассмотрев предельное равновесие и уменьшая в полученном результате коэффициент трения  $f_0$  до нуля. Когда *равновесие является предельным*, сила трения  $F_{\text{тр}} = F_{\text{пр}} = fN$ . В остальных положениях равновесия  $F_{\text{тр}} < fN$ . Следовательно, в каждом из этих положений можно считать, что  $F_{\text{тр}} = kN$ , где  $k < f$ . При  $k = 0$  (или  $f = 0$ ) получим положение равновесия, соответствующее случаю, когда *связь является идеальной, а поверхность гладкой*.

*Особо отметим*, что при решении ряда задач часто допускают ошибку, которая состоит в том, что при подсчётах считают  $F_{\text{тр}} = fQ$ , в то время как сила давления на плоскость  $Q$  равна силе тяжести груза  $G$  лишь в случае, когда груз свободно лежит на поверхности, т. е. не закреплён гибкими дополнительными упругими элементами креплений (связями).

Такая ошибка допущена в п.10.5.3 ТУ<sup>48</sup> при выводе формул (34) и (35).

3. Отметим ещё, что если в задаче надо определить значение силы трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , когда равновесие не является предельным и  $F_{\text{тр}} \neq F_{\text{пр}}$ , то эту силу следу-

<sup>48</sup> Приложение 14 к СМГМ «Правила размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах». – М.: Планета, 2005. – 191 с.

ет считать неизвестной величиной и находить из соответствующих уравнений равновесия.

### *Пример решения задачи при наличии трения скольжения*

Решение любых задач на равновесие твёрдого тела *при наличии сил трения*, независимо от взаимного расположения приложенных к нему сил, рекомендуют проводить *в следующем порядке*<sup>49</sup>:

1) из *реальной схемы* (рисунок или фотография реального объекта) выделить твёрдое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных (или искомых) величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твёрдое тело несвободно, то, применив *принцип освобождаемости от связей* геометрической статики, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твёрдого тела как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей (реактивных сил). Реакцию шероховатой поверхности следует представить двумя составляющими – нормальной  $\bar{N}$  и касательной  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{\text{тр}}$  (силой трения) составляющей реакции  $\bar{R}$ , или, не раскладывая эту реакцию на составляющие, направить её под углом трения  $\varphi_{\text{тр}}$  к нормали к поверхности (при максимальной силе трения). В итоге получают *расчётную модель*.

Напомним, что расчётной моделью (схемой) назовём упрощённую идеализированную модель, которая отражает наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение при воздействии внешних нагрузок.

Для крепления грузов на железнодорожном подвижном составе следует учитывать **только минимальное значение силы трения** как удерживающей груз силы, поскольку при максимальном её значении груз будет закреплён к вагону меньшим количеством креплений, что будет угрожать безопасности движения. Поэтому при решении задачи крепления грузов на железнодорожном подвижном составе для определения силы трения следует воспользоваться значением коэффициента трения  $f$ , которое в 0,7 раза (т. е. на 30 %) меньше величины коэффициента сцепления  $f_{\text{сц}}$ , приведённого в ТУ или в справочниках по физике<sup>50</sup>;

<sup>49</sup> Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3 т. Т. 1. Статика и кинематика. – М.: Наука, 1990. – 672 с.

<sup>50</sup> Nils Anderson, Peter Anderson, Robert Bylander, Sven Sokjer, Petersen and Bob Zether. Equipment for Rational Securing of Cargo on railway Wagons / VINNOVA Report/Rapport VR 2004:05 // <http://www.vinnova.se/upload/EPiStorePDF/vr-04-05.pdf>.

5) сопоставить количество неизвестных величин и количество независимых уравнений равновесия, которые должны быть равны для статически определённых задач. К уравнениям равновесия твёрдого тела (груза) следует добавить зависимость силы трения от нормального давления – закон Кулона (см. (2.64));

6) выбрать систему координат;

7) составить систему уравнений равновесия для сил, приложенных к твёрдому телу (грузу) или к системе твёрдых тел;

8) решив систему уравнений равновесия, определить *искомые* величины.

*Задача 1*<sup>51</sup>. Штучный груз в ящичной упаковке (тело) силой тяжести  $G = 150$  кН находится в покое на шероховатом горизонтальном полу платформы (рис. 2.52). Коэффициент трения при движении  $f = 0,348$ .

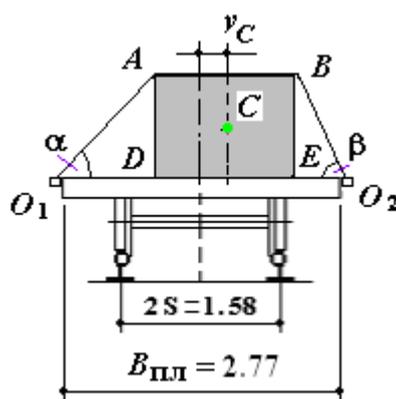


Рис. 2.52. Груз в ящичной упаковке, размещённый на платформе.

В ящичной упаковке может быть оборудование, например ценные детали станка, подлежащие обязательной упаковке по техническим условиям их перевозки и транспортировки [Приложение..., 2004].

Ящичная упаковка на платформе размещена со смещением центра тяжести относительно продольной оси симметрии вагона на величину  $y_C = y_M = 0,494$  м, согласно ТУ для силы тяжести груза  $G = 150$  кН. Через ящик перекинут предварительно натянутый гибкий упругий элемент (обвязка), закреплённый своими концами в стоечные скобы платформы (точки  $O_1$  и  $O_2$ ).

Допускаем, что гибкие упругие элементы креплений расположены перпендикулярно к боковым граням ящичной упаковки.

Пренебрегая трением между поверхностью ящика и гибким элементом, определить натяжение этого элемента  $\bar{S}$ , при котором ящик будет находиться в покое. Кроме того, найти координату точки приложения  $x_N$  нормальной реак-

<sup>51</sup> Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

ции связи  $\bar{N}$  относительно продольной оси симметрии вагона. Несовпадение координаты точки приложения нормальной реакции связи  $\bar{N}$  с направлением вертикальной оси, проходящей через центр тяжести груза  $\bar{G}$ , можно объяснить меньшим углом наклона натяжения правой ветви гибкого элемента относительно вертикальной оси, нежели левой ветви.

*Решение.* Рассмотрим равновесие ящичной упаковки (объекта). На ящик без учёта дополнительной связи (гибкий упругий элемент) действует одна активная сила – сила тяжести  $\bar{G}$  и нормальная составляющая  $\bar{N}$  реакции связи  $\bar{R}$ , приложенная в точке  $K$ . В итоге получаем расчётную модель, показанную на рис. 2.52, а.

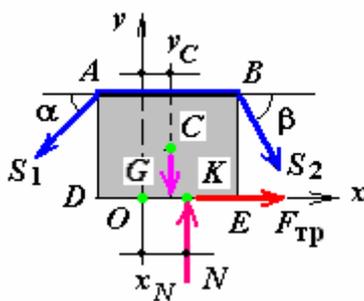


Рис. 2.52, а. Расчётная модель ящичной упаковки.

На ящичную упаковку наложены две связи – гибкий элемент и пол платформы. Воспользуемся теперь принципом освобождаемости от связей (аксиома связи геометрической статики), согласно которому вначале отбросим мысленно гибкий элемент, заменяя его действие натяжениями (усилиями)  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$ , а затем отбросим мысленно также пол платформы, заменяя его действие нормальной  $\bar{N}$  и касательной  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{тр}$  составляющими реакции связи  $\bar{R}$ .

Так как трение между ящиком и гибким элементом, согласно принятому допущению, отсутствует, то натяжение этого элемента будет везде одинаковым, т. е.  $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 = \bar{S}$ .

Теперь искомые силы  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{N}$  и  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{тр}$  будут действовать на груз с весом  $\bar{G}$ , т. е. на одно и то же тело (груз). Все силы лежат на одной плоскости (вертикальной).

Рассмотрим равновесие груза как свободного тела, находящегося под действием пяти сил: сил тяжести  $\bar{G}$ , натяжения гибкого элемента  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ , нормальной  $\bar{N}$  и касательной составляющей  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{тр}$  реакции пола платформы.

Составим уравнение равновесия сил для груза, приравняв к нулю сумму проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$  и имея в виду  $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 = \bar{S}$  :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 : -S \cos \alpha + S \cos \beta + F_{\text{тр}} = 0 ; \quad (2.67)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 : N - G - S \sin \alpha - S \sin \beta = 0 ; \quad (2.68)$$

$$\sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0 :$$

$$Nx_N + S \cos \alpha AD + S \sin \alpha OD - Gy_C - S \cos \beta AD - S \sin \beta \cdot (AB - y_C) = 0 . \quad (2.69)$$

В данном случае независимых уравнений равновесия три, а неизвестных четыре:  $\bar{S}$ ,  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{\text{тр}}$ ,  $\bar{N}$  и  $x_N$ . Такая задача относится к *разряду статической неопределённой системы* (см. п. 2.7). Степень статической неопределённости равна 1.

Для решения рассмотрим *физическую сторону* статической неопределённой задачи. К уравнениям равновесия (2.67) – (2.69) следует добавить *закон Кулона* – зависимость силы трения от нормального давления (см. (2.64)).

Из уравнения (2.68) имеем

$$N = G + S(\sin \alpha + \sin \beta) . \quad (2.70)$$

Подставляя (2.70) в (2.64), находим

$$F_{\text{тр}} \leq f(G + S(\sin \alpha + \sin \beta)) . \quad (2.71)$$

С учётом (2.71) уравнение (2.67) после элементарных преобразований примет вид

$$S(\cos \alpha - \cos \beta) \geq f(G + S(\sin \alpha + \sin \beta)) .$$

*Результаты решения задачи.* Из последнего неравенства получим натяжение гибкого элемента, при котором ящичная упаковка будет находиться в покое:

$$S \geq \frac{fG}{(\cos \alpha - \cos \beta) - f(\sin \alpha + \sin \beta)} . \quad (2.72)$$

Из (2.72) можно отыскать натяжения гибкого элемента:  
при предельном равновесии груза

$$S = \frac{fG}{(\cos\alpha - \cos\beta) - f(\sin\alpha + \sin\beta)}, \quad (2.72a)$$

при устойчивом равновесии груза

$$S > \frac{fG}{(\cos\alpha - \cos\beta) - f(\sin\alpha + \sin\beta)}. \quad (2.72б)$$

Из уравнения (2.69) найдём координату точки приложения нормальной реакции связи  $\bar{N}$  относительно продольной оси симметрии вагона:

$$x_N = \frac{Gy_C + S[(\cos\beta AD + \sin\beta(AB - y_C)) - (\cos\alpha AD + \sin\alpha OD)]}{N}. \quad (2.73)$$

Как видно, натяжение (упругая сила) гибкого элемента  $S$  обратно пропорционально углу наклона каждой ветви этого элемента.

**Пример расчёта** в системе MathCAD

Исходные данные:

$G := 150$  - вес груза, кН

$y_C := 0.494$  - смещение общего центра тяжести груза  
поперек вагона, м

$AB := 2.4$  - ширина груза, м

$AD := 2.0$  - высота груза, м

$OD := 0.5 \cdot AB - y_C$  - размер груза, м

$f := 0.348$  - коэффициент трения

$\alpha := 30 \cdot \frac{\pi}{180}$  - угол наклона левой ветви гибкой нити, рад.

$\beta := (90 - \alpha) \cdot \frac{\pi}{180}$  - угол наклона правой ветви гибкой нити, рад.

Результаты решения.

$$S := \frac{f \cdot G}{(\cos(\alpha) - \cos(\beta)) + f \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))} \quad \text{- натяжение гибкого элемента, кН}$$

$$S = 37.883$$

$$N := G + S \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta)) \quad \text{- нормальная реакция связи, кН}$$

$$N = 206.823$$

$$F_{\text{тр}} := f \cdot N \quad \text{- сила трения, кН}$$

$$F_{\text{тр}} = 72.055$$

$$xN := \frac{G \cdot yC + S \cdot \left[ \begin{array}{l} \cos(\alpha) \cdot AD + \sin(\beta) \cdot (AB - yC) \dots \\ + (-1) \cdot (\cos(\alpha) \cdot AD + \sin(\alpha) \cdot OD) \end{array} \right]}{N}$$

$$xN = 0.643 \quad \text{- координата точки приложения нормальной реакции связи, м}$$

Результаты решения задачи *при вариации* угла наклона  $\alpha$  левой ветви гибкого элемента (рис. 2.53 – 2.55):

$$\alpha := 0,5 \dots 45 \quad \text{- угол наклона левой ветви гибкой нити, рад.}$$

$$\beta(\alpha) := (90 - \alpha) \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- угол наклона правой ветви гибкой нити, рад.}$$

$$S(\alpha) := \frac{f \cdot G}{\left( \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) - \cos(\beta(\alpha)) \right) + f \cdot \left( \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) + \sin(\beta(\alpha)) \right)}$$

- натяжение гибкого элемента, кН

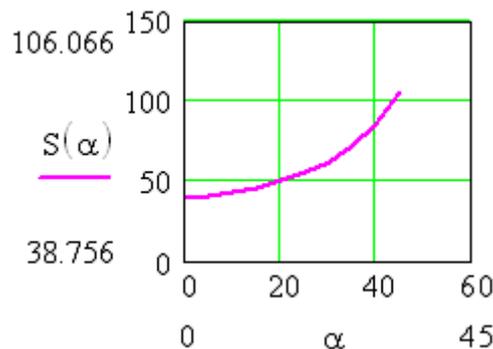


Рис. 2.53. Зависимость  $S = f(\alpha)$ .

$$N(\alpha) := G + S(\alpha) \cdot \left( \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) + \sin(\beta(\alpha)) \right) \quad \text{- нормальная реакция связи, кН}$$

$$F_{\text{тр}}(\alpha) := f \cdot N(\alpha) \quad \text{- сила трения, кН}$$

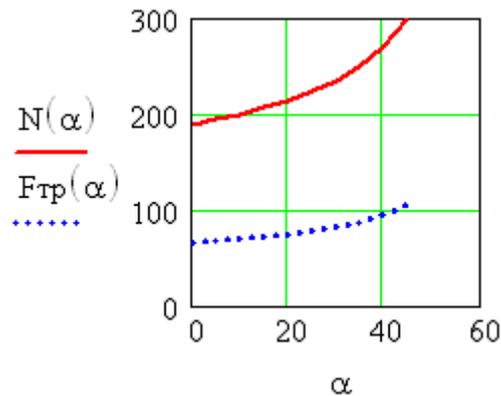


Рис. 2.54. Зависимости  $N = f(\alpha)$  и  $F_{\text{тр}} = f(\alpha)$ .

$$xN(\alpha) := \frac{G \cdot y_C + S(\alpha) \cdot \left[ \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot AD + \sin(\beta(\alpha)) \cdot (AB - y_C) \dots \right.}{N(\alpha)}$$

$$\left. + (-1) \cdot \left[ \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot AD + \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot OD \right] \right]$$

- координата точки приложения нормальной реакции связи, м

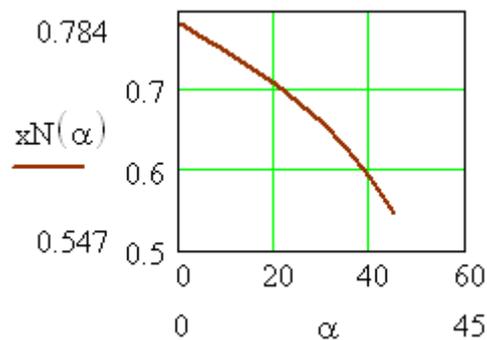


Рис. 2.55. Зависимость  $xN = f(\alpha)$ .

Анализ полученных графических зависимостей  $S = f(\alpha)$ ,  $N = f(\alpha)$ ,  $F_{\text{тр}} = f(\alpha)$  и  $xN = f(\alpha)$  показывает, что с увеличением угла наклона  $\alpha$  левой ветви гибкого элемента от  $0$  до  $45^\circ$ :

– натяжение элемента  $S$ , нормальная  $N$  и касательная составляющая  $F_{\tau} = F_{\text{тр}}$  реакции связи  $\bar{R}$ , необходимая для удержания груза от сдвига, увеличиваются по параболическому закону;

– координата точки приложения  $x_N$  нормальной реакции связи  $N$  уменьшается также по параболическому закону.

#### 2.4.2. Трение качения

Трение качения наряду с трением скольжения играет важную роль при решении прикладных задач, связанных с формированием подвижного состава на сортировочных станциях, поскольку при скатывании вагона с грузом (или отцепа) с горки колёса колёсных пар тележек относительно рельсовых нитей катятся без скольжения (если не учитывать тормозные позиции и действие случайных или «эпизодических» сил сопротивлений), а также с перевозкой и креплением грузов, поскольку грузы цилиндрической формы (трубы, колесные пары, барабаны и др.) и колесная техника составляют существенную часть номенклатуры перевозимых грузов на железнодорожном транспорте.

*Трение качения* (англ. rolling friction) – это сопротивление, возникающее при качении одного тела по другому.

Пусть цилиндрический каток (колесо колесной пары подвижного состава с силой тяжести  $Q = 15$  кН) размещен на горизонтальной плоскости (поверхность рельса). В центре катка действует некоторая внешняя сила  $\bar{F}$ , равная, например, продольной динамической силе, возникающей при соударении вагона (рис. 2.56).

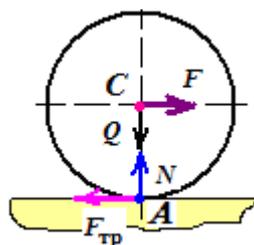


Рис. 2.56. Схема приложения сил к катку.

Каток будет оставаться в покое, пока сила  $\bar{F}$  небольшая. В этом случае действующие на каток силы  $\bar{F}$  и  $\bar{Q}$  уравниваются сопротивлением неподвижной плоскости.

В точке соприкосновения катка (колеса колесной пары вагона) с плоскостью (поверхность рельса) возникают нормальная реакция связи  $\bar{N}$  этой плос-

кости, противоположная силе тяжести катка, и сила трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , препятствующая скольжению катка по плоскости и равная по модулю силе  $\bar{F}$ , но направленная в противоположную сторону.

Для малых значений сдвигающей силы  $\bar{F}$  сила трения скольжения (сцепления) остается равной этой силе.

В случае *абсолютно твёрдой* опорной поверхности каток не может оставаться в покое при действии самой небольшой, сколь угодно малой силы  $\bar{F}$ . Возникающая пара сил ( $\bar{F}$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$ ) не может быть ничем уравновешена, кроме как другой парой.

В реальности опорная плоскость *не является абсолютно твёрдой* и под действием давления катка (вертикальной нагрузки, силы тяжести) всегда, хоть и немного, *деформируется*, поскольку из-за кривизны катка контактная область чрезвычайно мала и контактные напряжения (удельное давление) имеют весьма высокие значения. Примерная эпюра распределения давления опорной поверхности вблизи точки  $A$  на каток (в виде погонных реактивных сил, направленных по радиусам к центру масс катка), показана на рис. 2.57. При этом из-за действия силы  $\bar{F}$  расстояние  $AB < AD$ , т. е. давление опорной поверхности вблизи точки  $A$  распределяется неравномерно, смещаясь в сторону точки  $D$ .

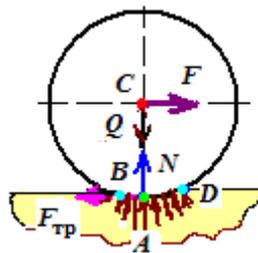


Рис. 2.57. Деформация опорной поверхности.

Характер эпюры распределения давления опорной поверхности вблизи точки  $A$  останется неизменным и для случая, когда сила  $\bar{F}$  приложена выше или ниже центра тяжести катка.

В результате смещения и неравномерности эпюры давления нормальная реакция опорной поверхности  $\bar{N}$ , как равнодействующая реактивного давления (контактных напряжений), *смещается* на некоторую величину  $a$  в направлении сдвигающей силы (рис. 2.58).

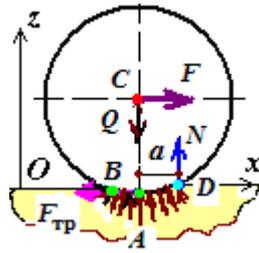


Рис.2.58. Смещение нормальной реакции поверхности.

Образующаяся при этом пара сил  $(\bar{Q}, \bar{N})$  противоположна по направлению вращения рассмотренной ранее паре  $(\bar{F}, \bar{F}_{\text{тр}})$  и может её уравновесить. Данную пару называют *парой трения качения*  $(\bar{Q}, \bar{N})$  и её момент равен

$$M = aN, \quad (2.74)$$

где  $a$  – смещение нормальной реакции опорной поверхности, м.

Сравнение выражений (2.74) и (2.64) позволяет смещение  $a$  рассматривать как соответствующий коэффициент трения, который теперь является размерной величиной.

Экспериментально установлено, что момент пары трения качения изменяется от нуля до некоторого максимального значения  $M_{\text{max}}$ .

Максимальное значение момента пары трения качения  $M_{\text{max}}$  не зависит от радиуса катка и прямо пропорционально нормальному давлению катка на плоскость, или, что одно и то же, нормальной реакции связи  $\bar{N}$

$$M_{\text{max}} = f_k N, \quad (2.75)$$

где  $f_k$  – *коэффициент трения качения*, мм, поскольку этот коэффициент равен силе плечу пары трения качения  $a$ .

Максимальные значения *коэффициента трения качения*  $f_k$  для различных трущихся тел, мм: дерево по дереву –  $0,5 \div 0,8$ ; мягкая сталь по мягкой стали –  $0,05$ ; дерево по стали –  $0,03 \div 0,04$ ; колесо по рельсу –  $0,005$ ; сталь закаленная по стали –  $0,001$ .

Для случая, показанного на рис. 2.58, составим условия равновесия сил:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: \quad F &= F_{\text{тр}}; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0: \quad N &= Q; \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0: Fh = Na,$$

где  $h$  – плечо внешней силы, м.

Максимальное значение силы трения, согласно формуле (2.64) и второму выражению (2.76), имеет вид

$$F_{\text{тр}} \leq fN = fQ.$$

Следовательно, имея в виду первое равенство (2.76), получим

$$F \leq fQ. \quad (2.77)$$

Кроме того, пара трения качения по формуле (2.74) не может быть больше  $M_{\text{max}} = f_k N$ , т. е.  $a \leq f_k$ .

Поэтому можно записать

$$Fh \leq f_k N$$

или

$$Fh \leq f_k Q.$$

Отсюда

$$F \leq \frac{f_k}{h} Q. \quad (2.78)$$

В неравенстве (2.78) отношение  $\frac{f_k}{h}$  для большинства материалов значительно меньше коэффициента трения скольжения  $f$ , т. е.  $f > \frac{f_k}{h}$ . Поэтому в технике стремятся заменить трение скольжения качением (колеса, катки, шариковые или роликовые подшипники качения и т. п.). Например, все колёсные пары тележек локомотивов и вагонов оснащены подшипниками качения, благодаря которым их колёса по рельсовым нитям катятся без скольжения.

Таким образом, при равновесии катка сила  $\bar{F}$  должна удовлетворять условиям (2.77) и (2.78).

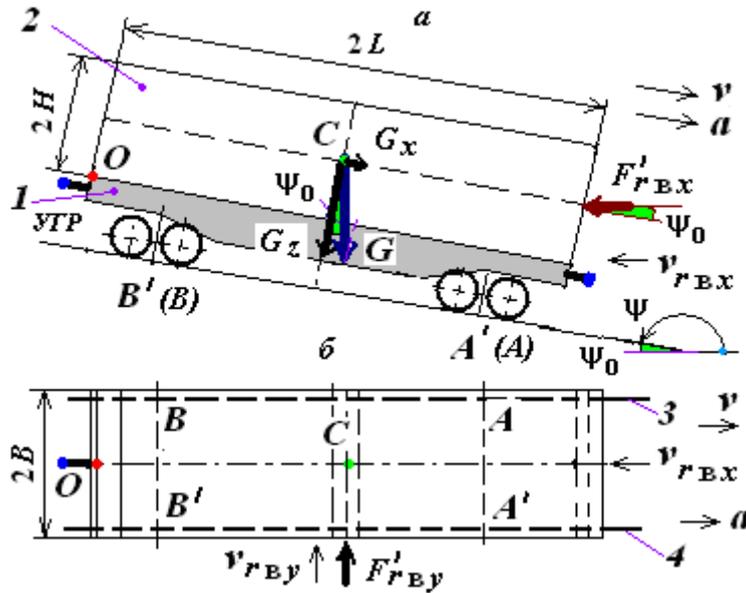
*При соблюдении условий (2.77) и (2.78) не произойдет ни скольжения, ни качения катка* относительно опорной поверхности.

Особо отметим, что, если активная сила  $\bar{F}$  больше предельной силы трения  $F_{\text{пр}} = F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}} N$ , т. е.  $\bar{F} \geq \bar{F}_{\text{пр}}$ , то одновременно с качением возможно также скольжение. При этом отношение  $\frac{f_k}{h}$  будет меньше коэффициента трения скольжения  $f$ , т. е.  $f > \frac{f_k}{h}$ .

**Пример решения задач на применение трения качения  
при скатывании вагона с горки**

Покажем применение трения качения в задачах, связанных с формированием подвижного состава на сортировочной горке<sup>52</sup>.

*Задача 1.* Требуется построить расчётную модель вагона при скатывании с горки (рис. 2.59) и определить момент трения качения при перекачивании колёс колёсных пар тележек вагона.



*Рис. 2.59.* Реальная схема скатывания вагона с горки.  
*a* – вид с боку; *б* – вид сверху: 1 – вагон; 2 – груз;  
 3 и 4 – наружный и внутренний рельсовые нити.

*Решение.* Для построения расчётной модели движения вагона с горки используют принцип освобождаемости от связей геометрической статики (см. п. 2.2). Вначале выбирают объект в виде вагона, скатывающегося с горки. Имеют в виду, что для колёсной пары тележек вагона  $A'$  (или  $B'$ ) и  $A$  (или  $B$ ) рельсовые нити 3 и 4 являются основными связями, удерживающими её от перемещения в поперечном направлении, т. е. вдоль подрельсового основания (шпал). Иначе, основное назначение рельсовых нитей 3 и 4 как внешних связей – это направление колёс тележек вагона при движении на прямых и кривых участках пути. Принимают, что на вагон действуют плоская система сил в виде силы тяжести  $\bar{G}$  и силы аэродинамического сопротивления  $F'_{rvx}$  и  $F'_{rv,y}$  (см. п. 3.1, (3.9)–(3.12)).

<sup>52</sup> Туранов, Х.Т., Ситников С.А., Мягкова А.В. Математическое моделирование скорости скатывания вагона на первом профильном участке горки // Транспорт: Наука, техника и управление, 2011, № 1. – С. 24 – 29.

В связи с этим вначале освобождают колёсную пару тележек вагона от рельсовых нитей, заменяя их влияние реакциями связей  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ ;  $\bar{R}_{A'H}$  и  $\bar{R}_{B'H}$  (на рис. 2.59 не показаны). Здесь допускают, что указанные реакции связей приложены к колёсам колёсных пар передней и задней тележек вагона  $A'$  (или  $B'$ ) и  $A$  (или  $B$ ), т. е.  $\bar{R}_A \in \{\bar{R}_{A1}, \bar{R}_{A2}\}$ ,  $\bar{R}_{A'} \in \{\bar{R}_{A'1}, \bar{R}_{A'2}\}$  и  $\bar{R}_B \in \{\bar{R}_{B1}, \bar{R}_{B2}\}$ ,  $\bar{R}_{B'} \in \{\bar{R}_{B'1}, \bar{R}_{B'2}\}$ ;  $\bar{R}_{A'H} \in \{\bar{R}_{A'1H}, \bar{R}_{A'2H}\}$ ,  $\bar{R}_{B'H} \in \{\bar{R}_{B'1H}, \bar{R}_{B'2H}\}$ .

Особо отметим, что появление реакции связей  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  в плоскости скатывания вагона с горки связано с воздействием на вагон с грузом вертикальных составляющих сил тяжести  $\bar{G}_z$  и силы аэродинамического сопротивления  $\bar{F}'_{rvz}$  и  $F'_{rv,y}$  (как сила, оказывающая боковое давление на упорную рельсовую нить).

В соответствии с этим за упрощённую расчётную модель скатывания вагона с горки, учитывающую трение качения (чистое качение), можно принять модель, показанную на рис. 2.60. При этом считают, что активные силы в виде  $\bar{G}$  и  $F'_{rvx}$  уже приложены к расчётной модели. В расчётной модели активную силу  $\bar{G}$  направляют от объекта. Все реактивные силы (реакции связи)  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_{A'H}$ , включая  $F'_{rvx}$ , направляют к объекту. Показывают оси координат  $Oxz$ .

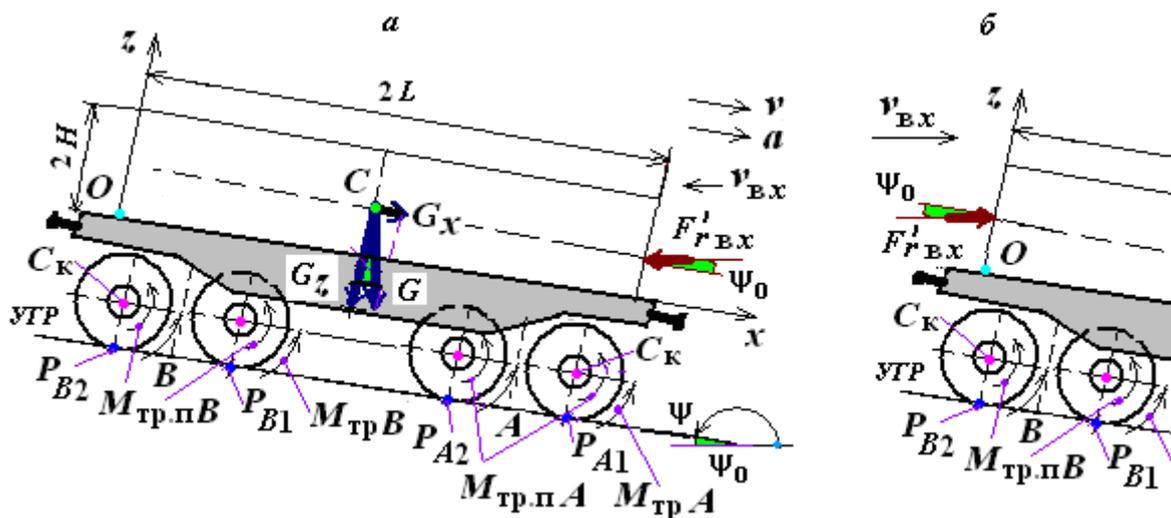


Рис. 2.60. Упрощённая расчётная модель скатывания вагона с горки.  
а – при встречном ветре; б – при попутном.

В точке соприкосновения колеса колесной пары вагона с поверхностями рельса возникают нормальная составляющая  $\bar{N}$  ( $\bar{N} \in \{\bar{N}_A, \bar{N}_B\}$ ) реакции связи (рельсовых нитей), противоположная проекции всех сил на вертикальную ось  $F_z$ :

$$N = -F_z;$$

$$F_z = G \cos \psi_0 + F'_{r_{\text{вх}}} \sin \psi_0. \quad (2.79)$$

Принимают, что на участках горки, где отсутствуют случайные (или так называемые «эпизодические») сопротивления колёса с радиусом  $r_k$  (для грузового вагона 0,475 м) катятся без проскальзывания с коэффициентом трения качения колеса по рельсу  $f_k$ , внутренний радиус  $r_{\text{вн}}$  внутреннего кольца подшипника качения вращается с коэффициентом трения качения  $f_{k0}$ .

На механическую систему действуют внешние (как активные, так и реактивные) силы: проекции силы тяжести на координатные оси  $G_x = G \sin \psi_0$  и  $G_z = G \cos \psi_0$ , проекции силы аэродинамического сопротивления  $F'_{r_{\text{вх}}} \cos \psi_0$ ,  $F'_{r_{\text{вх}}} \sin \psi_0$  и  $F'_{r_{\text{вх}}}$ ; нормальная составляющая  $N$  реакции рельсовых нитей; момент трения качения колеса по рельсу  $M_{\text{тр}A} \in \{M_{\text{тр}A1}, M_{\text{тр}A2}, M_{\text{тр}A'1}, M_{\text{тр}A'2}\}$  и  $M_{\text{тр}B} \in \{M_{\text{тр}B1}, M_{\text{тр}B2}, M_{\text{тр}B'1}, M_{\text{тр}B'2}\}$  (см. (2.75)).

Момент трения качения колеса по рельсу  $M_{\text{тр}} = f_k N$ , где  $f_k$  – коэффициент трения качения, м, поскольку этот коэффициент равносителен плечу пары трения качения (обычно с учётом влияния гребней колеса по рельсу принимают  $f_k = 5 \cdot 10^{-6}$ , сталь закаленная по стали  $f_k = 1 \cdot 10^{-6}$ ).

Образующаяся при этом пара сил  $(\bar{G}_z, \bar{N})$ , называемая *парой трения качения*, противоположна по направлению вращения паре  $(\bar{F}, \bar{F}_{\text{тр}})$  и для рассматриваемого случая скатывания вагона с горки не может её уравновесить. Именно по этой причине подшипники качения в буксовом узле и колеса колёсной пары вагона испытывают момент трения качения.

Особо отметим, что если активная сила  $\bar{F}$  больше предельной силы трения  $F_{\text{пр}} = F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}} N$ , т. е.  $\bar{F} \geq \bar{F}_{\text{пр}}$ , то одновременно с качением возмож-

но также *скольжение*. При этом отношение  $\frac{f_k}{r_k}$  будет меньше коэффициента

трения скольжения  $f$ , т. е.  $f > \frac{f_k}{r_k}$ . Такой случай возможен при воздействии на

вагон проекции силы аэродинамического сопротивления  $F'_{r_{\text{вх}}}$  при попутном ветре и силы  $F'_{r_{\text{вх}}}$  (которая стремится прижать гребни наружных колёс колёсных пар тележек к упорному рельсу), когда активная сила равна  $F = G \sin \psi + F'_{r_{\text{вх}}}$  и соблюдается условие  $\bar{F} \geq \bar{F}_{\text{пр}}$ . Тогда расчётная модель,

например при воздействии попутного ветра, имеет вид, показанный на рис. 2.61.

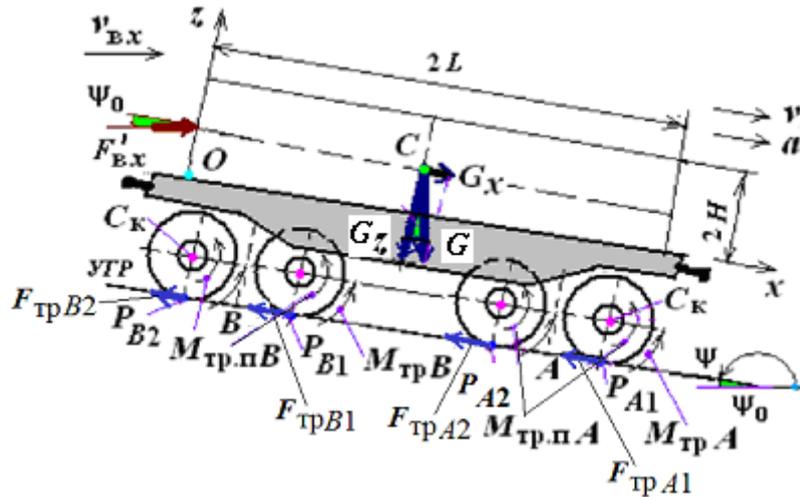


Рис. 2.61 Упрощённая расчётная модель скатывания вагона с горки при качении колёс со скольжением.

На рис. 2.61 видно, что скатыванию вагона с горки противодействуют силы трения скольжения колёс о рельсовые нити в виде  $F_{трA}$  ( $F_{трA} \in \{F_{трA1}, F_{трA2}, F_{трA'1}, F_{трA'2}\}$ ) и  $F_{трB}$  ( $F_{трB} \in \{F_{трB1}, F_{трB2}, F_{трB'1}, F_{трB'2}\}$ ).

Силы трения при качении колёс со скольжением, согласно закону Кулона (см. (2.64)),

$$F_{тр}^{ск} = F_{трAB} + F_{трA'B'}, \quad (2.80)$$

где  $F_{трAB} = F_{трA} + F_{трB}$  – силы трения скольжения колёс по рельсовым нитям от воздействия нормальной составляющей  $\bar{N}$  ( $\bar{N} \in \{\bar{N}_A, \bar{N}_B\}$ ) реакции связи:

$$F_{трAB} = f_{ск} N,$$

где  $f_{ск}$  – коэффициент трения скольжения колеса по рельсу (обычно металл по металлу –  $f_{ск} = 0,15 \div 0,25$ );

$F_{трA'B'} = F_{трA'0} + F_{трB'0}$  – силы трения скольжения гребней колёс по упорному рельсу от воздействия проекции силы аэродинамического сопротивления с боковой стороны вагона  $F'_{рву}$ :

$$F_{трA'B'} = f_{ск0} F'_{рву}$$

где  $f_{ск0}$  – коэффициент трения скольжения гребней колеса по рельсу (обычно принимают  $-f_{ск0} = 0,25^{53}$ , а в случае применения гребнесмазывателей (или лубрикаторов) значение  $f_{ск0}$  намного меньше) (в частном случае  $f_{ск} = f_{ск0}$ ).

Подставляя  $F_{трAB}$  и  $F_{трA'B'}$  в (2.80), получают:

$$F_{тр}^{ск} = f_{ск} N + f_{ск0} F'_{rву},$$

или, с учётом (2.79),

$$F_{тр}^{ск} = f_{ск} (G \cos \psi_0 + F'_{rвх} \sin \psi_0) + f_{ск0} F'_{rву}. \quad (2.80a)$$

На механическую систему также действуют *внутренние силы* в виде моментов трения качения  $M_{трпA}$  ( $M_{трпA} \in \{M_{трпA1}, M_{трпA2}, M_{трпA'1}, M_{трпA'2}\}$ ) и  $M_{трпB}$  ( $M_{трпB} \in \{M_{трпB1}, M_{трпB2}, M_{трпB'1}, M_{трпB'2}\}$ ) в подшипниках буксовых узлов передней  $A$  и задней  $B$  тележек вагона, причём  $M_{трп} = M_{трпA} + M_{трпB}$  (см. рис. 2.61).

В точках соприкосновения с телами качения внутреннего диаметра внутреннего кольца подшипника появляются внутренние силы  $N_{пк}$  – нормальная составляющая реакции подшипника. В той же точке на тела качения от внутреннего кольца подшипника действует такая же по модулю, но противоположно направленная реакция  $N_{п}$  (т. е. нормальная составляющая реакции, приходящейся на один подшипник качения).

Момент трения качения в подшипниках буксовых узлов передней и задней тележек вагона

$$M_{трп} = n_6 f_{к0} N_{п}, \quad (2.81)$$

где  $n_6 = 8$  – количество буксового узла в тележках, шт.;  $f_{к0}$  – коэффициент трения тел качения по кольцам подшипника (обычно принимают  $0,001 \cdot 10^{-3}$ ), м;

$N_{п}$  – нормальная составляющая реакции, приходящейся на один подшипник качения, или сила, действующая на наиболее нагруженное тело качения и определяемая по формуле<sup>54</sup>, кН:

$$N_{п} = \frac{k F_z}{n_{тк}}, \quad (2.81a)$$

где  $n_{тк}$  – общее количество тел качения, воспринимающих нагрузку в каждом подшипнике, шт.;  $k$  – постоянный коэффициент, принимаемый в зависимости от рядности и типа подшипников качения (для однорядных подшипников  $k = 4$ , для роликоподшипников с  $n_{тк} = 10 \dots 20$  среднее значение  $k \approx 4$ . Учитывая влияние зазора в подшипниках качения, для расчёта принимают  $k = 4,6$ ).

<sup>53</sup> *Расчёты и проектирование железнодорожного пути: учебн. пособие для студентов вузов ж. – д. трансп. / В.В. Виноградов, А.М. Никонов, Т.Г. Яковлева и др.; под ред. В.В. Виноградова и А.М. Никонова. – М.: Маршрут, 2003. – 486 с.*

<sup>54</sup> *Решетов Д.Н. Детали машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 496 с.*



Рис. 2.62. Размещение и крепление трубы большого диаметра на платформе.

1 – труба; 2 – стяжки; 3 – подкладки.

Данный случай является дальнейшим развитием задачи крепления труб большого диаметра<sup>56</sup>. Пусть груз в виде трубы большого диаметра размещён на шероховатой горизонтальной поверхности (подкладка) симметрично относительно продольной и поперечной оси симметрии вагона.

Пусть на груз действует горизонтальная продольная сила  $\bar{F}$ , стремящаяся сдвинуть его вдоль вагона. Такая сила может возникать при соударениях вагонов на сортировочных горках, при экстренном торможении поезда, при прохождении колес вагона через рельсовый стык и при движении поезда под уклон, когда применяют служебное торможение, а затем и отпуск.

Пусть сила тяжести трубы  $G = 200$  кН, его радиус  $R = 1,3$  м, а длина  $L = 3$  м. Толщина подкладок  $\delta = 0,16$ , а глубина вырубki  $h = 0,10$  м, хотя в данной задаче эти размеры (или площадь контактируемой с трубой поверхности подкладок), согласно закону Гука, не влияют на сдвиг груза вдоль вагона. Ширина платформы  $B_B = 2,77$  м.

Определить нормальную составляющую  $\bar{N}_A$  реакции трубы на подкладки и найти натяжения стяжки  $\bar{S}_2$  и  $\bar{S}'_2$  с каждой стороны трубы.

*Решение.* Определим геометрические параметры креплений механической системы «вагон–крепление–груз».

Из рис. 2.62 ясно, что:

– высота центра тяжести трубы от пола платформы, м

$$A_0C = R + (\delta - h); \quad (2.82)$$

– высота центра тяжести трубы от поверхности подкладок, м

$$B_0C = R - h; \quad (2.83)$$

– половина ширины вырубki подкладок, м

$$BB_0 = \sqrt{R^2 - B_0C^2}$$

или с учётом (2.83)

$$BB_0 = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{h(2R - h)}. \quad (2.84)$$

Будем иметь в виду, что  $\Delta AA_1C \sim \Delta A_1CD$ .

<sup>56</sup> Комаров К.Л., Яшин А.Ф. Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта. – Новосибирск: Наука, 2004. – 296 с.

Из  $\Delta AA_1C$  находим

$$\sin \beta = \frac{A_0C}{A_1C} \quad \text{и} \quad \cos \beta = \frac{0,5B_B}{A_1C}, \quad (2.85)$$

где  $A_1C$  – гипотенуза  $\Delta AA_1C$

$$A_1C = \sqrt{0,5B_B^2 + A_0C^2}$$

или с учётом (2.82)

$$A_1C = \sqrt{0,5B_B^2 + (R + (\delta - h))^2}.$$

Перепишем соотношения (2.85) с учётом выражения (2.82) и последнего равенства:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{R + (\delta - h)}{\sqrt{0,5B_B^2 + (R + (\delta - h))^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{0,5B_B}{\sqrt{0,5B_B^2 + (R + (\delta - h))^2}}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Механическая система «вагон–крепление–груз» состоит из трубы большого диаметра, стяжек, подкладки и платформы.

На практике стяжки после их обхвата груза и прикреплений обоих концов к увязочным устройствам платформы устанавливают предварительным натягом. При этом создаётся предварительное давление  $\bar{S}0_2$  и  $\bar{S}0'_2$  на подкладки, которое будет способствовать удержанию груза от сдвига вдоль вагона из-за увеличения силы трения между контактирующими поверхностями груза и подкладок. Будем учитывать, что стяжки, как гибкие нити, будут работать только на растяжение с натяжениями  $\bar{S}_2$  и  $\bar{S}'_2$ .

Согласно принципу освобождаемости от связей (или аксиома связи геометрической статики), отбросим мысленно подкладки вместе с платформой и рассечём стяжки, а затем рассмотрим равновесие трубы. Труба находится в равновесии под действием шести сил: активных сил – веса  $\bar{G}$  и внешней силы  $\bar{F}$ , а также реактивных сил – нормальной  $\bar{N}_A$  и касательной  $\bar{F}_{тр}$  составляющих реакции связей (подкладок), а также реакции связей  $\bar{S}_2$  и  $\bar{S}'_2$  (стяжек).

Расчётная модель действий активных и реактивных сил на трубу и координатные оси  $Axу$  представлены на рис. 2.63.

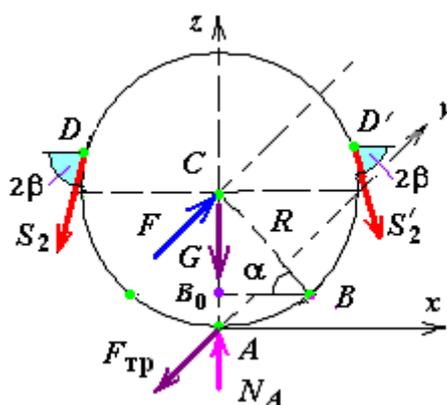


Рис. 2.63. Расчётная модель действия активных и реактивных сил на трубу.

Особо отметим, что нормальная  $\bar{N}_A$  составляющая реакции связей (подкладок) в силу симметричности размещения груза относительно осей симметрии вагона, как в частном случае из-за отсутствия действия поперечных сил, приложена к точке  $A$  (по отношению к вертикальной оси  $Az$  плоскости  $Axz$ ). Именно для симметричного размещения груза относительно вертикальной плоскости можно составить уравнение равновесия для трубы. Поскольку силы, действующие на трубу, являются *пространственной системой непересекающихся сил*, то достаточно составить три уравнения равновесия сил в виде (2.46) и (2.47), приравняв к нулю сумму проекций всех сил на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: -S_2 \cos 2\beta + S'_2 \cos 2\beta = 0; \quad (2.87)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: F - F_{\text{тр}} = 0. \quad (2.88)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0: N_A - G - (S_2 + S'_2) \sin 2\beta = 0. \quad (2.89)$$

Таким образом, получили три уравнения равновесия, а неизвестных четыре. Такая задача, как известно, является статической неопределённой (см. п. 2.7). Здесь количество неизвестных превышает количество уравнений. Степень статической неопределённости равна 1. Поэтому к полученным уравнениям равновесия присоединим закон Кулона (см. (2.64)).

Поскольку на трубу действует продольная сила  $\bar{F}$  и труба имеет длину  $L$ , по которой опирается на подкладки, то координата точки приложения  $x_N$  реакции связи  $\bar{N}_A$  по продольной оси  $Ax$  не будет совпадать с координатой центра тяжести груза  $x_C$ , т. е. имеет место  $x_N > x_C$  (рис. 2.64).

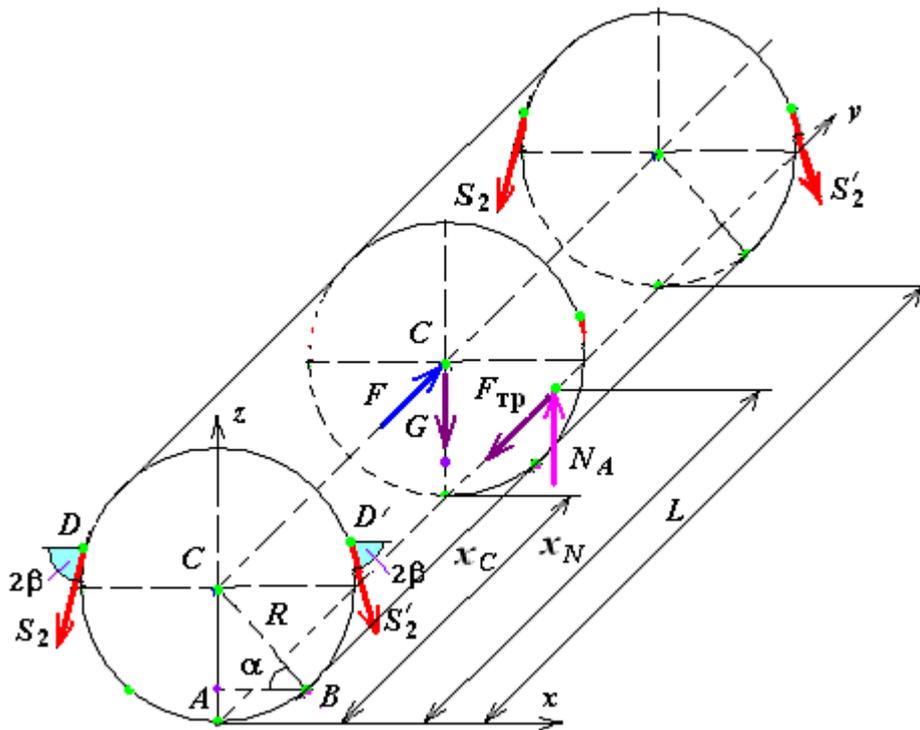


Рис. 2.64. К определению координаты точки приложения реакции неидеальной связи.

Для определения координаты точки приложения  $x_N$  нормальной составляющей  $\bar{N}_A$  реакции связи составим уравнения равновесия систем сил вокруг оси  $Ax$ :

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0: \quad -F \cdot R - G \cdot x_C - 2S_2 \sin 2\beta \cdot L + N_A \cdot x_N = 0. \quad (2.90)$$

*Результаты решения задачи.* Из уравнения (2.87) находим реакции связей стержек

$$S_2 = S'_2. \quad (2.91)$$

Из уравнения (2.89) с учётом последнего равенства имеем

$$N_A = G + 2S_2 \sin 2\beta. \quad (2.92)$$

Из уравнения (2.88) получим

$$F = F_{\text{тр}}. \quad (2.93)$$

Последнее равенство перепишем с учётом неравенства (2.64):

$$F \leq fN_A. \quad (2.94)$$

Последнее неравенство с учетом (2.92) запишем в виде

$$F \leq f(G + 2S_2 \sin 2\beta),$$

откуда минимальное натяжение стяжек

$$S_2 \geq \frac{F - fG}{2f \sin 2\beta}, \quad (2.95)$$

где  $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$  с учётом (2.86) представим в виде

$$\sin 2\beta = \frac{R + (\delta - h)}{\sqrt{(0,5B_B)^2 + (R + (\delta - h))^2}} \frac{0,5B_B}{\sqrt{(0,5B_B)^2 + (R + (\delta - h))^2}}$$

или

$$\sin 2\beta = \frac{0,5B_B (R + (\delta - h))}{(0,5B_B)^2 + (R + (\delta - h))^2}. \quad (2.95a)$$

Подставляя последнее равенство в (2.95), получим конечную аналитическую формулу для определения *минимального значения натяжения* стяжек для увязки трубы большого диаметра

$$S_2 \geq \frac{F - fG}{f} \frac{(0,5B_B)^2 + (R + (\delta - h))^2}{B_B (R + (\delta - h))}. \quad (2.96)$$

Из уравнения (2.90) будем иметь координату точки приложения реакции связи  $N_A$

$$x_N = \frac{F \cdot R + G \cdot x_C + 2S_2 \sin 2\beta \cdot L}{N_A}. \quad (2.97)$$

*Анализ полученных результатов.* Из формулы (2.96) вытекает, что трубу следует увязывать стяжками лишь при  $F > fG$ . Данное условие может соблюдаться при соударениях вагонов на сортировочных горках и при экстренном торможении подвижного состава. Натяжение стяжек  $\bar{S}_2$  уменьшается с увеличением их угла наклона  $\beta$  к плоскости пола платформы или с увеличением диаметра трубы.

Сечение стяжек определяется методом подбора, а количество стяжек – из условия прочности их на растяжения по формулам сопротивления материалов.

Реакция связи  $\bar{N}_A$  в точке  $A$ , вычисленная по (2.92), равна силе давления трубы  $\bar{Q}_A$  на подкладки (или на пол платформы), но эти силы направлены противоположно, т. е. что  $\bar{Q}_A = \bar{N}_A$ . По значению  $\bar{N}_A$  может быть выполнен расчёт на прочность (смятия) подкладки или найдены её геометрические параметры (толщина  $\delta$  или ширина  $b$ ).

*Пример расчёта*<sup>57</sup>. В системе MathCAD получены следующие результаты, представленные в виде макет-документов.

Исходные данные

$F := 80$	- продольная сила, кН
$G := 200$	- вес груза, кН
$R := 1.3$	- радиус трубы, м
$L := 3$	- длина трубы, м
$\delta := 0.16$	- толщина подкладки, м
$h := 0.1$	- высота вырубki подкладки, м
$Bв := 2.77$	- внутренняя ширина платформы, м
$x_C := 0.5 \cdot L$	- координата центра тяжести груза, м
$f = 0.355$	- коэффициент трения скольжения между подкладкой и поверхностью груза.

Промежуточные вычисляемые параметры расчёта:

$$\sin 2b := \frac{0.5 \cdot Bв \cdot [R + (\delta - h)]}{(0.5 \cdot Bв)^2 + [R + (\delta - h)]^2} \quad \sin 2b = 0.5$$

Результаты расчётов<sup>58</sup>

<sup>57</sup> Комаров К.Л., Яшин А.Ф. Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта. – Новосибирск: Наука, 2004. – 296 с.

<sup>58</sup> Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н., Власова Н.В. Крепление грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 286 с.

Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.

$$S2 := \frac{F - f \cdot G}{2 \cdot f \cdot \sin 2b} \quad \text{- усилие в стяжке от действия продольной силы, кН}$$

$$S2 = 25.459 \quad \text{кН}$$

$$Na := G + 2 \cdot S2 \cdot \sin 2b \quad \text{- нормальная составляющая реакции связи, кН}$$

$$Na = 225.455 \quad \text{кН}$$

$$F_{тр} := f \cdot Na \quad \text{- сила трения, кН}$$

$$F_{тр} = 80 \quad \text{кН}$$

$$xN := \frac{F \cdot R + G \cdot xC + 2 \cdot S2 \cdot \sin 2b \cdot L}{Na} \quad \text{- координата точки приложения нормальной реакции связи, м}$$

$$xN = 2.131$$

Результаты расчётов показывают, что усилия в стяжках почти в 8 раз меньше, чем вес груза. Нормальная реакция связи  $\bar{N}_A$  больше, чем вес груза. Координата точки приложения реакции связи по продольной оси вагона  $x_N$  расположена дальше, чем координата центра тяжести груза  $x_C$ , т. е.  $x_N > x_C$ .

$$S_{доп} := 22.8 \quad \text{- допустимое значение усилий в стяжке при разработке НТУ способов размещения и крепления грузов, кН (2.28 тс)}$$

$$n_{ст} := \frac{S2}{S_{доп}} \quad \text{- необходимое количество стяжек, шт.}$$

$$n_{ст} = 1.117 \quad \text{шт.} \quad n_{ст} := 2 \quad \text{шт.}$$

$$S2a := \frac{S2}{n_{ст}} \quad \text{- усилие в каждой стяжке, кН}$$

$$S2a = 12.729 \quad \text{кН.}$$

Результаты расчётов показывают, что для удержания груза от продольной сдвигающей силы достаточно двух пар стяжек, которые следует располагать по длине груза.

Вычисление высоты выступа упорного бруска методом итерации с использованием функции *Given-Find* в системе MathCAD.

Присвоение начальных значений:

$$S2 := 100 \quad Na := 300 \quad f := 0.355 \quad G := 200 \quad F := 80$$

$$xN := 1.5 \quad xC := 1.5 \quad L := 3 \quad \delta := 0.16 \quad h := 0.1$$

$$Bb := 2.77 \quad R := 1.3.$$

Представление уравнений равновесия с использованием *булевой функции* и результаты нахождения отыскиваемых параметров:

Given

$$\text{sn2b} = \frac{0.5 \cdot \text{BB} \cdot [\text{R} + (\delta - \text{h})]}{(0.5 \cdot \text{BB})^2 + [\text{R} + (\delta - \text{h})]^2}$$

$$\text{Na} - \text{G} - 2 \cdot \text{S2} \cdot \text{sn2b} = 0$$

$$\text{F} - \text{f} \cdot \text{Na} = 0$$

$$-\text{F} \cdot \text{R} - \text{G} \cdot \text{xC} - 2 \cdot \text{S2} \cdot \text{sn2b} \cdot \text{L} + \text{Na} \cdot \text{xN} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \text{S2} \\ \text{Na} \\ \text{xN} \end{pmatrix} := \text{Find}(\text{S2}, \text{Na}, \text{xN}) \quad \text{Результаты вычислений, кН:}$$

$$\begin{pmatrix} \text{S2} \\ \text{Na} \\ \text{xN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.356 \\ 225.352 \\ 2.13 \end{pmatrix}$$

$$\text{net} := 2$$

Given

$$\text{sn2b} = \frac{0.5 \cdot \text{BB} \cdot [\text{R} + (\delta - \text{h})]}{(0.5 \cdot \text{BB})^2 + [\text{R} + (\delta - \text{h})]^2}$$

$$\text{Na} - \text{G} - 2 \cdot \text{S2a} \cdot \text{sn2b} \cdot \text{net} = 0$$

$$\text{F} - \text{f} \cdot \text{Na} = 0$$

$$-\text{F} \cdot \text{R} - \text{G} \cdot \text{xC} - 2 \cdot \text{S2a} \cdot \text{sn2b} \cdot \text{net} \cdot \text{L} + \text{Na} \cdot \text{xN} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \text{S2a} \\ \text{Na} \\ \text{xN} \end{pmatrix} := \text{Find}(\text{S2a}, \text{Na}, \text{xN}) \quad \text{Результаты вычислений, кН:}$$

$$\begin{pmatrix} \text{S2a} \\ \text{Na} \\ \text{xN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.678 \\ 225.352 \\ 2.13 \end{pmatrix}$$

*Анализ результатов расчёта.* Ясно, что результаты расчётов по конечным аналитическим и численным методам дают одни и те же данные, что показывает их тождественность.

Можно получить графические зависимости отыскиваемых параметров при вариации продольной силы  $\bar{F}$  и радиуса трубы  $R^{59}$ .

<sup>59</sup> Туранов Х.Т., Бондаренко АН. Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.

## 2.6. Центр тяжести штучных твёрдых грузов

Точку приложения силы тяжести тела как геометрической фигуры называют *центром тяжести тела*. На рисунках центры тяжести тела обозначают через  $C$  (англ. centre, амер. center).

При перемещениях и поворотах *центр тяжести тела не изменяется*.

В задачах грузовых перевозок знание положения центра тяжести груза позволяет разработать рациональную технологию размещения и крепления груза при транспортировке. При определении положения центра тяжести объёмных грузов, имеющих постоянное поперечное сечение по длине, используются формулы координат центров тяжести соответствующей плоской фигуры. При определении величины внутренних усилий в связях и деформируемых элементах креплений используют различные геометрические характеристики, вычисляемые относительно центральных осей, проходящих через центр тяжести рассматриваемого плоского поперечного сечения.

Отметим, что ещё Архимед нашёл строгими геометрическими рассуждениями *положение центра тяжести параллелограмма, треугольника, трапеции*, и даже, применяя так называемый метод «исчерпания», *определил центр тяжести параболического сегмента и центр тяжести площади параболы, заключённой между двумя параллельными линиями* [Ильин, Позняк, 1967]. Этими работами он дал основание *геометрической статике*.

Архимед впервые строго определил *боковую поверхность прямого цилиндра и прямого кругового конуса*, нашёл *поверхность и объём шара*. Его метод построения стороны вписанного в круг семиугольника до настоящего времени вызывает восхищение математиков всех стран.

1. Приводим формулы определения координат центров тяжести для простейших форм плоских сечений (рис. 2.65):

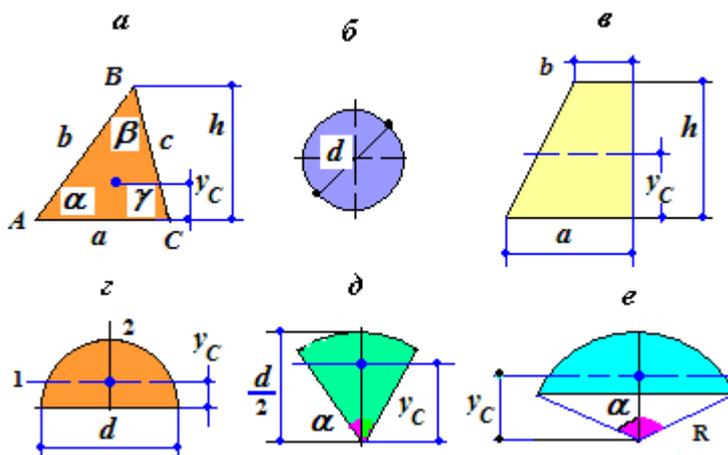


Рис. 2.65. К определению координат центров тяжести различных геометрических фигур.

для *треугольника* (см. рис. 2.65, а)

$$y_C = \frac{h}{3}$$

или

$$x_{C_1} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_{C_1} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},$$

где  $h$  – высота треугольника;  $x_A, x_B, x_C$  и  $y_A, y_B, y_C$  – координаты вершин данного треугольника;

для *трапеции* (см. рис. 2.65, в)

$$y_C = \frac{a + 2b}{3(a + b)} h,$$

где  $h, a$  и  $b$  – соответственно высота, большое и малое основание трапеции;  
для *полукруга* (см. рис. 2.65, г)

$$y_C = 0.2122d,$$

где  $d$  – диаметр полукруга;

для *кругового сектора* (см. рис. 2.65, д)

$$y_C = 360^\circ d \frac{\sin \alpha}{3\alpha},$$

где  $d$  – диаметр и  $\alpha$  – половина центрального угла (в град) кругового сектора;  
для *кругового сегмента* (см. рис. 2.65, е)

$$y_C = 1,33 \frac{R \sin^3 \alpha}{\frac{2\alpha}{360^\circ} - \sin 2\alpha},$$

где  $R$  и  $\alpha$  – радиус и угол (рад) кругового сегмента.

2. В случае *более сложных плоских фигур и объёмных тел* используют *метод разбиения*: рассматриваемое тело разбивают на совокупность тел, для которых легко определить положение центра тяжести. Координаты центра тяжести составного тела находят по однотипным формулам:

$$x_C = \frac{\sum_i^n x_i A_i}{\sum_i^n A_i}; \quad y_C = \frac{\sum_i^n y_i A_i}{\sum_i^n A_i}, \quad (2.98)$$

или

$$x_C = \frac{\sum_i^n x_i V_i}{\sum_i^n V_i}; \quad y_C = \frac{\sum_i^n y_i V_i}{\sum_i^n V_i}; \quad z_C = \frac{\sum_i^n z_i V_i}{\sum_i^n V_i}, \quad (2.98a)$$

где  $i$  – номер тела;  $n$  – количество тел разбиения;  $A_i$  – площадь плоской  $i$ -й фигуры разбиения;  $V_i$  – объем  $i$ -го тела разбиения;  $x_i, y_i, z_i$  – координаты центра тяжести  $i$ -го тела разбиения относительно выбранной общей системы координат.

При наличии отверстий в сечении или полостей в объемном теле приведенные формулы можно использовать, полагая соответствующие площади или объёмы *отрицательными*.

3. Пусть дана система параллельных сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ , которые приводятся к равнодействующей  $\bar{R}$ . Примем, что точки приложения сил фиксированы.

*Центром параллельных сил* называют точку приложения равнодействующей  $\bar{R}$  систем сил, обладающей таким свойством, что при повороте всех параллельных сил на один угол, с сохранением их параллельности, она поворачивается вокруг центра параллельных сил  $C$  на тот же угол.

Координаты центра параллельных сил  $C$ , согласно теореме о моменте равнодействующей плоской системы сил (*теорема Вариньона*) (см. (2.45)), даются формулами

$$x_C = \frac{\sum_i^n x_i F_i}{\sum_i^n F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_i^n y_i F_i}{\sum_i^n F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_i^n z_i F_i}{\sum_i^n F_i}. \quad (2.99)$$

**Пример 1.** Определить центр тяжести системы «спредер – груз» козлового крана как системы твёрдых тел (см. рис. 2.66).

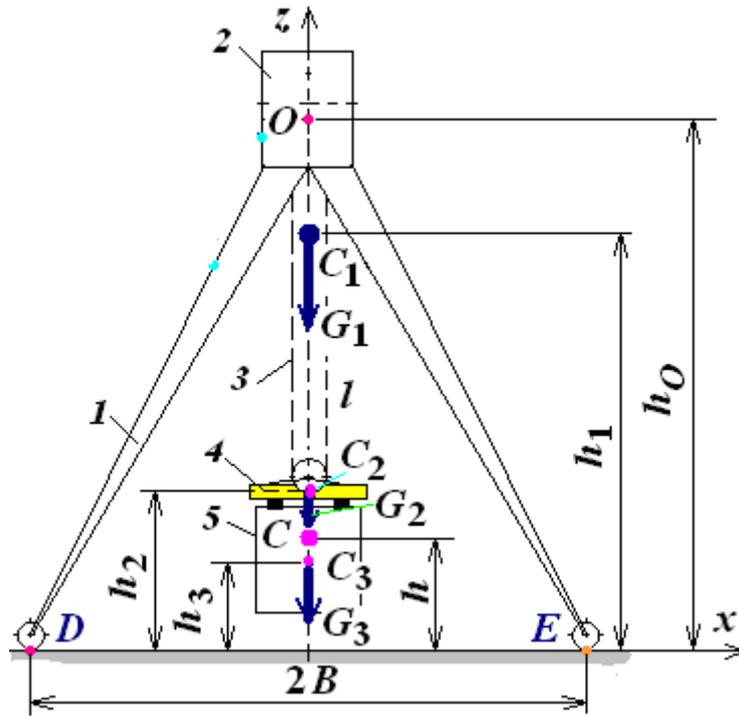


Рис. 2.66. Схема приложения сил к корпусу и устройству козлового крана.  
 1 – ножки крана; 2 – ферма крана, на которой размещена грузовая тележка;  
 3 – полиспасты крана; 4 – спредер; 5 – крупнотоннажный контейнер (груз).

На рис. 2.66 также как и на рис. 2.4 обозначено:  $C$  – общий центр масс системы «спредер – груз»;  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  и  $G$  – сила тяжести крана, спредера, груза (контейнер) и системы, кН;  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  и  $h$  – координаты приложения силы тяжести крана (ножек 1 и фермы 2), спредера 4, груза (контейнер) 5 и системы «спредер – груз», м;  $h_0$  – координата точки подвеса канатов полиспаста к рабочему барабану грузовой тележки, м;  $2B$  – расстояние между опорами крана  $D$  и  $E$ , м;  $l$  – длина канатов полиспаста, м.

Используя формулу (2.99), имеем координату расположения общего центра масс системы «спредер – груз»

$$h = \frac{G_2 h_2 + G_3 h_3}{G_2 + G_3}, \quad (2.100)$$

где  $h_2$  и  $h_3$  – высота центра тяжести спредера 4 и груза (контейнер) 5 относительно уровня головок подкрановых путей, м.

**Пример 2.** Требуется определить высоту общего центра тяжести (ЦТ<sup>0</sup>) вагона с грузом относительно уровня головки рельсов (УГР) (рис. 2.67).

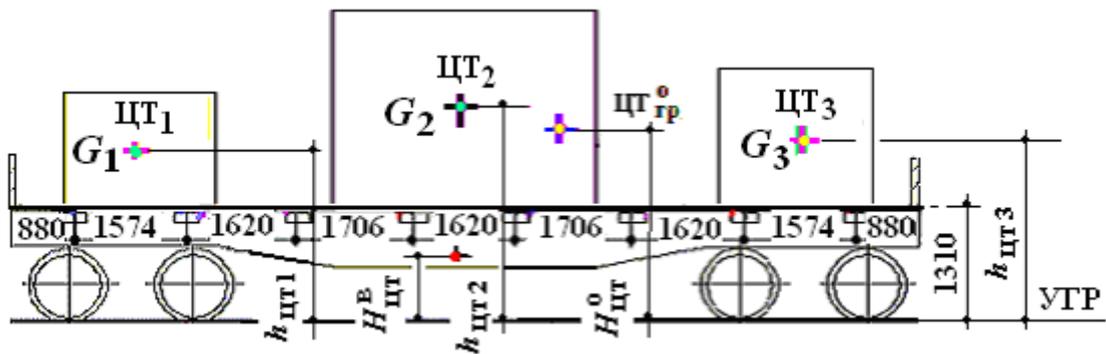


Рис. 2.67. Схема размещения грузов вдоль вагона.

Используя формулу (2.99), имеем

$$H_{\text{цт}}^{\circ} = \frac{G_1 h_{\text{цт}1} + G_2 h_{\text{цт}2} + \dots + G_T H_{\text{цт}}^{\text{B}}}{R + G_T}, \quad (2.101)$$

где  $h_{\text{цт}1}, h_{\text{цт}2}, \dots, h_{\text{цт}}$  – высота ЦТ единиц груза от УГР;  $H_{\text{цт}}^{\text{B}}$  – высоты ЦТ порожнего вагона от УГР (для платформы 800 мм, а для полувагона 1 130 мм);  $G_1, \dots, G_i$  – силы тяжести грузов, кН;  $R = G_0$  – равнодействующая силы тяжести всех грузов в вагоне, кН;  $G_T$  – сила тяжести тары вагона (например, для платформы 220 кН).

**Пример 3.** Требуется определить положение общего центра тяжести грузов ЦТ<sup>0</sup><sub>гр</sub> (рис. 2.68).

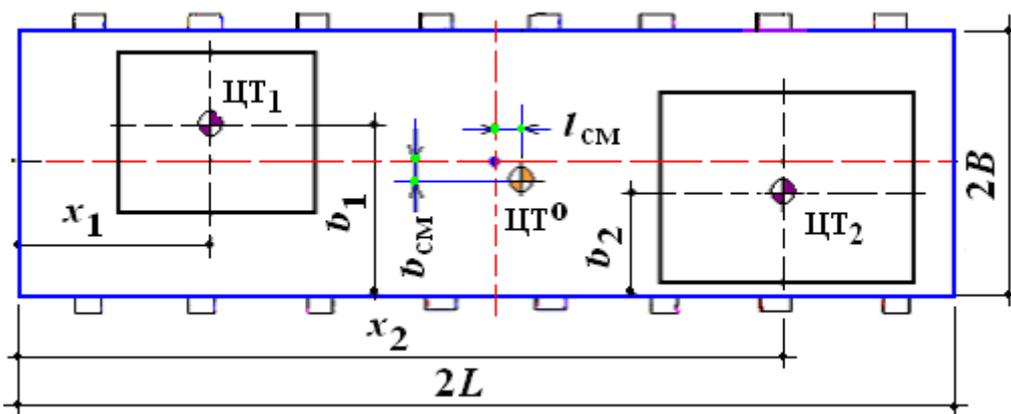


Рис. 2.68. Схема размещения грузов как вдоль, так и поперёк вагона.

Положение общего центра тяжести грузов ЦТ<sup>0</sup><sub>гр</sub> определяют по следующим формулам:

для продольного смещения

$$l_c = |L - l_{co}|, \quad (2.101a)$$

где  $L$  – половина внутренней длины кузова вагона, мм (*например*, 6 650 мм);  
 $l_{co}$  – продольное смещение ЦТ<sup>о</sup><sub>гр</sub> относительно торцевого борта платформы, мм, согласно теореме Вариньона (см. (2.45)):

$$l_{co} = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + \dots + G_i l_i}{R}, \quad (2.102)$$

с учётом того, что  $G_1, \dots, G_i$  – вес грузов (кН) (или тс);

$x_1, x_2, \dots, x_i$  – координаты центров тяжести грузов относительно торцевого борта (мм);

для *поперечного* смещения

$$b_c = |B - b_{co}|, \quad (2.103)$$

где  $B$  – половина внутренней ширины кузова вагона, мм (*например*, 1 385 мм);

$b_{co}$  – поперечное смещение ЦТ<sup>о</sup><sub>гр</sub> относительно продольного борта платформы, мм, согласно теореме Вариньона (см. (2.45)):

$$b_{co} = \frac{G_1 b_1 + G_2 b_2 + \dots + G_n b_n}{R}, \quad (2.104)$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_n$  – координаты центров тяжести грузов относительно продольного борта вагона, мм.

Сопоставлением значений продольного и поперечного смещений общего центра тяжести грузов относительно поперечной и продольной оси симметрии платформы с половинами внутренней его длины ( $0,5L = 0,5 \cdot 13\,300 = 6\,650$  мм) и ширины ( $0,5B = 0,5 \cdot 2\,770 = 1\,385$  мм) можно найти расположение ЦТ<sup>о</sup><sub>гр</sub> относительно поперечной и продольной оси симметрии вагона. *Например*, можно найти расположение ЦТ<sup>о</sup><sub>гр</sub> *левее* (правее) поперечной оси симметрии или же *ниже* (выше) продольной оси симметрии вагона. Эти данные необходимы для того, чтобы указать на схеме размещение и крепление грузов в вагоне ЦТ<sup>о</sup><sub>гр</sub>, помечая его кругом с крестиком (см. рис. 2.68).

## 2.7. Статически определённые и статически неопределённые задачи

Задачу называют *статически определённой*, если количество неизвестных равно количеству независимых уравнений равновесия. Если же количество неизвестных больше количества независимых уравнений равновесия, то задачу называют *статически неопределённой*. В последнем случае задача не может быть решена без привлечения дополнительных условий. Разница между количеством неизвестных реакций связей и количеством уравнений равновесия называется *степенью статически неопределённости* задачи.

Реакции внешних связей как реактивные силы всегда являются заранее неизвестными (см. п. 3.1).

Условия равновесия, в которые входят реакции внешних связей и которые служат для их определения, называют *уравнениями равновесия*. Задача становится разрешимой лишь тогда, когда количество уравнений равновесия будет равно количеству неизвестных реакций, входящих в эти уравнения.

Задачи, в которых количество неизвестных реакций связей равно количеству уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называют *статически определёнными*, а системы тел (конструкции), для которых это имеет место, – *статически определёнными*.

1. Например, горизонтальная балка (рама платформы), лежащая на двух опорах (наддресорные балки) (рис. 2.69), будет *статически определённой*, так как здесь две неизвестные реакции внешних связей  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  входят в два уравнения равновесия плоской системы параллельных сил  $\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$  и

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0 \text{ (см. (2.53)).}$$

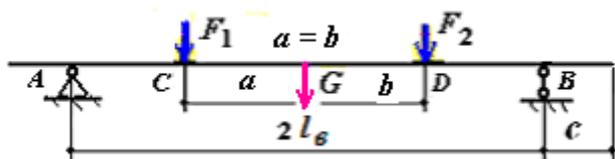


Рис. 2.69. Статически определённая система.

*Задача 1.* Пусть расстояние между наддресорными балками (опорами)  $AB$  рамы платформы (балки)  $2l_B = 9,72$  м (см. рис. 2.69). Силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  приложены на расстоянии друг от друга  $a + b = 6$  м, причем  $a = b$ . Пусть сила тяжести платформы  $G = 10$  кН и  $F_1 = F_2 = 300$  кН.

Определить реакции наддресорных балок  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  на раму платформы.

*Решение.* Согласно принципу освобождения от связей геометрической статики, имеем расчётную модель (рис. 2.70), где активные ( $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ ) и реактивные (в виде  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ ) силы будут действовать на одно и то же тело силой тяжести  $\bar{G}$ , т. е. на платформу.

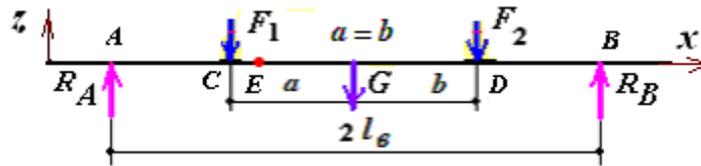


Рис. 2.70. Расчётная модель двухопорной балки.

Так как на раму платформы действует плоская система параллельных сил, то, проведя координатные оси так, как показано на рис. 2.70, воспользуемся только двумя аналитическими условиями равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0: R_A + R_B - F_1 - F_2 - G = 0; \quad (2.105)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0: R_B 2l_b - F_1(l_b - a) - F_2(l_b + b) - Gl_b = 0. \quad (2.106)$$

Из уравнения (2.106) находим

$$R_B = \frac{F_1(l_b - a) - F_2(l_b + b) - Gl_b}{2l_b}. \quad (2.107)$$

Из уравнения (2.105) получим

$$R_A = (F_1 + F_2 + G) - R_B = 0. \quad (2.108)$$

2. Горизонтальная балка, лежащая на трёх опорах (см. рис. 2.18), *будет статически неопределённой*, поскольку здесь три неизвестные реакции внешних связей  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  и  $\bar{R}_E$  входят в два уравнения равновесия плоской системы параллельных сил  $\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$  и  $\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0$  (см. уравнение (2.53)). Такая задача является *один раз* статически неопределённой.

3. Пример *статически неопределённой* задачи – нахождение упругих сил (внутренних усилий)  $R_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) в гибких элементах креплений штучного груза,

размещённого на открытом железнодорожном подвижном составе, при любом количестве  $n$  элементов креплений с учётом натяжений  $RO_i$  предварительных скруток проволоки. При этом механическая система «путь – вагон – крепление – груз» является *статически неопределённой системой* (рис. 2.71).

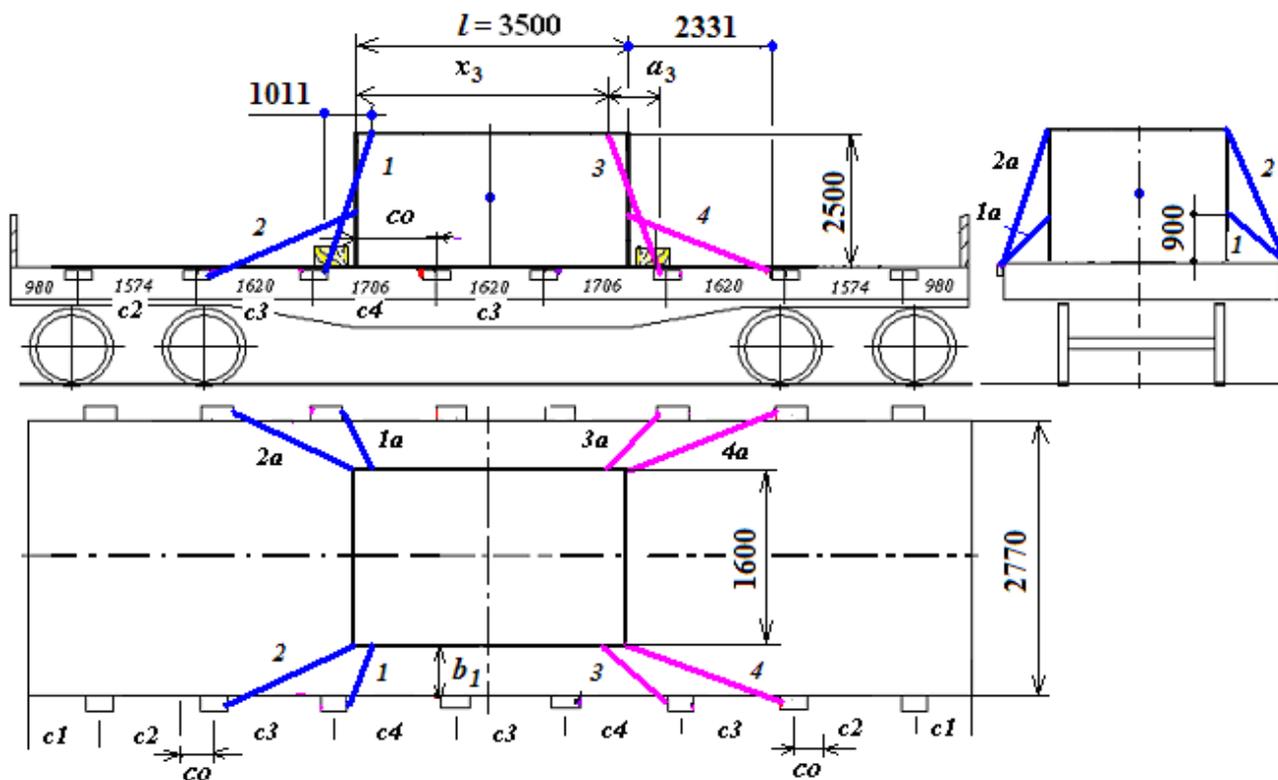


Рис. 2.71 Схема размещения штучного груза на платформе.

В такой задаче гибкие упругие элементы креплений штучного груза относительно боковой стороны груза и пола вагона размещаются пространственно, количество неизвестных реакций внешних связей и перемещений груза равно 8, количество гибких элементов креплений в зависимости от силы тяжести перевозимого груза может достигать от 4 до 24 и более. Количество уравнений равновесия, как известно, равно 6 (см. уравнения (2.46) и (2.47)). Неизвестными в этой задаче являются:

– упругие силы (натяжение) в гибких элементах креплений в зависимости от силы тяжести перевозимого груза, которые могут достигать от 4 до 24 и более –  $\bar{R}_i$ ;

– касательные составляющие реакций связей в виде силы трения  $\bar{F}_{\text{трх}}$  и  $\bar{F}_{\text{тры}}$ , направленные противоположно перемещениям груза по продольной и поперечной осям вагона (2 неизвестных);

– нормальная составляющая реакций связи  $\bar{N}$  и координаты точки её приложения относительно оси симметрии вагона  $x_N$  и  $y_N$  (3 неизвестных);

– сдвиг груза вдоль и поперёк вагона  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , а также поворот груза вокруг вертикальной оси  $\Delta\varphi$  (3 неизвестных).

В данной задаче степень статической неопределённости механической системы «путь – вагон – крепление – груз» не может быть установлена заранее, а может быть выявлена лишь при рассмотрении конкретной технологии (способа) размещения и крепления груза. Она может быть решена рассмотрением физической (закон Кулона (см. п. 2.4, (2.64)), закон Гука (см. п. 3.1, (3.1))) и деформационной (совместность деформации) сторон задачи.

4. Другим примером *статически неопределённой* задачи является нахождение опорных реакций сферического  $A$  и цилиндрического (петля)  $B$  шарниров, а также реакций закидок  $DK$  и  $EN$  крышки грузового люка полувагона (рис. 2.72).

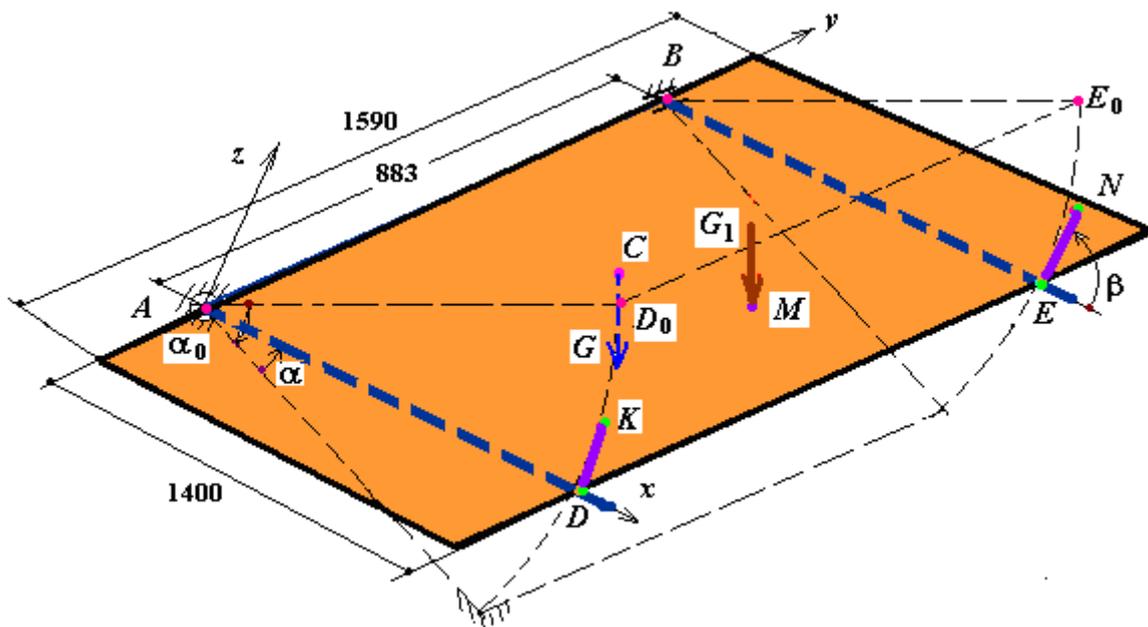


Рис. 2.72. Схема крышки грузового люка полувагона.

Крышка грузового люка полувагона силой тяжести  $G$  (1 кН) прикреплена посредством сферического шарнира  $A$  и петли (подшипника)  $B$ . После закрытия крышки грузового люка она удерживается от падения г-образными хвостиками двух закидок  $DK$  и  $EN$ , шарнирно прикрепленных к раме полувагона в точках  $K$  и  $N$ . Закидки  $DK$  и  $EN$  расположены в плоскости  $Axz$ . На крышку грузового люка в точке  $M$  приложен груз силы тяжести  $G_1 = 60$  кН с координатами  $x_M$  и  $y_M$ . Закрытое положение крышки грузового люка соответствует положению, показанному на рис. 2.72 штриховой линией  $AD_0E_0B$ .

В данной задаче к крышке грузового люка полувагона приложена пространственная система параллельных сил. Условия равновесия такой системы параллельных сил записывают тремя уравнениями, в то время как неизвестных

четыре. Количество неизвестных превышает количество уравнений равновесия. Задача является статически неопределённой. Степень статической неопределённости равна 1.

5. Пример *статически неопределённой* задачи – нахождение реакции комплектов пружин тележек вагона с грузом от воздействия силы тяжести механической системы «груз–рама вагона–наддрессорная балка» при *несимметричном размещении центра тяжести груза* относительно продольной оси симметрии вагона (ось  $x$ ) на величину  $yM^{60}$  (рис. 2.73).

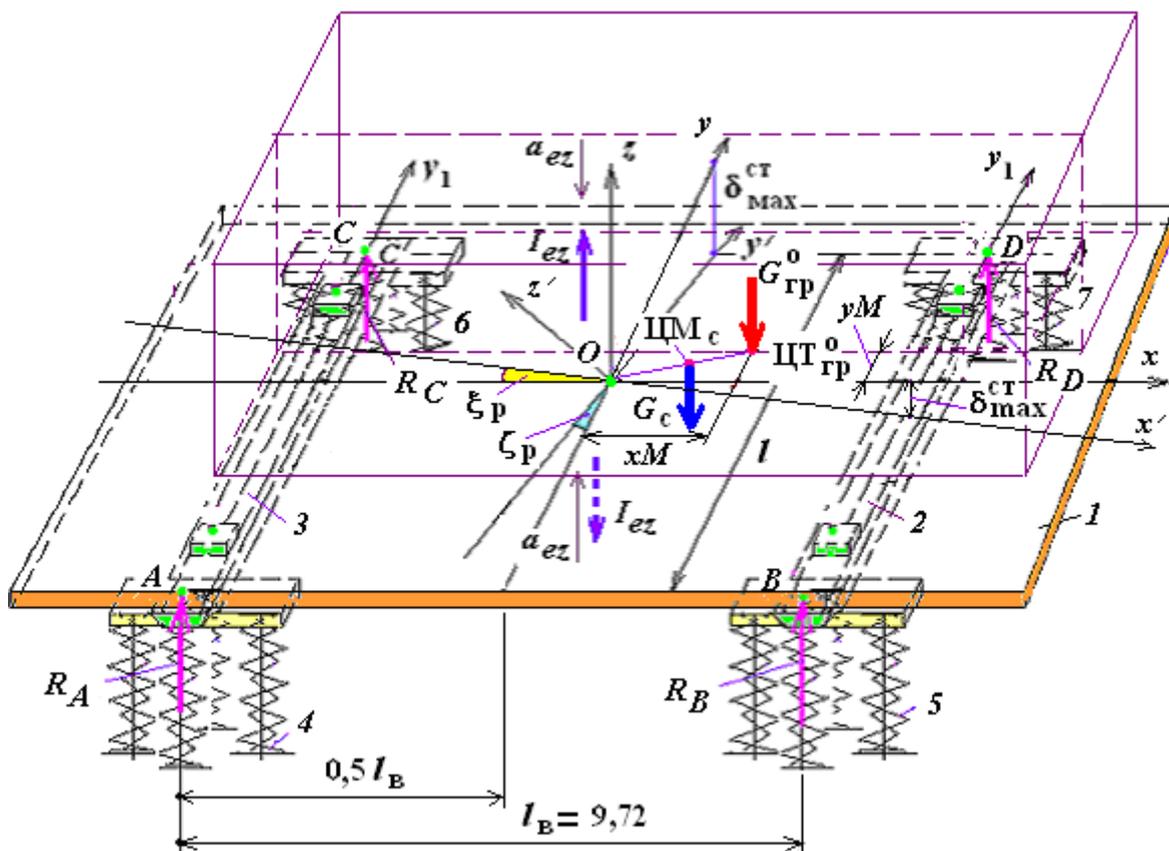


Рис. 2. 73. К определению реакции комплектов пружин тележки.

1 – рама вагона; 2 и 3 – наддрессорные балки; 4 - 7 – комплекты пружин.

На рис. 2.73 обозначено: ЦМ<sub>с</sub> – положение центра тяжести системы «груз–рама вагона–наддрессорная балка»;  $x_M = 0$  и  $y_M = yM$  – координаты общего центра тяжести груза (ЦТ<sup>о</sup><sub>гр</sub>);  $G_{гр}^o$  – общий вес груза (для штучных грузов –  $G$ );  $G_c = Q_c$  – сила тяжести механической системы «груз – рама вагона – наддрессорная балка»;  $x_c = 0$ ,  $y_c = yC$  – координаты системы;  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_C$  и  $\bar{R}_D$  – реакции комплектов пружин тележки 4 – 7, которые подлежат определению;

<sup>60</sup> Туранов Х.Т. Теоретическая механика в задачах грузовых перевозок. – Новосибирск: Наука, 2009. – 376 с.

$l = l_{\text{нб}}$  – длина надрессорной балки (2,036 м);  $l_{\text{в}}$  – база вагона (9,72 м);  $\zeta$  – угол наклона рамы вагона и надрессорной балки передней и задней тележки вследствие смещения центра масс (тяжести) ЦМ<sup>c</sup><sub>рг</sub> механической системы «груз – рама вагона» на величину  $uM$ .

В данной задаче к раме вагона с грузом приложена пространственная система параллельных сил. Условия равновесия такой системы параллельных сил определяются тремя уравнениями (см. уравнение (2.46)), в то время как неизвестных четыре. Число неизвестных превышает число уравнений равновесия. Задача является статически неопределённой. Степень статической неопределённости равна 1.

Для решения такой задачи, считая раму вагона абсолютно твёрдым телом (т. е. неизгибаемой), следует:

- определить перемещение центра рамы вагона, которое можно выразить через вертикальный прогиб  $\delta_i$  (мм) диагонально противоположных комплектов пружин тележек;

- написать условие совместности деформации комплектов пружин тележек;

- выразить силы упругости (реакции) комплектов пружин тележек  $\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$  согласно закону Гука (см. (3.1)) с перемещением, т. е. составить физическое уравнение, связывающее силу и перемещения.

## 2.8. Определение внутренних сил (усилий)

*Внутренние силы*, возникающие в каком-нибудь сечении тела при действии внешних сил, называют *внутренними усилиями* или просто *усилиями* (англ. power). Из курса физики известно, что *прочность* твёрдого тела или конструкции определяют силами межмолекулярного взаимодействия (*внутренними силами*). Усилия, приходящиеся на единицу площади сечения, называют *напряжением* (англ. stress). Таким образом, напряжение является мерой интенсивности внутренних сил, распределённых по сечениям. Единицей измерения напряжения является паскаль (Па), или килопаскаль (кПа), или мегапаскаль (МПа) ( $1\text{Па} = 1\text{Н/м}^2$ ,  $1\text{МПа} = 10^3\text{кПа} = 10^6\text{Па}$ ).

Чтобы найти внутренние усилия, необходимо рассмотреть равновесие всего тела (конструкции) в целом (см. рис. 2.26) и, используя принцип освобождаемости от связей (аксиома статики 5), получить реакции внешних связей  $R_A$  и  $R_B$  двухопорной балки (см. рис. 2.26, б) и определить реакции  $R_A$  и  $R_B$ . Затем переходят к нахождению *внутренних усилий* в сечении балки.

Если конструкция состоит из систем тел, соединённых *внутренними связями* так, как показано на рис. 2.18, то перед тем как приступить к определению реакции внешних связей  $R_A$  и  $R_B$ , следует отдельно рассмотреть условия равновесия балки  $KL$ . Определить реакции внешней связи  $R_E$ , а затем и реакции

внутренней связи  $R_K$ . Далее, используя закон равенства действия и противодействия механики, приложить реакцию  $R_K$  к балке  $AB$ , затем найти реакции внешних связей  $R_A$  и  $R_B$  из условия равновесия плоской системы сил, приложенной к этой балке.

Метод определения *внутренних усилий* (сил) аналогичен методу, применяемому при изучении равновесия систем тел, и носит название *метода сечений*. Суть его состоит в том, что тело следует мысленно рассекать (разделять) каким-нибудь сечением на две части. Если система действующих на тело внешних сил, например, является *плоской*, то к каждому из этих сечений левой и правой частей следует приложить неизвестную по модулю и направлению плоскую систему внутренних усилий в виде  $\bar{N}$  – нормальной силы,  $\bar{Q}$  – поперечной силы и  $M_y$  – изгибающего момента, соответствующих внутренним усилиям, действующим в реальном теле (см. рис. 2.18).

Если система действующих на тело внешних сил является *пространственной*, то к каждому из этих сечений левой и правой частей следует приложить неизвестную по модулю и направлению пространственную систему внутренних усилий в виде  $\bar{N}$  – нормальной силы,  $\bar{Q}_x$  и  $\bar{Q}_z$  – поперечных сил и  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающих моментов, соответствующих внутренним силовым факторам. Эти внутренние силы (усилия) следует «перевести» во внешние по отношению к каждой из отсечённых частей тела. Затем определить неизвестные ( $\bar{N}$ ,  $\bar{Q}_x$  и  $\bar{Q}_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$ ) из условий равновесия каждой из отсечённых частей в отдельности.

**Задача 1.** Требуется найти внутренние усилия в поперечном сечении рамы платформы (балки), отстоящем от опоры  $A$  на расстоянии  $AE = 2$  м (точка  $E$  правее точки  $C$ ).

**Решение.** Воспользуемся *методом сечений*, согласно которому рассечём балку в сечении  $E$  (рис. 2.74) и рассмотрим условия равновесия левой отсечённой части  $AE$ , заменяя действия отброшенной части  $EB$  внутренними силовыми факторами в виде  $\bar{N} = \bar{N}_x$  – нормальной силой,  $\bar{Q}_z$  – поперечной силой и парой с моментом  $M_E = M_y$  (изгибающим моментом) (рис. 2.74, б).

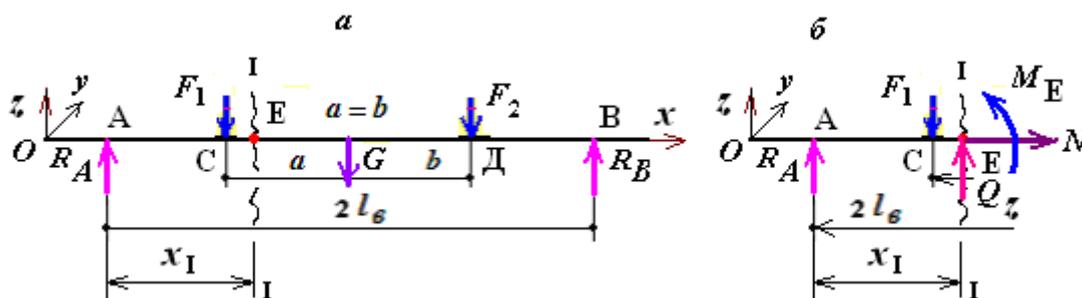


Рис. 2.74. Расчётная модель для определения внутренних усилий в сечениях балки.

Составляя для расчётной модели, нагруженной активной силой  $\bar{F}_1$ , реактивной силой  $\bar{R}_A$  и внутренними силовыми факторами  $\bar{N}$ ,  $\bar{Q}_z$  и  $M_E$ , показанной на рис. 2.74, б, условия равновесия, получим

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_{kx} = 0: N = 0; \quad (2.109)$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_{kz} = 0: R_A - F_1 + Q_z = 0; \quad (2.110)$$

$$\sum_{k=1}^n M_E(\bar{F}_k) = 0: M_E + F_1(x_I - (l_b - a)) - R_A x_I = 0. \quad (2.111)$$

*Результаты решения.* Из составленных уравнений равновесия (2.26) – (2.28) найдём искомые внутренние усилия

$$N = 0; \quad (2.112)$$

$$Q_z = F_1 - R_A; \quad (2.113)$$

$$M_E = R_A x_I - F_1[x_I - (l_b - a)]. \quad (2.114)$$

*Анализ результатов решения.* Результаты решения задачи позволяют отметить, что на левую часть рамы платформы в сечении  $E$ :

– продольная сила  $\bar{N}$  не действует, поскольку действующие на неё силы являются плоской системой параллельных сил;

– действует поперечная сила  $\bar{Q}_z$ , стремящаяся сдвинуть примыкающую к сечению часть балки вдоль линии I–I;

– действует пара сил с моментом  $M_E$ , называемым *изгибающим моментом*  $M_x$ , которая в данном случае вызывает растяжение (или сжатие) верхних волокон балки и сжатии (растяжение) нижних.

Для решения задачи, приведённого в примере *статически неопределённой* задачи (см. рис. 2.71), необходимо рассмотрение её физической (закон Кулона, см. пп. 2.4.1) и геометрической сторон (закон Гука, см. п. 3.1, (3.6) или (3.8)). *Иначе*, решение такой задачи выходит за рамки курса «Теоретической механики».

Задача определения внутренних сил (или упругих сил, или натяжений) в гибких элементах креплений груза в зависимости от количества неизвестных в

настоящее время является аналитически разрешимой задачей. Для её решения также вполне возможно привлечение численного метода<sup>61</sup>.

Таким образом, определение натяжений в гибких элементах крепления груза на открытом подвижном составе при воздействии пространственных (или плоских) систем сил представляет собой достаточно сложную и к настоящему времени в полном объёме решённую прикладную задачу.

В технических условиях размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах (ТУ) определение натяжений в такой системе сведено к решению *статически определённой* задачи. В результате натяжения во всех гибких элементах креплений штучного груза независимо от их расположения относительно пола вагона (т. е. их геометрии крепления) получаются одинаковыми, что не соответствует действительности.

## 2.9. Распределённые силы

Внешние силовые воздействия на тело в курсе физики принято называть *нагрузкой* (англ. – load). Нагрузки бывают *распределёнными* (англ. distribution) по поверхности тела и *сосредоточенными* (англ. concentration). Примером *распределённой нагрузки* (англ. load distribution) является давление жидкости или газа на поверхность тела (котла цистерны). Это давление направлено по нормали к поверхности и характеризуется интенсивностью (англ. intensity), т. е. удельным давлением  $q$ . Примером *сосредоточенной нагрузки* (англ. load concentration) является сила тяжести (англ. force gravitation) тела.

При погрузке грузов на открытом подвижном составе часто встречаются случаи, в которых поверхности средств креплений грузов в вагоне в виде упорных брусков, а также их опорные элементы в виде подкладок и пола вагона нагружены распределёнными нагрузками, имеющими тот или иной характер.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры распределённых сил, лежащих в одной плоскости.

Плоская система распределённых сил характеризуется её интенсивностью  $\bar{q}$ , т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного участка. Эту интенсивность нередко называют *погонной нагрузкой*. Интенсивность измеряют в ньютон на метр (Н/м), или килоньютон на метр (кН/м).

1. Силы, равномерно распределённые вдоль отрезка прямой (рис. 2.74, а).

---

<sup>61</sup> Туранов Х.Т. Теоретическая механика в задачах грузовых перевозок. – Новосибирск: Наука, 2009. – 376 с.

Туранов Х.Т. Взаимодействие открытого подвижного состава и твёрдотельного груза: учебн. пособие для студентов вузов ж.-д. трансп. – М.: ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2011. – 374 с.

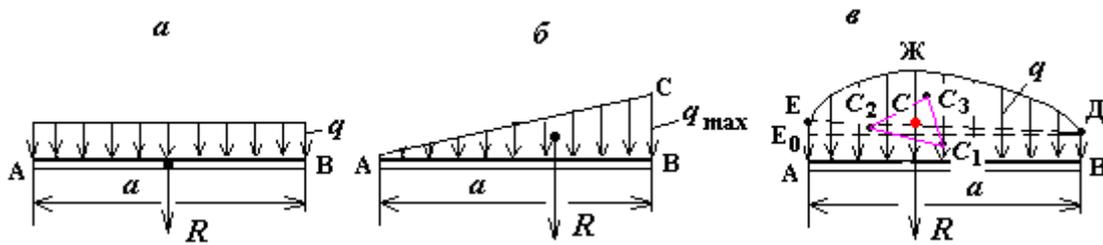


Рис. 2.75. Характер распределённых сил.

Для такой системы сил интенсивность  $\bar{q}$  имеет постоянное (англ. constant) значение ( $\bar{q} = \text{const}$ ). При статических расчётах эту силу можно заменить равнодействующей (англ. resultant)  $\bar{R}$ .

По модулю сила  $\bar{R}$  равна

$$\bar{R} = \bar{q}a \quad (2.115)$$

и приложена в середине отрезка  $AB$ .

Примером такой нагрузки могут быть силы давления  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$  штучного груза длиной  $l$ , размещённого на платформе, на подкладки  $C$  и  $D$  (рис. 2.76). На рис. 2.76 буквами  $A$  и  $B$  обозначено место расположения наддресорных балок тележек, а линией  $AB$  – рама платформы.

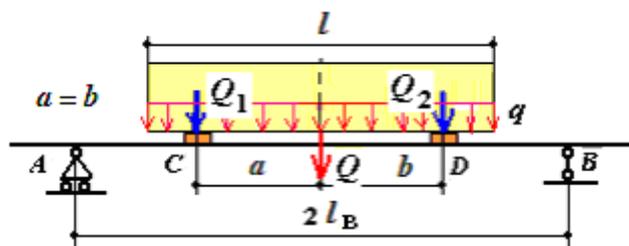


Рис. 2.76. Размещение штучного груза на платформе.

Примером такой нагрузки могут быть и силы давления  $\bar{Q}$  штучного груза на подкладку (англ. support), размещённую между грузом и полом вагона, и на упорный брусок (англ. bar persistent), прикреплённый к полу платформы крепёжными элементами – гвоздями (англ. nail) (рис. 2.77).

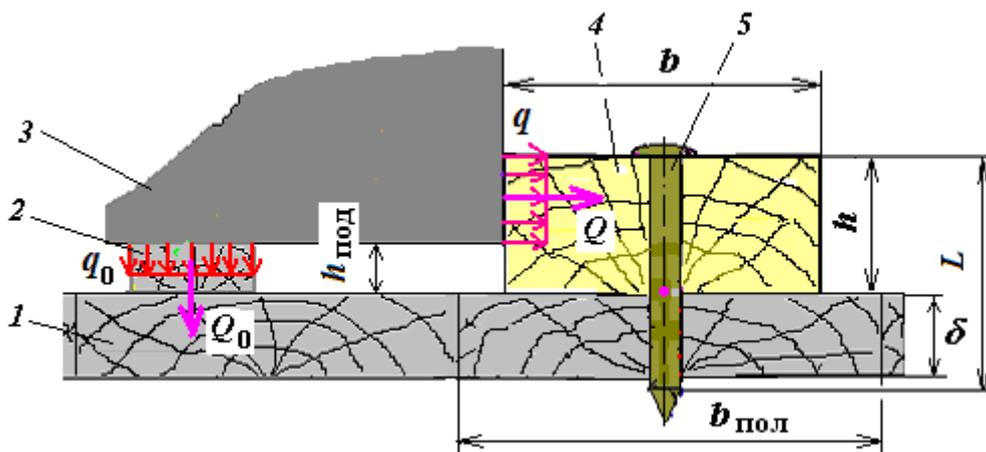
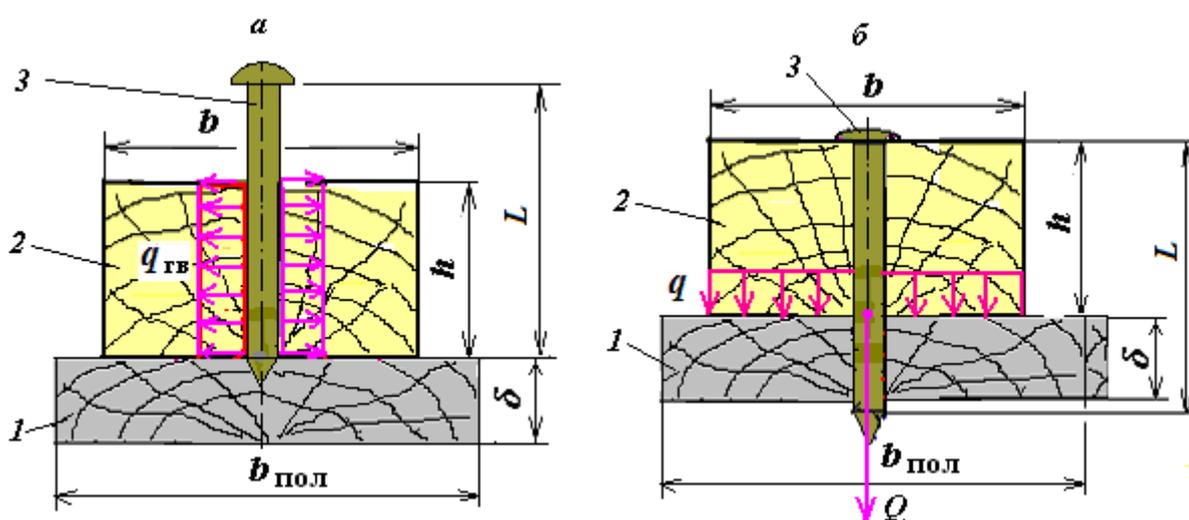


Рис. 2.77. Силы давления груза на подкладку и упорный брусок.  
 1 – доска пола вагона; 2 – подкладка; 3 – груз;  
 4 – упорный брусок; 5 – крепёжный элемент.

На рис. 2.77 обозначено:  $\bar{q}$  – интенсивность силы давления  $\bar{Q}$  груза на упорный брусок, кН/м;  $\bar{q}_0$  – интенсивность силы давления  $\bar{Q}_0$  груза на подкладку, кН/м;  $b$  и  $h$  – ширина и высота упорного бруска, мм;  $\delta$  и  $b_{\text{пол}}$  – толщина и ширина пола вагона, м;  $L$  – длина гвоздя, м.

Примером такой нагрузки (в случае, когда на упорный брусок, прикреплённый к полу платформы, не действует сила давления со стороны груза) могут быть силы давления крепёжного элемента на упорный брусок (рис. 2.78, а), упорного бруска на пол вагона (рис. 2.78, б) и крепёжного элемента на пол платформы (рис. 2.78, в). На рис. 2.71, г показано концентричное распределение нагрузки  $\bar{q}$  по полу платформы.



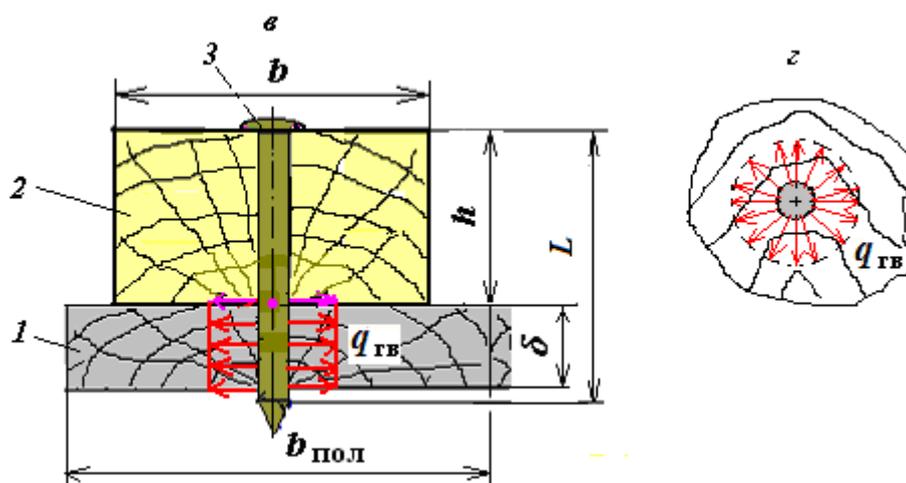


Рис. 2.78. Крепление упорного бруска к полу вагона.  
 1 – доска пола вагона; 2 – упорный брусок; 3 – крепёжный элемент.

2. Силы, распределённые вдоль отрезка прямой по линейному характеру (см. рис. 2.75, б). Примером такой нагрузки могут быть силы давления крепёжного элемента – гвоздя упорного бруска на пол платформы при действии распределённой силы со стороны груза на брусок. Для этих сил интенсивность  $\bar{q}$  является переменной (англ. variable) величиной ( $\bar{q} = \text{var}$ ), возрастающей от нуля до максимального значения  $q_{\max}$ . равнодействующая распределённых сил  $\bar{Q}$  определяется аналогично равнодействующей сил тяжести  $\bar{G}$ , действующих на однородную треугольную пластину. Так как сила тяжести однородной треугольной пластины пропорционален её площади, то по модулю эта сила равна

$$Q = 0,5q_{\max}a \quad (2.116)$$

и приложена на расстоянии  $a/3$  со стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  (см. рис. 2.75).

Пример 1. На упорный брусок, размеры которого указаны на схеме (рис. 2.79), действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью  $\bar{q}$ .

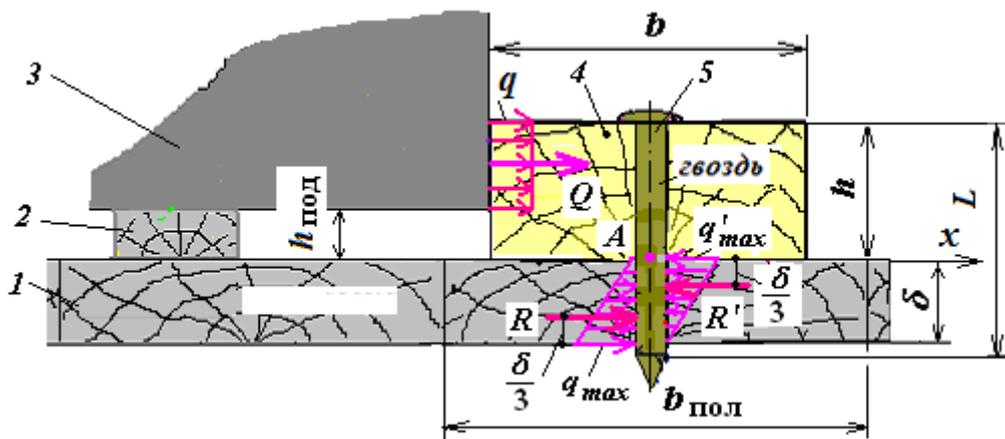


Рис. 2.79. К определению значений наибольших интенсивностей пола вагона.

1 – доска пола вагона; 2 – подкладка; 3 – груз;  
4 – упорный брусок; 5 – крепёжный элемент.

Пусть нагрузка действует на участок бруска, равный

$$h - h_{\text{под}} = n\delta, \tag{2.117}$$

где  $h_{\text{под}}$  – высота подкладки, м;  $n$  – целые числа.

Пренебрегаем силой тяжести упорного бруска и считаем, что силы давления пола вагона на крепёжный элемент (гвоздь) распределены по линейному закону.

Определить значения наибольших интенсивностей  $q_{\text{max}}$  и  $q'_{\text{max}}$  этих сил.

Решение. Используя формулы (2.115), (2.116) и равенство (2.117), заменяем распределённые силы их равнодействующими  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  и  $\bar{R}'$ :

$$Q = q(h - h_{\text{под}}) = qn\delta; \tag{2.118}$$

$$R = 0,5q_{\text{max}}\delta; \tag{2.119}$$

$$R' = 0,5q'_{\text{max}}\delta. \tag{2.120}$$

Составляем условия равновесия для действующих на крепёжный элемент параллельных сил:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_{kz} = 0: Q + R - R' = 0; \tag{2.121}$$

$$\sum_{k=1}^n M_E(\bar{F}_k) = 0: -Q(h - 0,5n\delta) + R\frac{2\delta}{3} - R'\frac{\delta}{3} = 0. \tag{2.122}$$

Из выражения (2.121) найдём

$$R' = Q + R. \quad (2.123)$$

Подставляя последнее равенство в (2.122), будем иметь

$$-Q(h - 0.5n\delta) + R \frac{2\delta}{3} - (Q + R) \frac{\delta}{3} = 0.$$

После элементарных преобразований полученного соотношения, запишем

$$R = \left(\frac{3h}{\delta} + \frac{2 - 3n}{2}\right)Q. \quad (2.124)$$

Подставляя (2.124) в (2.123), после элементарных математических выкладок находим

$$R' = \left(\frac{3h}{\delta} + \frac{4 - 3n}{2}\right)Q. \quad (2.125)$$

*Результаты решения.* С учётом равенств (2.118) – (2.120) из выражений (2.124) и (2.125) имеем

$$q_{\max} = 2qn\left(\frac{3h}{\delta} + \frac{2 - 3n}{2}\right); \quad (2.126)$$

$$q'_{\max} = 2qn\left(\frac{3h}{\delta} + \frac{4 - 3n}{2}\right). \quad (2.127)$$

*Анализ полученных решений.* При любых значениях  $n > 0$  наибольшие интенсивности имеют различные значения, причем  $q'_{\max} > q_{\max}$ . Например, при  $n = 1$

$$q_{\max} = 2q\left(\frac{3h}{\delta} - 0,5\right);$$

$$q'_{\max} = 2q\left(\frac{3h}{\delta} + 0,5\right);$$

$n = 1.5$

$$q_{\max} = 3q\left(\frac{3h}{\delta} - 0,75\right);$$

$$q'_{\max} = 3q\left(\frac{3h}{\delta} - 0,25\right);$$

$$n = 2$$

$$q_{\max} = 4q\left(\frac{3h}{\delta} - 2\right);$$

$$q'_{\max} = 4q\left(\frac{3h}{\delta} - 1\right).$$

3. Силы, распределённые вдоль отрезка прямой, имеют произвольный характер (рис. 2.75, в). Равнодействующая таких сил  $\bar{Q}$ , по аналогии с силой тяжести  $\bar{G}$ , по модулю равна площади фигуры  $ABDE$  и проходит через центр тяжести  $C$  этой площади, определяемый разбиением площади на элементарные фигуры. Так, например, вначале следует найти центр тяжести прямоугольника  $ABDE_0$   $C_1$ , затем  $\angle EDE_0$   $C_2$  и в последующем параболы  $EJD$   $C_3$ . В конце следует найти центр тяжести  $\angle C_1C_2C_3$   $C$  как пересечение медиан этого треугольника или по формулам геометрии.

4. Силы, равномерно распределённые по дуге окружности<sup>62</sup> (рис. 2.80).

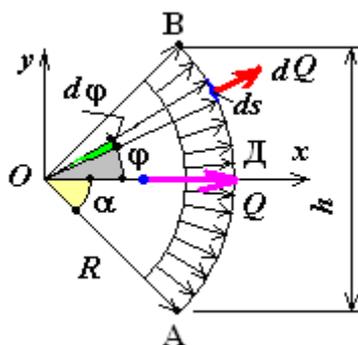


Рис. 2.80. Силы гидростатического давления, распределённые по стенке котла цистерны.

Примером действия таких сил могут быть силы гидростатического давления на боковые стенки котла цистерны (цилиндрического сосуда) для перевозки наливных грузов (газ или нефть и нефтепродукты, например, бензин).

Пусть радиус дуги равен  $R$ ,  $OD$  – ось симметрии, вдоль которой направлена ось симметрии  $Ox$ , а  $\angle BOD = \angle AOD = \alpha$ . Действующая на дугу система сходящихся сил имеет равнодействующую  $\bar{Q}$ , направленную в силу симметрии вдоль оси  $Ox$ ; при этом численно  $\bar{Q} = \bar{Q}_x$ .

<sup>62</sup> Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

Для определения величины  $\bar{Q}$  выделим на дуге элемент, положение которого определяется углом  $\varphi$ , а длина дуги  $ds = R d\varphi$ . Действующая на этот элемент сила численно равна произведению интенсивности  $\bar{q}$  силы  $\bar{Q}$  на длину дуги  $ds$ , т. е.

$$dQ = q ds = q R d\varphi,$$

а проекция этой силы на ось  $Ox$  будет

$$dQ_x = dQ \cos \varphi = q R \cos \varphi d\varphi.$$

Тогда

$$Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ_x = q R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi.$$

Интегрируем данное выражение

$$Q_x = q R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = q R \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = q R (\sin \alpha - \sin(-\alpha)).$$

Учитывая, что  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ , последнему выражению придадим вид

$$Q_x = 2qR \sin \alpha. \quad (2.128)$$

Из рис. 2.80 ясно, что  $R \sin \alpha = 0,5AB$ . Следовательно, так как  $\bar{Q} = \bar{Q}_x$ , то

$$Q = qh, \quad (2.129)$$

где  $h = AB$  – длина хорды, стягивающей дугу  $AB$ .

**П р и м е р 2<sup>63</sup>.** Котёл цистерны для перевозки опасных грузов (*англ.* *car-goes danger*), например, пропана, наполнен под давлением  $p$  (*англ.* *pressure*)  $\text{кН/м}^2$  и опирается на две опоры  $A$  и  $B$  (рис. 2.81). Пусть длина цилиндрической части котла типа 30  $L = 9,49$  м и внутренний диаметр  $d = 2,8$  м. Толщина цилиндрических стенок котла  $a = 4 \cdot 10^{-3}$  м.

<sup>63</sup> *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

*Постановка задачи.* Определить испытываемые этими стенками растягивающие напряжения в продольном  $\sigma_1$  и поперечном  $\sigma_2$  направлениях, считая отношение  $a/d$  малым.

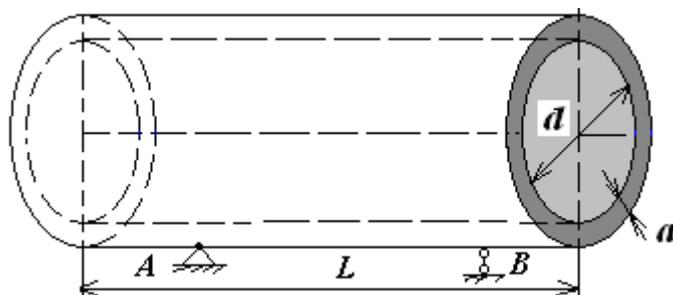


Рис. 2.81. Котёл цистерны, наполненный газом.

Воспользуемся законом Паскаля, согласно которому давление в закрытом сосуде распределяется во все его стороны равномерно. Для определения напряжений в продольном  $\sigma_1$  и поперечном  $\sigma_2$  направлениях используем *метод сечений*.

Решение данной задачи общеизвестно<sup>64</sup>.

## 2.10. Опрокидывание или потеря устойчивости твёрдых тел

При исследовании твёрдого тела *возникает необходимость в определении предельных значений сил или размеров*, обеспечивающих сохранение этого состояния (т. е. устойчивости).

Имеются задачи, в которых при величине силы, превышающей наибольшее допустимое значение, обеспечивающее покой твёрдого тела (или систем твёрдых тел), происходит опрокидывание (или потеря устойчивости<sup>65</sup>) тела вокруг одной из точек опоры (например, опоры  $E$ , показанной на рис. 2.4, 2.29 и 2.66).

При этом твёрдое тело (например, козловой кран) теряет связь в виде одной из опор (например,  $D$ ) и приобретает другую связь в виде оси вращения, проходящей вдоль другой опоры (например,  $E$ ) (см. рис. 2.4 и 2.66). Такие задачи решаются *в предположении*, что твёрдое тело *начинает отрываться относительно одной из опор* (например,  $D$ ). Поэтому реакции этой опоры (напри-

<sup>64</sup> *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

<sup>65</sup> *Устойчивость равновесия* – способность механической системы, находящейся под действием сил в равновесии после незначительного отклонения возвращаться в положение равновесия.

мер,  $\bar{R}_D$ ) не следует учитывать. Тогда при равновесии твёрдого тела реакция оставшейся опоры (например,  $\bar{R}_E$ ) должна уравниваться с равнодействующей всех активных сил (например,  $\bar{R}$ ). Это значит, что линия действия равнодействующей всех активных сил (например,  $\bar{R}$ ) проходит через оставшуюся опору (например,  $E$ ) и, следовательно, *момент равнодействующей относительно точки опоры равен нулю*.

Таким образом, при равновесии в соответствии с теоремой Вариньона (см. (2.45)) сумма моментов всех активных сил относительно точки опоры  $O$  равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (2.130)$$

Из этого уравнения определяют предельные значения сил или размеров твёрдого тела, при которых ещё не наступит опрокидывание, т. е. потеря устойчивости.

**Пример 1.** Проверить устойчивость козлового крана как системы твёрдых тел при внезапной его остановке по допустимой величине коэффициента запаса устойчивости (рис. 2.82).

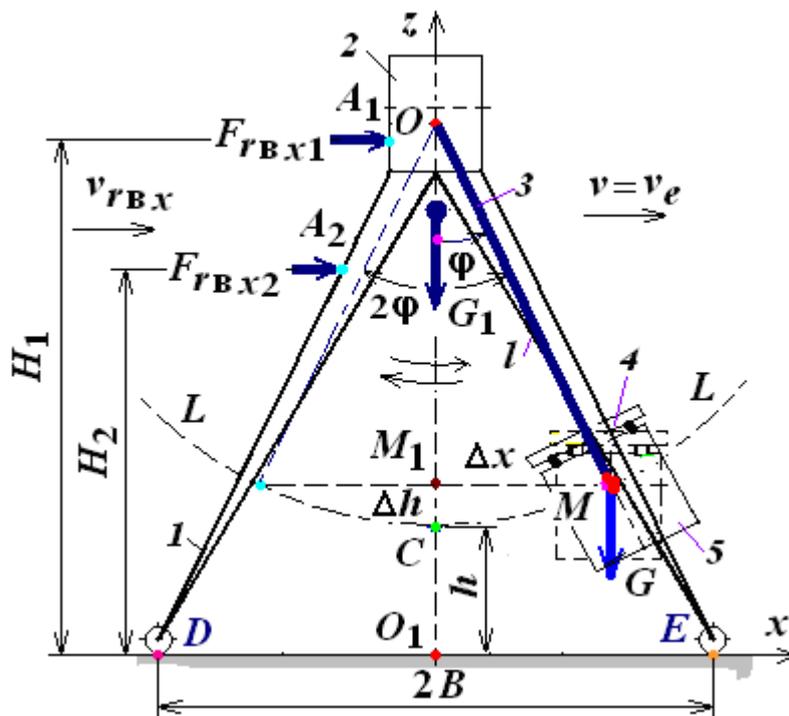


Рис. 2.82. Схема приложения сил к корпусу и грузозахватному устройству козлового крана.

1 – ножки крана; 2 – ферма крана, на которой размещена грузовая тележка;  
3 – полиспасты крана; 4 – спредер; 5 – крупнотоннажный контейнер (груз).

На рис. 2. 82 так же как и на рис. 2.4 и 2.66 обозначено:  $C$  – общий центр масс системы «спредер – груз»;  $G$  – сила тяжести системы, кН;  $H_1$  и  $H_2$  – координаты приложения силы аэродинамического сопротивления  $F_{r_{вх1}}$  и  $F_{r_{вх2}}$  (см. (3.9) – (3.12)), м;  $h_1$  и  $h_M$  – координаты приложения силы тяжести крана  $G_1$  и системы «спредер – груз», м;  $M$  – точка, на которую может подняться система при внезапной остановке крана;  $2B$  – расстояние между опорами крана  $D$  и  $E$ , м;  $\varphi$  – максимальный угол, на который может отклониться груз относительно вертикали, рад.;  $2\varphi$  – максимальный угол размаха центра масс системы, рад;  $l$  – длина канатов полиспаста, м;  $\Delta x$  – расстояние, на которое по горизонтали может переместиться груз, м.

Покажем вывод формул, по которым выполняют проверку устойчивости козлового крана при внезапной его остановке, используя понятия «удерживающего» и «опрокидывающего» моментов, широко применяемые в технике<sup>66</sup>.

Из условия равновесия механической системы «кран – груз» (см. рис. 2.82), соблюдая правило знаков момента сил (см. пп. 2.3.2), имеем

$$\sum_{k=1}^n m_E(\bar{F}_k) = 0: -F_{r_{вх1}}H_1 - F_{r_{вх2}}H_2 + G_1B + G(B - \Delta x) = 0. \quad (2.131)$$

Назовём абсолютные величины моментов сил тяжести крана  $G_1$ , системы «спредер – груз»  $G$  и силы аэродинамического сопротивления  $F_{r_{вх1}}$  и  $F_{r_{вх2}}$  относительно опоры  $E$  *удерживающим* и *опрокидывающим* моментами:

$$\begin{aligned} G_1B + G(B - \Delta x) &= M_{уд}; \\ F_{r_{вх1}}H_1 + F_{r_{вх2}}H_2 &= M_{опр}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Тогда на границе устойчивости

$$M_{уд} = M_{опр}. \quad (2.133)$$

При устойчивом состоянии тела (крана)

<sup>66</sup> Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. 1. Статика. Кинематика. – М.: Высш. шк., 1977. – 368 с.

$$M_{уд} > M_{опр} . \quad (2.134)$$

Устойчивость при опрокидывании в технике принято определять отношением величины удерживающего момента к величине опрокидывающего момента

$$\eta \geq \frac{M_{уд}}{M_{опр}} . \quad (2.135)$$

Это отношение называют коэффициентом устойчивости.

Очевидно, что в случае предельной устойчивости коэффициент устойчивости  $\eta = 1$ , а в случае устойчивого состояния  $\eta > 1$ .

На железнодорожном транспорте принято, что безопасная работа (т. е. гарантированная устойчивость) погрузочно-разгрузочных машин будет обеспечена, если будет соблюдено условие, при котором  $\eta > 1,25$ .

**Пример 2.** Проверить устойчивость груза в вагоне по величине коэффициента запаса устойчивости от опрокидывания незакреплённого на вагоне груза (рис. 2.83).

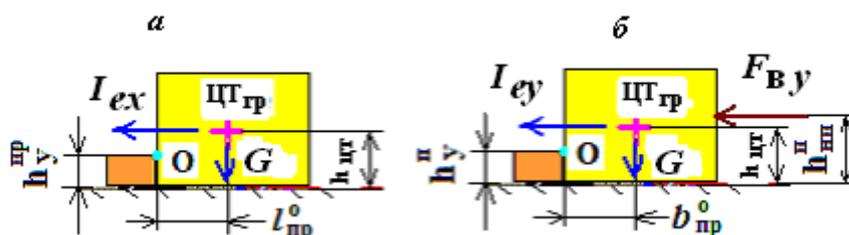


Рис. 2.83. Схемы для определения устойчивости груза.

На рис. 2.83 обозначено:  $\bar{G}$ ,  $\bar{I}_{ex}$  и  $\bar{I}_{ey}$ ,  $\bar{F}_{вy}$  – соответственно сила тяжести груза, продольные и поперечные силы (см. п. 4.6.1) и сила аэродинамического сопротивления (см. (3.9) – (3.12));  $l_{пр}^0$  – кратчайшее расстояние от проекции центра тяжести груза (ЦТ<sub>гр</sub>) на горизонтальную плоскость до ребра опрокидывания вдоль вагона (рис. 2.83, а);  $h_{цт}$  – высота ЦТ<sub>гр</sub> груза над полом вагона или плоскости подкладок;  $h_y^{пр}$  – высота продольного упора от пола вагона или плоскости подкладок;  $b_{п}^0$  – кратчайшее расстояние от проекции ЦТ<sub>гр</sub> груза на горизонтальную плоскость до ребра опрокидывания поперёк вагона (рис. 2.83, б);  $h_{нп}^п$  – высота центра проекции боковой поверхности груза от пола вагона

или плоскости подкладок;  $h_y^{\text{п}}$  – высота поперечного упора от пола вагона или плоскости подкладок.

Покажем вывод формул, по которым выполняют проверку устойчивости груза в вагоне, используя понятия «удерживающего» и «опрокидывающего» моментов, широко применяемые в технике<sup>67</sup>.

Из условия равновесия механической системы «груз–упорный брусок» (см. рис. 2.83, а) имеем

$$\sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0: I_{ex}(h_{\text{цт}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}}) - Gl_{\text{пр}}^o. \quad (2.131a)$$

Назовём абсолютные величины моментов сил  $\bar{G}$  и  $\bar{I}_{ex}$  относительно точки  $O$  удерживающим и опрокидывающим моментами:

$$Gl_{\text{пр}}^o = M_{\text{уд}}; I_{ex}(h_{\text{цт}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}}) = M_{\text{опр}}. \quad (2.132a)$$

Если  $\eta < 1$ , то груз следует дополнительно крепить от опрокидывания. Например, если условия обеспечения устойчивости груза относительно точки  $O$  платформы (см. рис. 2.83) невыполнимы по ряду причин (например, геометрические размеры основания груза небольшие), то такой груз следует разместить в специально разработанную конструкцию в виде металлических кассет (рис. 2.84).

---

<sup>67</sup> Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. 1. Статика. Кинематика. – М: Высш. шк., 1977. – 368 с.



Рис. 2.84. Одна из возможных конструкций металлических кассет.  
1 – груз; 2 – металлическая кассета; 3 – балластировочный груз.

По ТУ груз является *устойчивым* и не требует дополнительного крепления от опрокидывания, если при упругом креплении груза  $\eta$  не менее 1,25, т. е.  $\eta > 1,25$ , а при жёстком креплении  $\eta = 2$ .

Подставляя в неравенства (2.135) соотношения из (2.132а), получим

$$\eta_{\text{пр}} \geq \frac{Gl_{\text{пр}}^0}{\bar{I}_{\text{ex}}(h_{\text{цт}} - h_{\text{уп}}^{\text{пр}})}. \quad (2.136)$$

Из условия равновесия механической системы «груз–упорный брусок» (см. рис. 2.83, б) запишем

$$\sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0: I_{ey}(h_{\text{цт}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}}) + F_{\text{ву}}(h_{\text{нп}}^{\text{п}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}}) - Gb_{\text{пр}}^0 = 0 \quad (2.137)$$

Абсолютные величины *удерживающего* и *опрокидывающего* моментов сил  $\bar{G}$  и  $\bar{I}_{ey}$ ,  $\bar{F}_{\text{ву}}$  относительно точки  $O$  представим в виде

$$Gb_{\text{пр}}^0 = M_{\text{уд}} \cdot I_{\text{ey}}(h_{\text{цт}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}}) + F_{\text{вы}}(h_{\text{нп}}^{\text{п}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}}) = M_{\text{опр}}. \quad (2.138)$$

Подставляя в неравенства (2.135) соотношения из (2.138), находим

$$\eta_{\text{п}} \geq \frac{Gb_{\text{п}}^0}{I_{\text{ey}}(h_{\text{цт}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}}) + F_{\text{вы}}(h_{\text{нп}}^{\text{п}} - h_{\text{уп}}^{\text{п}})}. \quad (2.139)$$

## 2.11. Равновесие системы твёрдых тел

В статике твёрдого тела рассматриваются сочленённые системы материальных точек, т. е. совокупность твёрдых тел, касающихся друг друга своими поверхностями или соединённых друг с другом шарнирами, гибкими нитями или стержнями.

В статике системы твёрдых тел *важным* является *определение реакций связей*. Для этого используют *способ расчленения*, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривают равновесие отдельных тел (или групп тел системы). При этом все остальные тела системы и соответствующие связи *мысленно отбрасывают* и заменяют *реакциями*.

При рассмотрении всей системы твёрдых тел реакции связей между телами, входящими в систему, не должны учитываться; они не входят в уравнения равновесия как внутренние, взаимно уравновешенные силы. При рассмотрении равновесия каждого тела в отдельности или какой-либо группы тел, входящих в систему, соответствующие реакции связей, которые были мысленно расчленены, становятся внешними силами и входят в уравнения равновесия.

Задачи на равновесие системы твёрдых тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил, решаются с применением уравнений равновесия твёрдого тела, рассмотренных в п. 2.3 (см. уравнения (2.50) ÷ (2.53)).

Для примера решим задачу, когда связь является идеальной и представляет собой контакт цилиндрической поверхности с плоскостью.

*Задача 1<sup>68</sup>*. Две гладкие трубы большого диаметра *A* и *B* размещены в полувагоне (см. рис. 2.8, *a* и рис. 2.85).

<sup>68</sup> Задача решена канд. техн. наук, доцентом А.Н. Бондаренко (см. Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.).

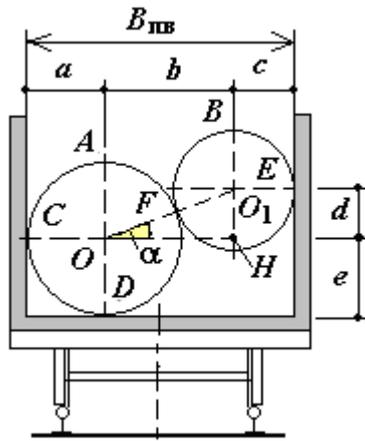


Рис. 2.85. Размещения труб больших диаметров в полувагоне.

Труба  $A$  весит  $G_2 = 200$  кН и её радиус  $r_2 = 2.4$  м; труба  $B$  весит  $G_1 = 120$  кН и её радиус  $r_1 = 1.4$  м. Длины и внутренние диаметры труб для данной задачи не используются.

Определить реакции труб на вертикальные боковые стены  $\bar{N}_C$  и  $\bar{N}_E$  в точках  $C$  и  $E$ , на горизонтальный пол вагона  $\bar{N}_B$  в точке  $B$  и реакции между трубами  $\bar{N}_F$  и  $\bar{N}'_F$ , если ширина полувагона  $B_{\text{пв}} = 2,77$  м. Здесь  $a = r_2$ ,  $c = r_1$ , поэтому  $r_2 + r_1 = 1,2 + 0,7 = 1,9$  м и  $b = B_{\text{пв}} - (r_2 + r_1)$  или  $b = 0,87$  м.

*Решение.* Система твёрдых тел состоит из двух труб большого диаметра и полувагона. Искомые силы действуют на разные тела: труба  $B$  на боковую стену вагона и на трубу  $A$ , а труба  $A$  на боковую стену вагона, на плоскость пола вагона и на трубу  $B$ .

Задачу решим в следующей последовательности<sup>69</sup>:

- 1) выбираем объект равновесия – труба  $B$ ;
- 2) показываем активные силы – силу тяжести  $\bar{G}_1$ ;
- 3) отбрасываем связи – правую вертикальную плоскость стенки вагона и трубу  $A$ , ограничивающую перемещение объекта равновесия;
- 4) согласно принципу освобождаемости от связей (аксиома статики 5), заменяем действие отброшенных связей реакциями – нормальной составляющей  $\bar{N}_E$  реакции вертикальной плоскости  $\bar{R}_E$  и нормальной составляющей  $\bar{N}_F$  реакции от гладкой поверхности трубы  $A$   $\bar{R}_A$ . Отметим, что  $\bar{R}_E$  и  $\bar{R}_A$  на расчётной схеме (модели) не показывают.

<sup>69</sup> Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3 т. Т. 1. Статика и кинематика. – М.: Наука, 1990. – 672 с. (см. также электронное пособие <http://www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm>: Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика. – Новосибирск, 2002.)

Таким образом, объект (труба  $B$ ) находится в равновесии под действием трёх сил: силы тяжести  $\bar{G}_1$ , реакции вертикальной плоскости  $\bar{N}_E$  и реакции цилиндрической поверхности трубы  $\bar{N}_F$ . В соответствии с этим будем иметь расчётную модель, показанную на рис. 2.86. Заметим, что эти реакции и рассматриваемые далее являются равнодействующими распределённых сил по линии контакта труб со стенками и между собой. Выберем систему координат, как показано на рис. 2.86;

5) составляем уравнения равновесия для полученной системы сил.

Полученная система сил представляет собой плоскую сходящуюся систему сил (см. рис. 2.86), т. к. все силы лежат на одной плоскости и сходятся в точке  $C$  – центре тяжести поперечного сечения трубы. Данная система сил удовлетворяет уравнениям равновесия систем сил (см. уравнение (2.50)):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$

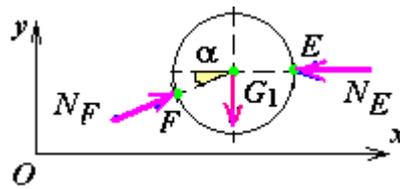


Рис. 2.86. Расчётная модель размещения верхней трубы  $B$  на вагоне.

Составим уравнение равновесия систем сил для объекта (трубы  $B$ )

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: \quad N_F \cos \alpha - N_E = 0; \quad (2.140)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: \quad N_F \sin \alpha - G_1 = 0, \quad (2.141)$$

где  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  определяются из  $\Delta OO_1H$ :

$$\sin \alpha = \frac{d}{r_1 + r_2}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{r_1 + r_2}, \quad (2.142)$$

где  $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - b^2}$ .

Из полученных уравнений находим реакции связей в точке  $E$  и  $F$ :

$$N_F = \frac{G_1}{\sin \alpha}; \quad (2.143)$$

$$N_E = N_F \cos \alpha = G_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (2.144)$$

Согласно закону равенства действия и противодействия механики, реакции боковой стенки вагона  $\bar{N}_E$  (противодействия) равны силе давления (действия), т. е.  $\bar{N}_E = -\bar{Q}_E$ . Точно так же и реакция  $\bar{N}_F$  равна давлению трубы  $B$  на трубу  $A$ , т. е.  $\bar{N}_F = -\bar{Q}_F$ .

Для определения других неизвестных сил необходимо выбрать новый объект:

- 1) выбираем объект равновесия – труба  $A$ ;
- 2) показываем активные силы – силу тяжести  $\bar{G}_2$ ;
- 3) отбрасываем связи – левую вертикальную плоскость стенки вагона, горизонтальную плоскость пола вагона и трубу  $B$ , ограничивающую перемещение объекта равновесия;
- 4) заменяем действие отброшенных связей реакциями – нормальной составляющей  $\bar{N}_E$  реакции вертикальной плоскости  $\bar{R}_E$  и нормальной составляющей  $\bar{N}_F$  реакции от гладкой поверхности трубы  $A$   $\bar{R}_A$ .

Таким образом, объект (труба  $A$ ) находится в равновесии под действием четырёх сил: силы тяжести  $\bar{G}_2$ , реакции вертикальной плоскости  $\bar{N}_C$ , реакции пола вагона  $\bar{N}_D$  и реакции цилиндрической поверхности трубы  $\bar{N}'_F$ . В соответствии с этим получим расчётную модель нижней трубы (рис. 2.87). Выберем систему координат, как показано на рис. 2.87.

- 5) составляем уравнения равновесия для полученной системы сил.

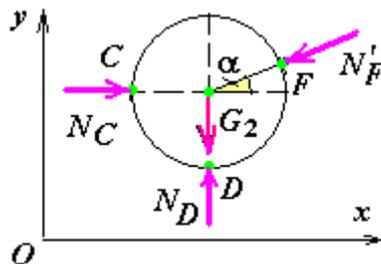


Рис. 2.87. Расчётная модель размещения нижней трубы  $A$  на вагоне.

Данная система сил представляет собой плоскую сходящуюся систему сил, так как все силы лежат на одной плоскости и сходятся в точке  $O$  – центре попе-

речного сечения трубы  $A$ . Такая система сил удовлетворяет уравнениям равновесия (2.50).

Заметим, что силы давления между трубами  $\bar{Q}_F$  и  $\bar{Q}'_F$  равны между собой, но противоположно направлены, т. е.  $\bar{Q}_F = -\bar{Q}'_F$ . Для данной задачи эти силы направлены по прямой, соединяющей центры  $O$  и  $O_1$  обеих труб (см. рис. 2.87). Нормальные реакции  $\bar{N}_F$  и  $\bar{N}'_F$  равны между собой и противоположно направлены, т. е.  $\bar{N}_F = -\bar{N}'_F$ . Не следует думать, что здесь речь идёт о четырёх силах. Все дело в принятой в прикладной механике терминологии. На самом деле при взаимодействии двух тел *сила давления* трубы  $B$  на трубу  $A$ , сила  $\bar{Q}_F$ , является *реакцией*  $\bar{N}'_F$ , т. е. это одна и та же сила. Точно так же *сила давления* трубы  $A$  на трубу  $B$ , сила  $\bar{Q}'_F$ , является *реакцией*  $\bar{N}_F$ .

Составим уравнения равновесия систем сил, приложенных к объекту (см. рис. 2.87):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: \quad N_C - N_F \cos \alpha = 0; \quad (2.145)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: \quad -N_F \sin \alpha - G_2 + N_D = 0. \quad (2.146)$$

Отсюда получим реакции связей в точке  $C$  и  $D$ :

$$N_C = N_F \cos \alpha; \quad (2.147)$$

$$N_D = N_F \sin \alpha + G_2$$

или с учётом формулы (2.143)

$$N_D = G_1 + G_2. \quad (2.148)$$

*Замечание.* Следует заметить, что при рассмотрении систем, состоящих из *нескольких тел* (пакетные грузы, штабели), приходится принимать последовательно в качестве объектов равновесия каждое из тел и количество уравнений равновесия пропорционально количеству твёрдых тел, составляющих систему. Полученные результаты решения уравнений для одного из тел далее используются при решении уравнений равновесия другого тела. Ошибки, допущенные в предыдущем расчёте, вызывают соответствующие ошибки в дальнейших вычислениях, даже если далее никаких новых ошибок не допущено. Для контроля рекомендуется составить независимые уравнения равновесия для всей системы в целом. Например, для рассматриваемой задачи, выбирая в качестве объекта

равновесия систему, состоящую из двух труб (рис. 2.88), и повторяя вышеприведенный порядок действий, получаем произвольную плоскую систему сил, которая должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: N_C - N_E = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: -G_2 - G_1 + N_D = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_K(\bar{F}_k) = 0: -N_C e + N_D a - G_2 a - G_1(a+b) + N_E(e+d) = 0,$$
(2.149)

где точка  $K$  в последнем уравнении выбрана в левом нижнем углу поперечного сечения полувагона.

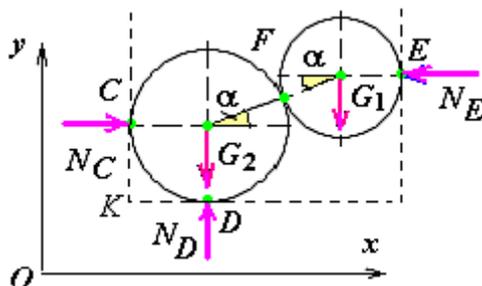


Рис. 2.88. Объект равновесия – система из двух труб в целом.

Подстановка полученных значений внешних реакций связей должна обратить эти уравнения в тождества или, по крайней мере, левые части уравнений должны быть близки к нулю. Заметим, что во многих практических задачах расчёта креплений груза и силы распора на боковые стенки вагона можно ограничиться определением только реакций внешних связей (силу взаимодействия (давления) между штучными грузами (трубами) не определяют).

Для определения таких внешних реакций связей в данной задаче достаточно решить вышеприведенную систему уравнений равновесия для системы из двух труб в целом. При количестве труб больше двух количество внешних реакций будет превышать количество независимых уравнений равновесия и рассматривать равновесие каждой из труб будет необходимо, даже если определение силы взаимодействия между трубами не требуется.

*Результаты решений задачи.* Силы давления трубы  $A$  на трубу  $B$   $\bar{Q}_F$ , на вертикальную стенку  $\bar{Q}_C$  и на пол полувагона  $\bar{Q}_D$  равны реакциям связей  $\bar{N}_F$ ,  $\bar{N}_C$  и  $\bar{N}_D$  в точке  $F$ ,  $C$  и  $D$ , но, согласно закону равенства действия и проти-

водействия механики, направлены противоположно, т. е.  $\bar{Q}_F = -\bar{N}_F$ ,  $\bar{Q}_C = -\bar{N}_C$  и  $\bar{Q}_D = -\bar{N}_D$ . Силы давления трубы  $B$  на трубу  $A$   $\bar{Q}_F$  и на вертикальную стенку полувагона  $\bar{Q}_E$  равны реакциям связей  $\bar{N}_F$  и  $\bar{N}_E$  в точке  $F$  и  $E$ , но направлены противоположно, т. е.  $\bar{Q}_F = -\bar{N}_F$  и  $\bar{Q}_E = -\bar{N}_E$ .

*Пример расчёта.* В системе MathCAD<sup>70</sup> получены следующие результаты, представленные в виде макет-документов.

Исходные данные:

G1 := 120	- вес трубы A, кН
G2 := 200	- вес трубы B, кН
B := 2.77	- ширина полувагона, м
r2 := 1.2	- радиус трубы A, м
r1 := 0.7	- радиус трубы B, м.

Промежуточные вычисляемые параметры расчёта:

r2 + r1 = 1.9	- вычисляемые параметры трубы A и B
b := B - (r2 + r1)	b = 0.87
d := $\sqrt{(r2 + r1)^2 - b^2}$	d = 1.689
sna := $\frac{d}{r2 + r1}$	csa := $\frac{b}{r2 + r1}$
sna = 0.889	csa = 0.458.

Результаты расчётов:

NF := $\frac{G1}{sna}$	NF = 134.982	- реакция трубы A на трубу B, кН
NE := NF·csa	NE = 61.808	- реакция вертикальной стены полувагона на трубу B, кН
NC := $\frac{NF}{csa}$	NC = 294.789	- реакция вертикальной стены полувагона на трубу A, кН
ND := G1 + G2	ND = 320	- реакция пола полувагона на трубу A, кН.

Результаты расчётов при вариации размера  $r_1$  трубы  $B$  общеизвестно<sup>71</sup>.

<sup>70</sup> Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

<sup>71</sup> Туранов Х. Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки-выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.

## 2.12. Решение задачи статики при плоской системе сил

В этом разделе рассмотрены решения ряда задач, результаты которых могут быть востребованы в практической деятельности специалистов железнодорожного транспорта.

Решение задач на равновесие твёрдых тел рекомендуется проводить порядке, изложенном в п. 2.5.

I. Рассмотрим задачу, когда *связь* идеальная и представляет собой *контакт цилиндрической поверхности с плоскостью*.

*Задача 1.* Груз в виде трубы большого диаметра размещён на гладкой (без трения) горизонтальной поверхности (платформа) (см. рис. 2.8, в, рис. 2.89).

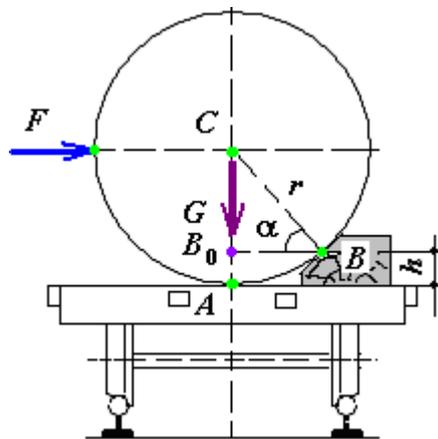


Рис. 2.89. Размещение трубы большого диаметра на платформе.

Такой случай соответствует образованию ледяной поверхности между контактирующими поверхностями груза и полом платформы при перевозке, зависящей от климатических условий перегона. На груз действует горизонтальная поперечная сила  $\vec{F}$ , прижимающая его к упорному бруску  $B$ . Труба весит  $G = 200$  кН и её радиус  $r = 1,3$  м. Высота выступа упорного бруска  $h = 0,16$  м.

Требуется определить реакции пола платформы  $\vec{N}_A$  и упорного бруска  $\vec{N}_B$  в точках  $A$  и  $B$ . Найти высоту выступа упорного бруска  $h_0 > h$ , при котором не произойдет отрыва трубы от плоскости. Определить количество крепёжных изделий (гвоздь), удерживающих упорный брусок от сдвига поперёк вагона.

Решение данной задачи общеизвестно<sup>72</sup>.

<sup>72</sup> Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах: учебн. пособие. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.

II. Рассмотрим задачу, когда *связью* (причём идеальной) является *шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опорное устройство*.

*Задача 2.* Балка на двух опорах нагружена системой параллельных сил.

Примером такой задачи является *симметричное размещение* трёх штучных грузов относительно продольной и поперечной осей симметрии платформы посредством деревянных подкладок (рис. 2.90).

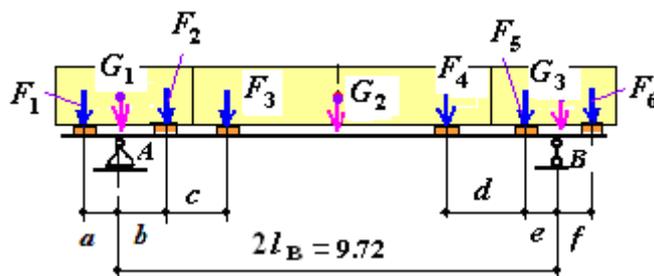


Рис. 2.90. Схема размещения грузов на платформе.

Изображенные на рис. 2.90 шарнирно-неподвижная ( $A$ ) и шарнирно-подвижная ( $B$ ) опоры – условные конструкции, отражающие характер работы связей. Здесь опоры  $A$  и  $B$  представляют собой надрессорные балки тележек, опирающиеся на комплекты пружин. Малость опорных площадок в точках  $A$  и  $B$  допускает малые повороты объекта относительно этих точек или краев опорных площадок. Наличие зазоров в шкворнях допускает малые перемещения объекта. Отсюда одна из опор рассматривается как неподвижная, а другая – подвижная. Предполагается, что комплекты пружины находятся в полностью сжатом состоянии и не допускают вертикальных перемещений [Туранов, 2007].

Пусть на платформе размещены три штучных груза с силами тяжести  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ . Все геометрические размеры расположения подкладок по длине балки обозначены в виде  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $f$ . Пусть пролет балки  $AB$  равен базе вагона  $2l_B = 9,72$  м и  $a = b = 1,0$  м,  $c = d = 1$  м,  $e = f = 1,0$  м. Пусть  $G_1 = G_3 = 150$  кН,  $G_2 = 350$  кН.

Требуется определить давления штучных грузов  $\bar{Q}_A$  и  $\bar{Q}_B$  (рис. 2.91) на надрессорные балки, необходимые для расчёта рамы вагона с собственной силой тяжести  $G_{рв} = 120$  кН, и комплектов пружин передних и задних тележек на прочность.

---

Туранов Х.Т. Размещение и крепление грузов в вагонах: учебн. пособие. – Екатеринбург: УрГУПС, 2007. – 365 с.

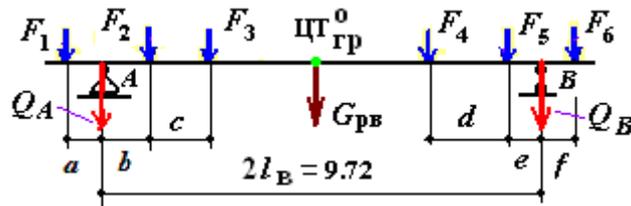


Рис. 2.91. Схема приложения сил на платформе.

Решение данной задачи общеизвестно<sup>73</sup>.

III. Рассмотрим задачи, когда связь (причём неидеальная) представляет собой гибкую нерастяжимую нить и цилиндрический шарнир.

*Задача 3.* В технике часто встречаются конструкции механизмов и машин, где используются сочетания связей различных видов. Так, в конструкции стрелового крана на железнодорожном ходу КЖДЭ-4-25м, широко используемого для выполнения погрузочно-выгрузочных операций на грузовых пунктах железнодорожных станций, в качестве связей использованы гибкие нерастяжимые нити 4 и 6 для подъёма и опускания поворотной стрелы и грузового крюка, и цилиндрический шарнир А для соединения поворотной стрелы 8 с корпусом 1 стрелового крана (см. рис. 2.28, рис. 2.92).

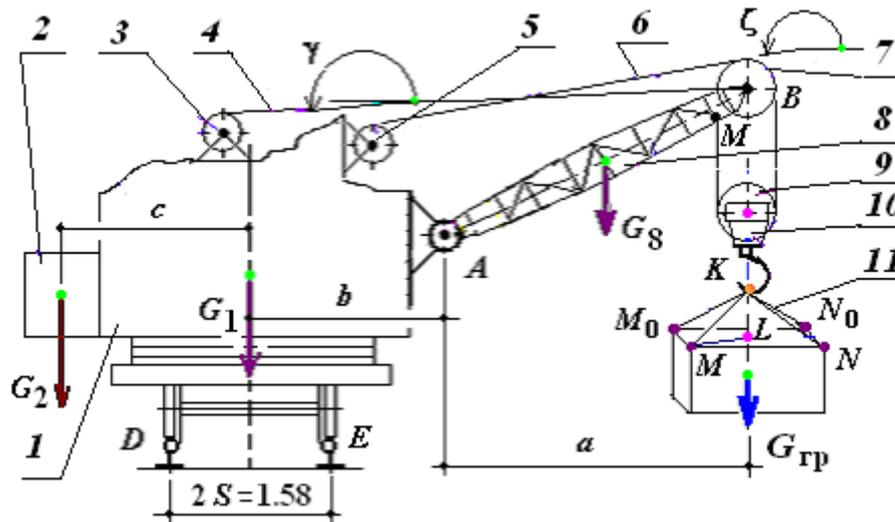


Рис. 2.92. Пример применения цилиндрического шарнира и гибких нитей в стреловом кране.

1 и 2 – корпус и противовес крана; 3 – приводной барабан, соединённый посредством редуктора с валом электродвигателя подъёма и опускания поворотной стрелы; 4 и 6 – канаты; 5 – приводной барабан, соединённый через редуктор с валом электродвигателя подъёма и опускания груза; 7 и 9 – блоки с неподвижным и подвижным осями вращения; 8 – поворотная стрела; 10 – крюковая обойма; 11 – четырёхзвенный строп.

<sup>73</sup> Туранов Х. Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки-выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.

Один конец поворотной стрелы крана 8 соединен с корпусом крана 1 посредством цилиндрического шарнира  $A$ , а другой конец удерживается в равновесии гибкой нитью 4. Причём один конец гибкой нити 4 привязан к вершине стрелы  $B$  (блок 7 с неподвижной осью вращения), а другой конец намотан на приводной барабан, связанный посредством редуктора с валом электродвигателя 3 подъёма и опускания поворотной стрелы 8. К блоку с подвижной осью вращения 9 через грузовой крюк подвешен груз весом  $G_{гр}$ . Причём одна ветвь гибкой нити 6, обхватывающей блок с подвижной осью вращения 9, привязана к поворотной стреле в точке  $M$ , а другая ветвь перекинута через блок с неподвижной осью вращения 7, а затем намотана на приводной барабан, связанный посредством редуктора с валом электродвигателя 5 подъёма и опускания груза. Расстояние  $2S$  между кругами катания колесной пары вагона колеи 1 520 мм равно 1,58 м. Вылет стрелы крана –  $a$ . Угол наклона поворотной стрелы крана –  $\beta$ ; угол наклона гибкой нити 4, служащей для подъёма и опускания поворотной стрелы 8 крана –  $\gamma = 195^\circ$ ; угол наклона гибкой нити 6, служащей для подъёма и опускания блока 9 с подвижной осью вращения (т. е. грузового крюка),  $\zeta = 200^\circ$ ; диаметр блока 7 с неподвижной осью вращения –  $D_2$ .

Можно выделить следующие четыре самостоятельные задачи:

- 1) определение силы давления крана на рельсы в точках  $C$  и  $D$ ;
- 2) нахождение условий устойчивого равновесия крана относительно точки  $D$ ;
- 3) определение натяжения гибких нитей 4 и 6, удерживающих поворотную стрелу и груз, и нахождение реакции в цилиндрическом шарнире  $A$ , соединяющем поворотную стрелу с корпусом крана;
- 4) отыскание натяжений канатов  $II$  четырёхзвенного стропа.

*Решение первой задачи.* Активные силы в виде силы тяжести крана  $\overline{G}_1$ , поворотной стрелы  $\overline{G}_8$ , груза  $\overline{G}_{гр}$  и реактивные силы рельсовой колеи в виде  $\overline{N}_D$  и  $\overline{N}_E$  будут действовать на объект, т. е. на стреловой кран (рис. 2.93).

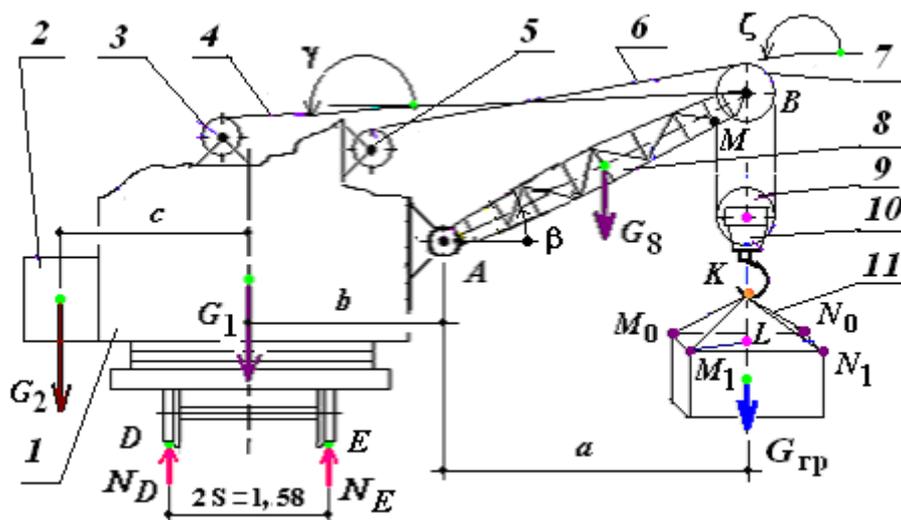


Рис. 2.93. Расчётная модель стрелового крана.

Все силы, действующие на стреловой кран, являются параллельными, поэтому можно считать, что на кран действует плоская система параллельных сил (см. пп. 2.3.1).

Рассмотрим условия равновесия плоской системы параллельных сил, которая описывается двумя уравнениями равновесия сил (см. уравнения (2.53) и (2.53a)):

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: N_D + N_E - (G_{гр} + G_1 + G_2 + G_8) = 0; \quad (2.150)$$

$$\sum_{k=1}^n M_E(\bar{F}_k) = 0: \\ -N_D 2S + G_2(c + S) + G_1 s - G_{гр}(a + b - s) - G_8(0,5a + b - s) = 0, \quad (2.152)$$

где  $E$  – точка контакта правого колеса крана.

*Результаты решения.* Из уравнения (2.151) находим

$$N_D = \frac{G_2(c + S) + G_1 s - G_{гр}(a + b - s) - G_8(0,5a + b - s)}{2S}. \quad (2.152)$$

Из уравнения (2.150) имеем

$$N_D = (G_{гр} + G_1 + G_2 + G_8) - N_E. \quad (2.153)$$

*Анализ полученных результатов.* Тележка крана, в отличие от показанного на рис. 2.93, в действительности имеет две колёсные пары. Поэтому реакция

связи каждого железнодорожного пути на колёса тележки крана равны по  $0,5N_D$  и  $0,5N_E$ .

*Решение второй задачи.* Условия устойчивого равновесия крана относительно точки  $E$  при условии  $N_E \geq 0$  получим из (2.152):

$$G_2(c + S) + G_1s - G_{гр}(a + b - s) - G_8(0,5a + b - s) > 0, \quad (2.154)$$

где  $G_2(c + S) + G_1s = M_{уд}$  – удерживающий момент;

$$G_{гр}(a + b - s) + G_8(0,5a + b - s) = M_{опр} – опрокидывающий момент.$$

В предельном равновесии  $M_{уд} = M_{опр}$  (см. (2.133)). При устойчивом состоянии крана  $M_{уд} > M_{опр}$  (см. (2.134)).

*Результаты решения.* Устойчивость равновесного состояния на случай возможного опрокидывания при изменении внешних воздействий оценивается величиной коэффициента запаса (см. (2.135))

$$\eta = \frac{M_{уд}}{M_{опр}} = \frac{G_1s + G_2(c + S)}{G_1(0,5a + b - s) + G_{гр}(a + b - s)} > 1,25. \quad (2.155)$$

*Анализ полученных результатов.* Условие (2.157) при изменении вылета  $a$  поворотной стрелы крана обеспечивается подбором либо силы тяжести противовеса  $\overline{G}_2$  при постоянной величине плеча этой силы, т. е. при  $c = \text{const}$ , либо плеча  $C$  при постоянном значении силы  $\overline{G}_2 = \overline{\text{const}}$ .

*Решение третьей задачи.* Определение натяжения гибких нитей 4 и 6, удерживающих поворотную стрелу и груз, и нахождение реакции в цилиндрическом шарнире  $A$ , соединяющего поворотную стрелу 8 с корпусом крана 1, выполним в следующей последовательности.

*Решение.* Воспользуемся принципом освобожденности от связей геометрической статики, согласно которому мысленно отбросим корпус крана 1, и его влияние заменим реакцией связи  $\overline{R}_A$ . Кроме того, мысленно рассечём гибкие нити 4 и 6, и их влияния заменим реакциями связей  $\overline{R}_4$  и  $R_6'''$ . Будем иметь в виду, что в цилиндрическом шарнире  $A$  неизвестными являются модуль и направление  $\alpha$  реакции связи  $\overline{R}_A$ . Координатные оси направим так, как показано на рис. 2.94.

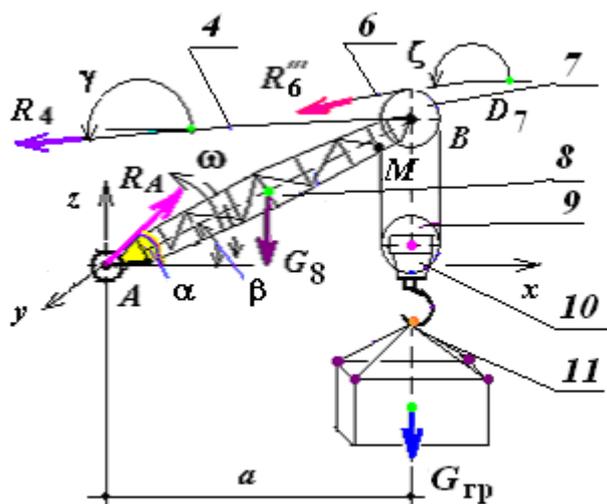


Рис. 2.94. Расчётная модель поворотной стрелы стрелового крана.

На расчётной модели четыре неизвестных:  $\bar{R}_A$ ,  $\alpha$ ,  $\bar{R}_4$  и  $R_6'''$ , а количество уравнений равновесия плоской системы сил, как известно, три. Такая задача становится статически неопределённой. Степень статически неопределённости равна единице.

Для решения задачи следует рассмотреть условие равновесия блока 9 с подвижной осью вращения (см. рис. 2.94). Гибкие связи, будучи односторонними связями (см. п. 2.1), не дают телу удаляться от точки подвеса нити по её направлению. Поэтому реакции гибких связей  $\bar{R}'_6$  и  $\bar{R}''_6$  направлены вдоль связей к точке подвеса нити, т. е. вверх к точкам  $M$  и  $B$  (рис. 2.95).

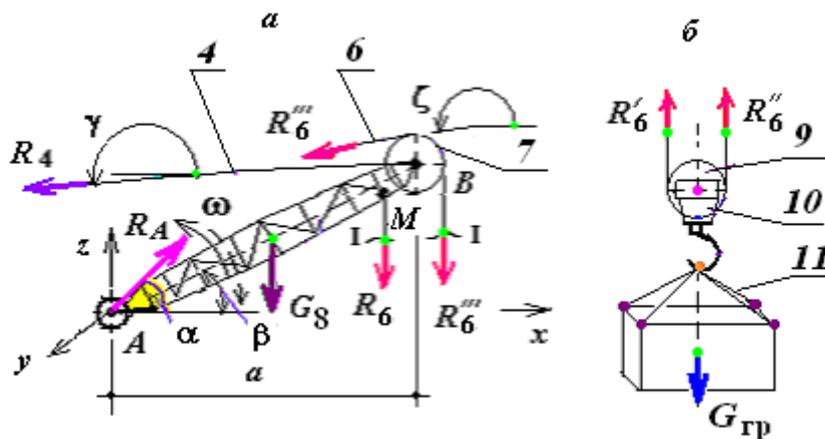


Рис. 2.95. Расчётная модель подвижного блока 3.

Так как силы тяжести груза  $G_{гр}$  приложен к оси блока с подвижной осью вращения 9, то из уравнения моментов относительно оси блока натяжения обеих

параллельных концов гибкой нити 6, охватывающей этот блок, равны между собой и составляют половину веса груза (из суммы проекций всех сил на вертикальную ось):

$$R'_6 = R''_6 = 0,5G_{гр}. \quad (2.156)$$

Согласно закону равенства действия и противодействия механики, натяжения нижних ветвей блока  $\bar{R}_6 = \bar{R}'_6$  и  $\bar{R}_6 = \bar{R}''_6$ , но противоположно направлены и соответственно приложены к неподвижной точке  $M$  поворотной стрелы 8 и блоку с неподвижной осью вращения 7.

В результате рассуждений получим расчётную модель поворотной стрелы 8 (рис. 2.96, а). Однако, учитывая, что пока неизвестным является направление (угол  $\alpha$ ) реакции связи  $\bar{R}_A$ , удобно разложить эту реакцию по осям координат на две прямоугольные составляющие в виде  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  (рис. 2.96, б).

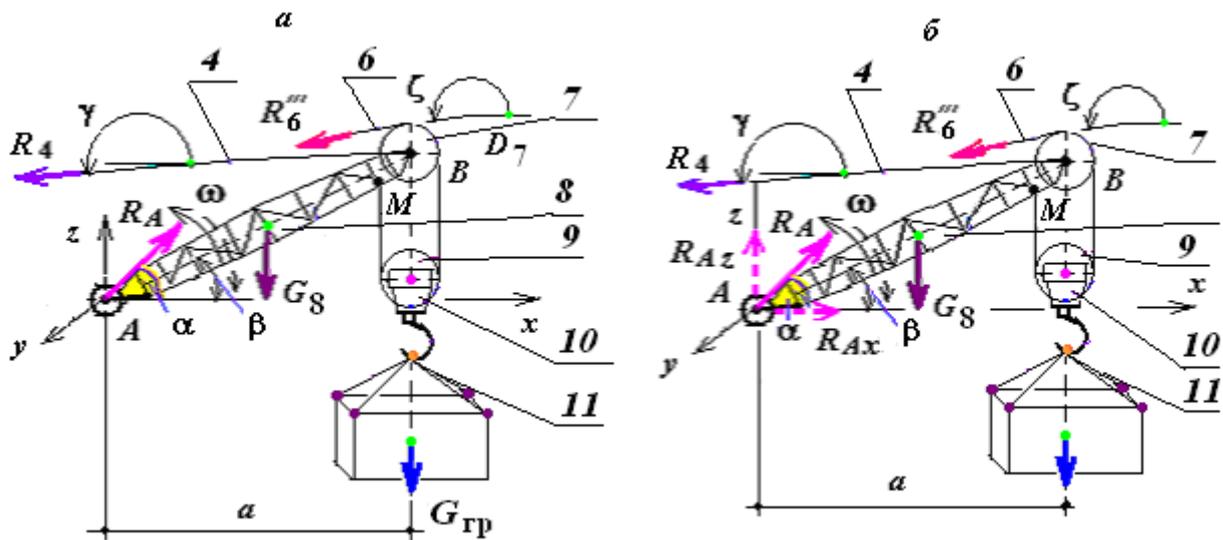


Рис. 2.96. Расчётная модель поворотной стрелы стрелового крана.

Составим условие равновесия поворотной стрелы 8, на которую действует произвольная плоская система сил (см. уравнения (2.50)):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: R_{Ax} + R_4 \cos \gamma + R_6''' \cos \zeta = 0; \quad (2.157)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0: R_{Ay} + R_4 \sin \gamma + R_6''' \sin \zeta - G_8 - Q_{гр} = 0; \quad (2.158)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0:$$

$$\begin{aligned}
& -R_4 \cos \gamma \times a \times \operatorname{tg} \beta + R_4 \sin \gamma \times a - R_6''' \cos \zeta (a \times \operatorname{tg} \beta + 0,5D_2) + \\
& + R_6''' \sin \zeta \times a - G_8 0,5a - G_{\text{гр}} a = 0.
\end{aligned} \tag{2.159}$$

*Результаты решения задачи.* Из равенства (2.159) имеем

$$\begin{aligned}
& -R_4 a (\cos \gamma \times \operatorname{tg} \beta - \sin \gamma) - R_6''' \cos \zeta (a \times \operatorname{tg} \beta + 0,5D_2) + \\
& + R_6''' \sin \zeta \times a - G_8 0,5a - G_{\text{гр}} a = 0.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства получим

$$R_4 = \frac{-R_6''' \cos \zeta \times (a \times \operatorname{tg} \beta + 0,5D_2) + R_6''' \sin \zeta \times a - G_8 0,5a - G_{\text{гр}} a}{a \left( \cos \gamma \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \sin \gamma \right)}. \tag{2.160}$$

Из равенства (2.157) и (2.158) находим проекции на координатные оси реакции в цилиндрическом шарнире  $A$ :

$$R_{Ax} = -(R_4 \cos \gamma + R_6''' \cos \zeta), \tag{2.161}$$

$$R_{Ay} = -(R_4 \sin \gamma + R_6''' \sin \zeta) + G_8 + G_{\text{гр}}. \tag{2.162}$$

Полная реакция в шарнире  $A$  и угол наклона, характеризующий направление этой реакции относительно оси  $Ax$ , равны:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}, \quad \alpha = \arccos \left( \frac{R_{Ax}}{R_A} \right). \tag{2.165}$$

*Решение четвёртой задачи.* Для нахождения натяжений в четырёхзвенном стропе рассматривают штучный груз как объект, а канаты  $II$  – в качестве внешних связей (рис. 1.97).

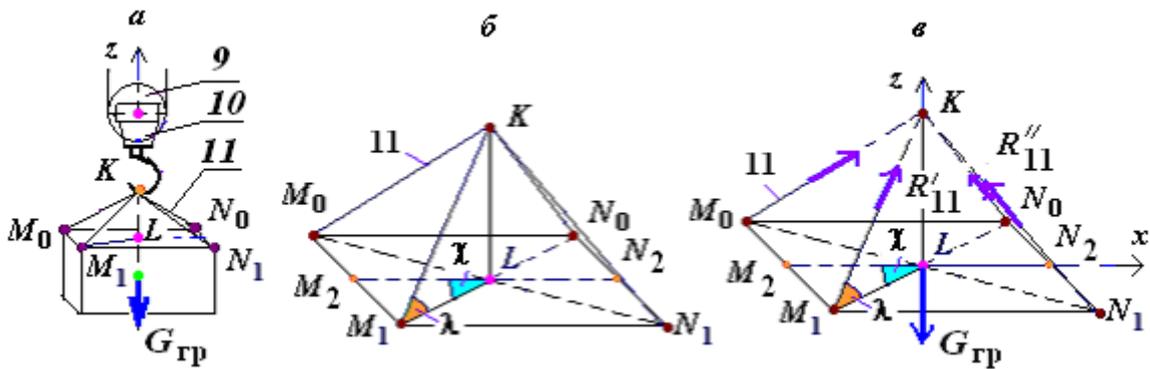


Рис. 2.97. Расчётная модель поворотной стрелы стрелового крана.

Длину, ширину и высоту груза принимают соответственно равными  $M_1N_1 = 0,4a$ ,  $M_1M_0 = 0,2a$  и  $KL = 0,2a$ . Считая, что длины ветвей четырехзвенного стропа  $KM_1$  и  $KM_0$  равны ветвям  $KN$  и  $KN_0$ , определяют проекции этих ветвей на продольную ось груза  $x$ . Угол  $\lambda$  соответствует проекции ветви  $KM_1$  на горизонтальную плоскость, а угол  $\chi$  – на продольную ось груза  $x$ .

Согласно принципу освобождения от связей геометрической статики мысленно отбрасывают крюковую обойму  $10$  и рассекают канаты  $11$  четырехзвенного стропа, а их влияние заменяют натяжениями  $\bar{R}'_{11}$  и  $\bar{R}''_{11}$ . Канаты, как гибкие нити, являются неидеальными и неудерживающими (односторонними) связями, не позволяющими удалиться грузу по вертикали вниз. Координатные оси направим так, как показано на рис. 2.97, в.

Записывают условие равновесия штучного груза (см. рис. 1.97, в), имея в виду, что к нему приложена пространственная система сходящихся сил, которые двойным проецированием можно привести к плоской системе сил. Для определения искомых натяжений достаточно составить два уравнения равновесия типа (1.157) и (1.158).

Пример расчёта в системе MathCAD<sup>74</sup>

Исходные данные:

$Q_{гр} := 50$  - сила тяжести груза, кН

$G_1 := 200$  - сила тяжести крана, кН

$G_2 := 30$  - сила тяжести противовеса крана, кН

$G_8 := 10$  - сила тяжести поворотной стрелы крана, кН

$a := 4.0$   $b := 1.0$   $c := 1.8$  - геометрические размеры крана, м

$D_2 := 0.2$  - диаметр блока  $7$  с неподвижной осью вращения, м

<sup>74</sup> Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

$$\beta := 30 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- угол наклона поворотной стрелы, рад.}$$

$$\gamma := 195 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- угол наклона гибкой нити 4, рад.}$$

$$\zeta := 200 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- угол наклона гибкой нити 6, рад.}$$

$$S := 0.79 \quad \text{- половина расстояния между кругами катания колесной пары вагона колес 1520 мм, м}$$

Результаты расчётов

1. Реакции рельсовых нитей на колёса тележки крана, кН

$$NE := \frac{[Q_{гр} \cdot (a + b - S) + G1 \cdot (0.5 \cdot a + b - S)] - [G1 \cdot S + G2 \cdot (c + S)]}{2 \cdot S}$$

$$NE = 263.797$$

$$ND := (Q_{гр} + G1 + G2 + G8) - NE$$

$$ND = 26.203$$

При заданных исходных данных реакция правой рельсовой нити  $E$  в 10 раз больше, чем реакция левой рельсовой нити  $D$ .

2. Определение *коэффициента устойчивости* при устойчивом равновесии крана

$$M_{уд} := G1 \cdot S + G2 \cdot (c + S)$$

$$M_{огр} := Q_{гр} \cdot (a + b - S) + G8 \cdot (0.5 \cdot a + b - S)$$

$$\eta := \frac{M_{уд}}{M_{огр}} \quad \text{- коэффициент устойчивости стрелового крана}$$

$$\eta = 1.013 \quad \eta < 1,25 \quad \text{- устойчивое равновесие стрелового крана не обеспечено}$$

Поскольку  $\eta < 1,25$ , устойчивость стрелового крана при заданных исходных данных не обеспечена.

Устойчивость крана может быть обеспечена подбором плеча  $c$  при постоянном значении силы  $\overline{G_2} = \overline{const}$ . Поэтому будем варьировать значением параметра  $c$  в виде

$$c := 1.8, 2.0.. 3.0 \quad \text{- плечо веса противовеса } l, \text{ м}$$

$$M_{уд}(c) := G1 \cdot S + G2 \cdot (c + S)$$

$$M_{огр} := Q_{гр} \cdot (a + b - S) + G8 \cdot (0.5 \cdot a + b - S)$$

$$\eta(c) := \frac{M_{уд}(c)}{M_{опр}} \quad \text{- коэффициент устойчивости стрелового крана}$$

Графическая зависимость  $\eta(c)$  представлена на рис. 2.98.

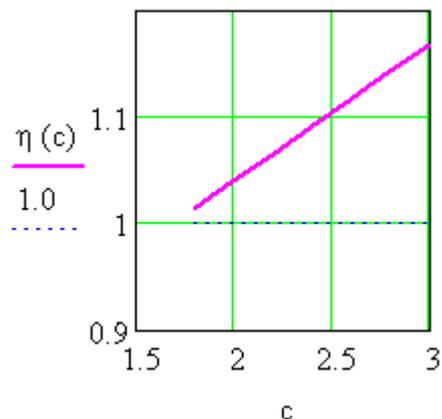


Рис. 2.98. Графическая зависимость  $\eta(c)$ .

Отсюда ясно, что устойчивость стрелового крана будет обеспечена при  $c \geq 3,17$  м. Поэтому плечо  $c$  силы тяжести противовеса примем равным 3,2 м.

3. Определение натяжения гибких нитей 4 и 6, кН

$$R_6 := 0.5 \cdot Q_{гр} \quad \text{- натяжение гибкой нити 6, кН}$$

$$R_6 = 25$$

$$R_4 := \frac{-R_6 \cdot \cos(\zeta) \cdot \left( a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} + 0.5 \cdot D_2 \right) + R_6 \cdot \sin(\zeta) \cdot a + (G_8 \cdot 0.5 \cdot a + Q_{гр} \cdot a) \cdot (-1)}{a \cdot \left( \cos(\gamma) \cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} - \sin(\gamma) \right)}$$

$$R_4 = 165.295 \quad \text{- натяжение гибкой нити 4, кН}$$

4. Вычисление проекции на координатные оси реакции в цилиндрическом шарнире  $A$ , полной реакции  $\bar{R}_A$  и угла наклона этой реакции  $\alpha$ :

$$R_{Ax} := -R_4 \cdot \cos(\gamma) - R_6 \cdot \cos(\zeta)$$

$$R_{Ax} = 183.155$$

$$R_{Ay} := -R_4 \cdot \sin(\gamma) - R_6 \cdot \sin(\zeta) + G_8 + Q_{гр}$$

$$R_{Ay} = 111.332$$

$$R_A := \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} \quad \text{- полная реакция в цилиндрическом шарнире A, кН}$$

$$RA = 214.338$$

$$\alpha := \arccos\left(\frac{RA_x}{RA}\right) \quad \text{- направляющий угол полной реакции в цилиндрическом шарнире A, град.}$$

$$\alpha \cdot \frac{180}{\pi} = 31.294 \quad \text{град.}$$

IV. Рассмотрим задачу, когда система тел «тело – связь – тело» обладает *внутренней связью* в виде гибкого тела, а внешняя связь в виде твёрдого тела представляет собой шероховатую поверхность.

При решении любых задач на равновесие твёрдого тела *при наличии сил трения*, независимо от взаимного расположения приложенных к нему сил, следует руководствоваться рекомендациям п. 2.5.

*Задача 4.* На наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, лежат два груза как система тел силой тяжести  $G_1 = 4$  кН и  $G_2 = 6$  кН, соединённые гибкой нитью (тросом) (рис. 2.99). Здесь гибкая нить является внутренней связью. Коэффициенты трения скольжения грузов о наклонную плоскость соответственно равны:  $f_1 = 0,4$  и  $f_2 = 0,55$ .

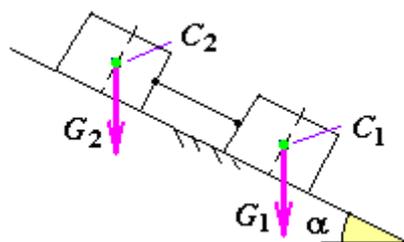


Рис. 2.99. Два взаимосвязанных груза, лежащих на наклонной плоскости.

Такое взаимосвязанное расположение штучных грузов может соответствовать смещению их общего центра тяжести поперёк вагона  $y_C = yM$ , в результате чего рама вагона будет находиться в наклонённом относительно горизонта положении. При этом будут перегружены комплекты пружин под надрессорной балкой, расположенной в проёмах боковой рамы со стороны смещения ЦТ<sup>о</sup><sub>гр</sub>, и разгружены комплекты пружин, расположенные на другой боковой раме (см. п. 2.7, рис. 2.73). Величину  $y_C = yM$  определяют в зависимости от силы тяжести груза и высоты расположения общего центра тяжести вагона с грузом по ТУ<sup>75</sup>.

Найти натяжение троса  $S$  и модули сил трения, действующих на грузы,  $F_{\text{тр}1}$  и  $F_{\text{тр}2}$ . Будут ли грузы в покое или в движении?

Решение задачи общеизвестно<sup>76</sup>.

<sup>75</sup> Приложение 14 к СМГМ «Правила размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах». – М.: Планета, 2005. – 191 с.

<sup>76</sup> Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.

### 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА<sup>77</sup>

#### *Предварительные замечания*

В элементарной статике были выведены необходимые и достаточные условия равновесия абсолютно твёрдого тела. Для всякой иной системы материальных точек эти условия, согласно принципу отвердевания (см. п. 2.2), будут только необходимы, но недостаточны. Определение достаточных условий равновесия механической системы методами элементарной статики требует рассмотрения условий равновесия каждого из твёрдых тел (или точек), входящих в систему (см. п. 2.11). Расчёт при этом существенно усложняется необходимостью вводить большое количество новых неизвестных – реакций внутренних связей (см. п. 2.11, решение задачи 1, условие равновесие сил трубы  $A$ ).

Как отмечали ранее (см. Введение), *аналитической статикой* называют *часть статики*, в основе которой лежит принцип виртуальных (возможных) перемещений, выражающий собой необходимое и достаточное условие равновесия для любой механической системы. При этом условия равновесия определяют методами, принципиально отличными от методов геометрической статики. Основываются эти методы на понятиях о виртуальном (возможном) перемещении системы и о работе силы.

В *аналитической статике* широко применяется *математический анализ*, поэтому *изложение* носит *аналитический характер* (см. п. 2.2).

Изучение аналитической статики начнём с ознакомления основных видов сил.

---

<sup>77</sup> Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1967. – 467 с.

### 3.1. Основные виды сил<sup>78</sup>

1. С и л а т я ж е с т и (или объёмная сила)  $\overline{G}$ . Является постоянной и, согласно закону всемирного тяготения, действует на любое тело, которое находится вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела (груза).  $\overline{G}$  – активная сила, поскольку, начав действовать на покоящееся тело, может привести его в движение (см. пп. 2.1.5).

Силу  $\overline{G}$  условно прикладывают к центру масс материальной системы (груза)  $C$ , и её воздействие испытывает внешняя связь (платформа, полувагон, гибкие упругие и упорные элементы креплений) (см. рис. 2.16, 2.17).

В расчётной модели силу тяжести груза направляют *от объекта*.

Применительно к сортировочным горкам внешними силами, ускоряющими движение вагона, можно считать проекции силы тяжести  $G$  (как движущей силы, ускоряющей движение) на направление скатывания вагона с горки:  $G_x = G \sin \psi_0$  (см. рис. 2.60).

2. С и л а т р е н и я  $\overline{F}_\tau = \overline{F}_{\text{тр}}$  (см. п. 2.4). Касательную составляющую  $\overline{F}_\tau$  реакции связи  $\overline{R}$  называют силой трения  $\overline{F}_{\text{тр}}$  (например, вдоль вагона  $\overline{F}_{\text{тр}x}$  и поперёк вагона  $\overline{F}_{\text{тр}y}$ ). Иначе, *сила сухого трения* (или *сила трения скольжения*). Различают два понятия силы трения – сила трения в покое (сила сцепления) и сила трения в движении (сила трения скольжения).

Вспомним, что силу трения, проявляющуюся между телом в покое и неидеальной (шероховатой) опорной плоскостью как противодействие со стороны этой плоскости возможному смещению тела (т. е. как реакцию связи), называют *силой сцепления* и обозначают  $F_{\text{сц}}$ .

Силу трения, возникающую при движении тела по неидеальной поверхности, а также при скольжении одного тела относительно другого, называют *силой трения скольжения* и обозначают  $F_{\text{тр}}$ .

Силу трения определяют, согласно закону Кулона по (2.64).

Более подробно о силе трения изложено в п. 2.4.

Сила трения – *реактивная* сила и относится к категории *внешних* сил. Для груза, находящегося в вагоне, сила трения является *удерживающей*. В этом смысле в задачах грузовых перевозок она представляет весьма *полезную* силу, удерживающую груз от сдвига (т. е. линейных ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) и угловых ( $\Delta \varphi$ ) пере-

<sup>78</sup> Туранов Х.Т. Теоретическая механика в задачах грузовых перевозок. – Новосибирск: Наука, 2009. – 376 с.

Туранов Х.Т. Взаимодействие открытого подвижного состава и твёрдотельного груза. – М.: ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2011. – 374 с.

мещений). Поэтому грузоотправители обязаны принимать ряд профилактических мер для повышения значения силы трения, например насыпать песок между грузом и полом вагона.

3. С и л а у п р у г о с т и  $\bar{F}_{\text{упр}}$ . Среди различных сил, которые могут действовать на материальную точку, особое место занимают силы упругости (или *восстанавливающие силы*), т. е. силы, стремящиеся вернуть точку в положение равновесия. Такие силы зависят от отклонения точки от положения равновесия и направлены к положению равновесия. Восстанавливающие силы придают движению колебательный характер [Бутенин и др., 1998].

Сила упругости  $\bar{F}_{\text{упр}}$  ( $\bar{F}_{\text{упр},x}$  или  $\bar{F}_{\text{упр},y}$ ) зависит от изменения длины (деформации) упругой связи. Значение силы определяют по закону Гука, согласно которому напряжение (сила, отнесённая к единице площади) пропорционально деформации. Силу упругости упругого элемента постоянного сечения определяют по закону Гука

$$F_{\text{упр},i} = -c_i \Delta l_i, \quad (3.1)$$

где  $\Delta l_i$  – удлинения  $i$ -го упругого элемента по его длине, м;  $c_i$  – коэффициент жёсткости упругого элемента крепления, кН/м, т. е. отношение *жёсткости на растяжение* гибкого упругого элемента  $EA_i$  к его длине  $l_i$ :

$$c_i = \frac{EA_i}{l_i}. \quad (3.2)$$

Здесь  $EA_i$  – физико-геометрическая характеристика (*жёсткость на растяжение*) гибкого упругого элемента креплений, кН;  $E$  – модуль упругости материала гибкого упругого элемента, скрученного из стальной отожжённой проволоки ( $E = 1 \cdot 10^7$  кН/м<sup>2</sup>);  $A_i$  – площадь поперечного сечения гибкого упругого элемента, м<sup>2</sup>:

$$A_i = n_i \frac{\pi \cdot 10^{-6} d_i^2}{4} \quad \text{или} \quad A_i = 0,7854 \cdot 10^{-6} d_i^2 n_i \quad (3.3)$$

с учётом того, что  $n_i$  – число нитей в  $i$ -м упругом гибком элементе, шт.;  $d_i$  – диаметр проволоки гибкого упругого элемента, мм;  $l_i$  – длина гибкого упругого элемента, м (величина вычисляемая).

Выражение (3.1) *относится к классу физических уравнений*, связывающих силу и перемещения.

П р и м е р 1. Определить *обобщённый* и/или *приведённый*, и/или *эквивалентный* и/или *квазиупругий* коэффициент жёсткости двух *параллельно со-*

единенных гибких упругих элементов (пружин) с коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$ , на концы которых подвешен груз силой тяжести  $G$  (рис. 3.1).

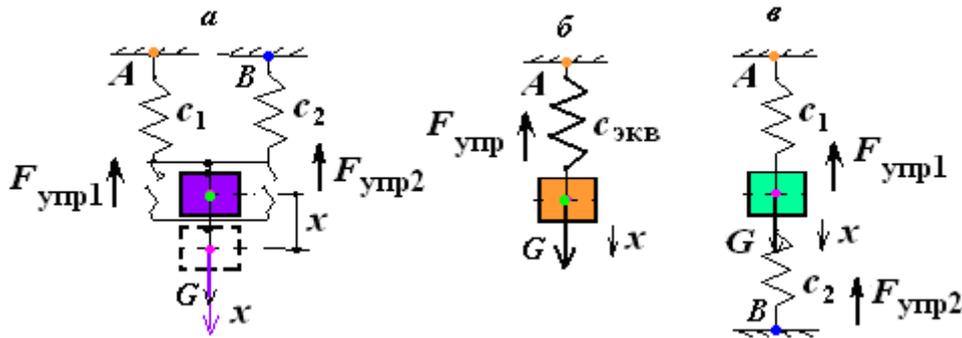


Рис. 3.1. Параллельно соединённые упругие элементы.

**Решение.** Заменяем две параллельные пружины одной эквивалентной.

Применительно к рис. 3.1, а при смещении груза вниз обе пружины растягиваются на  $\delta_{ст} = x$  силой  $G$ , т. е.  $\delta_{ст1} = \delta_{ст2} = \delta_{ст}$ , в пружинах возникают *восстанавливающие силы*  $\bar{F}_{упр1}$  и  $\bar{F}_{упр2}$ , сумма которых равна  $\bar{F}$ , т. е.  $\bar{F} = \bar{F}_{упр1} + \bar{F}_{упр2}$ .

Учтем, что  $F_{упр1} = -c_1 \delta_{ст1}$ ,  $F_{упр2} = -c_2 \delta_{ст2}$  и  $F_{упр} = -c_{экв} \delta_{ст}$ . Разделив последнее равенство почленно на  $\delta_{ст}$  и учитывая, что  $|\delta_{ст}| = |\delta_{ст1}| = |\delta_{ст2}|$ , получим

$$\frac{F}{|\delta_{ст}|} = \frac{F_1}{|\delta_{ст1}|} + \frac{F_2}{|\delta_{ст2}|}.$$

Так как  $\frac{F}{|\delta_{ст}|} = c_{экв}$ ,  $\frac{F_1}{|\delta_{ст1}|} = c_1$ ,  $\frac{F_2}{|\delta_{ст2}|} = c_2$ , то окончательно получим (рис. 3.1, б)

$$c_{экв} = c_1 + c_2. \quad (3.4)$$

Применительно к рис. 3.1, в верхняя пружина растягивается с какой-то силой  $G_1$ , а нижняя сжимается с силой  $G_2$ , причем  $G_1 + G_2 = G$ . Тогда для этих пружин будут

$$\delta_{ст1} = \frac{G_1}{c_1}, \quad \delta_{ст2} = \frac{G_2}{c_2}.$$

Но, очевидно,  $\delta_{ст1} = \delta_{ст2} = \delta_{ст}$  и по свойству пропорций

$$\delta_{ст} = \frac{G_1}{c_1} = \frac{G_2}{c_2} = \frac{G_1 + G_2}{c_1 + c_2} = \frac{G}{c_1 + c_2} = \frac{G}{c_{эКВ}},$$

где  $c_{эКВ}$  – коэффициент жёсткости эквивалентной пружины, заменяющей две данные пружины, определяемый по формуле (3.4).

В частности, при  $c_1 = c_2$  получим

$$c_{эКВ} = 2c. \quad (3.4a)$$

**П р и м е р 2.** Определить *обобщённый* и/или *приведённый*, и/или *эквивалентный* и/или *квазиупругий* коэффициент жёсткости двух *последовательно* соединённых гибких упругих элементов (пружин) с коэффициентами жёсткости  $c_1$  и  $c_2$ , на концы которых подвешен груз силой тяжести  $G$  (рис. 3.2).

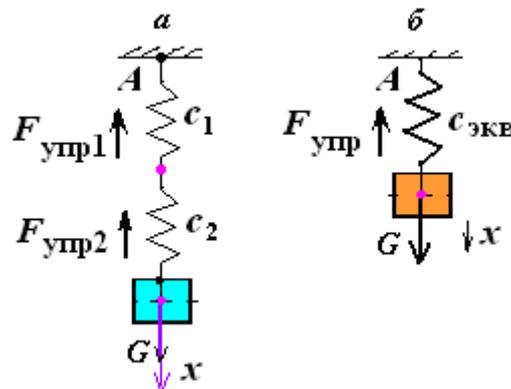


Рис. 3.2. Последовательно соединённые упругие элементы.

**Р е ш е н и е.** Заменяем две последовательные пружины одной эквивалентной пружиной. Каждая из пружин в статическом положении растягивается с силой  $G$ . Следовательно, статическое удлинение пружин будет

$$\delta_{ст1} = \frac{G}{c_1}, \quad \delta_{ст2} = \frac{G}{c_2}.$$

Тогда общее удлинение пружин

$$\delta_{ст1} + \delta_{ст2} = G \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} = \frac{G}{c_{эКВ}},$$

где  $c_{\text{ЭКВ}}$  – коэффициент жёсткости эквивалентной пружины, заменяющей две данные пружины (см. рис. 3.2, б):

$$c_{\text{ЭКВ}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \quad (3.5)$$

В частности, при  $c_1 = c_2$  имеем

$$c_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{2} c. \quad (3.5, \text{а})$$

К выводу формулы (3.1) применительно к гибким упругим средствам креплений. Отметим, что вывод формулы выходит за рамки курса теоретической механики. Вместе с тем ниже приведём такой вывод.

Согласно закону Гука, напряжение (сила, отнесённая к единице площади) пропорционально деформации

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.6)$$

где  $\sigma$  – напряжение,  $\text{кН/м}^2$ ;  $E$  – модуль упругости материала гибкого упругого элемента, скрученного из стальной отожженной проволоки ( $E = 1 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$ );  $\varepsilon$  – относительная деформация.

Умножая обе части (3.6) на площадь поперечного сечения гибкого упругого элемента  $A$ , находим

$$\sigma A = EA\varepsilon.$$

Учитывая, что  $\sigma A = R = F_{\text{упр}}$  – натяжение (усилие) в гибком упругом элементе и  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  – относительное удлинение ( $\Delta l$  – абсолютное удлинение,  $l$  – длина гибкого упругого элемента), последнее соотношение перепишем в виде

$$R = EA \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.7)$$

Имея в виду, что отношение жёсткости на растяжение гибкого упругого элемента к его длине есть не что иное, как коэффициент жёсткости этого элемента  $c$  (см. (3.2)), окончательно получим

$$R = F_{\text{упр}} = c\Delta l, \quad (3.8)$$

что и требовалось доказать.

Анализируя формулу (3.8), можно выдвинуть *гипотезу* о том, что натяжения в гибких упругих средствах креплений можно определить *по критерию* допускаемого значения (*ограничения*) *сдвига груза* как вдоль, так и поперёк вагона. Следует выразить сдвиг груза через удлинение гибкого упругого элемента, используя либо геометрию креплений, либо метод строительной механики.

Сила упругости является *реактивной силой*  $\bar{F}_{\text{упр}}$  и относится к категории *внутренних сил*. В расчётной модели силы упругости  $\bar{F}_{\text{упр}}$  гибких упругих элементов креплений как реакции этих элементов  $\bar{R}_i$  к объекту направляют *от объекта* (груз).

4. С и л а а э р о д и н а м и ч е с к о г о с о п р о т и в л е н и я (или давление воздушного потока, или сопротивление воздуха)  $\bar{F}_{\text{рв}}$ . Сила  $\bar{F}_{\text{рв}}$  относится к классу реактивной силы, зависит от относительной скорости  $\bar{v}_{\text{рв}}$  (см. (1.51)) и действует на объект, движущийся в такой, например, среде, как воздух. Сила аэродинамического сопротивления воздуха – это результат учёта отбрасываемой среды. Как и другая реакция, она препятствует движению, в данном случае относительно скорости движения воздушного потока (встречный ветер)  $\bar{v}_{\text{рв}}$ . Вместе с тем она может быть отнесена к числу активных сил, поскольку, начав действовать на объект, *может* привести его в движение, если направление скорости воздуха (*попутный ветер*) совпадает с направлением скорости вагона [Туранов, Бондаренко, 2006].

Силу  $\bar{F}_{\text{рв}}$  определяют по аэродинамической формуле<sup>79</sup>, кН

$$F_{\text{рв}} = 0,5 \times 10^{-3} c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} A v_{\text{рв}}^2, \quad (3.9)$$

где  $c_{\text{в}}$  – безразмерный экспериментальный коэффициент сопротивления воздуха, зависящий от формы тела и от того, как оно ориентировано при движении (обычно принимают в зависимости от формы поверхности в пределах от 0,55 до 1,2, например для цилиндрических тел, имеющих в сечении круг (труба),  $c_{\text{в}} = 0,6$ ; для плоской поверхности  $c_{\text{в}} = 1,1$ );  $\rho_{\text{в}}$  – средняя плотность воздуха (кг/м<sup>3</sup>) (обычно принимают 1,26–1,29);  $A$  – максимальная площадь сечения плоскости, перпендикулярной воздушному потоку (м<sup>2</sup>) ( $A \in \{A_{\text{т}}, A_{\text{б}}\}$  – площадь либо торцевой, либо боковой поверхности вагона с грузом);  $\bar{v}_{\text{рв}}$  ( $\bar{v}_{\text{рв}} \in \{\bar{v}_{\text{рв.х}}, \bar{v}_{\text{рв.у}}\}$ ) – скорость воздуха относительно вагона с грузом (м/с).

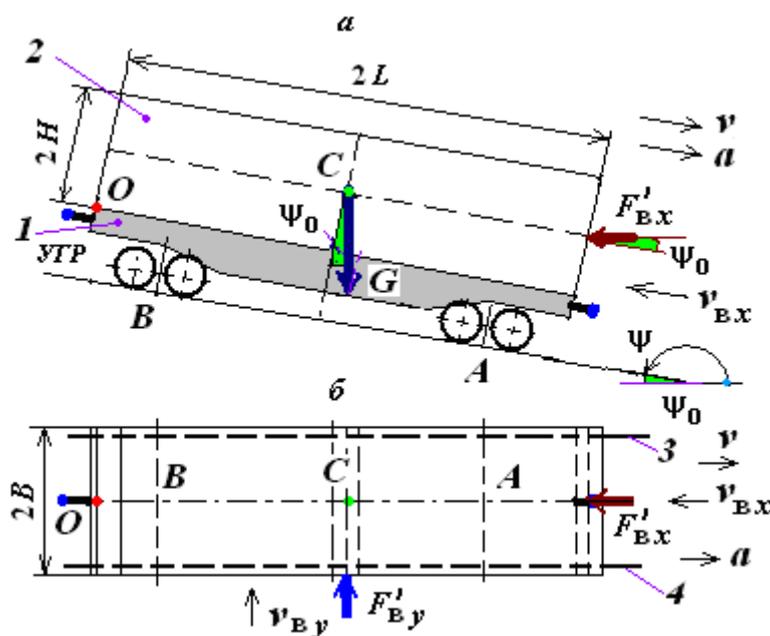
<sup>79</sup> Комаров К.Л., Яшин А.Ф. Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта. – Новосибирск: Наука, 2004. – 296 с.

Если вычисляется сила аэродинамического сопротивления на вагон (отцеп) в поперечном направлении, то  $\bar{v}_{rв} = \bar{v}_{rв.y}$  – поперечная составляющая скорости воздуха относительно вагона, а если в продольном направлении, то  $\bar{v}_{rв} = \bar{v}_{rв.x}$  – продольная составляющая этой скорости.

В (3.9) безразмерный экспериментальный коэффициент сопротивления воздуха  $C_B$  соответствует коэффициенту воздушного сопротивления одиночных вагонов или первого вагона в отцепе<sup>80</sup>.

В расчётной модели силу  $\bar{F}_{rв}$  направляют к **объекту (грузу)** и относят к категории *внешних сил*.

**П р и м е р 3.** Вагон движется поступательно с переносной скоростью  $\bar{v}_e = \bar{v} = \bar{v}_в$  (*отыскиваемая величина*) с сортировочной горки (рис. 3.3) (см. рис. 1.36).



*Рис. 3.3.* Физическая модель скатывания вагона с горки.  
 1 – вагон; 2 – груз; 3 и 4 – наружный и внутренний рельсовые нити;  
 а – вид с боку; б – вид сверху.

На рис. 3.3 обозначено:  $\bar{G}$  – сила тяжести вагона с грузом (или без груза), кН;  $F'_{вx}$  и  $F'_{вy}$  (точнее,  $F'_{rв.x}$  и  $F'_{rв.y}$ ) – проекции силы аэродинамического сопротивления на продольную и поперечную оси вагона, кН;  $2L$ ,  $2B$  и  $2H$  – соответственно длина, ширина и высота груза, м;  $\psi$  (или  $\psi_0$ ) – уклон профиля сортировочной горки относительно горизонтали, рад.

<sup>80</sup> Правила и нормы проектирования сортировочных устройств на железных дорогах колеи 1 520 мм. – М.: ТЕХИНФОРМ, 2003. – 168 с.

Скорость ветра по отношению к вершине горки (земле) (т. е. абсолютная скорость частиц воздуха)  $\bar{v}_{a.в}$  (по данным гл. 5 СНиП «Строительная климатология и геофизика»<sup>81</sup> величина задаваемая) направлена по горизонтали в плоскости  $Oxy$ .

Требуется найти проекции силы аэродинамического сопротивления  $F'_{вх}$  и  $F'_{вy}$  в зависимости от относительной скорости частиц воздуха (скорость ветра)  $\bar{v}_{r.в}$  (относительно подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$ , связанных с вагоном).

В соответствии с (1.54) и (1.55) силу аэродинамического сопротивления воздуха  $\bar{F}_{r.в}$  определяют<sup>82</sup>, кН:

– для встречного ветра на ось  $Ox$  (рис. 3.3, а)

$$F'_{r.вх} = 0,5 \cdot 10^{-3} c_{в\rho_{в}} A_{т} (v_e \cos(\psi_0) - v_{a.в} \cos(\xi))^2; \quad (3.10)$$

– для попутного ветра на ось  $Ox$  (рис. 3.3, б)

$$F'_{r.вх} = 0,5 \cdot 10^{-3} c_{в\rho_{в}} A_{т} (v_{a.в} \cos(\xi) - v_e \cos(\psi_0))^2; \quad (3.11)$$

– для встречного и попутного ветра на ось  $Oy$  (рис. 3.3, а, б)

$$F'_{r.в.у} = 0,5 \cdot 10^{-3} c_{в\rho_{в}} A_{б} (v_{r.в} \sin(\lambda_0))^2. \quad (3.12)$$

В последних формулах  $A_{т}$  – площадь торцевой поверхности вагона с грузом, м<sup>2</sup>:  $A_{т} = 2H \cdot 2B$  (где  $2B$  и  $2H$  – ширина и высота наветренных поверхностей вагона с грузом, м);  $A_{б}$  – площадь боковой поверхности вагона с грузом:  $A_{б} = 2L \cdot 2H$  (где  $2L$  – длина боковых наветренных поверхностей вагона с грузом, м), м<sup>2</sup>.

В (3.10) – (3.12) коэффициент воздушного сопротивления одиночных вагонов или первого вагона в отцепе  $c_{в}$ , как и в [Железнодорожные ..., 2002; Правила и нормы..., 2003], можно принять по табл. 7.3 в зависимости от рода вагона и направления угла  $\xi$  между результирующим вектором  $\bar{v}_{a.в}$  (абсолютная скорость частиц воздуха (скорость ветра)) и продольной осью  $Ox$ , рад.

<sup>81</sup> Строительные нормы и правила Российской Федерации. Строительная климатология СНиП 23-01-99. – М.: Госстрой России, ГУП ЦПП, 2003.

<sup>82</sup> Туранов Х.Т. Воздействие силы аэродинамического сопротивления на вагон при его скатывании с горки / Х.Т. Туранов [и др.]. // Материалы V-ой научн. – практич. конф. «Проблемы безопасности на транспорте». – Гомель: БелГУТ, 2010. – С. 86–90.

Отметим, что проекции силы аэродинамического сопротивления  $F'_{гв}$  можно отнести к ускоряющим и замедляющим движение вагона при скатывании с горки. При этом проекции силы аэродинамического сопротивления  $F'_{гвх}$  на направление скатывания, как силы сопротивления при встречном ветре (см. (3.10)), замедляют движение вагона при скатывании с горки, а при попутном ветре (см. (3.11)), как движущие силы, ускоряют движение вагона. Проекция силы аэродинамического сопротивления  $F'_{гвy}$  (см. (3.12)), независимо от того, встречный ветер или попутный, замедляют движение вагона.

### 3.2. Работа силы

Для характеристики действия, оказываемого силой на материальную точку (тело) при некотором его перемещении, вводится понятие *о работе* (англ. work). Работа это динамическое понятие, поскольку определяется работа силы.

Сначала введём понятие об *элементарной работе*.

#### Элементарная работа силы

Обозначим *элементарную работу* через  $\Delta W$ . Пусть точка  $M$  движется по дуге  $M_0M_1$  кривой  $L$ . Разбиваем дугу на элементарные участки  $\Delta s$ , считая их прямыми (рис. 3.4).

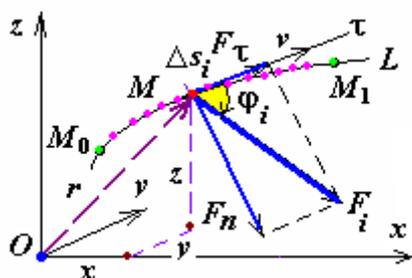


Рис. 3.4. Движение точки по кривой

*Элементарной работой*  $\Delta W$  силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $M$ , называют скалярную величину, равная произведению проекции  $\vec{F}_\tau$  силы  $\vec{F}$  на касательную  $M\tau$  к траектории точки  $M$ , направленную в сторону перемещения этой точки (или проекции  $\vec{F}$  на направление скорости  $\vec{v}$  точки  $M$ ), на модуль элементарного перемещения  $|\Delta \vec{s}|$  точки  $M$ :

$$\Delta W = \bar{F}_\tau \cdot |\Delta \bar{s}|. \quad (3.13)$$

Такое определение<sup>83</sup> работы силы соответствует представлению о работе, как о мере того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки  $|\bar{v}|$ . Если разложить силу  $\bar{F}$  на составляющие  $\bar{F}_\tau$  (*оговоримся*, что эта не сила трения, как в прежних обозначениях, а составляющая активной силы) и  $\bar{F}_n$ , то изменять модуль скорости  $|\bar{v}|$  (см. п. 1.7, (1.20)) будет  $\bar{F}_\tau$ , так как  $\bar{F}_\tau = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}$  (составляющая  $\bar{F}_n$  изменяет или направление вектора  $\bar{v}$  (см. п. 1.7, (1.21)), или при несвободном движении – силу давления на связь).

Учитывая, что

$$F_\tau = F \cos \varphi, \quad (3.14)$$

а также то, что в ней  $\varphi$  – угол между проекцией  $\bar{F}_\tau$  силы  $\bar{F}$  и касательной  $M\tau$ , из равенства (3.13) получим

$$\Delta W = F |\Delta \bar{s}| \cos \varphi. \quad (3.15)$$

Этот же результат можно получить из (3.14), учитывая, что *скалярное произведение двух векторов есть величина скалярная* [Бронштейн, Семендяев, 1980].

Если в равенстве (3.15) угол  $\varphi$  острый, то работа положительная. В частности, при  $\varphi = 0$  элементарная работа

$$\Delta W = F |\Delta \bar{s}|. \quad (3.16)$$

Если в равенстве (3.15) угол  $\varphi$  тупой, то работа отрицательная. В частности, при  $\varphi = 180^\circ$  элементарная работа

$$\Delta W = -F |\Delta \bar{s}|. \quad (3.16a)$$

Если угол  $\varphi = 90^\circ$ , т. е. *сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.*

---

<sup>83</sup> *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

**Знак работы** имеет *следующий смысл*: работа отрицательна, когда направление составляющей  $\overline{F}_\tau$  противоположно направлению движения (сила *замедляет* движение); работа положительна, когда составляющая  $\overline{F}_\tau$  направлена в сторону движения (сила *ускоряет* движение).

Единица измерения работы джоуль (Дж) или ньютон–метр (Н·м) (1 Дж = 1 Н·м).

### *Работа силы в зависимости от длины пути*

Известно, что на материальную точку могут действовать как постоянные ( $\overline{F} = \overline{\text{const}}$ ), так и переменные силы ( $\overline{F} = \overline{\text{var}}$ ).

1. Пусть на материальную точку действует постоянная сила ( $\overline{F} = \overline{\text{const}}$ ) (рис. 3.5).

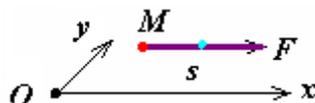


Рис. 3.5. Действие на точку постоянной силы.

*Если точка приложения  $M$  постоянной силы  $\overline{F}$  движется по прямой, совпадающей с линией действия силы, то работа этой силы  $W$  равна произведению её модуля на длину пути  $s$ , пройденного точкой приложения силы, взятому с определённым знаком (плюс или минус).*

Математически работа выражается равенством

$$W(F) = \pm F s . \quad (3.17)$$

Если материальная точка весом  $\overline{G}$  движется по *негладкой* (шероховатой) горизонтальной поверхности, то *работа силы трения* на пути  $s$  равна

$$W(F_{\text{тр}}) = -f G s , \quad (3.18)$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения.

**Пример 1.** Пусть вагон скатывается с горки при условии качения колёс со скольжением под воздействием проекции силы тяжести  $G_x$  (см. пп. 2.4.2, задача 1, рис. 2.60).

Требуется найти работу сил трения скольжения колёс о рельсовые нити.

Работа сил трения скольжения колёс о рельсовые нити  $W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}})$  (см. (2.79))

$$W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}}) = -f_{\text{ск}} G \cos \psi_0 s . \quad (3.18a)$$

В (3.18a) обозначения те же, что в (2.80).

2. Пусть направление действующей на точку  $M$  силы  $\bar{F}$  образует с направлением перемещения этой точки угол  $\varphi$  в плоскости  $Oxy$  (рис. 3.6). Тогда работа этой силы на пути  $s$  равна (см. (3.15))

$$W = Fs \cos \varphi . \quad (3.19)$$

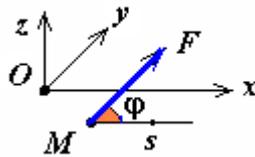


Рис. 3.6. Действие силы под углом.

3. Пусть по некоторой кривой  $L$  движется точка  $M$  под действием переменной силы  $\bar{F}_i$ , которая меняется как по величине ( $\bar{F}_i = \text{var}$ ), так и по направлению ( $\varphi_i = \text{var}$ ) (рис. 3.7).

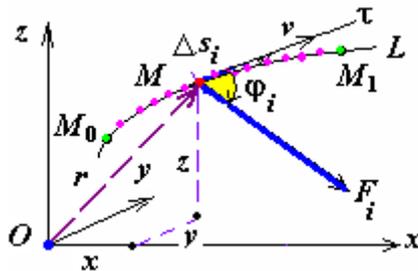


Рис. 3.7. Движение точки по кривой.

Для вычисления работы силы  $\bar{F}_i$  на конечном перемещении  $s$  (в пределах дуги  $M_0M_1$  кривой  $L$ ), разобьём длину дуги  $M_0M_1$  на весьма большое количество  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) очень малых (элементарных) промежутков  $\Delta \bar{s}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Тогда элементарная работа равна (см. (3.15))

$$\Delta W_i = |\bar{F}_i| \cos \varphi_i |\Delta \bar{s}_i| .$$

Работа на конечном перемещении  $\Delta s$  будет равна пределу суммы элементарных работ, когда количество промежутков  $n$  стремится к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ), а сами промежутки стремятся к нулю ( $\Delta s_i \rightarrow 0$ ):

$$W = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F_i \cos \varphi_i \Delta s_i$$

или

$$W = \int_L F_i \cos \varphi_i ds_i.$$

Здесь буква  $L$ , стоящая под знаком интеграла, указывает на то, что интегрирование совершается вдоль кривой  $L$ , а  $ds_i$  – элементарное перемещение.

Последнее выражение можно представить в виде

$$W(F_i) = \int_{(M_0 M_1)} F_i \cos \varphi_i ds_i. \quad (3.20)$$

Буквы  $M_0$  и  $M_1$ , стоящие вместо пределов интегрирования, заключены в скобки в знак того, что это не числа, а обозначения концов линии, по которой берется криволинейный интеграл.

В частном случае, если точка приложения  $M$  переменной силы  $\vec{F}_i$  движется по прямой (рис. 3.8), то вместо выражения (3.20) будем иметь обычный интеграл

$$W(F_i) = \int_0^s F_i \cos \varphi_i ds_i. \quad (3.21)$$

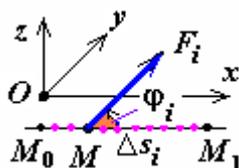


Рис. 3.8. Действие переменной силы под углом.

### **Работа момента трения качения в зависимости от угла поворота колёс**

Напомним, что в пп. 2.4.2 за упрощённую расчётную модель скатывания вагона с горки, учитывающую трение качения без скольжения (чистое качение), принята модель, показанной на рис. 2.60.

Отметим, что условие чистого качения сплошного однородного кругового цилиндра по наклонной плоскости на основе теоремы о движении центра масс и/или о движении системы вокруг центра масс приведено в работе [Тарг, 1998] (см. задачу 151, 154):

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e; \quad J_C \bar{\varepsilon} = \sum_{k=1}^n m_C (\bar{F}_k^e),$$

где  $M$  и  $J_C$  – масса системы и момент инерции тела относительно центра масс;  $\bar{a}_C$  и  $\bar{\varepsilon}$  – вектор линейного и углового ускорения центра масс;  $\bar{F}_k^e$  – вектор внешних сил.

Проекции последних выражений на координатные оси представляют собой дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела.

В пп. 2.4.2 принято, что на участках горки, где отсутствуют случайные (или так называемые «эпизодические») сопротивления колёса с радиусом  $r_k$  катятся без проскальзывания с коэффициентом трения качения колеса по рельсу  $f_k$ , внутреннее кольца подшипника качения с радиусом  $r_{вн}$  вращается с коэффициентом трения качения  $f_{к0}$ .

Отмечено, что при воздействии вертикальных составляющих силы тяжести вагона с грузом  $G_z = G \cos \psi_0$  и силы аэродинамического сопротивления  $F'_{вх} \sin \psi_0$  момент трения качения колеса по рельсу  $M_{трA} \in \{M_{трA1}, M_{трA2}, M_{трA'1}, M_{трA'2}\}$  и  $M_{трB} \in \{M_{трB1}, M_{трB2}, M_{трB'1}, M_{трB'2}\}$ , найденный в виде (2.75), с учётом (2.79) запишется как

$$M_{тр} = f_k (G \cos \psi_0 + F'_{вх} \sin \psi_0), \quad (3.22)$$

где  $f_k$  – коэффициент трения качения колеса по рельсу (обычно принимают  $5 \cdot 10^{-6}$ ), м.

В пп. 2.4.2 также учтено, что на механическую систему действуют внутренние силы в виде моментов трения качения  $M_{трпA}$  ( $M_{трпA} \in \{M_{трпA1}, M_{трпA2}, M_{трпA'1}, M_{трпA'2}\}$ ) и  $M_{трпB}$  ( $M_{трпB} \in \{M_{трпB1}, M_{трпB2}, M_{трпB'1}, M_{трпB'2}\}$ ) в подшипниках буксовых узлов передней  $A$  и задней  $B$  тележек вагона, причём  $M_{трп} = M_{трпA} + M_{трпB}$  (см. рис. 2.61).

В точках соприкосновения с телами качения внутреннего диаметра внутреннего кольца подшипника появляются внутренние силы  $N_{пк}$  – нормальная реакция подшипника, и в той же точке на тела качения от внутреннего кольца подшипника действует такая же по модулю, но противоположно направленная реакция  $N_{п}$  (т. е. нормальная реакция, приходящаяся на один подшипник качения).

Момент трения качения в подшипниках буксовых узлов передней и задней тележек вагона (см. (2.81))

$$M_{\text{трп}} = n_{\text{б}} f_{\text{к0}} N_{\text{п}}, \quad (3.23)$$

где  $n_{\text{б}} = 8$  – количество буксового узла в тележках, шт.;  $f_{\text{к0}}$  – коэффициент трения тел качения по кольцам подшипника (обычно принимают  $1 \cdot 10^{-6}$ ), м;  $N_{\text{п}}$  – нормальная реакция, приходящаяся на один подшипник качения, или сила, действующая на наиболее нагруженное тело качения и определяемая по (2.81а) в виде

$$N_{\text{п}} = \frac{k}{n_{\text{тк}}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{вх}} \sin \psi_0), \quad (3.24)$$

где  $n_{\text{тк}}$  – общее количество тел качения, воспринимающих нагрузку в каждом подшипнике, шт.;  $k$  – постоянный коэффициент, принимаемый в зависимости от рядности и типа подшипников качения (для однорядных подшипников  $k = 4$ , для роликоподшипников с  $n_{\text{п}} = 10 \div 20$  среднее значение  $k \approx 4$ . Учитывая влияние зазора в подшипниках качения, для расчёта принимают  $k = 4,6$  [Решетов, 1987]).

Подставляя (3.24) в (3.23), найдём момент трения качения  $M_{\text{трп}}$  в подшипниках качения во всех буксовых узлах:

$$M_{\text{трп}} = f_{\text{к0}} n_{\text{б}} \frac{k}{n_{\text{тк}}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{вх}} \sin \psi_0). \quad (3.25)$$

Работа момента трения качения колеса по рельсу  $M_{\text{тр}}$  (см. (3.22))

$$W(M_{\text{тр}}) = - \int_0^{\varphi} M_{\text{тр}} d\varphi,$$

или, учитывая, что колесо катится по рельсу без скольжения, то для малых углов  $\varphi$  элементарная длина дуги  $d\varphi$  колеса равна элементарной длине отрезка  $ds$ , т. е.  $ds = \varphi r_{\text{к}}$  ( $r_{\text{к}}$  – радиус колеса)<sup>84</sup>, запишем

$$W(M_{\text{тр}}) = - \int_0^s M_{\text{тр}} \frac{ds}{r_{\text{к}}}. \quad (3.26)$$

<sup>84</sup> Яблонский Н.В., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. учебник для тех. вузов. Ч. 1 и 2.— СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 768 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980. – 976 с.

Подставляя (3.22) в последнее выражение и произведя интегрирование, получим

$$W(M_{\text{тр}}) = -n_k \frac{f_k}{r_k} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{вх}} \sin \psi_0) s. \quad (3.27)$$

Так как величина  $f_k/r_k$  мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебречь [Тарг, 1998].

Работа момента трения качения  $M_{\text{трп}}$  в подшипниках качения во всех буксовых узлах

$$W(M_{\text{трп}}) = -\int_0^\varphi M_{\text{трп}} d\varphi = -\int_0^s M_{\text{трп}} \frac{ds}{r_{\text{вн}}},$$

где  $r_{\text{вн}}$  – внутренний радиус внутреннего кольца подшипника качения ( у грузовых вагонов 65 мм).

После подстановки (3.25) в последнее выражение получим

$$W(M_{\text{трп}}) = -k \frac{n_\delta}{n_{\text{тк}}} \frac{f_{k0}}{r_{\text{вн}}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) s. \quad (3.28)$$

Так как величина  $f_{k0}/r_{\text{вн}}$  мала, то им можно пренебречь.

### *Работа силы в зависимости от времени*

Пусть точка  $M$  из положения  $M_0$  при  $t = t_0$  в положения  $M_1$  при  $t = t_1$  перемещается со скоростью  $\bar{v}$  за время  $t$ , пройдя путь  $s$  (рис. 3.9).

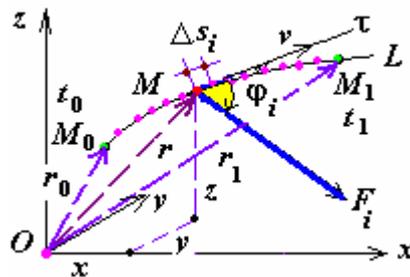


Рис. 3.9. Движение точки по кривой.

Так как  $s = \bar{v}t$  и  $ds = \bar{v}dt$ , то подынтегральное выражение криволинейного интеграла (3.20) можно записать в виде

$$F_i \cos \varphi_i ds_i = F_i v_i \cos \varphi_i dt_i$$

или

$$F_i \cos \varphi_i ds_i = (\bar{F}_i \cdot \bar{v}_i) dt_i,$$

где  $\bar{F}_i \cdot \bar{v}_i$  – скалярное произведение двух векторов [Бронштейн, Семендяев, 1980].

Следовательно, подынтегральное выражение криволинейного интеграла (3.20) можно представить как

$$W_{(M_0M_1)} = \int_0^t (\bar{F} \cdot \bar{v}) dt. \quad (3.29)$$

Имея в виду, что  $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$  с учётом того, что  $d\bar{r}$  – дифференциал радиус-вектора точки  $M$ , подынтегральное выражение в (3.29) примет вид

$$dW = (\bar{F} \cdot \bar{v}) dt = (\bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}) dt$$

или, сокращая на  $dt$ , имеем

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \quad (3.29a)$$

где  $d\bar{r}$  – элементарное перемещение.

Элементарной работой силы  $dW$  называют скалярное произведение вектора силы  $\bar{F}$  на дифференциал радиус-вектора  $d\bar{r}$  её точки приложения.

В связи с этим, подынтегральное выражение в (3.29) можно записать в виде:

$$W_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (\bar{F} \cdot d\bar{r}). \quad (3.30)$$

Проекции силы  $\bar{F}$  и дифференциала радиус-вектора  $d\bar{r}$  на координатные оси связаны с вектором силы и радиус-вектором соотношениями (см. (1.2)) [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980]

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k};$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

или

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k},$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы  $\bar{F}$  на координатные оси;  $x, y, z$  – проекции радиус-вектора  $\bar{r}$  на координатные оси (координаты точки), причём  $dx = \dot{x}dt$ ,  $dy = \dot{y}dt$  и  $dz = \dot{z}dt$  являются проекциями дифференциала  $d\bar{r}$ .

Известно, что скалярное произведение векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  выражается через их проекции на координатные оси в виде суммы произведений [Бухгольц, 1967; Бронштейн, Семендяев, 1980].

Проекции на координатные оси скалярного произведения векторов  $\bar{F} \cdot d\bar{r}$  подынтегрального выражения криволинейного интеграла (3.30) можно представить в виде

$$W_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.31)$$

Следовательно, работа силы на любом перемещении  $M_0M_1$  равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

Криволинейный интеграл (3.31) представляет собой аналитическое выражение работы переменной силы  $\bar{F}_i$  ( $\bar{F}_i = \overline{\text{var}}$ ).

В частном случае, если на материальную точку действует постоянная сила  $\bar{F}$  ( $\bar{F} = \overline{\text{const}}$ ) (см. рис. 3.5), то работа вычисляется по (3.19).

Для получения криволинейного интеграла (3.31) кривая задаётся в параметрическом виде (см. (1.3) и (1.4)):  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  и  $z = z(t)$ , где  $t$  – параметр времени. Тогда  $dx = \dot{x}dt$ ,  $dy = \dot{y}dt$ ,  $dz = \dot{z}dt$ .

Допустим, что в точке  $M_0$  –  $t = t_0$  и в точке  $M_1$   $t = t_1$ . Следовательно, криволинейный интеграл (3.31) можно представить обычным определённым интегралом

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt. \quad (3.32)$$

### Работа равнодействующей силы

Докажем, что работа равнодействующей силы  $\bar{R}$  равна работе составляющих сил.

Пусть материальная точка  $M$  перемещается по дуге  $M_0M_1$  кривой  $L$  под действием сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  (рис. 3.10).

По определению равнодействующей (см. (2.9)) можно записать

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k .$$

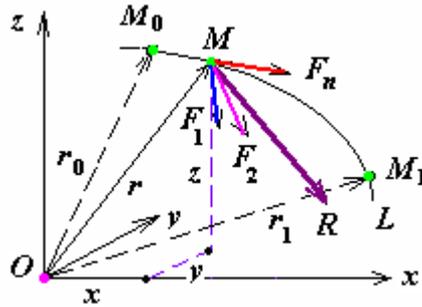


Рис. 3.10. Схема приложения систем сил к точке.

Умножим это равенство скалярно справа на  $d\bar{r}$  и проинтегрируем полученное равенство в пределах от  $M_0$  до  $M_1$ :

$$W(\bar{R}) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (\bar{R} \cdot d\bar{r}) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (\bar{F}_1 \cdot d\bar{r}) + \int_{(M_0)}^{(M_1)} (\bar{F}_2 \cdot d\bar{r}) + \int_{(M_0)}^{(M_1)} (\bar{F}_3 \cdot d\bar{r}) + \dots + \int_{(M_0)}^{(M_1)} (\bar{F}_n \cdot d\bar{r})$$

или

$$W_{(M_0M_1)} = W_{(M_0M_1)1} + W_{(M_0M_1)2} + W_{(M_0M_1)3} + \dots + W_{(M_0M_1)n}, \quad (3.32a)$$

что и требовалось доказать.

### Примеры вычисления работы

1. Р а б о т а с и л ы т я ж е с т и. Пусть точка  $M$ , на которую действует сила тяжести  $\bar{G}$ , перемещается из положения  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  в положение  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . Выберем оси координат так, чтобы ось  $Oz$  была направлена вверх (рис. 3.11).

Тогда  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $F_z = -G$ . Подставляя эти значения в (3.31) и учитывая, что переменной интегрирования является  $z$ , получим

$$W_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_z dz = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-G) dz = -G \int_{z_0}^{z_1} dz = G(z_0 - z_1). \quad (3.33)$$

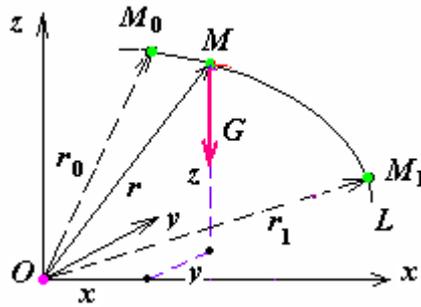


Рис. 3.11. Движение точки под действием сил тяжести.

Если точка  $M_0$  выше точки  $M_1$ , то  $z_0 - z_1 = h$ , где  $h$  – величина вертикального перемещения точки; если же точка  $M_0$  ниже точки  $M_1$ , то  $z_0 - z_1 = -(z_1 - z_0) = -h$ .

Окончательно получаем

$$W_{(M_0M_1)} = \pm Gh. \quad (3.34)$$

Следовательно, *работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению силы на вертикальное перемещение точки её приложения*. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка её приложения. Силы, обладающие таким свойством, называют *потенциальными*.

2. Р а б о т а с и л ы у п р у г о с т и. Работа упругой силы ( $F_x = -cx$ ) на прямолинейном перемещении по линии действия силы из точки  $M_1$  с абсциссой  $x_1$  в точку  $M_2$  с абсциссой  $x_2$  (рис. 3.12) определяется по (3.31):

$$W_{(M_1M_2)} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x dx = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (-cx) dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

или

$$W_{(M_1M_2)} = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2). \quad (3.35)$$

Работа упругой силы отрицательна, если точка движется в сторону возрастания модуля упругой силы, положительна, если точка движется в сторону убывания модуля упругой силы.

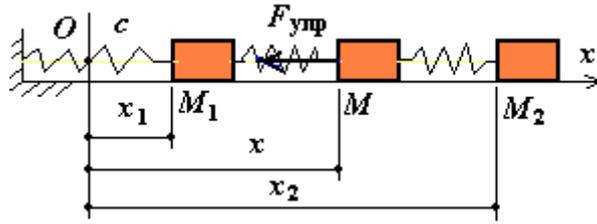


Рис. 3.12. К определению упругой силы.

Работа упругой силы  $\vec{F} = -c\vec{r}$  на конечном перемещении по криволинейной траектории пропорциональна разности квадратов конечного и начального радиус-векторов точки (рис. 3.13):

$$W_{(M_0M_1)} = -\frac{c}{2}(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2), \quad (3.35a)$$

т. е. подобно работе силы тяжести, работа упругой силы зависит от начального и конечного положений точки и не зависит от формы кривой, по которой перемещается материальная точка. Следовательно, упругая сила также является *потенциальной*.

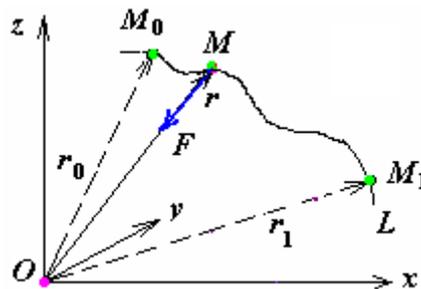


Рис. 3.13. Действие упругой силы по криволинейной траектории.

**Пример 1.** Груз  $A$  с силой тяжести  $\vec{G}$  удерживается в равновесии на наклонной плоскости, расположенной под углом  $\alpha$  к горизонту, посредством гибких упругих элементов креплений (пружины). Ось этих элементов параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости (рис. 3.14).

Вследствие полученного толчка груз переместился вниз вдоль наклонной плоскости на  $l$ . Вычислить сумму работ сил, приложенных к грузу  $A$  на этом перемещении, если коэффициент упругости (жёсткости) пружины –  $c$ .

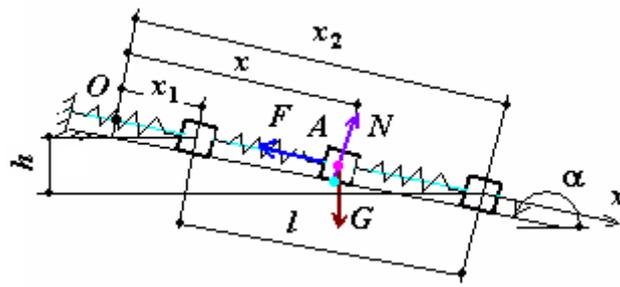


Рис. 3.14. Действие силы упругости на наклонной плоскости.

Силой трения скольжения груза  $A$  о наклонную плоскость можно пренебречь.

Решение. К грузу приложены следующие силы:  $\bar{G}$  – сила тяжести груза,  $\bar{F}_{\text{упр}}$  – упругая сила пружины,  $\bar{N}$  – нормальная реакция наклонной плоскости.

Направим параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости оси  $x$ , выбрав начало отсчёта  $O$  в конце недеформированной пружины.

В положении равновесия груза пружина растянута на  $\Delta_{\text{ст}}$ . Записав сумму проекций всех сил, приложенных к грузу, на ось  $x$ , находим  $G \sin \alpha - F_{\text{упр}} = 0$ .

Так как величина упругой силы при растяжении пружины на  $\Delta_{\text{ст}}$  равна  $F_{\text{упр}} = c \Delta_{\text{ст}}$ , то

$$G \sin \alpha - c \Delta_{\text{ст}} = 0,$$

т. е.

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{G \sin \alpha}{c}. \quad (3.36)$$

Сумма работ сил имеет вид

$$\sum W_k = W(\bar{G}) + W(\bar{F}_{\text{упр}}) + W(\bar{N}). \quad (3.37)$$

Работа силы тяжести положительна, так как груз  $A$  скатывается вниз по наклонной плоскости (например, по профилю сортировочной горки, согласно рис. 2.59):

$$W(\bar{G}) = Gh.$$

Учитывая, что  $h = l \sin(\pi - \alpha) = l \sin \alpha$ , находим

$$W(\bar{G}) = Gl \sin \alpha$$

или с учётом (3.36) имеем

$$W(\bar{G}) = c\Delta_{\text{ст}}l. \quad (3.38)$$

Работа упругой силы пружины  $W(\bar{F}_{\text{упр}})$  определяется формулой (3.35).

Учитывая, что  $x_1 = \Delta_{\text{ст}}$ , а  $x_2 = x_1 + l = \Delta_{\text{ст}} + l$ , находим

$$W(\bar{F}_{\text{упр}}) = -\frac{cl}{2}(2\Delta_{\text{ст}} + l). \quad (3.39)$$

Работа нормальной составляющей  $\bar{N}$  реакции связи равна нулю, так как эта сила перпендикулярна перемещению груза, направленному вдоль наклонной плоскости

$$W(\bar{N}) = 0. \quad (3.40)$$

Подставив выражения работ из (3.38), (3.39) и (3.40) в (3.37), получим искомую работу сил, приложенных к грузу

$$\sum W_k = -\frac{cl^2}{2}. \quad (3.41)$$

3. Р а б о т а с и л ы т р е н и я. Рассмотрим точку, движущуюся по какой-нибудь неидеальной (шероховатой) поверхности (рис. 3.15) или кривой.

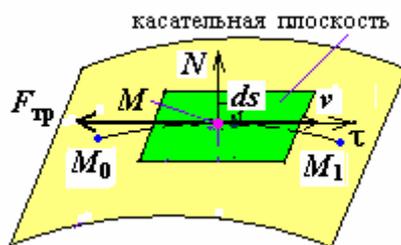


Рис. 3.15. Схема приложение сил к реальной поверхности.

Действующая на точку сила трения  $F_{\tau} = F_{\text{тр}}$  равна по модулю  $fN$ , где  $f$  – коэффициент трения скольжения, а  $\bar{N}$  – нормальная составляющая реакции поверхности (см. (2.63)). Направлена сила трения противоположно перемещению точки.

Следовательно,  $F_{\text{тр}} = -fN$  и по (3.31)

$$W_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_x dx = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\text{тр}} ds = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} fN ds . \quad (3.42)$$

Если величина силы трения *постоянна* (см. (3.17)), то  $W_{(M_0M_1)} = -F_{\text{тр}}s$ , где  $s$  – длина дуги кривой  $M_0M_1$ , по которой перемещается точка.

Таким образом, работа силы трения при скольжении всегда отрицательна. Величина этой работы зависит от длины дуги  $M_0M_1$ . Следовательно, сила трения является силой *непотенциальной*.

В этом случае скатыванию вагона с горки (см. пример 1 настоящего параграфа) противодействуют силы трения скольжения колёс о рельсовые нити в виде  $F_{\text{тр}A}$  ( $F_{\text{тр}A} \in \{F_{\text{тр}A1}, F_{\text{тр}A2}, F_{\text{тр}A'1}, F_{\text{тр}A'2}\}$ ) и  $F_{\text{тр}B}$  ( $F_{\text{тр}B} \in \{F_{\text{тр}B1}, F_{\text{тр}B2}, F_{\text{тр}B'1}, F_{\text{тр}B'2}\}$ ).

Тогда работу силы трения при скольжении колёс в сочетании с качением (см. (3.27) и (3.28)) по рельсовым нитям находят следующим образом:

$$W(M_{\text{тр}AB}) = -(F_{\text{тр}A} + F_{\text{тр}B})s ,$$

или

$$W(F_{\text{тр}сAB}) = -f_{\text{тр}с} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) s , \quad (3.43)$$

где  $f_{\text{тр}с}$  – коэффициент трения скольжения колёс о рельсовые нити («металл по металлу» –  $f_{\text{тр}} = 0,15 \div 0,25$ ).

4. Р а б о т а с и л ы аэродинамического сопротивления (в е т е р)  $\bar{F}_{\text{рв}}$ . Эта сила зависит от относительной скорости частиц воздуха  $\bar{V}_{\text{рв}}$  и действует на тело, движущееся в такой, например, среде, как воздух (см. (3.9)).

Считая силу  $\bar{F}_{\text{рв}}$  постоянной по направлению и величине, по (3.9) находим

$$W(F_{\text{рв}}) = \pm F_{\text{рв}} s , \quad (3.44)$$

где знак «плюс» соответствует случаю, когда сила аэродинамического сопротивления направлена в сторону перемещения точки (*попутный ветер*), а знак «минус» – если направление ветра противоположно направлению движения подвижного состава (*встречный ветер*).

В пп. 2.4.2 особо отмечено, что если активная сила  $\bar{F}$ , действующая на вагон при его скатывании с горки, больше предельной силы трения  $F_{\text{пр}} = F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}} N$ , т. е.  $\bar{F} \geq \bar{F}_{\text{пр}}$ , то одновременно с качением возможно

также *скольжение*. При этом отношение  $\frac{f}{r_{\kappa}}$  будет меньше коэффициента трения скольжения  $f$ , т. е.  $f < \frac{f_{\kappa}}{r_{\kappa}}$ . Такой случай возможен при воздействии на вагон попутного ветра  $F'_{r_{\text{вх}}}$  и силы аэродинамического сопротивления с боковой стороны вагона  $F'_{r_{\text{ву}}}$  (которая стремится прижать гребни наружных колёс колёсных пар тележек к упорным рельсам), когда активная сила  $\bar{F}$  представляет собой сумму сил  $G_x = G \sin \psi$ ,  $F'_{r_{\text{вх}}}$ ,  $F'_{r_{\text{ву}}}$  и соблюдается условие  $\bar{F} \geq \bar{F}_{\text{пр}}$ . Тогда расчётная модель имеет вид, показанный на рис. 2.61.

**Пример 1.** Пусть вагон скатывается с горки при условии качения колёс со скольжением под воздействием силы аэродинамического сопротивления  $F'_{\text{вх}}$  и  $F'_{\text{ву}}$ . При этом неважно, что ветер встречный или попутный (см. пп. 2.4.2, задача 1, рис. 2.52).

Требуется найти работу сил трения скольжения колёс о рельсовые нити.

Работа сил трения скольжения колёс о рельсовые нити  $W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}})$  (см. (2.80а) с учётом (2.79)) будет

$$W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}}) = -(f_{\text{ск}} F'_{\text{вх}} \sin \psi_0 + f_{\text{ск}0} F'_{r_{\text{ву}}})s. \quad (3.45)$$

В (3.45) обозначения те же, что в (2.79) и (2.80а).

Работа сил трения скольжения колёс о рельсовые нити  $W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}})$  при одновременном воздействии активных сил  $\bar{F}$  в виде  $G_x = G \sin \psi$  (см. (3.18а)),  $F'_{r_{\text{вх}}}$  и  $F'_{r_{\text{ву}}}$  (см. (3.44)) примет вид

$$W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}}) = -(f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{вх}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск}0} F'_{r_{\text{ву}}})s. \quad (3.46)$$

### 3.3. Статика системы материальных точек

#### *Принцип возможных перемещений*

##### *Предварительные замечания*

Вывод условий равновесия свободной и несвободной материальной точки, а также условий равновесия твёрдого тела, которые получены в разделе геометрической статики (см. п. 2.3), основывался на рассмотрении систем сил и чисто геометрических соотношений между ними.

Для несвободного твёрдого тела при наложенных идеальных связях ранее удавалось специальным выбором осей координат приводить количество условий равновесия к количеству реакции связей (см. п. 2.11), *исключая* из соотношения равновесия *реакции связей*.

Особо отметим, что в задачах грузовых перевозок вовсе отсутствуют идеальные связи (т. е. связи без трения), хотя была решена задача на равновесие систем тел (см. п. 2.11). Поэтому в задачах грузовых перевозок весьма ценным остаётся принцип Д'Аламбера, с применением которого решаются задачи при наличии реакции связей (см. пп. 4.6.3).

Для механических систем точек можно установить общий принцип, благодаря которому *реакции идеальных связей* будут полностью *исключаться* при установлении условий равновесия систем тел. Этот принцип называют *принципом виртуальных (возможных) перемещений*.

Частная формулировка этого принципа, исходящего из рассмотрения *работы активных сил*, была известна ещё Стевину (1548 – 1620), который применял его для изучения равновесия блоков. Галилей обобщил приём Стевина на случай равновесия тел на наклонной плоскости и широко пользовался этим методом для решения практических задач. Однако общая формулировка принципа виртуальных (возможных) перемещений была дана И. Бернулли (1717). Окончательно этот принцип сформулировал Ж.Л. Лагранж в книге «Аналитическая механика» в 1759 г. (издана в 1772 г.). Наиболее важные результаты исследований механического движения и равновесия материальных тел он получил на основе общего метода, называемого *принципом виртуальных (возможных) перемещений*.

В предисловии к своей книге Лагранж пишет: «В этой работе отсутствуют какие бы то **ни было** чертежи. Излагаемые мной методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений. Они требуют только алгебраических операций, подчинённых планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что *механика становится новой отраслью анализа*, и будут мне благодарны за то, что этим путём я расширил область его применения».

Лагранж показал весьма большую общность принципа виртуальных (возможных) перемещений.

Существенное расширение принципа возможных перемещений выполнил знаменитый русский математик и механик М.В. Остроградский (1801 – 1861). Он обобщил этот принцип на случай, когда на систему наложены *нестационарные и освобождающие* связи. Пользуясь данным принципом, Остроградский математически строго установил дифференциальные уравнения движения механических систем как для случая геометрически освобождающих связей, так и для случая кинематических связей линейного вида. Общую теорию движения механических систем Остроградский дополнил общей теорией удара (теорией импульсных

сил) и получил ряд классических результатов по аналитической механике (интегрированию уравнений механики).

### *Обобщенные координаты*

Количество независимых координат, определяющих положение системы, называют *количеством степеней свободы* системы.

Если система состоит из  $n$  точек и на систему наложены  $m$  связей, описываемых уравнениями (см. уравнение (2.12))

$$f_q(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (q = \overline{1, m}), \quad (3.47)$$

то количество степеней свободы системы в пространстве равно  $k = 3n - m$ .

Независимые параметры, определяющие положение системы, называют *обобщёнными координатами*.

Наименьшее количество параметров, необходимое для задания возможного положения системы, называют количеством её независимых *обобщённых координат*.

Очевидно, количество обобщённых координат равно количеству степеней свободы.

Если система имеет  $k$  степеней свободы, то её положение будет определено *обобщёнными координатами*:  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ . Например, для груза, размещённого на вагоне без дополнительных (среднетоннажный контейнер) (см. рис. 2.16, а) и с дополнительными (штучный груз) креплениями в виде гибких упругих элементов (см. рис. 2.16, б; 2.17) за *обобщённую координату* можно принять перемещение (сдвиг) груза вдоль  $\Delta x$  и поперёк  $\Delta y$  вагона, а также возможный его поворот  $\Delta \varphi$  вокруг вертикальной оси. Поэтому груз, размещённый на вагоне, имеет три степени свободы.

Декартовы координаты могут быть выражены как функции обобщённых координат:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, \dots, q_n) \\ y_k &= y_k(q_1, \dots, q_n) \\ z_k &= z_k(q_1, \dots, q_n) \end{aligned} \right\} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3.48)$$

При движении системы её обобщённые координаты будут с течением времени непрерывно изменяться. Закон этого движения определяют уравнениями

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad q_n = f_n(t). \quad (3.49)$$

Уравнения (3.48) представляют собой *кинематические уравнения движения системы в обобщённых координатах*.

Производные от обобщённых координат по времени *называют обобщёнными скоростями системы*. Эти скорости обозначаются символами

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{n1},$$

где

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} \quad \text{и т.д.} \quad (3.50)$$

Размерность обобщенной координаты зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если  $q$  – линейная величина, то  $\dot{q}$  – линейная скорость, а если  $q$  – угловая величина, то  $\dot{q}$  – угловая скорость.

### *Понятие о возможном перемещении*

Бесконечно малые перемещения механической системы из возможного положения, которые допускают наложенные связи (например, средства креплений груза), *называют возможными перемещениями*. Возможное перемещение является *воображаемым перемещением* в данный момент (т. е. при фиксированном значении аргумента – времени  $t$ )<sup>85</sup>.

*Возможные перемещения не зависят от действия приложенных к системе сил, а целиком и полностью определяются лишь характером наложенных связей.*

Перемещение, фактически совершаемое системой под действием сил, называют *действительным перемещением*. В отличие от возможного, действительное перемещение точки происходит в определённом направлении под действием системы приложенных сил при непрерывном изменении аргумента – времени. Поэтому *возможное перемещение точки является вариацией*, а действительное – *дифференциалом*.

В случае *стационарной связи действительное элементарное перемещение точки является одним из числа возможных перемещений этой точки*, а для нестационарных связей действительное перемещение уже не является частным случаем возможного.

Если  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки, то  $\delta\vec{r}$  – возможное перемещение точки, а  $d\vec{r}$  – действительное перемещение точки. В разложении по ортам осей декартовых координат возможное перемещение имеет вид  $\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$ , где

<sup>85</sup> Более подробно см. книгу: Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2 (специальные главы механики). – М.: Наука, 1966. – 663 с.

$\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  – проекции возможного перемещения  $\delta \bar{r}$  точки на соответствующие оси декартовых координат. Действительное перемещение выражается  $d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ , где  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  – проекции действительного перемещения  $d\bar{r}$  точки на эти оси, причём  $dx = \dot{x}dt$ ,  $dy = \dot{y}dt$  и  $dz = \dot{z}dt$ .

Иначе, *возможное перемещение*  $\delta \bar{r}$  можно записать в виде  $\delta \bar{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ , где  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  – *вариации* (бесконечно малые или элементарные изменения) декартовых *координат*, а *действительное перемещение*  $d\bar{r} = d\bar{r}(dx, dy, dz)$ , где  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  – *дифференциалы перемещений*.

Пусть точка  $M$  с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  некоторой кривой  $M_0M_1$  вынуждена двигаться по поверхности. Действительное перемещение  $d\bar{r}$  этой точки  $M(x, y, z)$  расположено по касательной плоскости к поверхности. Орт нормали поверхности  $\bar{n}$  проходит через точку  $M$  перпендикулярно к касательной поверхности (рис. 3.16).

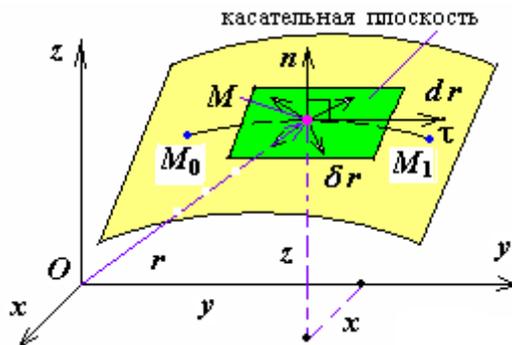


Рис. 3.16. Перемещение точки по касательной плоскости.

Пусть уравнение кривой  $M_0M_1$  в параметрической форме будет иметь вид (см. (1.3)):  $x = f(t)$ ,  $y = f(t)$  и  $z = f(t)$ .

Очевидно, *вариации*  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  *декартовых координат*  $x$ ,  $y$  и  $z$  (см. (3.48)) *могут быть выражены через вариации обобщённых координат* по аналогичным формулам полного дифференциала  $dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt$ :

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i; \quad \delta y_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i; \quad \delta z_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (k = \overline{1, n}, i = \overline{1, n}), \quad (3.51)$$

где  $q_k$  – *обобщённая координата*.

Пусть при движении несвободной системы на её точки  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) действует равнодействующая реакции связей  $\bar{R}_i$  (см. п. 2.1.4), причём  $\bar{R}_i = \bar{F}_{\tau i} + \bar{N}_i$ , где  $\bar{F}_{\tau i}$  и  $\bar{N}_i$  – касательные и нормальные составляющие реакции внешних связей. Вспомним, что касательную составляющую реакции связи  $\bar{F}_{\tau}$  называют силой трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  (см. п. 3.1). Далее предположим, что связь идеальная (или *совершенная*), а поверхность гладкая и потому  $\bar{F}_{\tau} = 0$ , а  $\bar{N}_i \neq 0$ .

Связи, наложенные на механические системы, называют идеальными, если сумма работы  $\delta A$  их реакции на любом возможном перемещении точек системы равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0. \quad (3.52)$$

где  $\delta \bar{r}_i$  – возможное перемещение  $i$ -й материальной точки системы.

Примерами идеальных связей являются идеально гладкие плоскости и поверхности (см. рис. 2.19) (в отличие от *негладкой*), абсолютно жёсткий стержень (см. рис. 2.7, рис. 2.23), абсолютно твёрдое тело (например, шарик шарикоподшипника) и т. д. Для жёсткого стержня (как абсолютно твёрдого тела) нулю равны суммы сил реакций  $\bar{N}_i$ , с которыми одни точки стержня (тела) действуют на другие (см. (3.40)).

Покажем, что все встречающиеся в механике *связи* в виде гладкой поверхности являются идеальными связями.

1. Поверхность гладкая неподвижная (рис. 3.17). Если точка  $M$  вынуждена двигаться по поверхности, то реакция  $N$  поверхности направлена по нормали  $n$ , а возможные перемещения лежат в касательной плоскости, т. е.  $\delta r \perp n$ .

Следовательно, работа нормальной реакции

$$W_N = (\bar{N} \cdot \delta \bar{r}) = 0. \quad (3.52a)$$

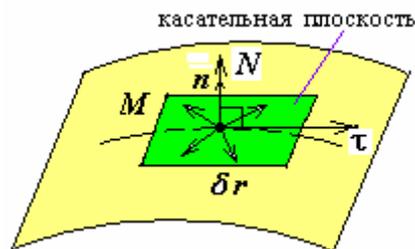


Рис. 3.17. Перемещение точки по гладкой неподвижной поверхности.

2. Два или более неподвижных шарниров (рис. 3.18). Если тело закреплено в точках  $A$  и  $B$ , то они не имеют возможных перемещений:  $\delta \vec{r}_A = \delta \vec{r}_B = 0$ .

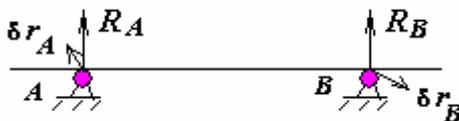


Рис. 3.18. Балка, закреплённая на двух неподвижных шарнирах.

Негладкая плоскость (см. рис. 2.21, 3.15) в отличие от *гладкой* представленной на рис. 2.19, является связью, работа которой не равна нулю. Поэтому на рис. 3.15 возможное перемещение точки  $\delta \vec{r}$  направлено по касательной к поверхности, а на рис. 2.21 – вдоль плоскости. При вычислении суммы работ составляющих сил реакции связей  $\vec{F}_\tau$  и  $\vec{N}$  на возможном перемещении  $\delta \vec{r}$  работа силы  $\vec{N}$  оказывается равной нулю (см. (3.40)), в то время как работа силы трения скольжения  $\vec{F}_\tau$  не равна нулю (см. (3.42)). Следовательно, условие (3.52), определяющее идеальность связи, не выполняется.

В действительности не существуют ни абсолютно гладких, ни абсолютно твёрдых тел и нерастяжимых нитей. В реальных условиях работа  $W(F_{\text{тр}})$  реакций неидеальных связей ( $\vec{F}_\tau = \vec{F}_{\text{тр}}$ ) не равна нулю, т. е.  $W(F_{\text{тр}}) \neq 0$  (см. (3.18), (3.42)). Часто эта работа бывает малой и в некотором приближении может считаться равной нулю. Этот факт и приводит к возможности применения в прикладной механике *важнейшего класса связей*, рассматриваемых в теоретической механике как *идеальные* (или совершенные).

### Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Системы с большим количеством сочленённых (связанных между собой) тел удобнее решать, используя *принцип возможных перемещений*:

*для равновесия механической системы, подчинённой идеальным, односторонним и стационарным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных сил на любых возможных перемещениях точек системы равнялась нулю:*

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = 0. \quad (3.53)$$

В соответствии с этим *основным отличием* принципа Лагранжа (принцип возможных перемещений) для механической системы *от условия равновесия*

материальных точек геометрической (элементарной) статики Л. Пуансо (где должно соблюдаться **равенство нулю систем сил, действующих на объект**) является **равенство нулю суммы работ активных** (или задаваемых) **сил на любых возможных перемещениях точек системы.**

Таким образом, условия равновесия механической системы основывается на использовании **кинематического представления** о перемещениях системы и **динамического понятия** работы сил.

Особо отметим, что под **системой сил** в аналитической статике понимают заданные силы (сила тяжести, сила аэродинамического сопротивления) и реакции связей (сила трения, учитывающая воздействие вагона на груз) и силы упругости (гибких элементов креплений груза) механической системы.

Докажем **необходимость** этого принципа.

Если система с реальной связью находится *в равновесии*, то равнодействующие заданных сил  $\bar{F}_i$  и реакций связи  $\bar{R}_i$  (при  $\bar{F}_\tau = 0$  и  $\bar{N} \neq 0$ ), приложенных к каждой точке  $M$ , уравниваются (рис. 3.19):

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.54)$$

Уравнение (3.54) выражает, как известно, условие равновесия сил геометрической (элементарной) статики.

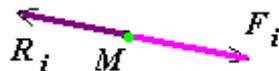


Рис. 3.19. Схема приложения сил к реальной связи.

Умножив последнее уравнение скалярно справа на возможное перемещение точки  $\delta\bar{r}_i$  и просуммировав, получают

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i) = 0. \quad (3.55)$$

С учётом определения *идеальных связей* (см. уравнение (3.52) или (3.52а)) последнее уравнение переписывают в виде

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i) = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n W_{(\bar{F}_i)} = \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i) = 0. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.56) *выражает условие равновесия механической системы.*

Отметим, что в п. 3.5 (см. уравнение (3.85)) и п. 5.3.3 (см. уравнения (5.48)) будет показано, что коэффициенты при возможном перемещении точки  $\delta\bar{r}_i$  называются обобщёнными силами. Здесь уместно напомнить, что возможные перемещения точки  $\delta\bar{r}_i$  по величине малые и потому не равны нулю, т. е.  $\delta\bar{r}_i \neq 0$ .

Докажем достаточность принципа возможных перемещений.

Допустим, условие (3.56) выполнено, но система в равновесии не находится. Тогда каждая точка системы, если в начальный момент система находилась в покое, под действием неуравновешенных заданных сил и реакций связей придёт в движение и совершит за малый промежуток времени некоторое малое действительное перемещение в направлении действия равнодействующей сил  $\bar{F}_i$  и  $\bar{R}_i$ .

Поскольку малые действительные перемещения в случае стационарных связей являются возможными перемещениями, примем их за возможные перемещения.

Так как перемещение каждой точки из состояния покоя произойдёт в направлении равнодействующей  $\bar{R}_i^*$  сил  $\bar{F}_i$  и  $\bar{R}_i$ , т. е.  $\bar{R}_i^* = \bar{F}_i + \bar{R}_i$  (при  $\bar{F}_\tau = 0$  и  $\bar{N} \neq 0$ ), то совершаемая работа будет положительной:

$$W_{(R_i)} = (\bar{R}_i^* \cdot \delta\bar{r}_i) > 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Отсюда

$$(\bar{R}_i^* \cdot \delta\bar{r}_i) > 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n ((\bar{F}_i + \bar{R}_i) \cdot \delta\bar{r}_i) > 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i) > 0,$$

или с учётом уравнения (3.52) или (3.52а) окончательно получим (см. (3.56)):

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i) > 0. \quad (3.57)$$

Условие (3.57) противоречит условию (3.56).

Следовательно, при условии (3.56) движение системы материальных точек невозможно.

Уравнение (3.53) и/или (3.56) в проекциях на оси декартовых координат для идеальных связей может быть записано так:

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0, \quad (3.58)$$

или

$$\sum_{k=1}^n W_{(\bar{F}_k)} = \sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0, \quad (3.58a)$$

где  $\delta x_k$ ,  $\delta y_k$  и  $\delta z_k$ , как и ранее, – **вариации** (элементарные изменения) декартовых **координат**.

### *Эффективность применения принципа Лагранжа в механике*

Достоинством принципа возможных перемещений (принципа Лагранжа) является отсутствие в его формулировке сил реакций идеальных связей<sup>86</sup> (см. уравнение (3.53) и/или (3.56)).

Принцип Лагранжа широко применяется в механике. На основе этого принципа достаточно просто решать задачи *о равновесии твёрдого тела* и *систем твёрдых тел*, а также *определять зависимости между величинами* активных (задаваемых) сил. Особенно эффективно применение принципа Лагранжа при решении задач о равновесии систем твёрдых тел (см. рис. 2.85, рис. 3.24).

Исходя из принципа Лагранжа **можно вывести** уравнения равновесия твёрдого тела при наличии как плоской, так и пространственной системы сил.

Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, т. е. имеются негладкие опорные плоскости (*в виде пола вагона*) и поверхности, то к активным силам **следует добавить силы трения** и, следовательно, приравнять нулю сумму работ не только активных сил, но и сил трения на любых возможных перемещениях точек системы. Составленное уравнение определяет зависимость между активными силами и силами трения.

Если требуется определить какую-либо силу реакции идеальной связи, для которой  $\bar{R} \cdot \delta \bar{r} = 0$ , то следует, применяя принцип освобождаемости тел от связей (см. аксиому связей статики), мысленно отбросить соответствующую связь и заменить её искомой силой реакции. При составлении уравнения равновесия надо к числу активных сил **добавить** эту силу реакции связи (т. е. условно **относя реакции связи к активным** силам). Такой метод решения задач о равновесии систем твёрдых тел чрезвычайно эффективен, поскольку искомая сила реакции связи непосредственно определяется из составленного уравнения равновесия (см. решение задачи 1, рис. 3.21; задачи 3, рис. 3.24). При применении обычных приёмов геометрической статики приходится составлять систему уравнений равновесия и определять искомую силу реакции связи в результате решения этой системы уравнений.

При применении принципа Лагранжа количество получающихся уравнений равно количеству степеней свободы системы, которое всегда намного меньше количества уравнений равновесия, которые составляются для сочле-

<sup>86</sup> Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2 (специальные главы механики). – М.: Наука, 1966. – 663 с.

нённых систем. Если тело несвободное, то его можно сделать свободным полностью или частично, удалив одну или несколько связей и заменив их соответствующими реакциями согласно принципу освобождаемости тел от связей (см. аксиому связей статики).

### Способы нахождения возможных перемещений<sup>87</sup>

Первый способ – *геометрический*. Используется понятие малости перемещений, при которых, согласно кинематическому представлению о перемещениях твёрдого тела<sup>88</sup>, перемещение точки твёрдого тела  $\delta s$ , совершающего поворот на некоторый малый угол  $\delta\varphi$ , считается происходящим по касательной к окружности с центром  $O$ , совпадающим с центром поворота или мгновенного центра скоростей (МЦС), т. е. перпендикулярно радиусу вращения  $OA$  (рис. 3.20).

Модуль возможного перемещения точки  $A$  равен

$$\delta s_A = OA\delta\varphi. \quad (3.59)$$

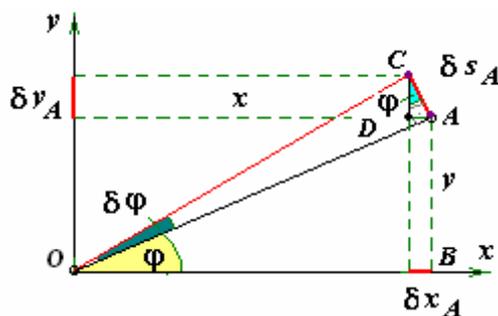


Рис. 3.20. К геометрическому способу нахождения малых перемещений.

Проекции возможного перемещения на координатные оси определяются из подобия прямоугольных треугольников  $OAB$  и  $CAD$  и стандартных определений тригонометрических функций. Знак присваивается в соответствии с обычным правилом для проекций векторов на оси:

$$\begin{aligned} \delta x_A &= -\delta s_A \sin(\varphi) = -OA \sin(\varphi)\delta\varphi, \\ \delta y_A &= \delta s_A \cos(\varphi) = OA \cos(\varphi)\delta\varphi. \end{aligned} \quad (3.60)$$

<sup>87</sup> Способ изложен канд. техн. наук, доцентом *А.Н. Бондаренко* (см.: *Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н.* Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.).

<sup>88</sup> *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. Т. II. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

Второй способ – *аналитический*. Составляются аналитические выражения для координаты рассматриваемой точки и вычисляется вариация координат для вариации угла поворота. Правила вычисления вариации совпадают с правилами вычисления производной, точнее, дифференциала функции:

$$\begin{aligned} x_A &= OA \cos(\varphi), & y_A &= OA \sin(\varphi); \\ \delta x_A &= -OA \sin(\varphi) \delta\varphi, & \delta y_A &= OA \cos(\varphi) \delta\varphi. \end{aligned} \quad (3.61)$$

При использовании аналитического способа определения знак вариации получается автоматически.

### *Решения задач на применение принципа возможных перемещений*

*Задача 1.* Двухопорная балка (например, рама вагона) пролётом  $l = 9,72$  м нагружена силами  $F_1 = 340$ ,  $F_2 = 120$  (соответствует силе тяжести рамы вагона) и  $F_3 = 340$  кН (рис. 3.21). Размер  $a$ , показанный на рисунке, равен 1. Сила  $F_2$  соответствует силе тяжести тары вагона (см. пп. 2.1, задача 3).

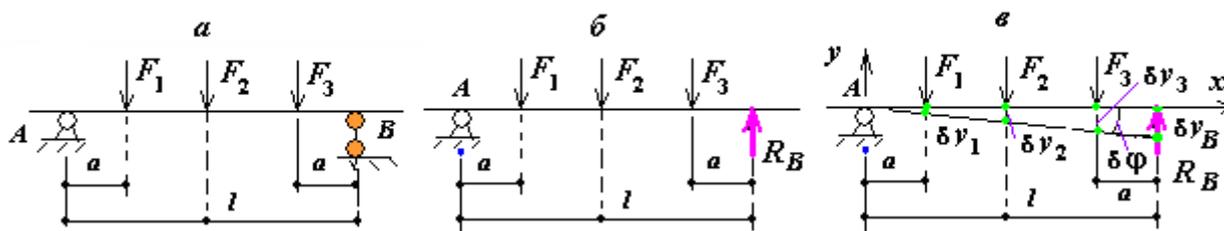


Рис. 3.21. Двухопорная балка.

Требуется найти реакцию  $\bar{R}_B$  опоры  $B$  балки.

*Методы решения.* Для решения примера воспользуемся принципами освобождения от связей геометрической статики, кинематическим представлением о перемещениях твёрдого тела и динамическим понятием работы сил.

*Решение.* Опоры  $A$  и  $B$  представляют собой неподвижный шарнир по отношению к действующим силам. Поэтому здесь нет возможных перемещений. Применяя принцип освобождения от связей (аксиома 5 геометрической статики), освобождаем балку от правой опоры  $B$  (от связи), заменяем её влияние реакцией связи  $\bar{R}_B$  и включаем в число действующих на балку активных сил. При этом балка приобретёт одну степень свободы – вращение около оставшейся опоры  $A$ . Возможное перемещение точки приложения сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  на балке обозначим через  $\delta y_1$ ,  $\delta y_2$  и  $\delta y_3$ , а перемещение точки приложения реакции  $R_B$  через  $\delta y_B$ .

Тогда элементарная работа (как динамическое понятие), согласно принципу возможных перемещений (см. уравнение (3.53)), запишется в виде

$$-F_1\delta y_1 - F_2\delta y_2 - F_3\delta y_3 + R_B\delta y_B = 0.$$

Принимая угол  $\delta\varphi$  бесконечно малого поворота балки от действующих сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  вокруг неподвижной опоры  $A$  за обобщённую координату и учитывая, что возможные перемещения будут  $\delta y_1 = a\delta\varphi$ ,  $\delta y_2 = 0,5l\delta\varphi$ ,  $\delta y_3 = (l - a)\delta\varphi$  и  $\delta y_B = l\delta\varphi$ , последнее уравнение перепишем следующим образом:

$$-F_1a\delta\varphi - F_2\cdot 0,5l\delta\varphi - F_3(l - a)\delta\varphi + R_B l\delta\varphi = 0.$$

Обобщённая координата  $\delta\varphi$  есть малая произвольная величина, **не равная нулю**, и полученное уравнение возможных работ на эту величину можно поделить (см. п. 3.5, (3.86)). В результате имеем уравнение, эквивалентное уравнению равновесия систем сил, используемому в геометрической статике, а именно, сумма моментов сил, приложенных к свободной системе, вокруг точки  $A$  (теорема Вариньона) (см. п. 2.7, уравнение (2.106)):

$$-F_1a - F_2\cdot 0,5l - F_3(l - a) + R_B l = 0.$$

Отметим, что в п. 3.5 (см. уравнение (3.85)) и п. 5.3.3 (см. уравнение (5.47)) будет показано, что полученное уравнение называют *обобщённой силой*.

Из последнего уравнения моментов сил находим конечную аналитическую формулу для определения реакции в опоре  $B$ :

$$R_B = \frac{F_1a + F_2\cdot 0,5l + F_3(l - a)}{l}.$$

*Численный расчёт.* Подставляя в последнюю формулу исходные данные, запишем:

$$R_B = \frac{340\cdot 1 + 120\cdot 0,5\cdot 9,72 + 340(9,72 - 1)}{9,72} = 400 \text{ кН}.$$

Аналогичным способом, отбрасывая левую опору  $A$ , составим уравнения для определения реакции  $\bar{R}_A$ .

В полученных таким образом равенствах заметно уравнения моментов сил относительно центров  $A$  и  $B$ . В геометрической статике эти уравнения были выведены на основании теоремы Вариньона, не заключающей в себе кинематического понятия поворота тела.

*Замечание.* Полученное на основе принципа возможных перемещений решение для этой простой задачи ничем не лучше непосредственного использования уравнений равновесия из раздела геометрической статике курса теоретической механики. Однако при рассмотрении сложных (составных) систем (сочленённых балок и других элементов конструкции) *количество совместно решаемых уравнений равновесия*, например для плоской системы сил, пропорционально утроенному количеству сочленённых тел.

При использовании принципа возможных перемещений для определения любой неизвестной реакции можно составить *одно уравнение возможных работ*, отбрасывая только ту связь, в которой ищется реакция и задавая произвольное возможное перемещение по направлению искомой реакции.

*Задача 2<sup>89</sup>.* Для груза, размещённого и закреплённого гибкими упругими элементами креплений на вагоне, *аналитически описать* его возможные перемещения вдоль и поперёк вагона, а также вокруг вертикальной оси (рис. 3.22). *Иначе*, поскольку для стационарных геометрических связей действительные перемещения являются одними из возможных, требуется найти действительные перемещения груза в виде  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta\varphi$ .

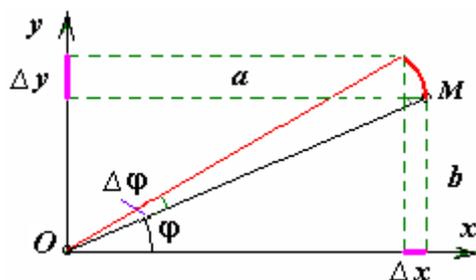


Рис. 3.22. К геометрическому способу нахождения малых перемещений.

1. Будем использовать *геометрический* способ определения малых (возможных или действительных) перемещений. Проекции перемещения на две взаимноперпендикулярные оси плана опорной плоскости груза  $j$ -й точки закрепления гибких упругих элементов креплений (растяжки, обвязки), расположенных с тыльной стороны груза, к его монтажным петлям  $M_j$  имеют вид

<sup>89</sup> Задача решена канд. техн. наук, доцентом *А.Н. Бондаренко* (см.: *Туранов Х. Т., Бондаренко А.Н.* Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.).

$$\begin{aligned}\Delta x_j &= \Delta x - b \sin \Delta\varphi + (a_j \cos \Delta\varphi - a_j); \\ \Delta y_j &= \Delta y - (b \cos \Delta\varphi - b) + a_j \sin \Delta\varphi.\end{aligned}\quad (3.62)$$

Используя малость углов поворота, можно записать (на рис. 3.22 показаны малые, но возможные перемещения груза):

$$\begin{aligned}\Delta x_j &= \Delta x - \sqrt{b^2 + a_j^2} \Delta\varphi \sin \varphi_j = \Delta x - b \Delta\varphi; \\ \Delta y_j &= \Delta y + \sqrt{b^2 + a_j^2} \Delta\varphi \cos \varphi_j = \Delta y + a_j \Delta\varphi,\end{aligned}\quad (3.63)$$

где  $b$  – ширина груза;  $\Delta\varphi$  – малый угол поворота груза относительно вертикальной оси, проходящей через нижний левый угол плана опорной плоскости груза;  $a_j$  – расстояние точки крепления от левой стороны опорной плоскости груза.

Тогда проекции удлинения растяжек, расположенных с тыльной стороны груза, на горизонтальную плоскость имеют вид

$$\Delta l_j = \Delta x_j \cos \beta_j - \Delta y_j \sin \beta_j, \quad (3.64)$$

где  $\beta_j$  – угол между проекцией  $j$ -й растяжки на горизонтальную плоскость и продольной осью  $x$  (см. рис. 2.47).

Проекции точки закрепления гибких упругих элементов креплений (растяжки, обвязки), расположенных со стороны действия на груз внешних сил, к монтажным петлям груза  $M_i$  запишутся так:

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \Delta x + (a_i \cos \Delta\varphi - a_i); \\ \Delta y_i &= \Delta y + a_i \sin \Delta\varphi.\end{aligned}\quad (3.65)$$

**Учитывая, что  $\Delta\varphi$  величина малого порядка, можно принять, что  $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$  и  $\cos \Delta\varphi \approx 1$ .**

**В связи с этим полученные выражения можно представить в виде**

$$\Delta x_j = \Delta x - b \Delta\varphi; \quad \Delta y_j = \Delta y + a_j \Delta\varphi;$$

$$\Delta x_i = \Delta x; \quad \Delta y_i = \Delta y + a_i \Delta\varphi.$$

При этом проекции удлинения растяжек, расположенных с тыльной стороны груза, на горизонтальную плоскость будут следующими:

$$\Delta l_j = (\Delta x - b \Delta\varphi) \cos \beta_j - (\Delta y + a_j \Delta\varphi) \sin \beta_j. \quad (3.66)$$

При выборе начала координат в левом нижнем углу проекции плана опорной плоскости расстояния  $a_i$  и  $b$  можно рассматривать как координаты точек крепления. Тогда формула проекции удлинения гибких элементов креплений (растяжек), расположенных *со стороны действия* на груз внешних сил, на горизонтальную плоскость принимает вид:

$$\Delta l_i = \Delta x_i \cos \beta_i + \Delta y \sin \beta_i,$$

или

$$\Delta l_i = \Delta x_i \cos \beta_i + (\Delta y + a_i \Delta \varphi) \sin \beta_i. \quad (3.66a)$$

Учитывая, что растяжки наклонены относительно горизонтальной плоскости на угол  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$ , горизонтальные проекции растяжек, *согласно положениям теоретической механики*, спроецируем на их направления, в результате чего получим искомые удлинения растяжек:

$$\Delta l_i \cos \alpha_i = \frac{(R_i - R_{0i})l_i}{EA_i}; \quad (3.67)$$

$$\Delta l_j \cos \alpha_j = \frac{(R_j - R_{0j})l_j}{EA_j}, \quad (3.67a)$$

где  $R_i$  и  $R_j$  – натяжения (усилие) в гибких элементах креплений, кН;  $R_{0i}$  и  $R_{0j}$  – натяжения предварительной закрутки проволоки элементов креплений, которые определяются по результатам экспериментальных исследований, кН (обычно принимают  $\sim 20$  кН);  $EA_i$  и  $EA_j$  – жёсткости гибких элементов креплений на растяжение, кН;  $A_i$  и  $A_j$  – площади поперечного сечения проволоки элементов креплений (см. (3.3)).

Подставляя выражение (3.66) и (3.66a) в (3.67) и (3.67a), находим деформационные соотношения (т. е. соотношения между деформациями) при  $i = j$  (см. рис. 3.22):

$$(\Delta x_j - b \Delta \varphi) \cos \alpha_j \cos \beta_j + (\Delta y + a_j \Delta \varphi) \cos \alpha_j \sin \beta_j = \frac{(R_j - R_{0j})l_j}{EA_j};$$

$$\Delta x_i \cos \alpha_i \cos \beta_i + (\Delta y + a_i \Delta \varphi) \cos \alpha_i \sin \beta_i = \frac{(R_i - R_{0i})l_i}{EA_i}.$$

Обобщая полученные результаты на все гибкие элементы креплений груза и учитывая, что (см. пп. 2.3.2, (2.60) и (2.60a))

$$\cos \alpha_i \cos \beta_i = \frac{\Delta x_i}{l_i}; \quad \cos \alpha_i \sin \beta_i = \frac{\Delta y_i}{l_i},$$

окончательно можно записать

$$\left[ (\Delta x - \sum_{i=1}^n y_i \Delta \varphi) \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{l_i} + (\Delta y + \sum_{i=1}^n x_i \Delta \varphi) \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{l_i} \right] = - \sum_{i=1}^n (R_i - R_{0i}) \frac{l_i}{EA_i}. \quad (3.68)$$

Знак минус в физических соотношениях учитывает укорочение длины упругой связи при положительных значениях перемещений точки крепления растяжки.

В выражениях (3.68) приняты следующие обозначения (см. рис. 3.22):

$x_i$  и  $y_i$  – координаты монтажных петель груза по оси  $Ox$  и  $Oy$ , соответствующих  $a_i$  и  $b_i$ ;  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_i$  – проекции гибких элементов на координатные оси  $Ox$  и  $Oy$ ;  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta \varphi$  – *отыскиваемые* значения малых перемещений груза по оси  $Ox$ ,  $Oy$ , м, и его поворота вокруг оси  $O$ , рад;  $l_i$  – длина гибкого элемента крепления;  $EA$  – физико-геометрическая характеристика (*жѐсткость на растяжение*) гибкого упругого элемента крепления (см. (3.2)).

2. Для определения возможных перемещений можно использовать *аналитический* метод.

Требуется определить возможные перемещения точки крепления (грузовой и/или монтажной петли) гибкого упругого элемента (растяжка) при повороте груза относительно полюса  $O$  (рис. 3.23). Применительно к грузу координатная ось размещена на его поверхности, а оси  $x$  и  $y$  совпадают с продольной и поперечной осями симметрии вагона.

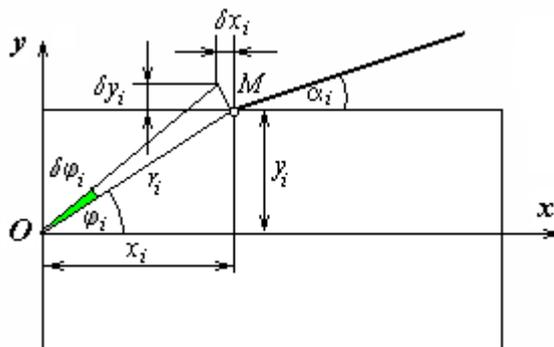


Рис. 3.23. К аналитическому способу нахождения малых перемещений.

Рассмотрим составление кинематических соотношений для удлинений растяжек при перемещении груза как жёсткого тела в горизонтальной плоскости.

Для точки крепления  $i$ -й растяжки с координатами

$$\begin{aligned}x_i &= r_i \cos \varphi_i, \\y_i &= r_i \sin \varphi_i\end{aligned}\quad (3.69)$$

возможные перемещения определяются *вариацией координат* по возможному углу поворота

$$\begin{aligned}\delta x_i &= -r_i \sin \varphi_i \delta \varphi = -y_i \delta \varphi; \\ \delta y_i &= r_i \cos \varphi_i \delta \varphi = x_i \delta \varphi.\end{aligned}\quad (3.70)$$

Здесь знак  $\delta x_i$  присваивается в соответствии с обычным правилом для проекций векторов на оси.

С учётом возможного поступательного перемещения тела (перемещения полюса  $O$ ) перемещения точки крепления  $M$   $i$ -й растяжки записываются соотношениями

$$\begin{aligned}\delta x_M &= \delta x_O - y_i \delta \varphi; \\ \delta y_M &= \delta y_O + x_i \delta \varphi.\end{aligned}\quad (3.71)$$

Проекцию возможного перемещения  $\delta s_M$  на направление, соответствующее проекции растяжки на плоскость  $x, y$ , определяют алгебраическим поворотом локальной координатной системы на угол поворота  $\alpha_i$  (см. рис. 3.23):

$$\delta s_M = \delta x_M \cos \alpha_i + \delta y_M \sin \alpha_i,$$

или

$$\delta s_M = (\delta x_O - y_i \delta \varphi) \cos \alpha_i + (\delta y_O + x_i \delta \varphi) \sin \alpha_i. \quad (3.72)$$

Проецируя это перемещение на направление гибких элементов креплений, составляющее угол  $\beta_i$  с горизонтальной плоскостью, и, заменяя вариации на конечно малые перемещения, получаем кинематические соотношения для удлинений (деформаций) элементов креплений

$$\Delta l_i = [(\Delta x - y_i \Delta \varphi) \cos \alpha_i + (\Delta y + x_i \Delta \varphi) \sin \alpha_i] \cos \beta_i. \quad (3.73)$$

Физические соотношения имеют стандартный вид в случае упругой работы гибких связей:

$$\Delta l_i = -\frac{(R_i - R_{oi})l_i}{EA_i}. \quad (3.74)$$

Здесь обозначения те же, что и в формулах (3.62) и (3.62а).

Знак минус в физических соотношениях учитывает укорочение длины упругой связи при положительных значениях перемещений точки крепления растяжки.

*Задача 3.* В полувагон погружены трубы большого диаметра силой тяжести  $\overline{G}$  каждая<sup>90</sup> (см. рис. 2.8, б, рис. 3.24). Определить давление труб на дно и борта полувагона.

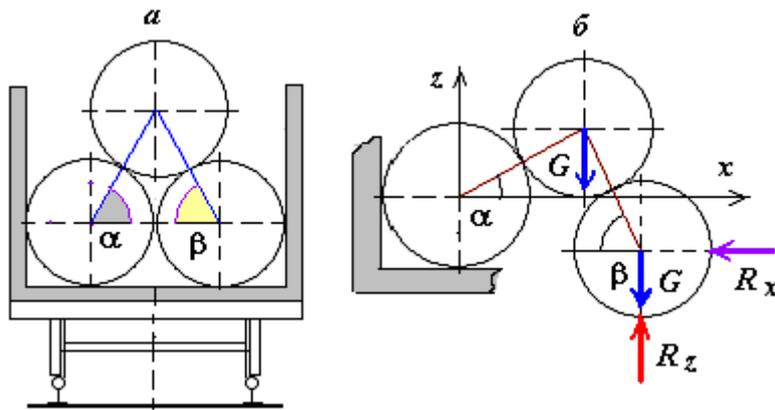


Рис. 3.24. Размещение труб большого диаметра в полувагоне и схема приложения сил к объекту.

*Решение.* Применяем принцип освобождения от связей геометрической статики и принцип возможных перемещений Лагранжа. Если система удовлетворяет идеальным удерживающим стационарным связям и находится в равновесии, то сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении равна нулю (см. уравнение (3.58а)):

$$\sum_{k=1}^n \delta W(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{kz} \delta z_k) = 0. \quad (3.75)$$

Освобождаем одну из нижних труб от связей (пол вагона), реакции связи *относим* к активным силам. Придаём системе перемещение, допускаемое оставшимися связями (см. рис. 3.24). Так как оставшиеся связи, наложенные на каждую из труб, являются односторонними, рассматриваем только удержи-

<sup>90</sup> Комаров К.Л., Яшин А.Ф. Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта. – Новосибирск: Наука, 2004. – 296 с.

вающие возможные перемещения, т. е. контакт поверхностей труб между собой и поверхностями пола и стенки для левой трубы сохраняется. Указываем силы тяжести  $\bar{G}$  для смещающихся труб и реакции  $\bar{R}_x$  и  $\bar{R}_z$  стенок вагона и его пола. Записываем проекции активных сил на координатные оси, координаты их точек приложения и вариации этих координат.

Верхняя труба:

$$F_x = 0, \quad F_z = -G, \quad z = 2r \sin \alpha, \quad \delta z = 2r \cos \alpha \delta \alpha. \quad (3.76)$$

Нижняя труба:

$$F_x = -R_x, \quad x = 2r \cos \alpha + 2r \cos \beta; \\ \delta x = -2r(\sin \alpha \delta \alpha + \sin \beta \delta \beta); \quad (3.77)$$

$$F_z = R_z - G, \quad z = 2r \sin \alpha - 2r \sin \beta, \\ \delta z = 2r(\cos \alpha \delta \alpha - \cos \beta \delta \beta). \quad (3.78)$$

Подставляем эти значения в выражение (3.75) принципа возможных перемещений:

$$(-G)2r \cos \alpha \delta \alpha + (-R_x)(-2r(\sin \alpha \delta \alpha + \sin \beta \delta \beta)) + \\ + (R_z - G)2r(\cos \alpha \delta \alpha - \cos \beta \delta \beta) = 0. \quad (3.79)$$

Сгруппируем в этом выражении слагаемые с  $\delta \alpha$  и  $\delta \beta$ , опуская число  $2r$ :

$$[R_x \sin \alpha - G \cos \alpha + (R_z - G) \cos \alpha] \delta \alpha + \\ + [R_x \sin \beta - (R_z - G) \cos \beta] \delta \beta = 0. \quad (3.80)$$

Обобщённая координата  $\delta \varphi$  есть малая произвольная величина, **не равная нулю**, и полученное уравнение возможных работ на эту величину можно поделить (см. п. 3.5, (3.86)).

Так как вариации  $\delta \alpha$ ,  $\delta \beta$  независимы и являются *малыми произвольными величинами, неравными нулю*, то коэффициенты при них равны нулю. Отметим, что в п. 3.5 (см. уравнение (3.85)) и п. 5.3.3 (см. уравнение (5.48)) будет показано, что эти коэффициенты *называются обобщёнными силами*.

Из (3.80) находим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} R_x \sin \alpha + R_z \cos \alpha &= 2G \cos \alpha, \\ R_x \sin \beta - R_z \cos \beta &= -G \cos \beta. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что в положении равновесия  $\alpha = \beta = 60^\circ$ , представим решение полученного уравнения в символьном виде в системе MathCAD<sup>91</sup>:

$$R_x := \frac{(-G \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta))}{(-\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta))},$$

$$R_z := \frac{(-\sin(\alpha) \cdot G \cdot \cos(\beta) - 2 \cdot G \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta))}{(-\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta))},$$

в результате которого получим  $R_x = 0,289G$ ;  $R_z = 1,5G$ .

Графические зависимости реакций связей, построенные при вариации углов  $\alpha$  и  $\beta$ , представляющие размещения труб в полувагоне, показаны на рис. 3.25.

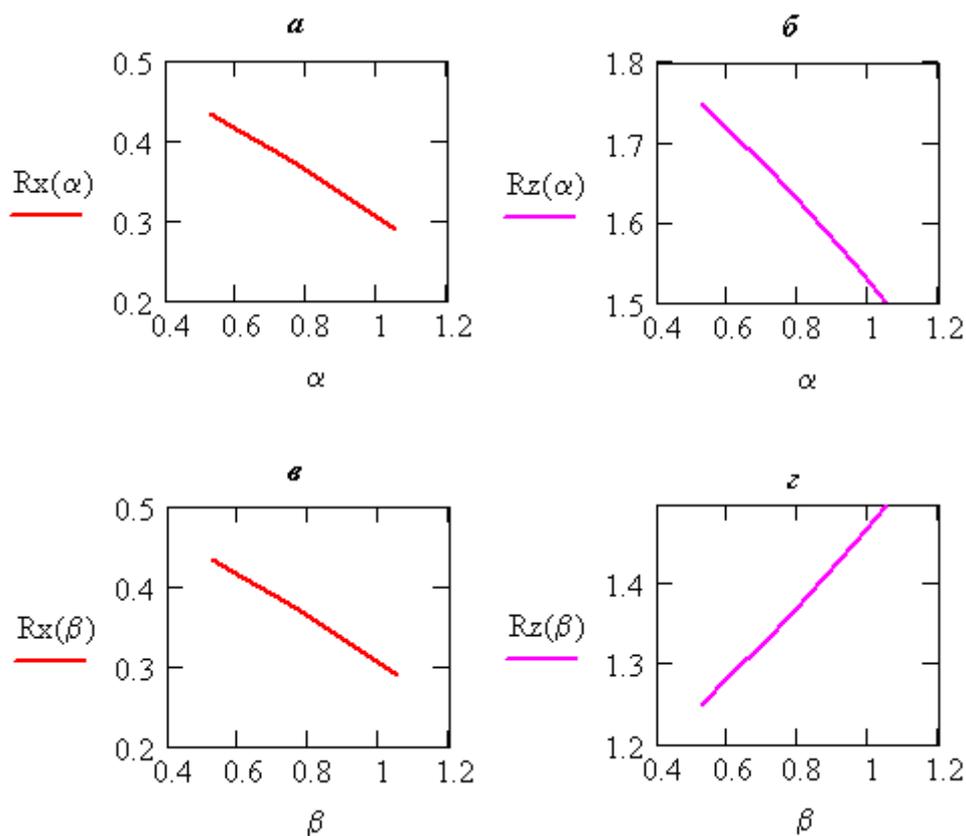


Рис. 3.25. Зависимости  $R_x = f(\alpha)$ ;  $R_z = f(\beta)$ .

<sup>91</sup> Охорзон В.А. Прикладная математика в системе MathCAD: учебн. пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 352 с.

Анализ зависимостей  $R_x = f(\alpha)$  и  $R_z = f(\beta)$  показывает, что увеличение угла  $\alpha$  приводит к уменьшению реакции связей, а угла  $\beta$  – к уменьшению реакции  $R_x$  и увеличению  $R_z$ .

Задачу можно решить и методами геометрической статики, исследуя условия равновесия систем твёрдых тел. Например, это сделано в п. 2.11, где рассматривалась перевозка труб больших диаметров в полувагоне (см. рис. 2.85).

Хотя решение задачи методом геометрической статики проще, *принцип возможных перемещений* (принцип Лагранжа) позволяет легко получать уравнения, эквивалентные уравнениям равновесия статики, в которые входит лишь одно или очень малое количество неизвестных сил. Уравнения равновесия составляются для *свободных* систем, и количество уравнений в общем случае равно произведению количества тел на количество степеней свободы этих тел в случае их *полного освобождения* от связей. Принцип возможных перемещений применим для *несвободных* систем, и количество уравнений равновесия равно количеству степеней свободы рассматриваемой несвободной, точнее, частично несвободной системы. Степень свободы или несвободы можно легко выбирать при решении задач геометрической статики данным способом.

### 3.4. Принцип Д’Аламбера. Общее уравнение динамики системы

Если точкам системы дать перемещения, не нарушающие наложенных связей (согласные со связями, дозволяемые связями), то на основании принципа виртуальных перемещений получим, что сумма элементарных работ *уравновешенной системы сил* равна нулю. Допустим, что *наложенные* на систему *голономные связи* являются *идеальными, стационарными и удерживающими* (см. пп. 2.1.4).

Вспомним, что *связи называют голономными*, если их уравнения могут быть заданы в виде, не содержащем производные от координат по времени или дифференциалы координат (см. уравнение (2.12)).

Тогда на основании принципа виртуальных перемещений (*когда связь идеальная, или совершенная*) в применении к *уравновешенной системе сил* (см. п. 3.3, уравнение (3.56)) имеем

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^{(a)} - m_k \bar{a}_k) \delta \bar{r}_k = 0, \quad (3.81)$$

где  $\bar{F}_k^{(a)}$  – вектор всех активных сил, Н;  $m_k$  – масса материальной точки или системы, кг;  $\bar{a}_k$  – вектор абсолютного ускорения материальной точки, м/с<sup>2</sup>.

Если проекции всех активных сил  $\bar{F}_k^{(a)}$  обозначить через  $F_{kx}^{(a)}$ ,  $F_{ky}^{(a)}$  и  $F_{kz}^{(a)}$ , проекции вектора абсолютного ускорения материальных точек  $\bar{a}_k$  обозначить через  $\ddot{x}_k$ ,  $\ddot{y}_k$  и  $\ddot{z}_k$  и проекции вектора возможного перемещения материальных точек  $\delta\bar{r}_k$  обозначить через вариации координат  $\delta x_k$ ,  $\delta y_k$  и  $\delta z_k$ , то, развёртывая скалярное произведение, стоящее под знаком суммы в (3.81), получим

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx}^{(a)} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + \sum_{k=1}^n (F_{ky}^{(a)} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + \sum_{k=1}^n (F_{kz}^{(a)} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k = 0. \quad (3.82)$$

Соотношение (3.81), объединяющее два основных принципа механики – принцип виртуальных перемещений Лагранжа и принцип Д’Аламбера, называют *общим* или *универсальным уравнением движения материальной системы с удерживающими идеальными связями*.

Приняв уравнение (3.81) за исходное, можно простыми преобразованиями вывести из него уравнения движения голономных механических систем, а также все основные теоремы динамики.

Это положение носит название принципа *виртуальных (возможных) перемещений*. Установленный И. Бернулли (1717), он был окончательно сформулирован Лагранжем, вследствие чего условие (3.81) часто *называют* условием Лагранжа.

### 3.5. Уравнения равновесия в обобщённых координатах

#### *Понятие об обобщённой силе*

Если ввести независимые обобщённые координаты  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$  для системы, имеющей  $n$  степеней свободы, то *вариации* декартовых координат произвольной  $k$ -й точки системы (см. уравнение (3.48)) могут быть выражены через вариации независимых обобщённых координат по уравнению (3.51) или в развёрнутом виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_k &= \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \delta q_2, + \dots, + \frac{\partial x_k}{\partial q_n} \delta q_n; \\ \delta y_k &= \frac{\partial y_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2} \delta q_2, + \dots, + \frac{\partial y_k}{\partial q_n} \delta q_n; \\ \delta z_k &= \frac{\partial z_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_k}{\partial q_2} \delta q_2, + \dots, + \frac{\partial z_k}{\partial q_n} \delta q_n; \\ (k &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Тогда уравнению (3.58), определяющему условие равновесия системы для идеальных связей, можно придать вид

$$\sum_{k=1}^m \left( F_{kx} \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i + F_{ky} \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i + F_{kz} \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0,$$

или с учётом уравнения (3.58а)

$$\sum_{k=1}^m W_{(\bar{F}_k)} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (3.84)$$

Введём обозначение

$$Q_i = \sum_{k=1}^m \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.85)$$

Выражения (3.85) в виде  $Q_i$  носят название *обобщённых сил*.

Тогда равенство (3.84) можно записать так:

$$Q_i = \frac{\sum_{k=1}^m W_{(\bar{F}_k)}}{\delta q_i}. \quad (3.86)$$

Таким образом, чтобы найти обобщённую силу, нужно дать системе такое возможное перемещение, при котором только одна обобщённая координата  $q_1$  получает приращение  $\delta q_1$ , а все остальные обобщённые координаты остаются неизменными (т. е.  $q_2 = q_3 = \dots = q_n = \text{const}$ ). Затем следует определить на этом перемещении сумму элементарных работ всех заданных сил, действующих на систему, разделив эту сумму на вариацию  $\delta q_1$ .

Из (3.86) ясно, что  $Q_i$  имеет размерность работы ньютон-метр (Н·м, или Дж), делённую на обобщённую координату, т. е. размерность обобщённой силы не совпадает с размерностью силы.

Следовательно, если обобщённая координата имеет размерность длины, то обобщённая сила имеет размерность силы. Если обобщённая координата – безразмерная величина (например, угол поворота), то обобщённая сила имеет размерность работы, т. е. обобщённая сила представляет собой момент силы.

Из равенства (3.84) с учётом (3.85) получим условие равновесия системы:

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots + Q_n q_n = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}, \delta q_i \neq 0). \quad (3.87)$$

Это равенство должно выполняться при всяком возможном перемещении системы, т. е. при любых независимых друг от друга значениях вариации  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты в виде  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  при этих вариациях равнялись нулю.

Следовательно, условие равновесия, выражаемое равенством (3.87), в силу независимости вариации обобщённых координат  $\delta q_i$  от обобщённой силы  $Q_i$  равносильно следующим  $i$  условиям:

$$Q_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.88)$$

Уравнение (3.88) выражает условие равновесия системы.

Таким образом, для того чтобы системы с совершенными связями оставались в данном положении в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы все обобщённые силы, вычисленные для этого положения системы, равнялись нулю.

Отсюда следует, что количество уравнений равновесия системы в обобщённых координатах равно количеству степеней свободы системы.

### **Примеры решения задач на определение обобщённой силы**

При решении задач 1 (см. рис. 3.21) и 3 (см. рис. 3.24) с использованием активных и реактивных сил замечено, что коэффициенты при уравнениях равновесия системы называют обобщёнными силами. Далее в п. 5.3.3 (см. уравнение (5.48)) будет решена задача нахождения обобщённых сил при воздействии активных, реактивных и переносных сил инерции.

*Задача 1.* В наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, лежат два груза силой тяжести  $G_1 = 4$  и  $G_2 = 6$  кН, соединённые гибкой нитью (тросом) (рис. 3.26), коэффициенты трения скольжения грузов о наклонную плоскость соответственно равны  $f_1 = 0,4$  и  $f_2 = 0,55$ .

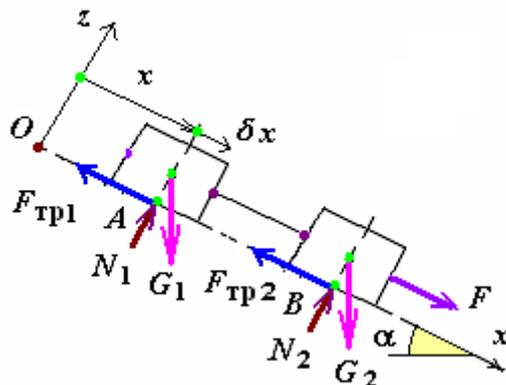


Рис. 3.26. Схема приложения сил при движении груза по наклонной плоскости.

Определить обобщённую силу для системы взаимосвязанных грузов, на которые действует сдвигающая сила  $\bar{F}$ .

Такое взаимосвязанное расположение штучных грузов может соответствовать смещению их общего центра тяжести поперёк вагона  $y_C = y_M$ , в результате чего рама вагона будет находиться в наклонённом относительно горизонта положении.

*Решение.* Система имеет одну степень свободы, и её положение определяется координатой  $q_1 = x$  (положительное направление отсчёта  $x$  показано стрелкой).

Для определения  $Q_1$  сообщаем системе возможное перемещение  $\delta x$ , при котором  $\delta x > 0$ . Вычисляем на этом перемещении элементарные работы сил  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}_1$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}1}$  и  $\bar{G}_2$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}2}$ .

Нормальные составляющие  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$  реакции связи (пол платформы), как силы вертикальные на направление перемещения, работу не совершают (см. (3.40)).

Так как по закону Кулона (см. (2.64)) в предельном равновесии  $\bar{F}_{\text{тр1}} = f_1 \bar{N}_1$  и  $\bar{F}_{\text{тр2}} = f_2 \bar{N}_2$ , где  $N_1 = G_1 \cos \alpha$ ,  $N_2 = G_2 \cos \alpha$ , то элементарная работа согласно (3.84)

$$\delta W = (F + G_1 \sin \alpha - f_1 G_1 \cos \alpha + G_2 \sin \alpha - f_2 G_2 \cos \alpha) \delta x,$$

или

$$\delta W = [F + G_1(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha) + G_2(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha)] \delta x. \quad (3.89)$$

Следовательно, обобщённая сила согласно (3.87)

$$Q_1 = F + G_1(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha) + G_2(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha). \quad (3.90)$$

Условием равновесия системы согласно (3.88) будет

$$F + G_1(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha) + G_2(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha) = 0, \quad (3.91)$$

откуда наибольшее значение силы  $\bar{F}$ , при котором возможен сдвиг грузов вниз, выражается равенством

$$F = G_1(f_1 \cos \alpha - \sin \alpha) + G_2(f_2 \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (3.92)$$

В частном случае, при  $\alpha = 0$  имеем:

$$F = f_1 G_1 + f_2 G_2. \quad (3.93)$$

## 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ТОЧКИ<sup>92</sup>

Аналитическая динамика представляет собой часть кинетики, посвящённой изучению движения материальных тел (или вообще материальных систем) в зависимости от действующих на них сил.

Следуя традиции, устоявшейся в курсе теоретической механики, вначале изучим динамику точки, а затем динамику системы.

Движение тела определяют движением всех материальных точек (или частиц) его составляющих. Поэтому возникает необходимость начать освоение динамики с изучения движения материальной точки. Под материальной точкой, как известно, понимают тело (как геометрической фигуры) столь малых размеров, что различием в движении его частиц можно пренебречь. Из *геометрии* известно, что *тело* – это то, что имеет длину, ширину и глубину, т. е. объём (и соответственно *массу*). Материальную точку (в дальнейшем просто *точку*) можно рассматривать как точку (геометрическую), имеющую *массу*.

### 4.1. Дифференциальные уравнения движения и решение задач динамики точки

#### *Задачи динамики точки*

Для *свободной* материальной точки решаются следующие задачи динамики: 1) зная закон движения точки, определить действующую на неё силу (*первая задача динамики*); 2) зная действующие на точку силы, найти закон движения точки (*вторая, или основная, задача динамики*).

При перевозке грузов на открытом железнодорожном подвижном составе (платформа, полувагон – в дальнейшем ОПС) отсутствуют какие-либо примеры, которые позволили бы рассматривать их как *свободную* материальную точку.

Для *несвободной* материальной точки, т. е. точки, на которую наложена связь, вынуждающая её двигаться по заданной неидеальной связи в виде негладкой поверхности или кривой, *первая задача динамики* состоит в том, чтобы,

---

<sup>92</sup> Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1967. – 467 с.

зная закон движения точки и действующие на неё активные силы, определить реакцию связи. *Вторая (основная) задача динамики* при несвободном движении распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: а) закон движения точки, б) реакцию наложенной связи.

При перевозке грузов на ОПС отсутствуют примеры, в которых можно было бы решить *первую и вторую задачу динамики* в инерциальной системе отсчёта. Однако при скатывании вагона с горки при встречном или попутном ветре при формировании подвижного состава на горке сортировочной станции, зная действующие на вагон с грузом силы, можно найти закон движения вагона (или отцепа), что является *второй или основной задачей динамики*.

1. Рассмотрим *вторую задачу динамики* в инерциальной системе отсчёта. Формирование подвижного состава на горке сортировочной станций обеспечивается скатыванием вагона с горки при встречном (или попутном) ветре. При этом, зная действующие на вагон с грузом силы (составляющие силы тяжести вагона с грузом и силы аэродинамического сопротивления на направление движения вагона), можно найти закон движения вагона (или отцепа) (см. пп. 5.2.7, задачу 1).

Таким образом, применительно к формированию подвижного состава на сортировочной горке решается *вторая задача динамики* только в инерциальной системе отсчёта.

При перевозке грузов на ОПС имеются примеры, в которых можно было бы решить *первую и вторую задачу динамики* в неинерциальной системе отсчёта, т. е. в системе отсчёта, движущейся с ускорением относительно неподвижных осей координат (более подробно см. пп. 4.6.6).

1. Рассмотрим *первую задачу динамики* в неинерциальной системе отсчёта. На железнодорожном транспорте единственным штучным твёрдотельным грузом, который перевозится на полувагоне без дополнительных креплений, являются среднетоннажные контейнеры (см. рис. 2.16), которые удерживаются от сдвига относительно пола вагона как вдоль, так и поперёк него только силой трения между контактирующими поверхностями груза и пола вагона (см. п. 2.1). Прикладывая к центру тяжести контейнера как объекта активную силу (сила тяжести  $\bar{G}$ ), продольную  $\bar{I}_{ex}$ , поперечную  $\bar{I}_{ey}$  и вертикальную  $\bar{I}_{ez}$  *переносные* силы инерции (см. пп. 4.6.5, (4.112)) по нормированным значениям переносных ускорений по продольной  $\bar{a}_{ex}$ , поперечной  $\bar{a}_{ey}$ , вертикальной  $\bar{a}_{ez}$  оси (см. п. 4.6.5), а также нормальную составляющую  $\bar{I}_n$  силы инерции в абсолютном движении (см. (4.47), (4.47a)), учитывающую движения при переходе поезда из прямого на кривой участок пути с ускорением (см. п. 4.5), можно определить реакцию наложенной связи (пол вагона)  $\bar{R}$  в виде нормальной  $\bar{N}$  и касательной  $\bar{F}_\tau$  её прямоугольных составляющих.

2. Рассмотрим *вторую задачу динамики* в неинерциальной системе отсчёта. Все штучные твёрдотельные грузы (за исключением среднетоннажных кон-

тейнеров), перевозимые на ОПС, закреплены дополнительными средствами креплений в виде гибких упругих (растяжки и обвязки) и упорных (бруски) средств, которые *предназначены для ограничения перемещений груза* относительно пола вагона как вдоль, так и поперёк него и относительно вертикальной оси (см. рис. 2.16, б и 2.17). Следует определить реакции наложенных связей в виде (см. п. 2.1):

а) нормальной составляющей  $\bar{N}$  реакции связи  $\bar{R}$  и координаты точки её приложения  $x_N$  и  $y_N$  относительно выбранных осей координат  $Oxy$ ;

б) касательной составляющей  $\bar{F}_\tau$  реакции связи  $\bar{R}$ , называемой силой трения  $\bar{F}_{тр}$  (вдоль  $\bar{F}_{трx}$  и поперёк  $\bar{F}_{тры}$  вагона);

в) натяжений  $\bar{R}_i$  ( $i$  – количество креплений) гибких упругих (растяжки и обвязки) и реакции  $\bar{R}_{бx}$  и  $\bar{R}_{бу}$  упорных (бруски) средств креплений.

Далее следует определить закон относительного движения (скорость, перемещение) по действующим силам. Однако отметим, что законы относительного движения груза могут быть установлены от воздействия либо продольной и вертикальной, либо поперечной и вертикальной переносных сил инерции (см. пп. 4.6.6) составлением и решением дифференциальные уравнения относительного движения груза. Также можно составить и аналитически решить дифференциальные уравнения движения груза от пространственных систем сил (т. е. от одновременных действий продольной, поперечной и вертикальной переносных сил инерции) [Туранов, 2009].

Итак, при перевозке штучных твёрдых грузов на ОПС решается *вторая, или основная, задача динамики* только в *неинерциальной системе отсчёта*.

## 4.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть материальная точка  $M(x,y,z)$  массы  $m$  движется по криволинейной траектории под действием переменной силы  $\bar{F}$  (рис. 4.1).

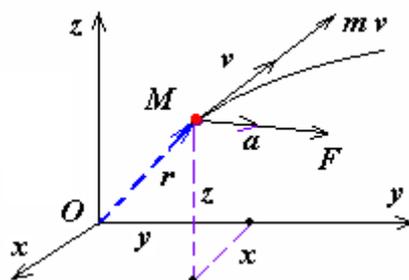


Рис. 4.1. Движение точки по криволинейной траектории.

Проекции этой силы на координатные оси инерциальной системы отсчета  $Oxyz$  обозначим через  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$ .

Основной закон динамики точки (2.2) с учётом известного из кинематики соотношения между скоростью  $\bar{v}$  и радиус-вектором  $\bar{r}$  представим в виде

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}, \quad (4.1)$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки приложения движущейся материальной точки, м.

Проецируя уравнение (4.1) на координатные оси инерциальной системы отсчёта  $Oxyz$ , получим:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \quad (4.2)$$

Таким образом, имеем систему трёх дифференциальных уравнений второго порядка, выражающих в координатной форме второй закон динамики.

Уравнения (4.2) в динамике точки являются основными, и их называют дифференциальными уравнениями движения материальной точки в инерциальной системе отсчёта.

Если на точку *одновременно* действуют несколько сил, то на основании четвёртого закона динамики под  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  следует понимать в этом случае проекции на координатные оси *равнодействующей*  $\bar{R}_p$  этих сил.

Вторая задача динамики в инерциальной системе отсчёта для определения уравнения движения материальной точки решается интегрированием, причём интегралы в них будут содержать шесть произвольных постоянных  $C_1, \dots, C_6$ . Эти произвольные постоянные, как известно, определяют из начальных условий движения материальной точки. Обычно при  $t = 0$  задают координаты точки в виде конкретных чисел  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$  и проекции её скорости на оси координат также в виде конкретных чисел  $\dot{x} = \dot{x}_0$ ,  $\dot{y} = \dot{y}_0$ ,  $\dot{z} = \dot{z}_0$ .

Отсюда следует, что для полного определения движения точки *недостаточно знать только силу*, действующую на эту точку. *Необходимо ещё знать начальные условия движения (задача Коши)*, т. е. начальное положение точки и её начальную скорость<sup>93</sup>. В результате интегрирования уравнения (4.2) из заданных шести начальных условий находят шесть произвольных постоянных  $C_1, \dots, C_6$ .

<sup>93</sup> Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1967. – 564 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1972. – 659 с.

В итоге получаем три уравнения движения по координатным осям, представленные в параметрическом виде (см. уравнения (1.3)):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (4.3)$$

и соответствующие три зависимости для проекций скоростей

$$dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt, \quad dz = \dot{z}dt, \quad (4.3a)$$

где  $t$  – параметр времени.

Для получения закона движения по траектории при известной траектории движения необходимо использовать проекции уравнения (4.2) на подвижные оси координат  $M\tau nb$  трёхгранника Френе (см. [Бухгольц, 1967]):

$$m\ddot{s} = F_{x\tau}; \quad (4.4)$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_{xn}. \quad (4.5)$$

Полезно заметить<sup>94</sup>, что

$$v^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{ds^2}{dt^2}. \quad (4.6)$$

Следует иметь в виду, что квадрат длины дуги в декартовой системе координат находят [Ландау, Лифшиц, 1965]:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.6a)$$

Перепишем (4.6) с учётом (4.6a)

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (4.6б)$$

После интегрирования уравнения (4.6б) можно для простых зависимостей проекций скоростей получить закон движения по траектории  $S = S(t)$ . В случае сложных выражений для проекций сил и/или проекций скоростей задача определения уравнений движения решается численным интегрированием.

Если траектория движения не задана и задача решается интегрированием уравнения (4.1), то уравнение траектории можно получить, исключая время из уравнений движения в декартовых координатах тем или иным способом (последовательная подстановка или использование тригонометрического тождест-

<sup>94</sup> Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

ва  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  в некоторых частных случаях). Если исключение затруднено или невозможно (трансцендентные выражения), то можно рассматривать полученные уравнения движения (4.3) как уравнения траектории, заданной *параметрически*. Нетрудно составить таблицу координат по некоторой совокупности задаваемых значений параметра  $t$  и построить траекторию в пространстве (или на плоскости при двух координатах).

Применительно к креплению грузов на ОПС в случае поступательного переносного движения можно составить дифференциальные уравнения, описывающие прямолинейные *относительные* движения груза как материальной точки в плоскости пола вагона. В этом частном случае к действующим на груз активным и реактивным силам добавляются соответствующие продольные, поперечные и вертикальные *переносные силы инерции* (см. пп. 4.6.6). Эти уравнения при простых зависимостях горизонтальных и вертикальных *переносных сил инерции* нетрудно решить аналитически, рассматривая каждую из сил в отдельности. Значения *переносных* ускорений принимаются согласно нормам проектирования вагона<sup>95</sup>.

Так приходится поступать потому, что при воздействии пространственных систем сил (т. е. *при одновременном действии* на груз продольных, поперечных и вертикальных *переносных сил инерции*) [Туранов, 2009] и избыточного количества связей (средств креплений) задача определения *относительных перемещений груза* относится к классу статически неопределённых задач, требующих для своего решения численного способа с привлечением вычислительных средств. В частном случае, когда на груз действует отдельно продольная, поперечная и вертикальная *переносные силы инерции* (см. п. 4.6.6) и при наличии избыточного количества связей, задача определения *относительных перемещений груза* при конкретных условиях относится к классу статически определённых задач.

### 4.3. Прямолинейное движение материальной точки

Способы решения дифференциальных уравнений прямолинейного движения точки в *инерциальной системе отсчёта* подробно изложены в учебниках и учебных пособиях по теоретической механике.

Так, например, рассмотрена задача, когда движение точки является *равномерно переменным* под действием постоянной по модулю и направлению силы ( $\overline{F} = \text{const}$ ). Такой силой, действующей на точку, может быть сила трения

---

<sup>95</sup> Нормы для расчёта и проектирования новых и модернизируемых вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных). – ГосНИИВ. – М.: ВНИИЖТ, 1996. – 319 с.

*Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д.* Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1991. – 360 с.

скольжения (для подвижного состава – сцепления)  $\bar{F}_{\text{тр}}$  (для вагона сопротивление движению, а для локомотива так называемая сила тяги).

В этом случае имеют место известные соотношения для равнопеременного движения (см. (1.32) и (1.33)):

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 + at.$$

Эти соотношения активно используются при решении различных прикладных задач на транспорте, в которых может приниматься или постулироваться постоянство ускорения.

Рассмотрены также задачи, когда движение точки происходит под действием переменной силы, зависящей:

а) от времени. *Например*, пропорционально времени в виде  $F_x = kt$  ( $k$  – коэффициент пропорциональности, кН/с) или по гармоническому закону  $F_x = F_0 \cos(\omega t)$  ( $F_0$  – амплитуда возмущающей силы, кН,  $\omega$  – круговая частота, с<sup>-1</sup>);

б) от положения этой точки. *Например*, силы упругости пружины в виде  $F_{\text{упрх}} = -c\Delta x$  (см. (3.1));

в) от скорости. *Например*, сила аэродинамического сопротивления ветра в виде  $\bar{F}_{\text{рв}} = f(\bar{v}_{\text{рв}})$  (см. (3.9) – (3.12)).

Решение дифференциальных уравнений прямолинейного движения в *инерциальной системе отсчёта* на примере *свободного колебания точки при наличии трения скольжения* общеизвестно<sup>96</sup>. Поэтому здесь опустим изложение таких движений.

Применительно к креплению грузов на ОПС задачи на определение прямолинейного движения материальной точки должны рассматриваться в *неинерциальной системе отсчёта* (относительное движение). Решение таких задач будет представлено в пп. 4.6.6.

---

<sup>96</sup> Жилкин В.А. Применение системы MathCAD при решении задач прикладной механики. Ч. 2. Теоретическая механика. Динамика точки. – Челябинск, ЧГАУ, 2002. – 301 с.

Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов: учебное пособие для вузов железнодорожного транспорта. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.

#### 4.4. Общие теоремы динамики точки

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике систем, вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения (см. уравнения (4.2)) оказывается более эффективным использовать общие теоремы динамики точки, которые являются следствиями основного закона динамики. В некоторых задачах дифференциальные уравнения позволяют найти первые интегралы, которые достаточны для их решения, что упрощает процесс решения.

##### *Импульс силы*

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие *об импульсе силы*.

Сначала рассмотрим понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за элементарный промежуток времени  $\Delta t$ . Обозначим этот импульс через  $\Delta \bar{S}$ .

Элементарным импульсом силы *называют* произведение силы  $\bar{F}$  на элементарный (бесконечно малый) промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого действует эта сила:

$$\Delta \bar{S} = \bar{F} \Delta t. \quad (4.7)$$

Элементарный импульс силы  $\Delta \bar{S}$  есть векторная величина, совпадающая по направлению с данной силой (рис. 4.2).

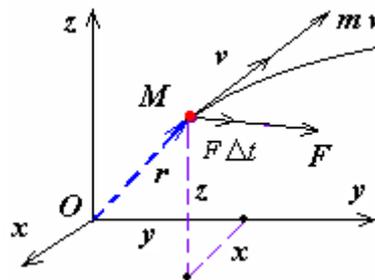


Рис. 4.2. Направление силы и элементарного импульса.

Для вычисления импульса силы за конечный промежуток времени  $t$ , разобьём этот промежуток на большое количество  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) очень малых (элементарных) промежутков  $\Delta t_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) (рис. 4.3).

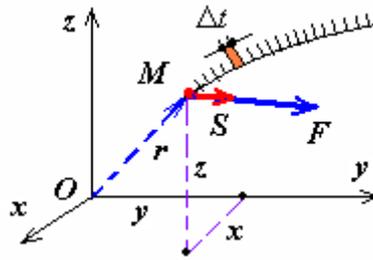


Рис. 4.3. Импульс силы.

Обозначим импульс силы за время  $t$  через  $\bar{S}$ . Тогда импульсом силы  $\bar{S}$  за конечный промежуток времени  $t$  назовём предел суммы элементарных импульсов, когда количество промежутков  $n$  стремится к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ), а сами промежутки стремятся к нулю ( $\Delta t \rightarrow 0$ ):

$$\bar{S} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{F} \Delta t_i,$$

или

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (4.8)$$

Таким образом, импульс силы за конечный промежуток времени  $t$  выражают определенным векторным интегралом от элементарного импульса, взятым в пределах от нуля до  $t$ .

В частном случае, если сила  $\bar{F}$  постоянна и по модулю, и по направлению ( $\bar{F} = \text{const}$ ), то  $\bar{S} = \bar{F}t$ . Причём в этом случае модуль импульса силы  $S = Ft$ .

В общем случае модуль импульса силы находим из равенства (4.8) по его проекциям на координатные оси:

$$S_x = \int_0^t F_x dt; \quad S_y = \int_0^t F_y dt; \quad S_z = \int_0^t F_z dt, \quad (4.9)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы  $\bar{F}$  на координатные оси, Н.

Единица измерения импульса силы – ньютон-секунда (Н·с) (что равносильно кг·м/с).

#### 4.4.1. Теорема об изменении количества движения точки

Векторная величина, равная произведению массы точки  $m$  на его скорость  $\bar{v}$ , называется *количеством движения* точки  $m\bar{v}$  (см. п. 2.1). *Количество движения* является одной из основных динамических характеристик движения точки.

Единица измерения количества движения – килограмм-метр в секунду (кг·м/с).

Проекции количества движения  $m\bar{v}$  на оси координат, очевидно, равны:

$$mv_x = m \frac{dx}{dt}, \quad mv_y = m \frac{dy}{dt}, \quad mv_z = m \frac{dz}{dt}. \quad (4.10)$$

Возьмём теперь основное уравнение динамики (см. уравнение (2.5))

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}.$$

Умножая обе части этого равенства на  $dt$ , получаем

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt. \quad (4.11)$$

Отсюда видим, что *дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу действующей на эту точку силы*.

Интегрируя уравнение (4.11) в пределах от 0 до  $t$ , с учётом того, что скорость точки в начальный момент (при  $t = 0$ )  $\bar{v}_0$ , а в момент  $t$  равна  $\bar{v}$

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_0^t \bar{F}dt,$$

или

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_0^t \bar{F}dt, \quad (4.12)$$

или с учётом уравнения (4.8) можно записать

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}. \quad (4.13)$$

Векторное уравнение (4.12) и/или (4.13) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки за конечный промежуток времени  $t$ .

Теорема. *Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу действующей на эту точку силы за тот же промежуток времени.*

Если известны количества движения материальной точки  $m\bar{v}$  и  $m\bar{v}_0$ , то геометрически легко построить вектор  $\bar{S}$  (рис. 4.4).

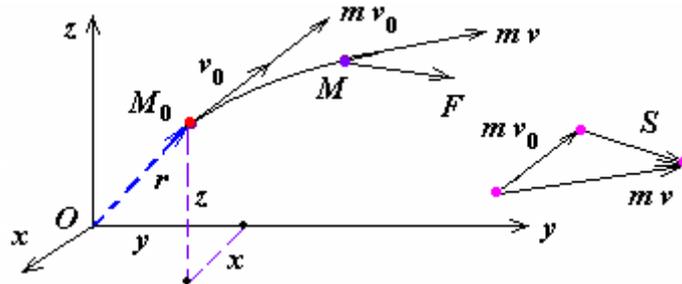


Рис. 4.4. К определению вектора импульса силы.

Обратно, если известен импульс  $\bar{S}$  и начальная скорость точки  $\bar{v}_0$ , то из выражения (4.13) можно найти скорость точки  $\bar{v}$ :

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \frac{1}{m} \bar{S}. \quad (4.14)$$

При решении задач динамики вместо векторного уравнения (4.12) часто пользуются уравнениями в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \int_0^t F_x dt; \\ mv_y - mv_{0y} &= \int_0^t F_y dt; \\ mv_z - mv_{0z} &= \int_0^t F_z dt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отсюда ясно, что *изменение проекции количества движения материальной точки на какую-нибудь ось равно интегралу от проекции импульса действующей силы на ту же ось.*

С учётом уравнения (4.12) и (4.13) последнему уравнению можно придать другой вид:

$$\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= S_x; \\ mv_y - mv_{0y} &= S_y; \\ mv_z - mv_{0z} &= S_z. \end{aligned} \quad (4.16)$$

**Следствия теоремы об изменении количества движения  
материальной точки**

Если проекции силы  $\bar{F}$  на координатные оси  $F_x, F_y, F_z$  являются функциями времени  $t$ , то, выполняя интегрирование в уравнениях (4.15), можно найти проекции скорости  $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$  и, следовательно, определить модуль скорости точки для любого момента времени  $t$  [Бухгольц, 1967].

Рассмотрим некоторые следствия теоремы.

1. Пусть  $\bar{F} = 0$ , т. е. на материальную точку не действует никакая сила. Тогда из уравнения (4.12) получим

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = 0$$

или

$$\bar{v} = \bar{v}_0. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.17) *есть математическое представление первого закона инерции*: свойства материальной точки сохранять свою скорость **даже при отсутствии действующих сил**.

2. Пусть  $\bar{F}_x = \overline{\text{const}}$ , т. е. проекции силы на ось  $Ox$  есть величина постоянная. В этом случае из первого уравнения (4.15) получим

$$m\bar{v}_x - m\bar{v}_{0x} = \bar{F}_x t. \quad (4.18)$$

Используя равенство (4.18), можно найти скорость для любого момента времени  $t$  (по аналогии с уравнением (4.14)):

$$\bar{v}_x = \bar{v}_0 + \frac{1}{m} \bar{F}_x t. \quad (4.19)$$

3. Пусть  $\bar{F} = \overline{\text{const}}$  и по величине, и по направлению. Тогда из уравнения (4.12) будем иметь

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{F} t,$$

или в проекциях на координатные оси по аналогии с уравнениями (4.15):

$$\begin{aligned} m\bar{v}_x - m\bar{v}_{0x} &= \bar{F}_x t; \\ m\bar{v}_y - m\bar{v}_{0y} &= \bar{F}_y t; \\ m\bar{v}_z - m\bar{v}_{0z} &= \bar{F}_z t. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4. Пусть  $\overline{F}_x = 0$ , т. е. проекция действующей силы на ось  $Ox$  всё время движения равна нулю (иначе, сила тяжести перпендикулярна оси  $Ox$ ) (рис. 4.5).

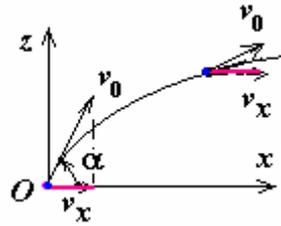


Рис. 4.5. К проекции силы на горизонталь.

Тогда из первого уравнения (4.20) получим

$$m\overline{v}_x - m\overline{v}_{0x} = 0,$$

или

$$\overline{v}_x = \overline{v}_{0x} = \overline{\text{const}}, \quad (4.21)$$

т. е. если проекция действующей силы на ось  $Ox$  все время движения равна нулю, то проекция скорости движущейся точки на эту ось остается постоянной.

Докажем постоянство проекции скорости на ось  $Ox$  при  $\overline{F}_x = 0$ . После интегрирования равенства (4.21) с учётом того, что  $F_x = 0$ , имеем

$$\frac{dx}{dt} = C_1,$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий задачи при  $t = 0$ :  $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$  или  $v_x = v_0 \cos \alpha$ . В любой момент времени  $t$   $v_x = \text{const}$ .

5. Пусть  $\overline{F}_x = \text{var}$ , т. е. проекция действующих сил на ось  $Ox$  все время движения переменна. Причём все время движения материальной точки на неё действует постоянная сила  $\overline{F}_x = \overline{F}_0 = \overline{\text{const}}$ , Н, а за время  $0 \leq t \leq t_1$  на точку дополнительно действует тормозящая сила, которая растёт пропорционально времени  $F_{x0} = kt$ , где  $k$  – некоторый постоянный коэффициент, Н/с (рис. 4.6).

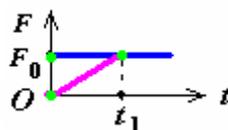


Рис. 4.6. График изменения силы.

Математически характер действия сил на материальную точку можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_x &= F_0 \quad \text{при любом } t; \\ F_x &= kt \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \end{aligned}$$

или за время  $0 \leq t \leq t_1$ , с учётом *направления* тормозящей силы:

$$F_x = F_0 - kt. \quad (4.22)$$

Из условия, что в момент остановки  $t = t_1$ :  $F_0 = kt_1$ , можно найти коэффициент пропорциональности  $k$ , т. е.

$$k = \frac{F_0}{t_1}. \quad (4.23)$$

Так как сила зависит от времени, то можно воспользоваться первым из уравнений (4.15) или (4.16):

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt.$$

Откуда с учётом выражения (4.22) будем иметь

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t (F_0 - kt) dt$$

или после интегрирования получим:

$$mv_x - mv_{0x} = F_0 t - k \frac{t^2}{2}.$$

При  $t = t_1$  с учётом равенства (4.23) последнему равенству придадим вид

$$mv_x - mv_{0x} = F_0 t_1 - \frac{F_0}{t_1} \cdot \frac{t_1^2}{2}$$

или после элементарных математических преобразований окончательно получим

$$mv_x - mv_{0x} = \frac{F_0 t_1}{2}. \quad (4.24)$$

Используя уравнение (4.24), можно решить задачу на определение времени остановки (или торможения) материальной точки  $t_1$ , учитывая, что в этот момент скорость точки  $v_x = 0$ :

$$t_1 = \frac{2mv_{0x}}{F_0}. \quad (4.25)$$

К сожалению, данная задача решена на определение времени движения вагона  $t$  при скатывании с горки при  $\bar{v}_x = \bar{v}_k \neq 0$ <sup>97</sup>.

При  $F_0 = G \cos \psi = \text{const}$  последнее равенство примет вид

$$t_1 = \frac{2v_{0x}}{g \cos \psi}. \quad (4.25a)$$

В частном случае, когда  $\psi = 0$ , имеем

$$t_1 = \frac{2v_{0x}}{g}. \quad (4.25b)$$

Таким образом, при  $\bar{F}_x = \overline{\text{var}}$  время торможения растёт пропорционально удвоенному значению начальной скорости.

**Примеры решения задач на применение теоремы  
об изменении количества движения материальной точки**

**Задача 1** (см. случай 2, когда  $\bar{F}_x = \overline{\text{const}}$ ). К грузу, имеющему массу  $m$  (сила тяжести  $\bar{G}$ ) и лежащему на наклонной поверхности с углом наклона  $\psi$ , сообщают (толчком) начальную скорость  $\bar{v}_0$  (рис. 4.7).

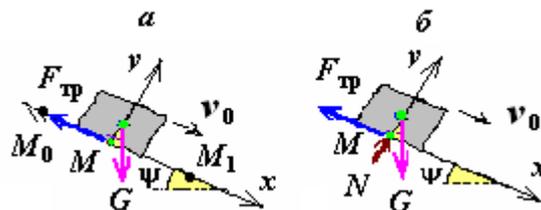


Рис. 4.7. Движение груза по наклонной поверхности.

<sup>97</sup> Савченко И.Е., Земблинов С.В., Страковский И.И. Железнодорожные станции и узлы: учебник для вузов ж.-д. транспорта. – М: Транспорт, 2002. – 479 с.

Железнодорожные станции и узлы: учебник для вузов ж.-д. транспорта. / В.Г. Шубко, Н.В. Правдин и др. – М: УМК МПС России, 2002. – 368 с.

Груз движется от начального  $M_0$  до конечного  $M_1$  положения (остановки). Движение груза тормозится постоянной силой  $\overline{F}_{\text{тр}}$ .

Коэффициент трения между поверхностями груза и наклонной поверхностью  $f$ . Требуется определить скорость груза в момент  $t$  секунд после начала движения, т. е. в положение  $M$ .

*Методика решения задачи.* Решение задачи следует выполнить в следующей последовательности:

- 1) выбрать объект равновесия (груз) из реальной модели;
- 2) отбросить неидеальную связь – наклонную шероховатую поверхность;
- 3) заменить отброшенную связь соответствующими прямоугольными составляющими реакции связи – нормальной и касательной (сила трения) составляющей реакции наклонной поверхности;
- 4) добавить активные силы – силу тяжести. Выбрать координатные оси и представить расчётную модель объекта;
- 5) записать теорему об изменении количества движения материальной точки:

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k = \overline{N} + \overline{F}_{\text{тр}} + \overline{G},$$

где  $m\overline{v}$  – количество (*англ.* quantity) движения материальной точки;

- б) спроецировать на ось  $x$ :

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx} = -F_{\text{тр}} + G \sin \psi ;$$

- 7) составить уравнение относительного равновесия по оси  $y$  и найти из него величину нормальной реакции

$$\frac{d(mv_y)}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky} = N - G \cos \psi = 0,$$

откуда

$$N = G \cos \psi .$$

Подставляя последнее равенство в закон Кулона (2.64), будем иметь

$$F_{\text{тр}} = fG \cos \psi .$$

Подставляя данное равенство в уравнение проекции на ось  $x$ , находим

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = -Gf \cos \psi + G \sin \psi .$$

Далее разделяют переменные, полученное выражение интегрируют, затем используют выражение для количества движения (появляется скорость) и получают искомый результат.

*Решение.* Объектом исследования является груз, поэтому изображают груз в произвольном положении (см. рис. 4.7, б).

На груз условно приложены: сила тяжести  $\overline{G}$ , реакция наклонной плоскости  $\overline{N}$  и тормозящая сила  $\overline{F}_{\text{тр}}$ . Направляя ось  $Ox$  в сторону движения, проецируют все действующие на груз силы на эту ось:

$$F_x = G \sin \psi - F_{\text{тр}} = \text{const}$$

или с учётом того, что  $F_{\text{тр}} = fN$ , имеют

$$F_x = G \sin \psi - Gf \cos \psi,$$

или

$$F_x = G(\sin \psi - f \cos \psi) = \text{const}. \quad (4.26)$$

Подставляя последнее соотношение в (4.19), получают скорость груза в момент  $t$ , с:

$$v_x = v_0 + \frac{G}{m}(\sin \psi - f \cos \psi)t,$$

или

$$v_x = v_0 + g(\sin \psi - f \cos \psi)t. \quad (4.27)$$

Очевидно, что скорость груза в момент  $t$  секунд после начала движения не зависит от силы тяжести груза, а зависит от начальной скорости, угла наклона и коэффициента трения. При этом  $\overline{v} > \overline{v}_0$  только при соблюдении условия  $\sin \psi > f \cos \psi$ .

В частном случае, когда  $\psi = 0$ , имеем

$$v_x = v_0 - gft. \quad (4.27a)$$

Формула (4.27) для определения скорости груза справедлива только до момента остановки груза.

Результаты решения задачи 1, выполненные в системе MathCAD<sup>98</sup>, представлены в виде макет-документов.

Исходные данные:

$$M_0 := 60 \quad - \text{масса груза, т} \quad g := 9.81$$

$$G := M_0 \cdot g \quad - \text{вес груза, кН} \quad G = 588.6$$

$$m := M_0 \cdot 10^3 \quad - \text{масса груза, кг} \quad m = 6 \times 10^4$$

$$f := 0.4 \quad - \text{коэффициент трения}$$

$$v_0 := 100 \cdot \frac{1}{3.6} \quad - \text{скорость срыва груза, м/с} \quad v_0 = 27.778.$$

<sup>98</sup> Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

Охорзон В.А. Прикладная математика в системе MathCAD: учебн. пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 352 с.

Расчёты показали, что условие  $\sin\psi > f \cos\psi$  соблюдается, например, при  $f = 0,4$  и  $\psi = 22^\circ$ , т. е. увеличение коэффициента трения приводит к увеличению скорости груза при определенном значении угла наклона наклонной поверхности и, наоборот. Так, при  $f = 0,4$  и  $\psi = 22^\circ$   $v_x = 27,781$  м/с:

$$\psi := 22 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- угол наклона наклонной плоскости, рад.}$$

$$t := 0.1 \quad \text{- время на данный момент, с}$$

$$v_x := v_0 + g \cdot (\sin(\psi) - f \cdot \cos(\psi)) \cdot t \quad \text{- скорость груза в данный момент, м/с}$$

$$v_x = 27.781.$$

Графическая зависимость скорости груза от вариации угла наклона наклонной поверхности показана на рис. 4.8.

$$\psi := 0,5 \cdot \frac{\pi}{180} .. 45 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- вариация угла наклона наклонной плоскости, рад.}$$

$$v_x(\psi) := v_0 + g \cdot (\sin(\psi) - f \cdot \cos(\psi)) \cdot t \quad \text{- скорость груза в данный момент, м/с}$$

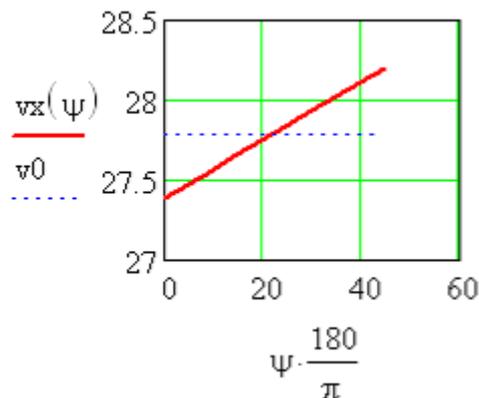


Рис. 4.8. Графическая зависимость  $v_x = f(\psi)$ .

Отсюда видно, что при  $f = 0,4$  и  $\psi < 22^\circ$  скорость груза уменьшается, а при  $\psi > 22^\circ$  – увеличивается. Так, для частного случая, когда  $\psi = 0$ :  $v_x = 27,385$  м/с (см. (4.27а)).

Действительно, (4.27) для определения скорости груза справедлива только до момента остановки груза.

*Задача 2.* Исходные данные такие же, как и в задаче 1. Требуется определить, через сколько времени груз остановится (или найти время торможения груза).

1. Время торможения груза можно найти непосредственно по (4.27), учитывая, что в этот момент скорость груза  $v_x = 0$ :

$$t_1 = \frac{v_0}{g(f \cos \psi - \sin \psi)}. \quad (4.28)$$

Очевидно, что время торможения  $t_1$  имеет смысл только при соблюдении условия  $f \cos \psi > \sin \psi$ .

В частном случае, когда  $\psi = 0$ , имеем:

$$t_1 = \frac{v_0}{gf}. \quad (4.29)$$

Таким образом, при  $F_x = \text{const}$  время торможения растёт пропорционально начальной скорости.

2. Направляя ось  $Ox$  в сторону движения, составляют первое из уравнений (4.16) или (4.18):

$$mv_x - mv_{0x} = S_x. \quad (4.30)$$

Следует учесть, что в момент остановки, т. е. при  $t = t_1$ :  $v = v_x = 0$ , а  $v_{0x} = v_0$ .

Проекция всех действующих на груз сил на ось  $Ox$  в виде  $F_x$  представлены равенством (4.20). Так как они постоянны, то легко вычисляют импульс действующих сил:

$$S_x = F_x t_1 = G(\sin \psi - f \cos \psi) t_1,$$

где  $t_1$  – время торможения, с.

Подставляя последнее соотношение в (4.30), имеют

$$-mv_0 = G(\sin \psi - f \cos \psi) t_1,$$

откуда после преобразований получают такой же результат, как и (4.28):

$$t_1 = \frac{v_0}{g(f \cos \psi - \sin \psi)}.$$

*Результаты численного решения*, выполненные в системе MathCAD, представлены в виде макет-документов.

Расчёт времени торможения груза  $t_1$ , с:

$$\psi := 21 \cdot \frac{\pi}{180} \quad v_0 = 27.778 \quad f = 0.4$$

$$t := \frac{v_0}{g \cdot (f \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi))} \quad \text{- время остановки груза, с}$$

$$t = 187.967.$$

Графическая зависимость времени торможения груза  $t_1$  от вариации угла наклона наклонной поверхности в пределах от  $1^\circ$  до  $21^\circ$  с шагом  $\Delta\psi = 1^\circ$  показана на рис. 4.9.

$\psi := 0, 1 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 21 \cdot \frac{\pi}{180}$  - угол наклона наклонной плоскости, рад.

$t(\psi) := \frac{v_0}{g \cdot (f \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi))}$  - время остановки груза, с

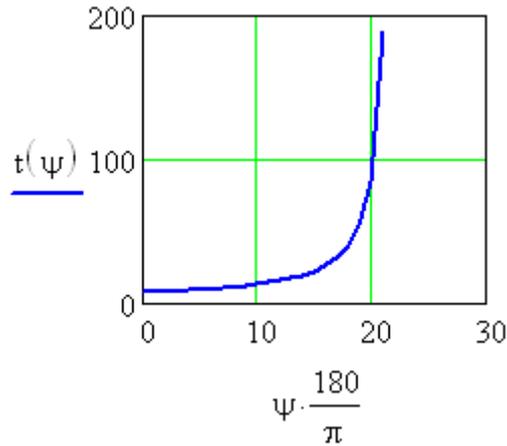


Рис. 4.9. Графическая зависимость  $t = f(\psi)$ .

Время торможения  $t_1$  имеет смысл при  $f = 0,4$  и  $\psi < 22^\circ$ , причём при  $\psi > 20^\circ$  заметно резкое увеличение значения  $t_1$ . Для частного случая, когда  $\psi = 0$ , время торможения  $t_1 = 7,079$  с (см. (4.25б)).

Графическая зависимость времени торможения груза  $t_1$  от вариации коэффициента трения в пределах от 0,2 до 0,5 с шагом  $\Delta f = 0,02$  представлена на рис. 4.10.

$\psi := 10 \cdot \frac{\pi}{180}$  - угол наклона наклонной плоскости, рад.

$f := 0,2, 0,22 \dots 0,5$  - коэффициент трения

$t(f) := \frac{v_0}{g \cdot (f \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi))}$  - время остановки груза, с

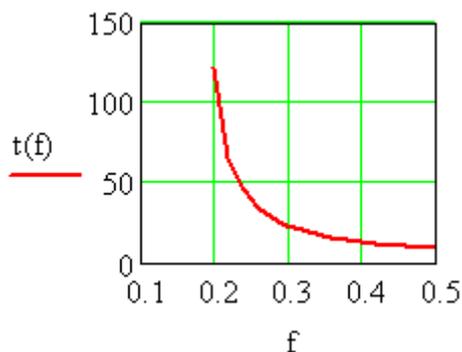


Рис. 4.10. Графическая зависимость  $t = f(f)$ .

Анализ данной зависимости показал, что увеличение коэффициента трения приводит к уменьшению времени торможения (остановки) груза, что и логично.

Для частного случая, когда  $\psi = 0$  и  $v_0 = 27.778$  м/с, графическая зависимость времени торможения груза  $t_1$  от вариации коэффициента трения в пределах от 0,2 до 0,5 с шагом  $\Delta f = 0,02$  представлена на рис. 4.11.

$f := 0.2, 0.22 \dots 0.5$  - коэффициент трения

$t(f) := \frac{v_0}{g \cdot f}$  - время остановки груза, с

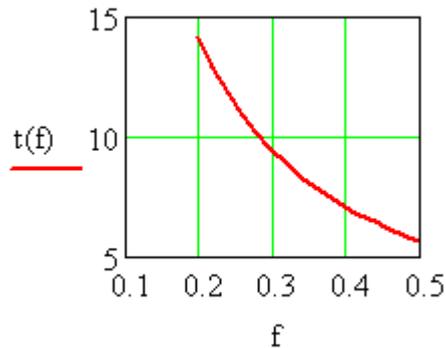


Рис. 4.11. Графическая зависимость  $t = f(f)$ .

**Задача 3** (см. случай 5, когда  $F_x = \text{var}$ ). Исходные данные такие же, как и в примере 1. Требуется определить, через сколько времени груз остановится.

**Решение.** Время торможения можно непосредственно найти по (4.25), (4.25а), (4.25б).

**Результаты численного решения.** Графическая зависимость времени торможения груза  $t_1$  от вариации угла наклона наклонной поверхности в пределах от  $1^\circ$  до  $21^\circ$  с шагом  $\Delta\psi = 1^\circ$  показана на рис. 4.12.

$\psi := 0, 1 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 21 \cdot \frac{\pi}{180}$  - угол наклона наклонной плоскости, рад.

$t(\psi) := \frac{2 \cdot v_0}{g \cdot \cos(\psi)}$  - время торможения груза, с

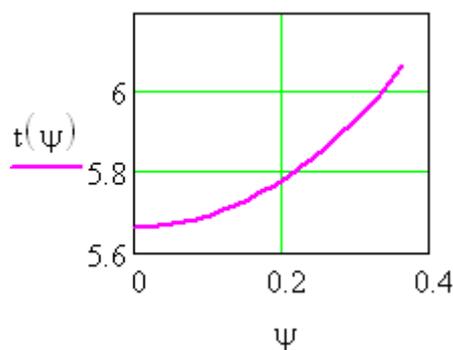


Рис. 4.12. Графическая зависимость  $t = f(\psi)$ .

Анализ полученных результатов показал, что увеличение уклона наклонной поверхности  $\psi$  приводит к увеличению времени торможения груза  $t_1$  по параболическому закону.

Для частного случая, когда  $\psi = 0$ , при заданных исходных данных время торможения груза  $t_1 = 5,663$  с (см. (4.25б)).

#### 4.4.2. Теоремы об изменении кинетической энергии точки

Кинетическая энергия является ещё одной из динамических характеристик движения материальной точки.

Кинетической энергией  $E$  (англ. energy) материальной точки при поступательном движении называют скалярную величину, равную половине произведения массы  $m$  на квадрат её скорости  $v$ <sup>99</sup>, т. е.

$$E = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.31)$$

Единица измерения кинетической энергии – джоуль (Дж) или ньютон-метр (Н·м) ( $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot (\text{м}/\text{с})^2$ ).

Покажем один из выводов формулы (4.31). Пусть тело с массой  $m$  является свободным телом. Пусть в некоторый момент времени к телу прикладывается сила  $F$ . Согласно второму закону Ньютона (см. (3.5)), тело сразу же начнёт двигаться с ускорением  $a = F/m$ . Имеет место формула  $v^2 = 2as$  (Вывод: если тело начнёт равномерно ускоряться, имея начальную скорость  $v_0$ , то его средняя скорость выразится в виде  $(v_0 + v)/2 = s/t$  (см. (1.11), (1.12)). С другой стороны,  $v - v_0 = at$  (см. (1.30)). Перемножая эти равенства между собой, получим:  $v^2 = 2as$ ). Тогда тело, пройдя расстояние  $s$ , приобретёт скорость  $v$ :  $v^2 = 2as$ , или  $v^2 = 2(F/m)s$  и  $mv^2/2 = Fs$ . Отсюда ясно, что величина  $mv^2/2$  численно равна сообщённой телу энергии. Согласно (4.31), половину произведения массы  $m$  на квадрат её скорости  $v$  называют кинетической энергией этого тела. Иначе, в идеальном случае, вся произведённая над телом работа проявляется в виде кинетической энергии.

Отметим, что при формировании подвижного состава на сортировочной станций вагон скатывается с горки. Для решения задач на нахождение пройденного пути вагона при скатывании с горки при заданной величине скорости скатывания возникнет необходимость определения кинетической энергии не только поступательно движущихся, но и вращающихся звеньев (деталей) ваго-

<sup>99</sup> *Шатле ле Тоннелье де Бретей* (Габриель Эмиля дю, маркиза) – первая француженка математик и физик (07.12.1706 – 10.09.1749). Родилась в Париже. Самостоятельно изучила математику, физику, языки. Ученица П. Л. М. Мопертюи и А. К. Клеро. Была в дружеских отношениях с Вольтером. Написала и опубликовала ряд работ по физике. Её перевод «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона на французский язык (1745) сыграл важную роль в деле ознакомления французских учёных с механикой И. Ньютона. Исследовала понятие «живой силы», развивая идеи И. Бернулли, в результате чего вывела формулу кинетической энергии (1740). Формула была признана лишь через 100 лет (см.: Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. – М.: Изд-во «Молодая гвардия», 1966. – 267 с.).

на. Например, поступательное движение совершают кузов вагона с грузом и все детали тележки (надрессорные балки, боковые рамы, буксовые узлы и колёсные пары). Однако колёсные пары, кроме поступательных движений, ещё совершают вращательные. Таким образом, колёсные пары совершают плоскопараллельное движение. Поэтому для определения кинетической энергии таких тел применяют теорему Кёнига<sup>100</sup>, вытекающую из теоремы Гюйгенса<sup>101</sup>:

*при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела ( $E$ ) равна энергии поступательного движения ( $E_{\text{пост}} = E_e$ ) со скоростью центра масс ( $v_C$ ) и кинетической энергии вращательного движения вокруг центра масс ( $E_{\text{вр}}$ ).*

Математически теорему Кёнига представляют в виде

$$E = E_{\text{пост}} + E_{\text{вр}}, \quad (4.32)$$

где

$$E_{\text{пост}} = M \frac{v_C^2}{2}; \quad E_{\text{вр}} = J_C \frac{\omega^2}{2}.$$

Здесь  $M$  – масса системы, кг;  $v_C$  – линейная скорость центра масс системы, м/с;  $J_C$  – момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс (постоянная величина), кг·м<sup>2</sup> [Воронков, 1957; Добычин, 2005];  $\omega$  – угловая скорость системы, рад./с.

В соответствии с этим кинетическую энергию материальной точки, совершающей плоскопараллельное движение, применительно к колёсной паре тележки вагона записывают так:

$$E = M_{\text{кп}} \frac{v_C^2}{2} + J_C \frac{\omega^2}{2}, \quad (4.33)$$

где  $M_{\text{кп}}$  – масса одной колёсной пары вагона, кг;  $v_C$  – линейная скорость центра колеса, совпадающая со скоростью скатывания вагона  $v = v_e$ , м/с;  $J_C$  – момент инерции колёсной пары вагона относительно оси, проходящей через центр масс  $C_{\text{к}}$ , кг·м<sup>2</sup>;  $\omega$  – угловая скорость колёсной пары ( $\omega = v_C/r_{\text{к}}$ , так как мгновенный центр скоростей (МЦС)  $P$  ( $P \in \{P_{A1}, P_{A2}, P_{A'1}, P_{A'2}\}$  и  $P \in \{P_{B1}, P_{B2}, P_{B'1}, P_{B'2}\}$ ) колёсной пары (см. рис. 2.60, 2.61) расположен в полюсе, т. е. в точке его соприкосновения с рельсом), рад/с. Отметим, что МЦС – это точка, где происходит касание колеса с рельсом, поскольку является общей точкой двух тел. Так как рельс неподвижен, а колесо не проскальзывает (*случай чистого качения*), то точка (полюс)  $P$  имеет нулевую скорость в данный момент времени. Вокруг этой точки происходит поворот колеса в заданный момент времени [Комаров, Яшин, 2004; Бутенин и др., 1998].

Учитывая, что  $\omega = v_C/r_{\text{к}}$ , преобразуем (4.33) следующим образом:

<sup>100</sup> С. Кёнинг (1712 – 1757) – немецкий механик.

<sup>101</sup> Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

$$E = \left( M_{\text{кп}} + \frac{J_C}{r_K^2} \right) \frac{v_C^2}{2}. \quad (4.34)$$

Отметим, что момент инерции колёсной пары вагона  $J_C$  относительно оси, проходящий через центр масс  $C_K$ , находят экспериментально либо способом физического маятника с добавочным грузом, либо методом разгона<sup>102</sup>.

Чтобы аналитически найти приближённое значение  $J_C$ , принимают, что  $J_C = M_{\text{кп}} i^2$  ( $i$  – радиус инерции, м). Считают, что колесо является однородным и сплошным диском радиусом  $r_K$ . Далее, в первом приближении пренебрегают моментом инерции собственно *оси* колёсной пары. Тогда момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к нему и проходящей через центр масс  $C_K$ <sup>103</sup>, равен  $J_{C_K} = M_{\text{кп}} r_K^2/2$ . Теперь, приравняв полученные значения  $J_C$ , находят радиус инерции  $i^2 = r_K^2/2$  (или  $i = r_K / \sqrt{2}$ ).

С учётом выполненных выкладок перепишем (4.34) так:

$$E = n_{\text{кп}} \left( M_{\text{кп}} + \frac{M_{\text{кп}}}{2} \right) \frac{v_C^2}{2}, \quad (4.34a)$$

или

$$E = \frac{3}{2} n_{\text{кп}} M_{\text{кп}} \frac{v_C^2}{2}, \quad (4.34б)$$

или, учитывая, что для четырёхосных вагонов  $n_{\text{кп}} = 4$ ,

$$E = 6M_{\text{кп}} \frac{v_C^2}{2}. \quad (4.34в)$$

Заметим, что если тело совершает сложное движение (в частности, и плоскопараллельное) [Добычин, 2005], то, в отличие от (4.32) или (4.33), *кинетическая энергия системы в абсолютном движении ( $E_{\text{абс}}$ ) равна сумме кинетической энергии центра масс ( $E_C$ ) со скоростью центра масс ( $v_C = v_{\text{абс}}$ ), если в нём сосредоточена вся масса системы, и кинетической энергии системы при её движении относительно центра масс ( $E_C^r = E_{\text{вр}}$ ). В этом случае (см. векторное уравнение (1.41))*

$$\bar{v}_C = \bar{v}_e + \bar{v}_r$$

или, согласно теореме косинусов,

$$v_C^2 = v_e^2 + v_r^2 - 2v_e v_r \cos \alpha.$$

Здесь  $v_e$  и  $v_r$  – переносная и относительная скорости центра масс,  $\alpha$  – угол между векторами  $\bar{v}_e$  и  $\bar{v}_r$ .

<sup>102</sup> Юдин В.А., Петрокас Л.В. Лабораторный практикум по теории механизмов и машин. – М: Физматгиз, 1960. – 171 с.

<sup>103</sup> Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М: ГИТТЛ, 1957. – 596 с.

*Теорема об изменении кинетической энергии  
материальной точки в дифференциальной форме*

Умножая основное уравнение динамики (2.5) скалярно справа на радиус-вектор  $d\vec{r}$  точки  $M$  кривой  $L$  (см. рис. 3.4), получим

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.35)$$

В последнем уравнении справа имеем элементарную работу *активной* (заданной) силы  $\vec{F}$ , действующей на материальную точку  $M$  (см. (3.9а)).

Преобразуем левую часть уравнения (4.35), используя свойства скалярного произведения двух векторов:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = m(d\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

Квадрат модуля скорости можно записать как скалярное произведение двух векторов (*скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля* [Бронштейн, Семендяев, 1980]) в виде

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Дифференцируя полученное равенство по правилам дифференцирования двух переменных [Бронштейн, Семендяев, 1980], имеем

$$dv^2 = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2(d\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

Отсюда

$$(d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{dv^2}{2} = d \frac{v^2}{2}.$$

Тогда

$$m(d\vec{v} \cdot \vec{v}) = md \frac{v^2}{2} = d \frac{mv^2}{2}.$$

На основании последнего выражения уравнение (4.35) примет вид:

$$d \frac{mv^2}{2} = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.36)$$

а с учётом (4.31) запишется

$$dE = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

или

$$dE = \Delta W . \quad (4.37)$$

Уравнение (4.37) выражает *теорему* об изменении кинетической энергии для *свободной* материальной точки в *дифференциальной* форме.

*Теорема.* Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку.

Данная теорема справедлива как для свободной, так и для несвободной материальной точки.

Другой вывод этой теоремы можно получить, умножая обе части проекции векторного уравнения динамики (2.2) на направление скорости  $\bar{v}$  на  $v dt$ . Тогда правая часть уравнения (4.36) будет представлена выражением (4.37).

***Теорема об изменении кинетической энергии  
для свободной материальной точки в конечной форме***

Получим эту *теорему* для *конечного перемещения* материальной точки.

Допустим, что материальная точка переместилась из положения  $M_0$ , где скорость  $\bar{v}_0$ , в положение  $M_1$ , где скорость  $\bar{v}_1 = \bar{v}$ .

Интегрируя уравнение (4.36) на этом участке пути, получим

$$\int_{v_0}^{v_1=v} d \frac{mv^2}{2} = \int_{M_0}^{M_1} (\bar{F} \cdot d\bar{r}),$$

откуда

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{M_0}^{M_1} (\bar{F} \cdot d\bar{r})$$

или с учётом (3.30)

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} - \frac{m\bar{v}_0^2}{2} = W_{(M_0M_1)}. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) выражает *теорему* об изменении кинетической энергии материальной точки в *конечной* форме.

*Теорема.* Изменение кинетической энергии движущейся материальной точки на любом участке пути равно работе приложенной к ней силы на пройденном этой точкой пути.

В общем случае, когда на материальную точку действуют несколько сил, то в уравнении (4.38) под  $W_{(M_0M_1)}$  следует понимать работу их равнодействующей, равную сумме работ этих сил на данном пути (см. (3.32а)).

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} - \frac{m\bar{v}_0^2}{2} = \sum W_{(M_0M_1)}. \quad (4.39)$$

Уравнению (4.38) с учётом (3.31) можно придать и такой вид:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (4.40)$$

***Теорема об изменении кинетической энергии  
для несвободной материальной точки в конечной форме***

Напомним, что материальную точку называют *несвободной*, если на её движение наложены *ограничения*. Эти ограничения называют *связями* (см. п. 2.1).

При изучении движения *несвободной* материальной точки используют *принцип освобожденности от связей* геометрической статики (см. п. 2.2), т. е. действие связи на материальную точку заменяют их *реакциями*. Тогда *материальная точка будет свободной* и будет находиться под действием заданных (активных) сил и *реакции наложенных связей* (реактивных сил). Вспомним, что связи математически записывают в виде уравнений или неравенств в зависимости от их характера (см. п. 2.1).

Если связь неидеальная, а поверхность *негладкая*, то появится *касательная составляющая* реакции связи  $\bar{F}_\tau$ , называемая *силой трения*  $\bar{F}_{\text{тр}}$  (см. (2.64)). В этом случае в правую часть уравнения (4.36) необходимо добавить работу силы трения  $W_{\text{тр}}$ .

Тогда теорему об изменении кинетической энергии для *несвободной* материальной точки представляют в виде

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m_0^2}{2} = \sum W_{(M_0M_1)} + W_{\text{тр}}, \quad (4.41)$$

где  $\sum W_{(M_0M_1)}$  – сумма работ всех активных сил, действующих на материальную точку, когда она движется *по кривой*, противоположной направлению силы (см. (3.31));  $W_{\text{тр}}$  – работа силы трения (см. (3.18)).

Работа силы трения – величина *отрицательная*, т. е. сила трения направлена противоположно перемещению точки:

$$W_{\text{тр}} = - \int_0^s F_{\text{тр}} ds. \quad (4.42)$$

В частном случае, когда материальная точка движется *по прямой линии*, противоположной направлению силы трения, работу этой силы определяют по (3.18):

$$W_{\text{тр}} = -fNs, \quad (4.42a)$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения;  $N$  – нормальная составляющая реакции связи;  $s$  – путь торможения.

**Пример 1.** Для примера 2, рассмотренного в пп. 2.1.3, найти высоту, на которую может подняться груз, при внезапной остановке крана (см. рис. 2.4). Дано: масса системы «спредер – контейнер» (в дальнейшем груз)  $M$ , кг; начальная скорость груза  $\bar{v}_0$ , равной переносной скорости крана до остановки  $\bar{v}_e$ , м/с.

**Решение.** Для определения высоты, на которую может подняться груз, применим теорему об изменении кинетической энергии для несвободной материальной точки в конечной форме (см. (4.41)). Скорость груза (т. е. конечная скорость) в момент, когда угол отклонения его от вертикали достигает наибольшего значения  $\varphi = \varphi_{\text{max}}$ , равна нулю, т. е. конечная скорость  $v_k = 0$ . Работа силы тяжести  $G$  на пути  $CM$ :  $W(G) = -Mg\Delta h$ . Тогда, применяя теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме, получим (см. (2.1)):

$$-\frac{Mv_0^2}{2} = -Mg\Delta h. \quad (4.42б)$$

Отсюда та высота, на которую может подняться груз, м (см. (2.2)):

$$\Delta h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4.42в)$$

#### 4.4.3. Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии точки

**Задача 1.** Пусть грузу, имеющему массу  $m$  и лежащему на наклонной поверхности с углом наклона  $\psi$ , сообщают (толчком) начальную скорость  $\bar{v}_0$  (см.

пп. 4.4.1, задача 1, рис. 4.7). Груз движется от начального  $M_0$  до конечного  $M_1$  положения (остановки). Движение груза тормозится постоянной силой  $\overline{F}_{\text{тр}}$ . Коэффициент трения между поверхностями груза и наклонной поверхностью  $f$ . Требуется определить, какой путь пройдёт груз от начального  $M_0$  до конечного  $M_1$  положения (остановки), т. е. найти тормозной путь  $s = M_0M_1$ .

*Решение.* На груз действуют: сила тяжести  $\overline{G}$ , реакция наклонной плоскости  $\overline{N}$  и сила трения  $\overline{F}_{\text{тр}}$ . Для определения тормозного пути  $s = M_0M_1$ , учитывая, что в условия данной задачи входят  $s$ ,  $\overline{v}_0$ ,  $\overline{v}$  и постоянная сила  $\overline{F}_{\text{тр}}$ , воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в виде уравнения (4.41). Здесь  $\overline{v} = 0$  ( $\overline{v}$  – скорость груза в момент остановки). Кроме того, работа силы тяжести  $W(G) = G \sin \psi s$ , нормальной составляющей реакции связи  $W(N) = 0$  (поскольку она перпендикулярна перемещению  $s$ ), силы трения  $W_{\text{тр}} = -fNs$  (см. (3.18), (4.42a)).

Следовательно, согласно (4.41), будем иметь

$$-\frac{mv_0^2}{2} = G \sin \psi s - fNs$$

или с учётом того, что  $N = G \cos \psi$ ,

$$-\frac{mv_0^2}{2} = G \sin \psi s - fG \cos \psi s$$

или

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mg \sin \psi s - fmg \cos \psi s.$$

Отсюда находим тормозной путь груза

$$s = \frac{v_0^2}{2g(f \cos \psi - \sin \psi)}. \quad (4.43)$$

Величина тормозного пути прямо пропорциональна квадрату начальной скорости  $v_0$ , а время торможения по результату задачи 2 (см. (4.28) или (4.29)) растёт пропорционально начальной скорости  $v_0$ . Применительно к наземному транспорту пропорциональность тормозного пути квадрату начальной скорости показывает, как возрастает опасность с увеличением скорости движения.

В частном случае, когда  $\psi = 0$ , (4.43) примет вид

$$s = \frac{v_0^2}{2gf}. \quad (4.43a)$$

Результаты численного решения, выполненные в системе MathCAD, представлены в виде макет-документов.

Расчёт тормозного пути груза  $s$ , м:

$f := 0.4$  - коэффициент трения

$\psi := 5 \cdot \frac{\pi}{180}$  - угол наклона наклонной плоскости, рад.

$v_0 := 5 \cdot \frac{1}{3.6}$   $v_0 = 1.389$  - скорость срыва груза, м/с

$s := \frac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot (f \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi))}$  - тормозной путь груза, м

$s = 0.316$ .

Графическая зависимость тормозного пути груза от вариации угла наклона наклонной поверхности в пределах от 0 до  $5^\circ$  с шагом  $\Delta\psi = 0,5^\circ$  показана на рис. 4.13.

$\psi := 0, 0.5 \cdot \frac{\pi}{180} .. 5 \cdot \frac{\pi}{180}$  - угол наклона наклонной плоскости, рад.

$s(\psi) := \frac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot (f \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi))}$  - тормозной путь груза, м

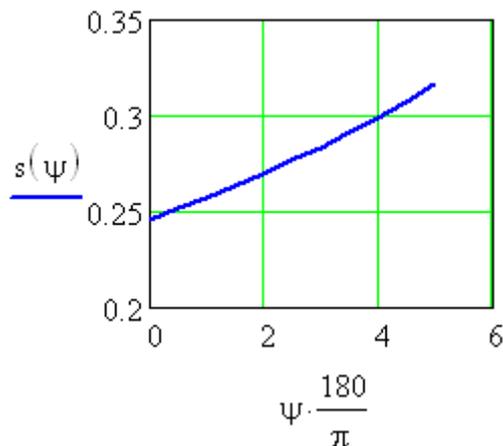


Рис. 4.13. Графическая зависимость  $s = f(\psi)$ .

Отсюда ясно, что с увеличением угла наклона наклонной поверхности происходит увеличение тормозного пути груза. Для частного случая, когда  $\psi = 0$ , тормозной путь  $s = 0,246$  м (см. (4.43а)).

*Задача 2.* Вагон с грузом движется по прямому горизонтальному пути с начальной скоростью  $\bar{V}_0$ . Коэффициент сцепления колесных пар вагона с рельсами  $f$ . На железнодорожном транспорте силу сопротивления движению определяют как долю от силы тяжести состава или вагона, и такая сила намного меньше, чем вычисляемая в виде силы трения скольжения. Найти длину пути  $s$ , который пройдёт вагон до остановки.

Данная задача решается также с использованием (4.43а), а результаты решения соответствуют рассмотренному выше частному случаю, когда  $\psi = 0$ .

#### 4.5. Общий принцип механики (принцип Д'Аламбера<sup>104</sup>)

Методы решения задач механики основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов механики, или же из общих теорем, являющихся следствием этих законов. Однако такой подход не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие положения, называемые *принципами механики*.

---

<sup>104</sup> Д'Аламбер, Жан ле Рон – крупнейший французский математик, философ и просветитель, работавший вместе с Дени Дидро и другими «энциклопедистами» над созданием «Энциклопедии наук, искусств и ремесел», в которой Д'Аламбер вёл раздел точных наук (1717–1783). Родился в Париже, был подкинут матерью на ступени церкви святого Жан ле Рон, откуда и получил своё имя. Воспитывался в семье бедного стекольщика; позднее его стал материально поддерживать отец, офицер де Туш. Ещё в раннем детстве поражал окружающих наблюдательностью и рассудительностью. Член Парижской (с 1741 г.), Петербургской (с 1764 г.), Берлинской и ещё нескольких академии. В «Трактате о динамике» (1743) впервые сформулировал один из наиболее общих принципов динамики, известный ныне под названием «принцип Д'Аламбера». Важнейшие работы относятся к теории дифференциальных уравнений, которые послужили основой для создания новой тогда науки – математической физики. Д'Аламбер и независимо от него Эйлер впервые нашли связи между действительной и мнимой частью аналитических функций, которые впоследствии были названы уравнениями Коши – Римана (хотя исторически правильнее было бы назвать их уравнениями Д'Аламбера – Эйлера). Доказал достаточный признак сходимости числовых рядов – признак Д'Аламбера в предельной форме (числовой ряд сходится, если отношение последующего члена к предыдущему стремится к постоянному числу  $P$ , которое по модулю меньше единицы). Д'Аламбер, по оценке Л. Эйлера, – *это мировое светило тогдашней математики* [Яковлев, 1983].

Отметим, что Д'Аламбер в «Трактате о динамике» (1743) впервые сформулировал прямой и наиболее общий метод решения задач динамики систем *с наложенными связями*, который называют теперь *принципом Д'Аламбера*. На основе этого принципа можно сравнительно просто записать уравнения для любой задачи движения несвободной механической системы и, следовательно, трудности рассмотрения механических задач в значительной степени можно свести к трудностям интегрирования дифференциальных уравнений. В тех случаях, когда необходимо найти ускорения системы тел, задача сводится к решению системы алгебраических уравнений и легко решается известными методами.

В ряде случаев применение этих принципов позволяет найти более эффективные методы решения соответствующих задач [Тарг, 1998].

Ниже рассмотрим один из общих принципов механики, называемый *принципом Д'Аламбера*.

### Понятие о принципе Д'Аламбера

Допустим, что *несвободная* материальная точка  $M$  (например, вагон) движется по заданной неподвижной негладкой кривой  $M_0M_1$  (рельсовые нити) под действием активной силы  $\vec{F}$  (рис. 4.14, а) и реакции связи  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_\tau$  (рис. 4.14, б).

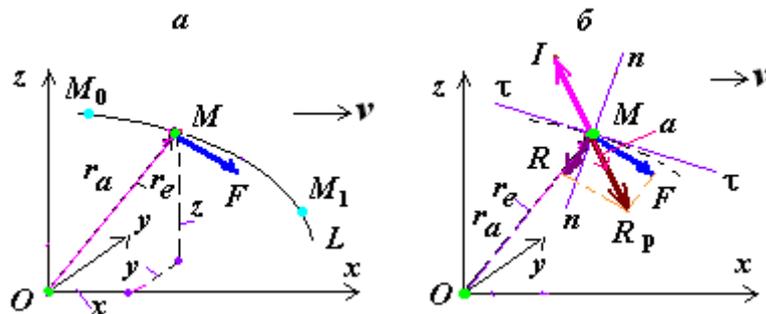


Рис. 4.14. Движение точки в инерциальной системе отсчёта.

На рис. 4.14, б, согласно принципу освобождения от связей геометрической статики (см. п. 2.2), мысленно отброшены рельсовые нити (пунктирные линии  $M_0M_1$ ) и их влияния заменены реакцией связи  $\vec{R}$ , а затем найдена результирующая сила  $\vec{R}_p$  как геометрическая сумма сил  $\vec{F}$  и  $\vec{R}$  (см. рис. 4.14, б).

Согласно основному закону динамики (см. (2.5)), действие на точку массы  $m$  силы  $\bar{R}_p$  вызывает появление *абсолютного ускорения* этой точки  $\bar{a}_{abc}$  в инерциальной («неподвижной») системе отсчёта  $Oxyz$  :

$$\bar{a} = \bar{a}_{abc} = \frac{\bar{R}_p}{m} ,$$

или

$$\bar{R}_p = m\bar{a} = m\bar{a}_{abc} ,$$

где

$$\bar{R}_p = \bar{F} + \bar{R} .$$

Здесь  $m$  – масса точки, кг;  $\bar{a}_{abc}$  – *абсолютное ускорение* точки в инерциальной («неподвижной») системе отсчёта  $Oxyz$ , м/с<sup>2</sup>;  $\bar{F}$  и  $\bar{R}$  – действующая на материальную точку равнодействующая активных сил и приложенная к ней реакция связи (кривая линия  $M_0M_1$  (например, рельсовые нити), по которой двигалась точка  $M$  (вагон)).

*Мысленно к движущейся точке  $M$  приложим силу*

$$\bar{I} = -\bar{R}_p = -m\bar{a}_{abc} . \quad (4.44)$$

Тогда сила  $\bar{I} = -m\bar{a}_{abc}$  уравнивает равнодействующую  $\bar{R}_p$ . Силу  $\bar{I}$  называют *силой инерции* (англ. inertia force), мысленно приложенной к движущейся материальной точке в данной системе отсчёта движения.

*Силой инерции точки называют вектор, направленный противоположно абсолютному ускорению точки  $\bar{a}_{abc}$  и равный по величине произведению массы точки на её ускорение.*

Следовательно,

$$\bar{I} + \bar{R}_p = 0 ,$$

или

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{I} = 0 . \quad (4.45)$$

Математически векторное уравнение (4.45) выражает принцип Д'Аламбера. Принцип Д'Аламбера: *в каждый момент движения материальной точки заданная сила  $\bar{F}$ , реакции связи  $\bar{R}$  и соответствующая сила инерции  $\bar{I}$  обра-*

зуют **систему сил**, эквивалентную нулю, т. е. удовлетворяющую уравнениям равновесия.

Вводя при решении задач динамики силу инерции  $\vec{D}$  Аламбера, для полученной **системы сил** можно *пользоваться привычными уравнениями статики*. Этот метод, называемый *методом кинестатики*, часто оказывается весьма удобным при определении динамических реакций связей.

Иначе, *вместо того чтобы составлять уравнения движения точки*, можно *составлять уравнения равновесия сил и сил инерции  $\vec{D}$  Аламбера*.

Вспомним, что *кинестатика* (от греч. kinētós движущийся и статика) – раздел механики, в котором рассматриваются способы решения задач динамики методами статики.

Формально принцип  $\vec{D}$  Аламбера позволяет свести задачу о движении точки к задаче о равновесии действующих на неё сил и сил инерции.

Очевидно, что принцип  $\vec{D}$  Аламбера *не сводит* динамическую задачу к задаче статики, а лишь даёт *простой и наглядный приём составления динамических уравнений методами статики*. Принцип  $\vec{D}$  Аламбера показывает один из простых приёмов постановки задач динамики и составления дифференциальных уравнений движения, но не разрешает проблемы интегрирования этих уравнений.

*Физически сила инерции* есть не что иное, как результирующее «противодействие» по отношению к результирующей силе  $\vec{R}_p$ , которое оказывает движущаяся точка (груз) на внешние связи (рельсовые нити), изменяющие её движение.

Для сил инерции нельзя указать источник в виде определённого тела, действующего на рассматриваемую точку. Поэтому *силы инерции не имеют противодействующих и в отличие от сил взаимодействия не подчиняются третьему закону Ньютона*. В связи с этим силы инерции  $\vec{D}$  Аламбера часто называют **фиктивными**<sup>105</sup>. Силы инерции в инерциальной системе отсчёта **отсутствуют**<sup>106</sup>.

**Фиктивность** (или **условность**) силы инерции  $\vec{I}$  в абсолютном движении тела заключается в том, что в расчётной модели её прикладывают к центру масс материальной системы (груза)  $C$  и направляют *от объекта*. В результате имеют условное или относительное равновесие, что собственно и эквивалентно использованию подвижной системы координат, жёстко связанной с объектом движения.

---

<sup>105</sup> Ишлинский А.А. Механика относительного движения и силы инерции. – М.: Наука, 1981. – 640 с.

<sup>106</sup> Николай Е.Л. Теоретическая механика. Ч. 2. Динамика. – М.: – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 580 с.  
Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

Уравнения (4.45) эквивалентны дифференциальным уравнениям движения материальной точки (4.2). Следовательно, из принципа Д'Аламбера, как из уравнения (4.2), можно получить общие теоремы динамики.

Проецируя на координатные оси векторное уравнение (4.45) с учётом (4.2), получим следующую систему трёх дифференциальных уравнений второго порядка, выражающих в координатной форме принципа Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_x; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_y; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_z. \end{aligned} \quad (4.46)$$

С траекторией движения в каждый момент времени можно связать *подвижную* ортогональную систему координат  $M\tau n b$ , начало которой совпадает с точкой  $M$ , а осями являются касательная  $\bar{\tau}$ , главная нормаль  $\bar{n}$  и бинормаль  $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$ . Здесь  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  – единичные векторы по осям системы координат  $M\tau n b$ , называемой трёхгранником Френе.

Проведя касательную  $\tau - \tau$  и нормаль  $n - n$  к следу кривой  $M_0 M_1$  и проецируя вектор силы инерции в абсолютном движении  $\bar{I}$  на естественные оси  $Mn\tau b$  (рис. 4.15), получим проекции силы  $\bar{I}$  на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории (см. (1.20), (1.21), (4.4) и (4.5)):

$$I_{\tau} = -ma_{\tau} = -m \frac{d|\bar{v}|}{dt}; \quad I_n = -ma_n = -m \frac{v^2}{\rho}; \quad I_b = -ma_b = 0, \quad (4.47)$$

где  $|\bar{v}|$  и  $v$  – модуль и заданная скорость точки (тело), м/с;  $\rho$  – радиус кривизны траектории в данной точке кривого участка пути, м;  $\bar{I}_b$  – проекция силы инерции на *бинормаль*.

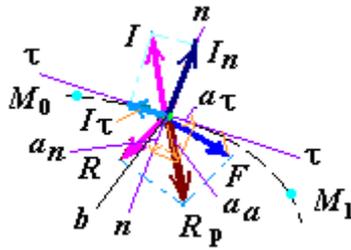


Рис. 4.15. Проецирование сил на естественные оси.

При этом за положительное направление касательной принимают направление скорости точки, за положительное направление главной нормали – направление к центру кривизны траектории.

Таким образом, силу инерции в абсолютном движении  $\bar{I} = \bar{I}_{\text{абс}}$  разлагают на составляющие

$$\bar{I}_{\text{абс}} = \bar{I}_{\tau} + \bar{I}_n, \quad (4.47a)$$

причём  $\bar{I}_{\tau}$  и  $\bar{I}_n$ , направленные по касательной и главной нормали противоположно ускорениям  $\bar{a}_{\tau}$  и  $\bar{a}_n$ , называют соответственно касательной (или тангенциальной) и нормальной составляющими силы инерции в абсолютном движении<sup>107</sup>.

Нормальная составляющая силы инерции  $\bar{I}_n$  всегда направлена от центра кривизны кривой.

В случае движения материальной точки по окружности (т.е. при  $\rho = R$  – радиус окружности (см. [Бухгольц, 1967])) нормальную составляющую силу инерции  $\bar{I}_n$  называют *центробежной силой*  $\bar{I}_{\text{цб}}$ .

Уравнения (4.47) в проекциях на оси системы координат Френе  $M\tau nb$  будут иметь вид (см. (4.4) и (4.5)):

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_{\tau a}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n + N; \quad 0 = F_b, \quad (4.48)$$

где  $F_{\tau a}$ ,  $F_n$  и  $F_b$  – проекции активной силы  $\bar{F}$  на оси системы координат  $M\tau nb$ . Прямоугольными составляющими активной силы  $\bar{F}$  на оси системы координат  $M\tau nb$  являются  $\bar{F}_{\tau a} = F\bar{\tau}$ ,  $\bar{F}_n = F\bar{n}$  и  $\bar{F}_b = F\bar{b}$ .

Из первого уравнения (4.48) можно непосредственно найти закон движения материальной точки вдоль кривой, т.е. зависимость  $s = f(t)$ , а затем и скорость точки  $\bar{V}$ .

<sup>107</sup> Воронков И.М. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1966. – 596 с.

Второе уравнение (4.48) позволяет определить нормальную составляющую  $\bar{N}$  реакции связи  $\bar{R}$  по заданной величине скорости точки  $\bar{v}$ . Если скорость точки  $\bar{v}$  не задана (и не определена из первого уравнения (4.48)), то её можно найти ещё по теореме об изменении кинетической энергии точки (см. п. 4.4.2, уравнение (4.41)).

В случае, когда несвободная материальная точка движется по *негладкой* кривой (например, по рельсовой нити), к проекции  $\bar{F}_{\tau a}$  активной силы  $\bar{F}$  первого уравнения (4.48) можно прибавить силу трения скольжения  $\bar{F}_{\tau} = \bar{F}_{\text{тр}}$  (рис. 4.16). Тогда в это уравнение через силу трения войдёт ещё и нормальная составляющая  $\bar{N}$  реакции связи  $\bar{R}$ :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_{\tau a} - F_{\text{тр}} \quad (4.49)$$

или, в силу закона Кулона (см. (2.64)),

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_{\tau a} - fN. \quad (4.49, a)$$

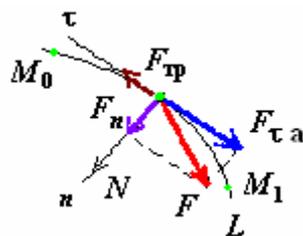


Рис. 4.16. Схема приложение сил.

### Заключение

Подводя итоги обсуждения силы инерции Д'Аламбера, особо отметим, что принцип Д'Аламбера – важный инструмент механики в исследовании динамики движения твёрдых тел и упругих систем. Используя этот принцип, выводят дифференциальные уравнения движения не только тел и систем тел, но и систем с распределёнными параметрами, например стержней (струн)<sup>108</sup> и др. Составление дифференциальных уравнений движения представляет исходную часть исследования того или иного явления в технике, в частности в сфере гру-

<sup>108</sup> Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1972. – 659 с.

Араманович И.Г., Лёвин В.И. Уравнения математической физики (Серия: «Избранные задачи высшей математики для инженеров и студентов вузов»). – М.: Наука, 1969. – 288 с.

зовых перевозок. От этого этапа исследования зависит правильность конечных результатов решения задачи. Если теоретически анализ составленных уравнений затруднителен, то современные вычислительные средства позволяют решать в символьном виде любые сложные дифференциальные уравнения. Поэтому важным является составление этих уравнений с использованием классических положений теоретической механики.

Таким образом, подчеркнём, что принцип Д'Аламбера обладает следующими достоинствами:

- позволяет пользоваться привычными уравнениями равновесия статики (см. (4.45));

- даёт возможность сразу получить уравнения, разрешённые относительно старших производных (см. (4.46)), и поэтому не требует выкладки для их выделения;

- допускает возможность непосредственно найти ускорение точки в абсолютном движении  $a_{\text{абс}}$  при известных активных и реактивных силах, либо реакции связи (силы трения, или силы торможения), если известно ускорение  $a_{\text{абс}}$  и вызывающее его активные силы (см. (4.46));

- позволяет использовать известные уравнения колебаний стержней (струн) из курса математической физики путём выделения этих элементов и введения соответствующих реакций.

### *Решения задач на применение принципа Даламбера*

I. Рассмотрим случай, когда вагон с грузом скатывается с сортировочной горки с постоянным ускорением  $a_{\text{абс}} = \text{const}$ . При этом *связь между колёсами вагона и рельсовыми нитями неидеальная, а поверхность шероховатая.*

*Задача 1*<sup>109</sup>. Вагон (или отцеп) скатывается по рельсовым нитям, наклонённым к горизонту под углом  $\psi_0$  (рис. 4.17), под воздействием проекции силы тяжести  $G$  на направления скатывания ( $G_x$ ) и/или совместно с силой аэродинамического сопротивления  $F'_{\text{рвх}}$  при попутном или встречном ветре (см. п. 3.1, (3.10) и (3.11)) как активных сил<sup>110</sup>.

<sup>109</sup> Данная задача является дальнейшим развитием задачи скатывания вагона по рельсам (см.: Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.).

<sup>110</sup> Туранов Х.Т., Ситников С.А., Мягкова А.В. Математическое обоснование необходимости расположения на первом профильном участке сортировочной горки первой тормозной позиции // Транспорт: Наука, техника и управление, 2011, № 3. – С. 10 – 14.

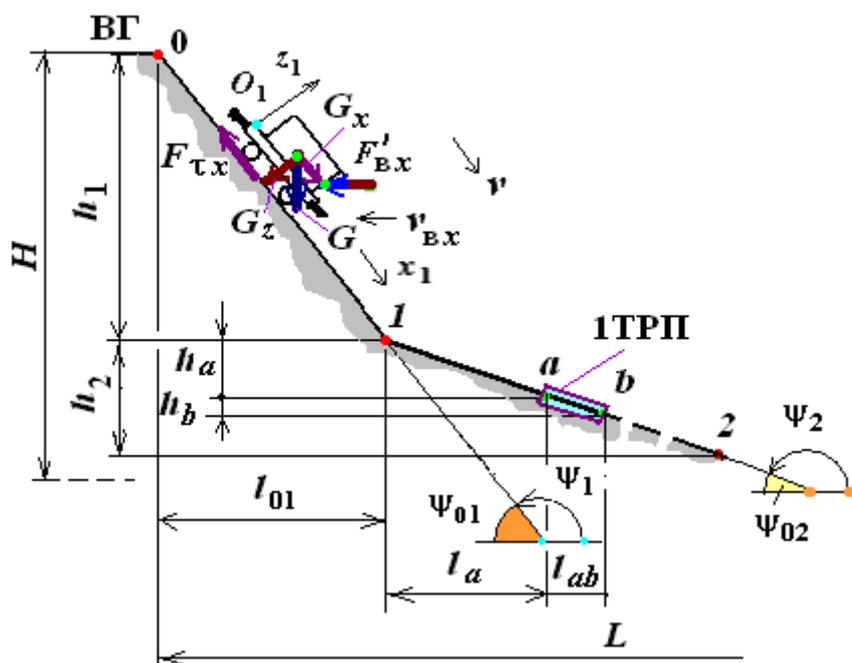


Рис. 4.17. Первый профильный участок горки.

Первый профильный участок горки имеет профиль  $0 - 1 - 2$  и на участке  $1 - 2$  расположена 1-я тормозная позиция (1ТПП) с координатами  $a$  и  $b$  (см. рис. 4.17). На рис. 4.17 обозначено: ВГ – высота горки;  $H$  и  $L$  – параметры расчётной высоты горки, м;  $h_1$ ,  $h_2$  и  $l_{01}$ ,  $l_a$  – высота и длина соответствующих участков горки, м;  $l_{ab}$  – длина первой тормозной позиции, м;  $\psi_{01}$  и  $\psi_{02}$  – углы наклона соответствующих участков горки, рад.

*Постановка задачи.* Требуется найти силу торможения вагона, вызываемую трением колёс о рельсовые нити, трением в подшипниках буксовых узлов и другими случайными (или эпизодическими) силами с учётом воздействия на вагон (или отцеп) встречного и/или попутного ветра.

*Принятые допущения.* За упрощённую расчётную модель скатывания вагона с горки, учитывающую трение качения колёс вагона со скольжением, принимают модель, показанную на рис. 2.61.

В данной задаче моментами трения качения колёс о рельсовые нити (см. рис. 2.61) и в подшипниках буксовых узлов передней и задней тележек вагона (см. (2.81)) можно пренебречь.

*Решение.* В пп. 2.4.2 сила трения при качении колёс со скольжением  $F_{\text{тр}}^{\text{ск}}$  как сила торможения вагона  $F_{\text{торм}}$ , направленная в сторону, противоположную скатыванию вагона с горки, представлена в виде (см. (2.80а))

$$F_{\text{тр}}^{\text{ск}} = f_{\text{ск}} N + f_{\text{ск}0} F'_{\text{рву}}, \quad (4.50)$$

где  $f_{ск}$  – коэффициент трения скольжения колеса по рельсу («металл по металлу» –  $f_{ск} = 0,15 \div 0,25$ );

$N$  – нормальная составляющая реакции связей (рельсовых нитей), Н:

$$N = G \cos \psi_0 + F'_{rвх} \sin \psi_0; \quad (4.51)$$

$f_{ск0}$  – коэффициент трения скольжения гребней колеса по рельсу (принимают –  $f_{ск0} = 0,25$  [Расчёты..., 2003];

$F'_{rвх}$  – проекции силы аэродинамического сопротивления на поперечную ось вагона, Н (см. рис. (3.3, б), (3.12)).

Вводя понятия «сдвигающих»  $F_{сд.х}$  и «удерживающих»  $F_{уд.х}$  сил, с учётом всех активных и реактивных сил, получим (см. п. 3.1):

– при встречном ветре

$$F_{сд.х} = G_x = G \sin \psi_0; \quad (4.52)$$

– при попутном ветре (см. (3.11))

$$F_{сд.х} = G \sin \psi_0 + F'_{rвх} \cos \psi_0; \quad (4.53)$$

– при встречном ветре (см. (3.10))

$$F_{уд.х} = F_{\tau} + F'_{rвх} \cos \psi_0; \quad (4.54)$$

– при попутном ветре

$$F_{уд.х} = F_{\tau}, \quad (4.55)$$

где  $F_{\tau}$  – сумма всех сил сопротивлений при качении колёс со скольжением, кроме проекции силы аэродинамического сопротивления  $F'_{rвх} \cos \psi_0$  на ось  $x$  при встречном ветре:

$$F_{\tau} = F_{тр}^{ск} = F_{торм}. \quad (4.56)$$

Согласно (4.46), запишем дифференциальное уравнение второго порядка, выражающее в координатной форме принцип Д'Аламбера на направление скатывания вагона:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kx} + \sum_{k=1}^n R_{kx}, \quad (4.57)$$

где  $M$  – масса вагона с грузом, кг;  $\sum_{k=1}^n F_{kx} = F_{\text{сд.}x}$  – проекции всех активных сил на направления скатывания вагона (ось  $x$ ), Н;  $\sum_{k=1}^n R_{kx} = F_{\text{торм}}$  – проекции всех реактивных сил на ось  $x$ , Н.

По условию задачи вагон скатывается с горки равноускоренно с ускорением, направленным по оси  $x$ , т. е.  $\frac{d^2 x}{dt^2} = a_{\text{абс.}x} = \text{const}$ .

Из (4.57) найдём силу торможения (или силу, стремящуюся замедлить движения) вагона

$$F_{\text{торм}} = F_{\text{сд.}x} - Ma_{\text{абс.}x}.$$

С учётом (4.52) и/или (4.53) и того, что  $M = G/g$ , представим последнее выражение после упрощений с учётом (4.54) в виде

$$F_{\text{торм.}} = G \left( \sin \psi_0 \mp \frac{F'_{rBx}}{G} \cos \psi_0 - \frac{a_{\text{абс.}x}}{g} \right). \quad (4.58)$$

Здесь знак «минус» – при встречном ветре, а «плюс» – при попутном.

Из последней формулы видно, что сила торможения вагона  $F_{\text{торм}}$  постоянна по величине при условии, если переносная скорость скатывания вагона  $v_e$  – величина заданная (см. (1.54) и (1.55)), в противном случае  $F_{\text{торм}}$  окажется величиной переменной.

Особо заметим, что случай, когда  $v_e = f(t)$  и  $F_{\text{торм}} = f(t)$ , является самостоятельной прикладной задачей.

Рассматривая частный случай, когда  $F_{\text{торм}} = \text{const}$ , согласно закону Кулона (см. (2.64)) запишем коэффициент трения скольжения колёс о рельсовые нити

$$f = \frac{F_{\text{торм}}}{N}. \quad (4.59)$$

Перепишем закон Кулона с учётом (4.50) и (4.58):

$$f = \frac{G \left( \sin \psi_0 \mp \frac{F'_{rBx}}{G} \cos \psi_0 - \frac{a_{abc.x}}{g} \right)}{G \cos \psi_0 + F'_{rBx} \sin \psi_0}$$

или после упрощений

$$f = \frac{\sin \psi_0 \mp \frac{F'_{rBx}}{G} \cos \psi_0 - \frac{a_{abc.x}}{g}}{\cos \psi_0 + \frac{F'_{rBx}}{G} \sin \psi_0}. \quad (4.60)$$

В частном случае, при неучёте силы ветра, т. е.  $F'_{rBx} = 0$ , и того, что  $\frac{\sin \psi_0}{\cos \psi_0} = \operatorname{tg} \psi_0$ , (4.59) примет вид

$$f = \operatorname{tg} \psi_0 - \frac{a_{abc.x}}{g \cos \psi_0}, \quad (4.60a)$$

что совпадает с результатами, приведёнными в работе [Лойцянский, Лурье, 1983], которые подтверждают корректность выполненных математических выкладок.

Изменяя уклон профиля горки, можно найти такое значение угла  $\psi_0 = \varphi_{\text{тр}}$ , при котором вагон будет скатываться равномерно, т. е.  $a_{abc.x} = 0$ , чему соответствует скорость скатывания вагона  $v_{abc.x} = v_e = \text{const}$ . В этом случае  $f = \operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}}$ , где  $\varphi_{\text{тр}}$  – угол трения (см. пп. 2.4.1, рис. 2.48).

Перепишем (4.59) с учётом (4.51):

$$F_{\text{торм}} = f(G \cos \psi_0 + F'_{rBx} \sin \psi_0). \quad (4.61)$$

С другой стороны,

– при встречном ветре, согласно (4.54)

$$F_{\text{торм}} = F'_{rBx} \cos \psi_0 + f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{rBx} \sin \psi_0) + f_{\text{ск}0} F'_{rBy}$$

или после упрощений

$$F_{\text{торм}} = f_{\text{ск}} G \cos \psi_0 + F'_{rBx} (\cos \psi_0 + f_{\text{ск}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск}0} F'_{rBy}; \quad (4.62)$$

– при попутном ветре, согласно (4.55)

$$F_{\text{торм}} = f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск0}} F'_{\text{рву}}. \quad (4.63)$$

Приравнивая (4.61) и (4.62), (4.61) и (4.63) между собой, найдём новое значение  $f_{1,2} = \text{tg} \varphi_{\text{тр}}$ , при котором вагон будет скатываться с горки равномерно, т. е.  $a_{\text{абс.х}} = 0$ :

– при встречном ветре

$$f_1 = \frac{f_{\text{ск}} G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} (\cos \psi_0 + f_{\text{ск}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск0}} F'_{\text{рву}}}{G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0}; \quad (4.64)$$

– при попутном ветре

$$f_2 = \frac{f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск0}} F'_{\text{рву}}}{G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0}. \quad (4.65)$$

В частном случае, при отсутствии ветра, т. е.  $F'_{\text{рвх}} = F'_{\text{рву}} = 0$ , (4.64) и (4.65) примет вид  $f = f_{1,2} = f_{\text{ск}}$ .

*Задача 2.* Пусть в задаче 1 известны значения угла наклона профиля горки  $\psi_0$ , коэффициент трения качения колёс со скольжением  $f_{\text{ск}} = f_{\text{ск0}} = f$  и  $F_{\text{торм.}} = \text{const}$ . Требуется найти скорость вагона  $v_e = f(t)$  через каждые  $t = t_1$  секунд после начала скатывания с горки и обосновать необходимость расположения на участке 1 – 2 первой тормозной позиции (1ТП) перед подходом вагона (отцеп) к стрелочной зоне при любых значениях уклона (см. рис. 4.17).

*Постановка начальных условий задачи* (или задача Коши). Пусть при  $t = t_0$   $\dot{x}_0 = v_0$ , как скорость скатывания вагона, является начальным условием задачи. Обычно  $v_0 = 1,1\text{--}1,38$  м/с (или 4–5 км/ч), а допустимая скорость доходит до 8,5 м/с в зависимости от конструктивного исполнения тормозных устройств (т. е. замедлителей вагона).

*Решение.* Дифференциальное уравнение движение вагона, составленное согласно принципу Д Аламбера на основе (4.52) и (4.53) с учётом (4.51), имеет вид уравнения (4.57):

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = G \sin \psi_0 \mp F'_{\text{рвх}} \cos \psi_0 - f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) - f_{\text{ск0}} F'_{\text{рву}},$$

где  $M$  – масса вагона с грузом, кг.

Преобразуя последнее соотношение с учётом того, что  $G = Mg$ , будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = A, \quad (4.66)$$

где  $A$  – постоянное число, имеющее размерность ускорения, м/с<sup>2</sup>:

– при встречном ветре

$$A = g(\sin \psi_0 - f_{\text{СК}} \cos \psi_0) - \frac{F'_{r\text{BX}}}{M} (\cos \psi_0 + f_{\text{СК}} \sin \psi_0) - f_{\text{СК}0} \frac{F'_{r\text{BY}}}{M}; \quad (4.67)$$

– при попутном ветре

$$A = g(\sin \psi_0 - f_{\text{СК}} \cos \psi_0) + \frac{F'_{r\text{BX}}}{M} (\cos \psi_0 - f_{\text{СК}} \sin \psi_0) - f_{\text{СК}0} \frac{F'_{r\text{BY}}}{M}. \quad (4.68)$$

Уравнение (4.66) имеет *физический смысл* лишь при выполнении следующих условий:

– при встречном ветре

$$g \sin \psi_0 \gg f_{\text{СК}} \left( g \cos \psi_0 + \frac{F'_{r\text{BX}}}{M} \sin \psi_0 \right) + \frac{F'_{r\text{BX}}}{M} \cos \psi_0 + f_{\text{СК}0} \frac{F'_{r\text{BY}}}{M}; \quad (4.67a)$$

– при попутном ветре

$$g \sin \psi_0 + \frac{F'_{r\text{BX}}}{M} \cos \psi_0 \gg f_{\text{СК}} \left( g \cos \psi_0 + \frac{F'_{r\text{BX}}}{M} \sin \psi_0 \right) + f_{\text{СК}0} \frac{F'_{r\text{BY}}}{M}. \quad (4.68a)$$

В частном случае, при отсутствии ветра, т. е.  $F'_{r\text{BX}} = F'_{r\text{BY}} = 0$ , условия (4.67a) и (4.68a) примут простой вид:

$$\sin \psi_0 \gg f_{\text{СК}} \cos \psi_0$$

или, как *отвлечённые числа*, поскольку левая часть неравенства представляет собой геометрический параметр, а правая – физический:

$$\text{tg} \psi_0 \gg f_{\text{СК}}. \quad (4.69)$$

Интегрируя уравнение (4.66) с учётом того, что  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v(t)$ , получим

$$v(t) = At + C,$$

где  $C$  – постоянное интегрирование, имеющее размерность скорости, м/с.

Согласно начальному условию задачи (задача Коши), в момент  $t = t_0$ ,  $\dot{x}_0 = v_0$ , так, что  $C = v_0$ . Следовательно, можно записать уравнение скорости скатывания вагона с горки в виде:

$$v(t) = At + v_0. \quad (4.70)$$

По истечении  $t = t_1$  секунд скорость скатывания вагона равна, м/с:

$$v(t_1) = At_1 + v_0. \quad (4.71)$$

*Анализ полученных результатов.* Из уравнения (4.70) (или (4.71)) видно, что даже при малом значении начальной скорости  $v_0 = (1,1 \div 1,38)$  м/с скорость  $v(t_1)$  достаточно велика. Именно по этой причине перед подходом вагона (отцеп) к стрелочной зоне при скатывании вагона даже по малым уклонам горки следует его затормозить, располагая на участке 1 – 2 1-ю тормозную позицию (1ТРП) (см. рис. 4.17) и вводя дополнительные трения тормозными балками об обода колёс колёсных пар тележек<sup>111</sup> [Туранов, 2008].

*Задача 3*<sup>112</sup>. В задаче 2 отмечено, что при скатывании вагона даже по малым уклонам горки следует его затормозить, располагая на участке 1 – 2 первую тормозную позицию (1ТРП) с координатами  $a$  и  $b$  (см. рис. 4.17).

*Постановка начальных условий задачи* (или задача Коши). Пусть при  $t = t_0$   $\dot{x}_0 = v_{\text{вх}} = v_0$ , как скорость входа вагона на 1ТРП, является начальным условием задачи.

*Условия задачи.* Во время торможения вагона (или отцеп) на 1ТРП на него действуют проекции силы тяжести вагона с грузом  $G_x = G \sin \psi_{02}$  на ось  $x$ ; силы аэродинамического сопротивления  $F'_{\text{вх}}$  и  $F'_{\text{вы}}$  на ось  $x$  и  $y$ ; нормальная составляющая реакции связи (рельсовых нитей)  $N$  (см. (4.51)) и сила прижатия тормозных колодок балок замедлителей вагона  $F_{\text{ТК}}$ .

<sup>111</sup> Туранов Х.Т. Прикладная механика в сфере грузовых перевозок грузов в вагонах: учебн. пособие. – Екатеринбург: УрГУПС, 2008. – 347 с.

<sup>112</sup> Данная задача является дальнейшим развитием задачи, решённой в книге: Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Ч. 2. Динамика. – М.;– Л: ГИТТЛ, 1952. – 484 с.

Предполагаем, что силы аэродинамического сопротивления  $F'_{\text{вх}}$  и  $F'_{\text{вy}}$  имеют постоянное значение (см. (3.10) – (3.12)), что возможно лишь при равномерном движении вагона по горке (т. е. при  $v_e = v_{\text{евх}} = \text{const}$ ).

Силы трения скольжения колёс по рельсу  $F_{\text{тр}}^{\text{ТП}}$  при прохождении вагона на длине горочной тормозной позиции найдём, учитывая, что каждое колесо тележки вагона входит на участок ТРП горки последовательно, т. е. с запаздыванием на некоторое время  $\tau$ :

$$F_{\text{тр}}^{\text{ТП}} = f_{\text{ск}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{вх}} \sin \psi_{02}) + f_{\text{ТП}} (F_{\text{тк}} + F'_{\text{рвy}}), \quad (4.72)$$

где  $f_{\text{ск}}$  – коэффициент трения скольжения колёс о рельсовые нити («металл по металлу»  $f_{\text{ТП}} = 0,15 \div 0,25$ );  $\psi_{02}$  – угол наклона участка 1 ТРП (можно принять не менее 12 ‰);  $f_{\text{ТП}} = 0,14 \div 0,20$  – коэффициент трения скольжения колёс о тормозные колодки балок замедлителей вагона;  $F_{\text{тк}}$  – сила прижатия тормозных колодок балок замедлителей вагона.

Будем иметь в виду, что в (4.72)  $f_{\text{ТП}} F_{\text{тк}}$  представляет собой силу трения контактируемых поверхностей тормозных колодок балок замедлителей вагона и рельсовых нитей об обода колёс колёсных пар тележек и она равносильна тормозной силе вагонного замедлителя  $F_{\text{торм}}$ , т. е.  $f_{\text{ТП}} F_{\text{тк}} = F_{\text{торм}}$ . При решении практических задач можно принять  $F_{\text{торм}} \approx 0,1 G_x = 0,1 G \sin \psi_{02}$ .

*Постановка задачи.* По данным задач 1 и 2 и заданной длине участка 1 ТРП –  $l_{\text{аб}}$  требуется найти скорость движения вагона (см. рис. 4.17).

*Решение.* Дифференциальное уравнение движение вагона, составленное согласно принципу Д Аламбера с учётом проекции силы тяжести вагона с грузом  $G_x = G \cos \psi_{02}$  на ось  $x$  и силы аэродинамического сопротивления  $F'_{\text{вх}}$  и  $F'_{\text{вy}}$  на ось  $x$  и  $y$ , имеет вид уравнения (4.57):

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = G \sin \psi_{02} - F'_{\text{рвх}} \cos \psi_{02} - \left( f_{\text{ск}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{вх}} \sin \psi_{02}) + f_{\text{ТП}} F'_{\text{рвy}} \right) - F_{\text{торм}},$$

где  $M$  – масса вагона с грузом, кг;  $F_{\text{торм}} = f_{\text{ТП}} F_{\text{тк}}$  – тормозная сила вагонного замедлителя, Н.

Представим последнее уравнение в виде

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = B, \quad (4.73)$$

где  $B$  – постоянное число, имеющее размерность силы, Н:

– при встречном ветре

$$B = G \sin \psi_{02} - F'_{r_{\text{ВХ}}} \cos \psi_{02} - \left( \begin{array}{l} f_{\text{СК}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{ВХ}} \sin \psi_{02}) + \\ + f_{\text{ТП}} F'_{r_{\text{ВУ}}} \end{array} \right) - F_{\text{ТОРМ}} ;$$

– при попутном ветре

$$B = G \sin \psi_{02} + F'_{r_{\text{ВХ}}} \cos \psi_{02} - \left( \begin{array}{l} f_{\text{СК}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{ВХ}} \sin \psi_{02}) + \\ + f_{\text{ТП}} F'_{r_{\text{ВУ}}} \end{array} \right) - F_{\text{ТОРМ}} .$$

В частном случае, при неучёте силы ветра,

$$B = G(\sin \psi_{02} - f_{\text{СК}} \cos \psi_{02}) - F_{\text{ТОРМ}} .$$

Уравнение (4.73) имеет физический смысл лишь тогда, когда соблюдаются условия:

– при встречном ветре

$$G \sin \psi_{02} > F'_{r_{\text{ВХ}}} \cos \psi_{02} + f_{\text{СК}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{ВХ}} \sin \psi_{02}) + f_{\text{ТП}} F'_{r_{\text{ВУ}}} + F_{\text{ТОРМ}} , \quad (4.74)$$

причём в правой части (4.74) ещё должно быть учтено условие

$$F_{\text{ТОРМ}} \gg F'_{r_{\text{ВХ}}} \cos \psi_{02} + f_{\text{СК}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{ВХ}} \sin \psi_{02}) + f_{\text{ТП}} F'_{r_{\text{ВУ}}} ; \quad (4.74a)$$

– при попутном ветре

$$G \sin \psi_{02} + F'_{r_{\text{ВХ}}} \cos \psi_{02} > f_{\text{СК}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{ВХ}} \sin \psi_{02}) + f_{\text{ТП}} F'_{r_{\text{ВУ}}} + F_{\text{ТОРМ}} , \quad (4.75)$$

причём в правой части (4.75) ещё должно быть учтено условие:

$$F_{\text{ТОРМ}} \gg f_{\text{СК}} (G \cos \psi_{02} + F'_{\text{ВХ}} \sin \psi_{02}) + f_{\text{ТП}} F'_{r_{\text{ВУ}}} . \quad (4.75a)$$

Особо отметим, что при соблюдении условий (4.74a) и (4.75a) для того, чтобы вагон двигался на участке 1ТПП со скоростью  $v_e(t)$  меньшей, чем скорость входа  $v_{\text{евх}}(t)$  в 1ТПП, т. е.  $v_e(t) < v_{\text{евх}}(t)$ , необходимо соблюдение следующих условий:

– при встречном ветре

$$G \sin \psi_{02} > F_{\text{торм.}} ; \quad (4.74б)$$

– при попутном ветре

$$G \sin \psi_{02} + F'_{\text{рвх}} \cos \psi_{02} > F_{\text{торм.}} . \quad (4.75, б)$$

Подчеркнём, что при несоблюдении условий (4.74, б) и (4.75, б) имеется вероятность торможения вагона с остановкой на длине участка 1ТРП, что допустимо для интервального регулирования движения вагонов по профилю горки.

Разделяя обе части (4.73) на  $M$  и интегрируя её с учётом того, что  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v(t)$ , имеем

$$v(t) = \frac{B}{M}t + C_1,$$

где  $C_1$  – постоянное интегрирование, имеющее размерность скорости, м/с.

Согласно начальному условию задачи, в момент  $t = t_0$   $\dot{x}_0 = v_{\text{евх}} = v_0$ , так что  $C_1 = v_0$ . Следовательно, можно записать уравнения скорости движения вагона на участке 1ТРП в виде

$$v(t) = \frac{B}{M}t + v_0 . \quad (4.76)$$

Интересно отметить, что на участке 1ТРП обязательно должно соблюдаться условие  $\frac{B}{M}t < v_0$  с тем, чтобы было достигнуто  $v(t) < v_0$ , поскольку перед подходом вагона (отцеп) к стрелочной зоне (за пределы 1ТРП (см. рис. 4.17)) движение вагона должно быть замедленным.

Интегрируя уравнение (4.76) с учётом того, что  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ , находим

$$x(t) = \frac{B}{M} \frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2, \quad (4.77)$$

где  $C_2$  – постоянное интегрирование, имеющее размерность длины, м, которое при  $t = t_0$

$$0 = \frac{B}{M} \frac{t_0^2}{2} + v_0 t_0 + C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{B}{M} \frac{t_0^2}{2} - v_0 t_0.$$

Подставляя значение  $C_2$  в (4.77), получим путь  $s(t) = x(t)$ , который пройдёт вагон в пределах длины участка 1 ТРП за время  $t$ :

$$s(t) = \frac{1}{2M} B(t^2 - t_0^2) + v_0(t - t_0). \quad (4.78)$$

Отсюда можно найти время  $t_{ab}$ , в течение которого вагон пройдёт заданную (согласно Проекту для существующих горок) длину участка  $l_{ab} = s$  с координатами  $a$  и  $b$  1 ТРП (см. рис. 4.17):

$$t_{1,2} = \frac{1}{B} \left( Mv_0 \pm \sqrt{M^2 v_0^2 + Bc_0} \right) \quad (4.79)$$

где  $c_0$  – постоянное число, имеющее размерность кг·м:

$$c_0 = 2Ml_{ab} + Bt_0^2 + 2Mv_0 t_0. \quad (4.79a)$$

Время  $t_{ab} = t_{1,2}$ , с, из которого за  $t_{ab}$  примем  $t_2$  как имеющее меньшее значение, чем  $t_1$ .

В частном случае, при несоблюдении условий (4.74б) и (4.75б) имеется вероятность торможения вагона с остановкой на длине участка 1 ТРП (хотя это допустимо). В этом случае время остановки  $t_{ост}$  найдём, учитывая, что в (4.76)  $v_e(t_{ост}) = 0$ :

$$t_{ост} = -\frac{M}{B} v_0. \quad (4.80)$$

Здесь отрицательный знак показывает на замедление движения и на то, что  $t_{ост} < t$  ( $t$  – текущее время).

Подставляя (4.80) в (4.78), можно получить путь торможения (или тормозной путь)  $s_{торм}$  в пределах участка 1 ТРП, м:

$$x(t_{\text{ост}}) = \frac{1}{2M} B \left( \frac{M^2}{B^2} v_0^2 - t_0^2 \right) + v_0 \left( \frac{M}{B} v_0 - t_0 \right)$$

или после упрощений с учётом того, что  $x(t_{\text{ост}}) = s_{\text{торм}}$ :

$$s_{\text{торм}} = \frac{3}{2} \frac{M}{B} v_0^2 - \frac{1}{2M} B t_0^2 - v_0 t_0. \quad (4.81)$$

Отсюда ясно, что путь торможения растёт пропорционально квадрату начальной скорости (см. (4.43)).

*Анализ полученных результатов.* В результате аналитического моделирования движения вагона на участке первой тормозной позиции сформулированы различные условия, при которых возможно движение вагона на участке 1ТПП со скоростью  $v_e(t)$  меньшей, чем скорость входа  $v_{\text{вх}}(t)$  в 1ТПП, т. е.  $v_e(t) < v_{\text{вх}}(t)$ . Выведены конечные аналитические формулы для нахождения скорости, пройденного пути и времени движения на заданной длине тормозного участка, позволяющие обеспечить замедленное движение вагона (отцеп) перед стрелочной зоной (за пределы 1ТПП). Получены аналитические формулы для расчёта времени остановки на заданной длине тормозного участка и пути торможения в случае, когда движущие вагон силы меньше, чем тормозящие, что может быть при несоблюдении условий  $G \sin \psi_{02} > F_{\text{торм}}$  и  $G \sin \psi_{02} + F'_{\text{вх}} \cos \psi_{02} > F_{\text{торм}}$ .

II. Рассмотрим случай, когда механическая система «груз–вагон» движется по рельсовым нитям по кривому участку пути с ускорением. При этом *связь между колёсами вагона и рельсовыми нитями идеальная, а поверхность гладкая.*

Особо отметим, что в специальных задачах грузовых перевозок нормальную составляющую  $\bar{I}_n$  силы инерции Д'Аламбера в абсолютном движении можно формально учитывать при движении грузового вагона по кривой, условно приложив её к центру масс колёсных пар совместно с боковыми рамами тележек вагона. При этом из общей массы тележек следует исключить массу наддрессорных балок, поскольку они входят в число масс наддрессорного строения. Исходя из этого не следует считать, что сила инерции Д'Аламбера возникает при движении тела в кривой как сила давления движущегося тела на рельсовые нити (действия)<sup>113</sup>;

<sup>113</sup> Шахуньянц Г.М. Железнодорожный путь. – М.: Транспорт, 1987. – 479 с.

Большая энциклопедия транспорта: в 8 т. Т. 4. Железнодорожный транспорт / Гл. ред. Н. С. Конарев. – М.: Большая российская энциклопедия, 2003. – 1039 с.

Для примера рассмотрим схему приложения сил к колесной паре грузового вагона, включая нормальную составляющую  $\bar{I}_n$  силы инерции Д'Аламбера, которая представлена на рис. 4.18<sup>114</sup>.

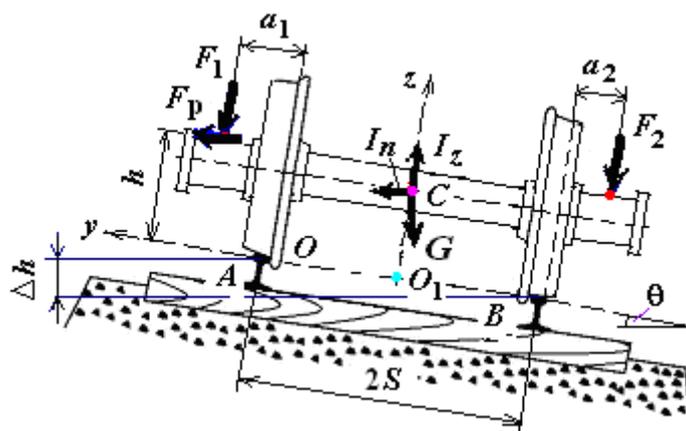


Рис. 4.18. Схема приложения внешних сил к колесной паре вагона.

На рис. 4.18 обозначено:  $G$  – сила тяжести колёсной пары, кН;  $F_1$  и  $F_2$  – нагрузки от кузова на шейки оси **мало**нагруженной колёсной пары по вертикали, кН [Вериго, Коган, 1986];  $F_p = H_p$  – рамная сила, как доля горизонтальной поперечной силы  $F_y$ , приходящейся на **мало**нагруженное колесо, кН<sup>115</sup>;  $h$  – расстояние от головки рельса до приложения рамной силы, м (обычно принимают 0,54 м, поскольку  $h = r_k + r_{ш}$ );  $I_n$  – нормальная составляющая сила инерции колёсной пары в абсолютном движении, учитывающая её движение с ускорением в поперечном направлении по кривому участку пути, кН;  $I_z$  – сила инерции колёсной пары в абсолютном движении, учитывающая её движение с ускорением по вертикали вниз из-за неровности пути, как неблагоприятный случай для опускания колеса вниз, кН;  $a_1$  – расстояние от центра шейки оси колёсной пары до гребня колеса упорной нити (у четырёхосного грузового вагона принимают 0,264 м) и  $a_2$  – расстояние от центра шейки оси колёсной пары до точки контакта колеса с внутренней рельсовой нитью (принимают 0,168 м);  $\Delta h$  – возвышение наружной рельсовой нити  $A$  относительно внутренней  $B$ , м;  $\theta$  – угол, характеризующий возвышение наружной рельсовой нити, рад.;  $2S$  – расстояние между точками контакта колёс с рельсами, т. е. расстояние между осями рельсов, м (обычно 1,58 м).

<sup>114</sup> Туранов, Х.Т. Построение динамических моделей устойчивости колеса колёсной пары грузового вагона при вкатывании на головку рельса / Х.Т. Туранов, А.Р. Якупов // Транспорт: Наука, техника и управление. – 2011. – № 7. – С. 8–14.

<sup>115</sup> Туранов, Х.Т. Математическое моделирование рамных сил при движении подвижного состава с несимметрично размещённым грузом / Х.Т. Туранов, А.Р. Якупов, А.А. Ватонин // Транспорт: Наука, техника и управление. – 2011. – № 11. – С. 15–21.

Для построения динамической модели колёсной пары тележек грузового вагона будем иметь в виду, что для колёсной пары рельсовые нити  $A$  и  $B$  являются основными неидеальными и неударживающими связями, ограничивающими её от перемещения в поперечном направлении, т. е. вдоль подрельсового основания (шпал). *Иначе*, основное назначение рельсовых нитей  $A$  и  $B$ , как внешних связей, – это направление колес тележек подвижного состава при движении на прямых и в кривых участках пути.

*Задача 4.* Известно, что наружный рельс устанавливают с возвышением относительно внутреннего с целью выравнивания давления колес на рельсовые нити ( $\bar{Q}$ ) и уменьшения величины опрокидывающего момента ( $M_{\text{опр}}$ ) при движении подвижного состава по кривому участку пути (см. рис. 4.18).

*Постановка задачи.* Требуется вывести аналитические формулы для определения нормальных составляющих реакции внешних связей (рельсовых нитей)  $\bar{N}_A$  и  $\bar{N}_B$  на воздействие колёс колёсной пары грузового вагона.

*Принятые допущения.* В отличие от [Вериго, Коган, 1986; Шахуньянц, 1987], допускаем, что вертикальные силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , приложенные на шейки оси колёсной пары, препятствуют вкатыванию гребня прямолинейной части **мало-**нагруженного колеса на головку упорного рельса  $A$  относительно точки  $O$  под действием рамной силы  $\bar{F}_p$ .

*Решение.* Согласно принципу освобождаемости от связей геометрической статики, вначале освобождают колёсную пару от рельсовых нитей  $A$  и  $B$  (см. рис. 4.18), заменяя их влияние реакциями внешних связей  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$ . Через точки контакта колёс с рельсовыми нитями  $A$  и  $B$  проводят касательные  $\tau - \tau$  и нормали  $n - n$  так, как показано на рис. 4.19. Показывают оси координат  $O_1 yz$ .

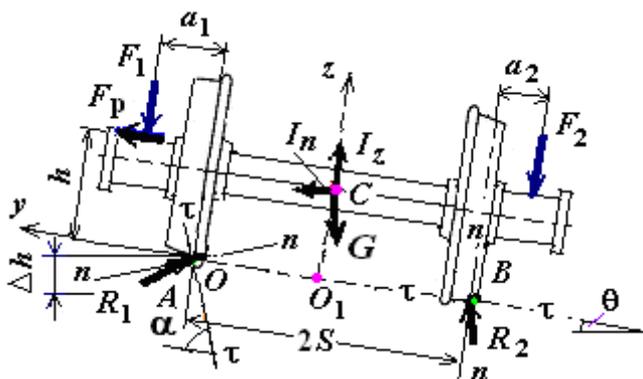


Рис. 4.19. Динамическая модель вкатывания колёсной пары вагона.

Имеют в виду, что касательная  $\tau - \tau$  к рабочей грани головки рельса в точке  $O$  касания гребня наружного колеса с рельсом упорной нити  $A$  образует с

горизонталью (ось  $O_1y$ ) угол  $\alpha$  (обычно принимают для грузовых вагонов равным  $60^\circ$ , а для локомотивов –  $70^\circ$ ). Учитывая, что перемещению оси колёсной пары относительно рельсовых нитей препятствуют силы трения между их контактируемыми поверхностями, реакции связей  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  направляют противоположно перемещению колёс с некоторыми отклонениями (обычно на угол трения) от нормали  $n - n$ . Так поступают из-за того, что хотя точки приложения  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  как векторных величин известны, но их направления и величина неизвестны. В соответствии с этим реакции связей  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  раскладывают на нормальные  $\bar{N}_1, \bar{N}_2$  и касательные  $\bar{F}_{\tau 1}, \bar{F}_{\tau 2}$  составляющие так, как показано на рис. 4.20.

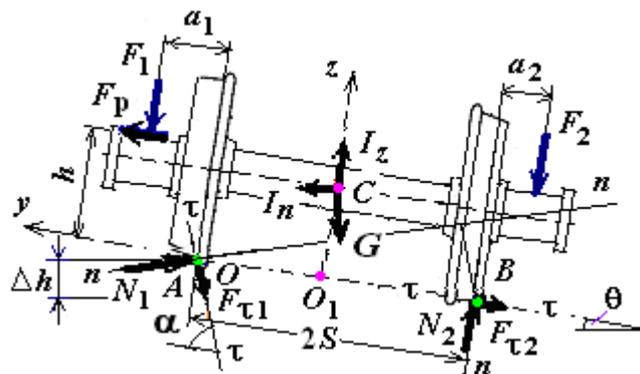


Рис. 4.20. Динамическая модель вкатывания **малонагруженной** колёсной пары.

Учитывают, что касательные составляющие  $\bar{F}_{\tau 1}$  и  $\bar{F}_{\tau 2}$  реакции связей представляют собой силы трения между контактируемыми поверхностями колёс и рельсовыми нитями, т. е.  $\bar{F}_{\tau 1} = \bar{F}_{\tau p 1}$ ,  $\bar{F}_{\tau 2} = \bar{F}_{\tau p 2}$ . Силы трения, как силы сопротивления, всегда направлены в сторону, противоположную скольжению гребня колеса по рабочей грани головки упорного рельса, так, как показано на рис. 4.20.

Таким образом, получают динамическую модель колёсной пары вагона для определения устойчивости колеса на рельсе (см. рис. 4.18).

Согласно принципу Даламбера в динамической модели колёсной пары тележек грузового вагона должно соблюдаться условие (см. уравнение (4.45)):

$$\bar{I}_n + \bar{I}_z = \bar{G} + \bar{F}_p + \bar{F}_1 + \bar{F}_1 + \bar{R}_1 + \bar{R}_2.$$

Покажем решение задачи составлением двух уравнений моментов сил относительно двух произвольных точек  $O$  и  $B$  (рис. 4.20).

Известно, что условия равновесия сил геометрической статики, как плоской системы, может быть записано и в виде (см. (2.51)):

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0. \quad (4.82)$$

Второе и третье уравнение системы (4.82) могут быть использованы для определения  $N_1$  и  $N_2$ , а первое – в классической механике служит контролем **корректности** решения задачи.

Запишем второе и третье уравнение системы (4.82) относительно двух произвольных точек  $O$  и  $B$  (см. рис. 4.20):

$$F_p h + M_1 + I_z S + I_n (\cos(\theta) r_k - \sin(\theta) S) - G(\cos(\theta) S + \sin(\theta) r_k) - F_2 2S - M_2 + N_2 2S = 0; \quad (4.83)$$

$$F_p h + M_1 + F_1 2S - N_1 h_1 + F_{\tau 1} h_{\tau 1} - I_z S + I_n (\cos(\theta) r_k + \sin(\theta) S) + G(\cos(\theta) S - \sin(\theta) r_k) - M_2 = 0, \quad (4.84)$$

где  $r_k$  – радиус колеса;  $h_1$  и  $h_{\tau 1}$  – плечо сил  $N_1$  и  $F_{\tau 1}$ :

$$h_1 = 2S \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2S \cos(\alpha); \quad h_{\tau 1} = 2S \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2S \sin(\alpha). \quad (4.85)$$

Вводя понятия «удерживающих»  $M_{уд.}$  и «опрокидывающих»  $M_{опр.}$  моментов сил (см. п. 2.10)<sup>116</sup>:

$$M_{уд.} = I_n \sin(\theta) S + G(\cos(\theta) S + \sin(\theta) r_k) + F_2 2S + M_2;$$

$$M_{опр.} = F_p h + M_1 + I_z S + I_n \cos(\theta) r_k,$$

перепишем (4.83) в виде

$$M_{опр.} - M_{уд.} + N_2 2S = 0. \quad (4.86)$$

С учётом закона Кулона (2.64) и последних соотношений перепишем (4.84) в виде

$$F_p h + M_1 + F_1 2S - N_1 2S \cos(\alpha) + f N_1 2S \sin(\alpha) - I_z S + I_n (\cos(\theta) r_k + \sin(\theta) S) + G(\cos(\theta) S - \sin(\theta) r_k) - M_2 = 0$$

или

<sup>116</sup> Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. 1. Статика. Кинематика. – М.: Высш. шк., 1977. – 368 с.

$$F_p h + M_1 + F_1 2S - N_1 2S(\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)) - I_z S + \\ + I_n (\cos(\theta) r_k + \sin(\theta) S) + G(\cos(\theta) S - \sin(\theta) r_k) - M_2 = 0. \quad (4.87)$$

Из (4.86) и (4.87) непосредственно найдём неизвестные нормальные составляющие  $N_1$  и  $N_2$  реакции внешних связей  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$ :

$$N_2 = \frac{1}{2S} (M_{уд.} - M_{опр.}). \quad (4.88)$$

$$N_1 = \frac{F_p h + M_1 + F_1 2S - I_z S + I_n (\cos(\theta) r_k + \sin(\theta) S) + \\ + G(\cos(\theta) S - \sin(\theta) r_k) - M_2}{2S(\cos(\alpha) - f \sin(\alpha))}. \quad (4.89)$$

Заметим, что в (4.88) при любых исходных данных должно соблюдаться условие  $M_{уд.} > M_{опр.}$ .

Полученные формулы представляют собой математическую модель нагруженной первой колёсной пары передней тележки вагона при движении подвижного состава по кривому участку пути.

Контролем правильности аналитических выражений является выполнение следующего равенства, вытекающего из первого уравнения (4.82):

$$(F_1 + F_2 - I_z) + I_n \sin(\theta) + G \cos(\theta) = N_1 (\cos(\alpha) + f \sin(\alpha)) + N_2. \quad (4.90)$$

*Анализ полученных результатов.* Нормальная составляющая  $N_1$  реакции наружной рельсовой нити  $R_1$  в основном зависит от рамной силы  $F_p$ , коэффициента трения между контактируемыми поверхностями гребня колеса и упорного рельса и вертикальных сил  $F_1$  и  $F_2$ , приложенных на шейки оси колёсной пары. Нормальная составляющая  $N_2$  реакции внутренней рельсовой нити  $R_2$  также зависит от значений активных сил  $F_p$ ,  $F_1$  и  $F_2$ , но не зависит от состояния контактируемых поверхностей колеса и рельса, учитываемых коэффициентом трения скольжения. Нормальные составляющие реакции рельсовых нитей  $N_1$  и  $N_2$ , согласно закону равенства действия и противодействия механики, равны силам давления  $Q_A$  и  $Q_B$  вагона с грузом, но направлены противоположно (т. е.  $N_1 = -Q_A$  и  $N_2 = -Q_B$ ).

**Пример расчёта.** Приведём результаты вычислительных экспериментов в системе MathCAD<sup>117</sup>.

<sup>117</sup> Кирьянов, Д. Самоучитель MathCAD 13 / Д. Кирьянов. – СПб.: БХБ-Петербург, 2006. – 528 с.

*Исходные данные задачи.* Пусть в кривом участке пути с радиусом кривизны заданной точки кривого участка пути  $\rho = 320$  м произошёл сход грузового вагона из-за вкатывания гребня колеса на головку наружного рельса<sup>118</sup>. Скорость движения подвижного состава была  $v = 70$  км/ч. По одной из версий, это могло произойти по причине жёсткого торможения. По одним сведениям, тормозная сила достигала 700, а по другим – 1 000 кН. Расчёт следует выполнить при трёх величинах рамной силы  $F_p$ , которые получены по данным ВНИИЖТ:  $F_{p1} = 50$ ,  $F_{p2} = 78$  и  $F_{p3} = 89$  кН.

*Характеристика пути.* Рельсы Р65, шпалы деревянные 2 000 шт./км, балласт гравийный, состояние пути плохое (коэффициент трения скольжения гребня колеса по рельсу  $f = 0,25$ ); радиус кривизны заданной точки кривого участка пути  $\rho = 320$  м; возвышение наружной рельсовой нити  $A$  относительно внутренней  $B$  –  $\Delta h = 0,1$  м;  $\theta = \arctg(\Delta h/2S) = \arctg(0,1/1,58) = 0,063$  – угол, характеризующий возвышение наружной рельсовой нити, рад. ( $\theta \cdot 180/\pi = 3,621$  град.).

Отметим, что для заданной скорости движения  $v$  и радиуса кривизны кривого участка пути  $\rho$  расчётная величина  $\Delta h = 0,19$  м, в то время как заданная величина  $\Delta h = 0,1$  м соответствует расчётной скорости движения подвижного состава 52 км/ч.

*Характеристика грузового вагона.*  $G = 15$  – сила тяжести колёсной пары, кН;  $G_{бр} = 920$  – вес брутто, кН ( $M = 9,378 \cdot 10^4$  – масса кузова с грузом, кг);  $n_k = 8$  – количество осей экипажа, шт.;  $G_{ст.} = G_{бр}/n_k = 115$  – статическая нагрузка от колёса на рельс, кН;  $G_k = 844$  – вес кузова с грузом, кН;  $f = 0,25$  – коэффициент трения скольжения гребня колеса по рельсу;  $F_1 = G_{ст.}$  и  $F_2 = G_{ст.}$  – нагрузка от кузова на шейки оси колёсной пары, кН (здесь предполагали, что груз размещён симметрично относительно продольной оси вагона).

*Результаты расчётов.* Нормальная составляющая реакции рельсовых нитей  $A$  и  $B$ , вычисленные по (4.88) и (4.89) в системе MathCAD при величине рамной силы  $F_{p1} = 50$  кН, оказались равными  $N_1 = 484,5$  и  $N_2 = 131,45$  кН. При  $F_{p1} = 78$  кН:  $N_1 = 518,9$  и  $N_2 = 121,7$  кН; при  $F_{p1} = 89$  кН:  $N_1 = 532,4$  и  $N_2 = 117,9$  кН. Увеличение рамной силы  $F_p$  увеличивает значение реакции связи  $N_1$  и уменьшает  $N_2$  (рис. 4.21, а). Уменьшение коэффициента трения скольжения  $f$  при  $F_p = \text{const.}$  – увеличивает значение  $N_1$  (рис. 4.21, б). Здесь учтено, что  $N_2$ , согласно (4.88), не зависит от  $f$ . При любых исходных данных соблюдается равенство (4.90) (268,81 кН), что подтверждает корректность выполненных расчётов.

<sup>118</sup> Расчёты и проектирование железнодорожного пути: учебн. пособие для студентов вузов ж. – д. трансп. / В.В. Виноградов, А.М. Никонов, Т.Г. Яковлева и др. // Под ред. В.В. Виноградова и А.М. Никонова. – М.: Маршрут, 2003. – 486 с.

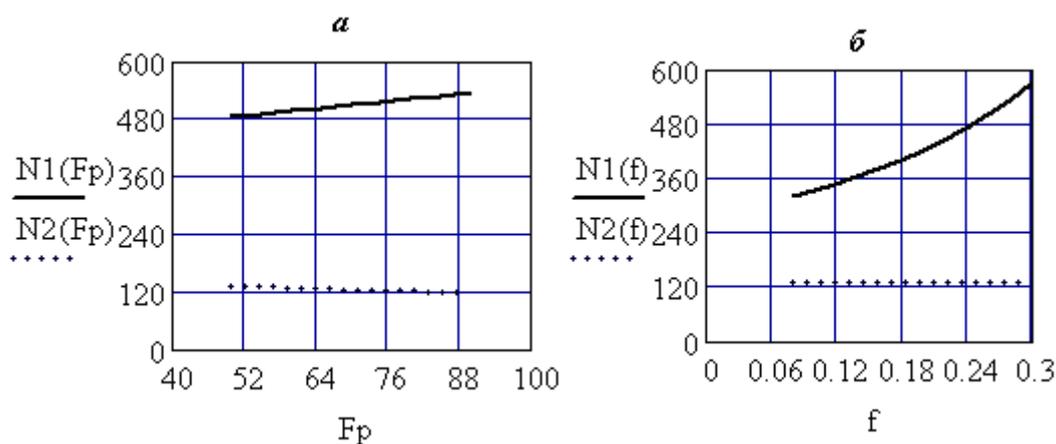


Рис. 4.21. Графические зависимости  $N_1$  и  $N_2$  от вариации  $F_p$  и  $f$ .

Таким образом, результаты вычислительных экспериментов на основе (4.88) и (4.89) показали, что при любых исходных данных будет соблюдено условие  $N_1 \cos \alpha > N_2$  и равенство (4.90), что соответствует физическому смыслу решаемой задачи.

#### 4.6. Относительное движение материальной точки

##### Основное понятие

Напомним, что второй закон динамики и полученные из него уравнения и теоремы верны только для так называемого «абсолютного» движения точки, т. е. движения по отношению к инерциальной («неподвижной») системе отсчёта. Иначе, эти положения, вытекающие из второго закона динамики, верны в системе отсчёта, связанного с Землёй без учёта её вращения относительно своей оси.

Переходим к изучению *относительного движения точки* (например,  $B$ ), т. е. *движения точки по отношению к неинерциальной системе отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$* , которая, в свою очередь, движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчёта  $Oxyz$  (рис. 4.22).

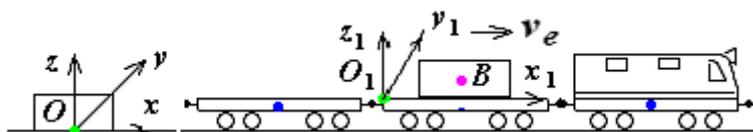


Рис. 4.22. Система координат, связанная с подвижным телом.

**4.6.1. Дифференциальное уравнение относительного движения точки  
(основной закон динамики для относительного движения точки)**

Пусть, как и в [Туранов, 2009; 2011], материальная точка  $M$  движется под действием приложенных к ней систем сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  (или результирующей силы  $\bar{R}_p$ ), являющихся результатом взаимодействия точки с другими материальными телами. Применительно к задачам грузовых перевозок здесь под понятие «материальная точка» можно отнести груз, размещённый и закреплённый на вагоне, а под понятия «другие материальные или физические тела» – вагон, гибкие и упорные средства креплений.

Изучим движение точки  $M$  по отношению к осям  $O_1x_1y_1z_1$ . Пусть *неинерциальная* система отсчёта («подвижные» оси)  $O_1x_1y_1z_1$ , связанная с вагоном, в свою очередь движется с ускорением по некоторым известным законам (например, с переносной скоростью  $\bar{V}_e$  вагона) относительно инерциальной системы отсчёта («неподвижных» осей)  $Oxyz$  (рис. 4.23, а).

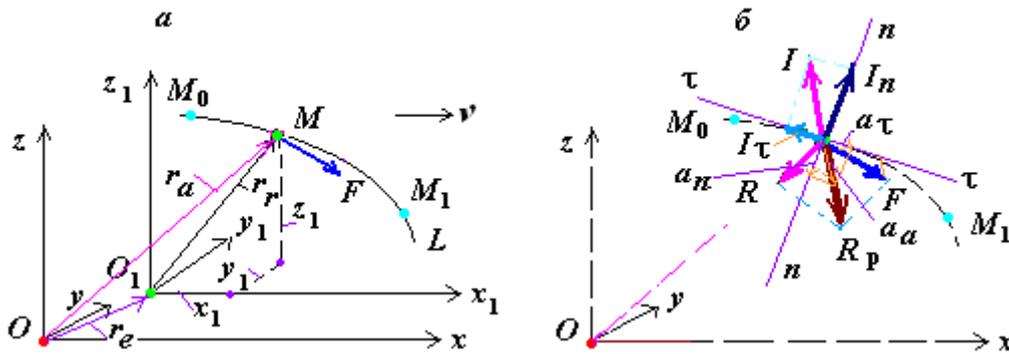


Рис. 4.23. Движение точки в неинерциальной системе отсчёта.

Необходимо установить зависимость между относительным ускорением точки  $\bar{a}_r$  и действующими на неё силами.

Для этого запишем принцип Д'Аламбера, вытекающего из основного закона динамики для абсолютного движения (второй закон Ньютона),

$$m\bar{a}_{abc} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k, \quad (4.91)$$

где  $m$  – масса точки, кг;  $\bar{a}_{abc}$  – абсолютное ускорение точки в инерциальной («неподвижной») системе отсчёта  $Oxyz$ , м/с<sup>2</sup>;  $\bar{F}$  и  $\bar{R}$  – действующая на материальную точку равнодействующая активных сил и приложенная к ней реакция связи (кривая линия  $M_0M_1$ , находящаяся на полу вагона), по которой двигалась точка  $M$  (например, груз)) (см. пояснение к рис. 4.14).

Здесь, согласно принципу освобождаемости от связей геометрической статики, мысленно отброшены пол вагона (пунктирные линии  $M_0M_1$ ) и их влияния заменены реакцией связи  $\bar{R}$ , а затем найдена результирующая сила  $\bar{R}_p$  как геометрическая сумма сил  $\bar{F}$  и  $\bar{R}$  (рис. 4.23, б).

Согласно теореме о сложении ускорений при сложном движении (теорема Кориолиса), известно, что абсолютное ускорение точки ( $\bar{a}_{abc}$ ) определяют по уравнению (см. (1.56))

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_C,$$

где  $\bar{a}_r$ ,  $\bar{a}_e$ ,  $\bar{a}_C$  – относительное, переносное и поворотное ускорение (или ускорение Кориолиса) точки,  $m/c^2$ .

Подставляя последнее уравнение в (4.91), получим

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_C) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k$$

или

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_C). \quad (4.92)$$

Выражения  $(-m\bar{a}_e) = \bar{I}_e$  и  $(-m\bar{a}_C) = \bar{I}_C$  называют силами инерции соответственно *переносного* движения и *Кориолиса*.

Уравнению (4.92) придадим вид

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \bar{I}_e + \bar{I}_C, \quad (4.93)$$

где силу инерции переносного движения  $\bar{I}_e$  и Кориолиса  $\bar{I}_C$  следует принять с положительным знаком, поскольку согласно (4.92) знак уже учтён.

Уравнение (4.93) математически выражает собой **основной закон динамики для относительного движения точки**: движение точки относительно неинерциальной системы координат происходит согласно второму закону динамики для инерциальных систем **при условии**, что в число сил, действующих на точку, **включены** силы инерции **переносного движения** и **Кориолиса**<sup>119</sup>.

При этом *переносные силы инерции* и силы инерции Кориолиса для наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчёта, представляются вполне реально действующими силами<sup>120</sup>.

<sup>119</sup> Вильке В.Г. Теоретическая механика: учебник. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 237 с.

<sup>120</sup> Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

Прибавлением сил инерции *переносного* движения  $\bar{I}_e$  и *Кориолиса*  $\bar{I}_C$  к действующим силам *учитывается влияние* на относительное движение точки *подвижных осей*.

Следовательно, появление переносной силы инерции математически связано с влиянием на относительное движение груза перемещения подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$ . Допустим, что подвижные оси  $O_1x_1y_1z_1$  перемещаются относительно неподвижных осей  $Oxyz$  поступательно с ускорениями  $a_{ex}$ ,  $a_{ey}$  и  $a_{ez}$ . В этом случае по отношению к осям  $O_1x_1y_1z_1$  любая точка, связанная с системой отсчета  $Oxyz$ , будет иметь ускорения  $-a_{ex}$ ,  $-a_{ey}$  и  $-a_{ez}$ . **Основной причиной появления этих ускорений** будет *кинематическая*<sup>121</sup> – *движение подвижной системы отсчёта*  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с вагоном (т. е. движение вагона).

Применительно к грузу, размещённому на вагоне, основной причиной появления переносных ускорений  $a_{ex}$ ,  $a_{ey}$  и  $a_{ez}$  также будет *кинематическая* – движение подвижной системы отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с платформой, т. е. с подвижным составом, движущимся со скоростью поезда  $\bar{V}$  по кривому участку пути с радиусом кривизны  $\rho$  траектории в данной точке (см. рис. 4.22). Следовательно, в неинерциальной системе отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$  груз получает ускорение в результате ускоренного движения самой системы отсчёта. Причиной появления относительных колебаний груза служат *заданные движением вагона резкие перемещения или колебания точек креплений* гибких упругих связей (средств креплений), непосредственно примыкающих к увязочным устройствам вагона.

Таким образом, если в инерциальной системе отсчёта материальная точка, как это видно из уравнения (4.91), может получить ускорение только за счёт действия на неё активных сил  $\bar{F}$ , то **в неинерциальной системе отсчёта материальная точка**, как это видно из уравнения (4.93), **может получить ускорение ещё и в результате движения самой системы отсчёта с ускорением**.

Проецируя на подвижные оси  $O_1x_1y_1z_1$  уравнения (4.93), получим **дифференциальное уравнение относительного движения точки** (см. метод проекций [Бронштейн, Семендяев, 1980]):

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kx_1} + \sum_{k=1}^n R_{kx_1} + I_{ex_1} + I_{Cx_1}; \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{ky_1} + \sum_{k=1}^n R_{ky_1} + I_{ey_1} + I_{Cy_1}; \\ m \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kz_1} + \sum_{k=1}^n R_{kz_1} + I_{ez_1} + I_{Cz_1} \end{aligned} \quad (4.94)$$

или

<sup>121</sup> Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kx_1} + \sum_{k=1}^n R_{kx_1} - ma_{ex_1} - 2m\omega_e v_{rx_1} \sin \varphi; \\
m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{ky_1} + \sum_{k=1}^n R_{ky_1} - ma_{ey_1} - 2m\omega_e v_{ry_1} \sin \varphi; \\
m \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kz_1} + \sum_{k=1}^n R_{kz_1} - ma_{ez_1} - 2m\omega_e v_{rz_1} \sin \varphi.
\end{aligned} \quad (4.94a)$$

Интегрируя дважды уравнения (4.94) при заданных начальных условиях (см. п. 4.2), находим закон относительного движения точки (4.3) (см. (1.3)):

$$x_1 = f_1(t), \quad y_1 = f_2(t), \quad z_1 = f_3(t).$$

Систему отсчёта, которая движется поступательно, равномерно и прямолинейно, называют *инерциальной* (см. п. 2.1), и в ней  $\bar{I}_e = \bar{I}_C = 0$ . Следовательно, дифференциальное уравнение движения относительно всех инерциальных систем отсчёта имеет один и тот же вид.

Однако *отсюда не следует*, что *точки имеет одинаковые законы движения* в этих системах отсчёта, так как у неё *различные начальные условия* в зависимости от системы отсчёта. Поэтому различные значения будут иметь *произвольные постоянные*, а следовательно, и различные законы движения.

### *Особенности сил инерции переносного движения*

Подводя итоги обсуждения относительного движения точки, особо отметим, что силы инерции переносного движения –  $\bar{I}_e$  обладают рядом особенностей, отличающих их **от сил взаимодействия**<sup>122</sup> (гравитационных, возникающих между всеми телами, согласно закону всемирного тяготения; электромагнитных, возникающих между телами или частицами, обладающими электрическими зарядами; как разновидность электромагнитных – сил упругости и сил трения; сил аэродинамического сопротивления):

сила инерции переносного движения вызвана не взаимодействием тел, а ускоренным движением самой системы отсчёта, поэтому к силам инерции переносного движения не применим закон равенства действия и противодействия механики (третий закон Ньютона);

---

<sup>122</sup> Яворский Б.М., Пинский А.А. Основы физики: Учеб. пособие. В 2-х томах. Т. I. Механика. Молекулярная физика. Электродинамика. – М: Наука, 1981. – 480 с.

сила инерции переносного движения действует только в неинерциальной системе отсчета так же, как и силы взаимодействия. В инерциальных системах таких сил нет;

для любой системы тел, находящейся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции переносного движения являются внешними силами;

сила инерции переносного движения, как и сила тяготения, пропорциональна массе тела, поэтому в поле сил инерции, как и в поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

#### 4.6.2. Понятие о силе инерции Кориолиса<sup>123</sup>

Сила инерции Кориолиса с учётом (1.57) и (4.92) имеет вид

$$\bar{I}_C = -m\bar{a}_C = -2m[\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r], \quad (4.95)$$

её модуль определяется с учётом (1.58) как

$$I_C = -2m\omega_e v_r \sin \varphi, \quad (4.96)$$

где  $\bar{\omega}_e$  – вектор угловой скорости переносного движения (подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$  по радиусу кривизны  $\rho$  траектории данной точки кривой);  $\bar{v}_r$  – вектор относительной скорости точки;  $\varphi$  – угол между векторами  $\bar{\omega}_e$  и  $\bar{v}_r$ .

**Свойства сил инерции Кориолиса.** Сила инерции Кориолиса всегда перпендикулярна относительной скорости движения ( $\bar{I}_C \perp \bar{v}_r$ ), а значит, и касательной  $M\tau$  к относительной траектории точки. Поэтому проекция силы инерции Кориолиса на касательную  $M\tau$  к относительной траектории точки (т. е. на оси системы координат Френе  $M\tau nb$ ) всегда равна нулю ( $\bar{I}_{C\tau} = 0$ ).

Применительно к грузу, размещённому на вагоне, сила инерции Кориолиса появляется при переходе поезда из прямого в кривой участок пути и при движении по кривой (в том числе при переходе на боковой путь). При этом происходит сдвиг груза вдоль (при прохождении стыка) и поперёк вагона (поперечная сила инерции).

Покажем, как находят направление силы инерции Кориолиса. Пусть вагон с грузом, с которым неподвижно связана система координат  $O_1x_1y_1z_1$ , движется по кривому участку пути  $M_1M_2$  по траектории  $L$  с переносной скоростью  $\bar{v}_e$ , равной заданной скорости поезда  $\bar{v}_п$ , относительно неподвижной системы ко-

<sup>123</sup> Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

ординат  $Oxyz$ . В момент времени  $t$  пусть вагон с грузом занял положение  $M$ . Через точку  $M$  проводим касательную  $\tau - \tau$  и нормаль  $n - n$  так, как показано на рис. 4.24 (см. рис. 1.38).

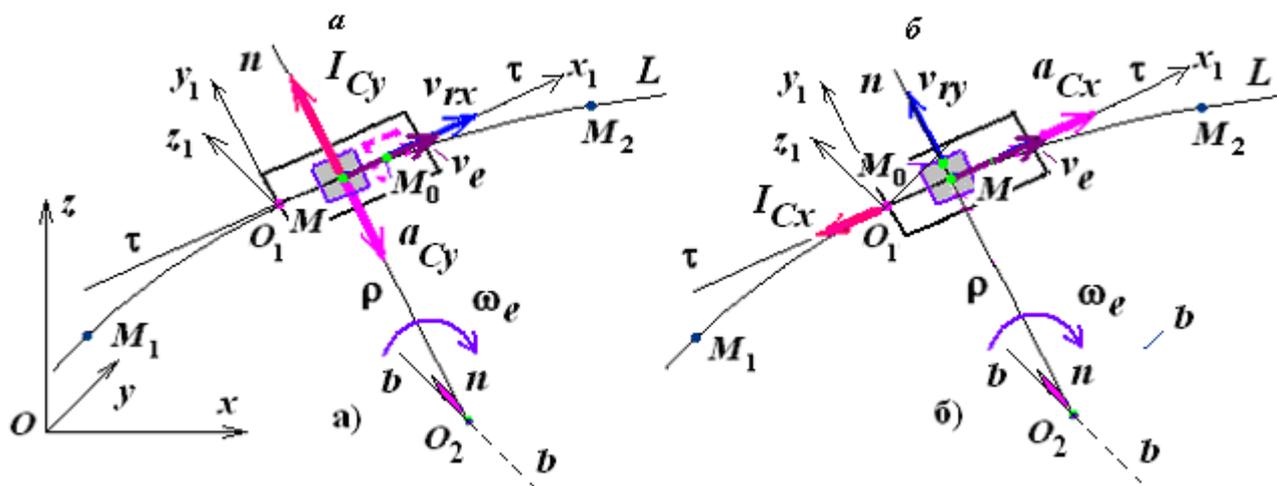


Рис. 4.24. К определению направления силы инерции Кориолиса.

Рассмотрим случай, когда в этот момент времени произойдёт продольный сдвиг груза относительно вагона со скоростью  $\bar{v}_{rx}$  по касательной  $\tau - \tau$  на расстоянии  $MM_0$  (см. рис. 4.24, а). При этом появляется ускорение Кориолиса  $\bar{a}_{Cy}$ ,  $m/c^2$ , модуль которого определяют по формуле

$$a_{Cy} = \omega_e v_{rx}, \quad (4.97)$$

где  $\omega_e$  – переносная угловая скорость подвижного состава, движущегося по кривому участку пути с переносной скоростью  $\bar{v}_e$ , равной скорости поезда  $\bar{v}_п$  (известная величина), рад/с:

$$\omega_e = \frac{v_e}{\rho}$$

с учётом того, что  $\rho$  – кривизна рассматриваемой точки  $M$  траектории  $L$  (для данного профиля пути величина известная);

$\bar{v}_{rx}$  – скорость срыва груза относительно вагона по продольной оси, м/с.

Особо подчеркнём, что ускорение Кориолиса  $\bar{a}_{Cy}$  определяют по величине и направлению скорости груза относительно вагона по продольной оси  $\bar{v}_{rx}$  и всегда направленно в сторону вращения переносной угловой скорости  $\omega_e$  по нормали  $n - n$  к центру кривизны  $\rho$  рассматриваемой точки  $M$  траектории  $L$ .

Модуль силы инерции Кориолиса  $I_{Cy}$  находят по (4.97), а направление противоположно направлению ускорение Кориолиса  $\bar{a}_{Cy}$  (см. рис. 4.24, а).

Рассмотрим второй случай, когда в момент времени  $t$  произойдёт поперечный сдвиг груза относительно вагона со скоростью  $\bar{v}_{ry}$  по нормали  $n - n$  на расстояние  $MM_0$  (см. рис. 4.24, б). При этом появляется ускорение Кориолиса  $\bar{a}_{Cx}$ , модуль которого

$$a_{Cx} = \omega_e v_{ry}, \quad (4.98)$$

где  $\bar{v}_{ry}$  – скорость срыва груза относительно вагона по поперечной оси.

Также подчеркнём, что ускорение Кориолиса  $\bar{a}_{Cx}$  определяют по величине и направлению скорости груза относительно вагона по поперечной оси  $\bar{v}_{ry}$  и всегда направленно в сторону вращения переносной угловой скорости  $\omega_e$  по касательной  $\tau - \tau$  к кривизне  $\rho$  рассматриваемой точки  $M$  траектории  $L$ .

Модуль силы инерции Кориолиса  $I_{Cx}$  находят по формуле (4.96), а направление противоположно направлению ускорение Кориолиса  $\bar{a}_{Cx}$  (см. рис. 4.24, б).

#### 4.6.3. Отличие силы инерции в относительном движении точки от силы инерции в принципе Д'Аламбера

Силы инерции в относительном движении точки (в неинерциальной системе координат) **отличаются** от сил инерции в принципе Даламбера.

Сила инерции для материальной точки является силой **фиктивной** (см. п. 4.5), в то время как в относительном движении **эти силы действуют на связи** и могут быть измерены [Туранов, 2009; 2011].

Например, груз  $B$  при резком торможении вагона с ускорением  $\bar{a}_e$  относительно инерциальной системы отсчёта  $Oxyz$  остается неподвижным, в то время как относительно неинерциальной системы отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$  уходит в обратном направлении с силой, равной  $\bar{I}_e$  (в случае преодоления силы трения между грузом и полом вагона  $\bar{F}_{тр}$ ). Величина переносной силы инерции  $\bar{I}_e$  может быть измерена динамометром  $D$  (рис. 4.25).

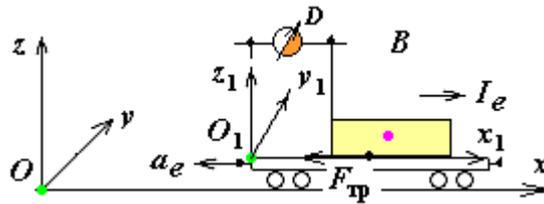


Рис. 4.25. К определению переносной силы инерции.

В данной системе динамометр является дополнительной связью, деформация которой позволяет определить действующую силу инерции.

Применительно к грузу  $B$ , размещённому и закреплённому в вагоне гибкими упругими средствами креплений, переносную силу инерции  $\bar{I}_e$  будут воспринимать именно эти средства креплений.

В соответствии с этим отметим *некоторые особые свойства* силы инерции переносного движения и Кориолиса<sup>124</sup>:

– силы инерции переносного движения и Кориолиса, пропорциональные массам движущихся в неинерциальных системах отсчёта точек, в некотором роде аналогичны силам тяготения (и такая аналогия имеет глубокий физический смысл);

– видимое отсутствие тех материальных тел, которые согласно третьему закону Ньютона могли бы рассматриваться как источники возникновения сил инерции. Это обстоятельство вызывает представление о «фиктивности» сил инерции<sup>125</sup>, что неоправданно, так как третий закон Ньютона сформулирован только для инерциальных систем отсчёта;

– зависимость силы инерции переносного движения и Кориолиса от неинерциального движения системы отсчёта, в которой они определены.

#### *Следствия дифференциального уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта*

1. В случае, если известны величины сил  $\bar{F}$  и  $\bar{R}$ , действующих на материальную точку, то из уравнения (4.91) можно непосредственно определить абсолютное ускорение этой точки  $\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_a$ . Далее, учитывая уравнение (1.56), можно найти относительное ускорение точки

$$\bar{a}_r = \bar{a}_a + (-\bar{a}_e) + (-\bar{a}_C)$$

или с учётом (4.91)

<sup>124</sup> Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с. – С. 422 – 423.

<sup>125</sup> Ишлинский А.Ю. Механика относительного движения и силы инерции. – М.: Наука, 1981. – С. 5–9, 41.

$$\bar{a}_r = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k}{m} + (-\bar{a}_e) + (-\bar{a}_C). \quad (4.99)$$

Это другое выражение теоремы Кориолиса о сложении ускорений, которым можно непосредственно пользоваться при решении задач.

В правой части уравнения (4.99) первое слагаемое выражает ускорение, которое сообщают точке действующие силы  $\bar{F}$  и  $\bar{R}$ , а два других слагаемых являются ускорениями, которые точка получает вследствие движения неинерциальной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с вагоном (т. е. движение вагона).

Из уравнения (4.99) видно, что заданные силы сообщают точке ускорение, равное  $\frac{\bar{F} + \bar{R}}{m}$  в любой системе отсчёта, но в инерциальной системе отсчёта это будет полное ускорение точки, а в неинерциальной – только его часть<sup>126</sup>.

2. Сила инерции Кориолиса обращается в нуль ( $\bar{I}_C = 0$ ) в случае, если подвижные оси  $O_1x_1y_1z_1$  движутся поступательно со скоростью  $\bar{v}_e$  (см. рис. 4.21), т. е. переносное движение поступательное ( $\bar{\omega}_e = 0$ ), что соответствует движению вагона по прямому участку пути. В этом случае основной закон относительного движения точки примет вид

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \bar{I}_e. \quad (4.100)$$

Уравнение (4.100) по аналогии с уравнением (4.57) можно представить так:

$$m \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \bar{I}_e \quad (4.100a)$$

или

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{r}_r}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \bar{I}_e. \quad (4.100б)$$

Уравнение (4.100б) в проекциях на координатные оси имеет вид, подобный (4.94).

Уравнение (4.100a) позволяет найти закон изменения относительной скорости материальной точки, а (4.100б) – относительного движения.

<sup>126</sup> Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.

Применительно к грузу, размещённому на вагоне, уравнением (4.94) можно пользоваться не только в частном случае для определения перемещений груза вдоль и/или поперёк вагона от действий продольной и вертикальной и/или поперечной и вертикальной переносной сил инерции в отдельности, но и в случае воздействия пространственной системы сил.

3. Если переносное движение будет поступательным, равномерным и прямолинейным ( $\bar{v}_e = \overline{\text{const}}$  и  $\bar{a}_\tau = 0$ , а потому и  $\bar{a}_e = 0$ ), то силы инерции переносного движения и Кориолиса обращаются в нуль ( $\bar{I}_e = 0$  и  $\bar{I}_C = 0$ ) и, следовательно, дифференциальное уравнение относительного движения (4.93) имеет такой же вид, как и дифференциальное уравнение абсолютного движения (4.91).

Отсюда вытекает, что никаким физическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчёта в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение. В этом состоит *принцип относительности классической механики*, открытый Галилеем.

4. Из свойства силы инерции Кориолиса вытекает, что её проекция на касательную  $M\tau$  к относительной траектории точки (т. е. на оси системы координат Френе  $M\tau nb$ ) всегда равна нулю ( $\bar{I}_{C\tau} = 0$ ), и уравнение (4.49) в относительном движении будет иметь вид

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau - F_{\text{тр}} + I_{e\tau}$$

или

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau - F_{\text{тр}} + I_{e\tau}; \quad (4.101)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = F_n + N + I_{en};$$

$$0 = F_b.$$

Третьи слагаемые в правой части последних уравнений *учитывают* влияние движения подвижных осей  $Ox_1 y_1 z_1$  на изменение величины  $\bar{v}_e$ .

Применительно к грузу, размещённому в вагоне, уравнение (4.101) справедливо для случая, когда происходит сдвиг груза вдоль вагона, т. е. направление скорости сдвига груза ( $\bar{v}_{\text{гр}}$ ) совпадает с касательной  $M\tau$  к относительной траектории точки.

5. Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое (т. е. в относительном равновесии), то для нее  $\bar{a}_r = 0$  и  $\bar{v}_r = \bar{v} = 0$ , а следовательно, и  $\bar{I}_{C\tau} = 0$ , так как ускорение Кориолиса  $\bar{a}_C = 2[\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r]$  (см. (1.57)). Тогда из

уравнения (4.93), выражающего основной закон динамики для относительного движения точки, легко получить *условие относительного равновесия*

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \bar{I}_e = 0 \quad (4.102)$$

или

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k - m\bar{a}_e = 0. \quad (4.102a)$$

В векторном уравнении (4.102), как и ранее, *силу инерции переносного движения  $\bar{I}_e$  следует принять с положительным знаком.*

Очевидно, что *при относительном равновесии точки* заданная сила, реакция связи и сила инерции переносного движения *уравновешиваются*. К такому заключению можно, очевидно, прийти и непосредственно из принципа Д'Аламбера.

Уравнение (4.102) представляет собой *уравнение относительного равновесия (покоя) точки.*

Из уравнения (4.102) следует, что *уравнения относительного равновесия точки* составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижной системе отсчёта, если при этом к действующим на точку заданным силам и реакции связей *присоединить силу инерции переносного движения с положительным знаком* (т.е. с учётом *направления* переносного ускорения так, как это представлено в (4.92) и (4.102)).

#### 4.6.4. Теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении

Если точке дадим элементарное перемещение  $d\bar{r}$ , которое по направлению совпадает с направлением относительной скорости  $\bar{v}_r$ , то работа силы инерции Кориолиса на этом перемещении будет равна нулю. Это вытекает из *свойства силы инерции Кориолиса*: сила инерции Кориолиса всегда перпендикулярна относительной скорости движения ( $\bar{I}_C \perp \bar{v}_r$ ), а значит, и касательной  $M\tau$  к относительной траектории точки. Поэтому проекция силы инерции Кориолиса на касательную  $M\tau$  к относительной траектории точки (т. е. на оси системы координат Френе  $M\tau nb$ ) всегда равна нулю ( $\bar{I}_{C\tau} = 0$ ).

Следовательно, такими же рассуждениями, как и в абсолютном движении, *теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме* для несвободной материальной точки получим в виде (см. выражение (4.36))

$$d \frac{m\bar{v}_r^2}{2} = \left( \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot d\bar{r} \right) + (\bar{F}_{\text{тр}} \cdot d\bar{r}) + (\bar{I}_e \cdot d\bar{r}). \quad (4.103)$$

Теорема. Дифференциал кинетической энергии относительного движения равен сумме элементарных работ активных сил, реакции связи и переносной силы инерции.

В случае, когда ось  $Ox$  совпадает с направлением касательной  $M\tau$  к относительной траектории точки:

$$d \frac{mv_r^2}{2} = \left( \sum_{k=1}^n F_{kx} - F_{\text{тр}x} + I_{ex} \right) \cdot dx + \left( \sum_{k=1}^n F_{ky} - F_{\text{тр}y} + I_{ey} \right) \cdot dy + \left( \sum_{k=1}^n F_{kz} + I_{ez} \right) \cdot dz. \quad (4.103a)$$

Теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме можно записать аналогично уравнению (4.103):

$$\frac{m\bar{v}_r^2}{2} - \frac{m\bar{v}_{r0}^2}{2} = \sum W_{(M_0M_1)} + W(F_{\text{тр}}) + W(I_e), \quad (4.104)$$

где  $W(I_e)$  – работа переносной силы инерции в относительном перемещении точки в Дж (или Н·м).

Теорема. Изменение кинетической энергии в относительном движении равно сумме работ всех действующих сил и переносной силы инерции.

В уравнении (4.104) работы постоянных сил  $W(F)$  и переносной силы инерции  $W(I_e)$  как постоянной силы, упругих сил  $W(F_x)$  и сил трения  $W(F_{\text{тр}})$  как постоянной силы, определяют согласно (3.17), (3.18) и (3.35) или (3.41):

$$W(F_{\text{тр}}) = -fGx; \quad W(I_e) = ma_e x; \quad W(F_x) = -c \frac{x^2}{2}. \quad (4.105)$$

Последние слагаемые в правых частях уравнений (4.103) и (4.104) учитывают влияние движения подвижных осей на изменение величины  $\bar{v}_r$ .

#### 4.6.5. Основные виды сил, воспринимаемых связями<sup>127</sup>

<sup>127</sup> Туранов Х.Т. Теоретическая механика в задачах грузовых перевозок. – Новосибирск: Наука, 2009. – 376 с.

Особо отметим, что при перевозке грузов на открытом подвижном составе внешние связи в виде платформы, гибких упругих (растяжка, обвязка) и упорных (упорные и распорные деревянные бруски) средств креплений (или устройств обеспечения безопасности перевозок грузов) будут испытывать воздействие следующих видов сил.

1. С и л а т я ж е с т и  $G$  (см. п. 3.1).  $G$  – активная сила, поскольку, начав действовать на покоящееся тело, может привести его в движение (см. пп. 2.1.5).  $G$  условно прикладывают к центру масс материальной системы (груза)  $C$ , и её воздействие испытывает внешняя связь (платформа, полувагон, гибкие упругие и упорные элементы креплений) (см. рис. 2.16, 2.17).

В расчётной модели силу тяжести груза направляют *от объекта*.

Применительно к сортировочным горкам за внешние движущие силы, вынуждающие вагон совершать движение с ускорением, можно считать проекции силы тяжести  $G$  на направление скатывания вагона с горки –  $G_x = G \sin \psi_0$  (см. п. 4.5, задачи 1 – 3, рис. 4.17).

2. Н о р м а л ь н а я с о с т а в л я ю щ а я  $\bar{I}_n$  с и л ы и н е р ц и и Д'Аламбера в абсолютном движении  $\bar{I}_{\text{абс}}$ . Особо отметим, что  $\bar{I}_n$  в абсолютном движении тела (вагон) по кривой является *фиктивной* силой инерции (см. уравнение (4.47а)).

Вспомним, что сила  $\bar{I}_n$  *не возникает и не появляется*, а лишь учитывает абсолютное движения тела по кривой с ускорением (см. п. 4.5). Подчеркнём, что никакой силы  $\bar{I}_n$  к телу в действительности не приложено. Например, при движении поезда по кривому участку пути к вагону с жёстко закреплённым грузом (экипаж) никакой силы  $\bar{I}_n$  не приложено (см. п. 4.5, задача 4, рис. 4.18). Утверждение о том, что сила  $\bar{I}_n$ , как центробежная сила, прижимает экипаж к наружной рельсовой нити, затрудняя его поворот и тем самым увеличивая направляющую силу и, как следствие, боковой износ наружного рельса, не имеет физического обоснования<sup>128</sup>. Не имеет физического обоснования также утверждение о том, что при движении по кривой возникает силовое воздействие в

---

Туранов Х.Т. Взаимодействие открытого подвижного состава и твёрдотельного груза. – М.: ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2011. – 374 с.

<sup>128</sup> Большая энциклопедия транспорта: в 8 т. Т. 4. Железнодорожный транспорт / Гл. ред. Н.С. Конарев. – М.: Большая российская энциклопедия, 2003. – 1039 с.

Расчёты и проектирование железнодорожного пути: учебн. пособие для студентов вузов ж.-д. трансп. / В.В. Виноградов, А.М. Никонов, Т.Г. Яковлева и др.; под ред. В.В. Виноградова и А.М. Никонова. – М.: Маршрут, 2003. – 486 с.

виде центробежной силы<sup>129</sup>. Прижатие экипажа к наружной рельсовой нити связано с воздействием переносной силы инерции  $\bar{I}_e$  поперёк вагона ( $\bar{I}_e = \bar{I}_{ey}$ ) (см. ниже).

Нормальная составляющая  $\bar{I}_n$  силы инерции в абсолютном движении тела (вагон) по кривой, так же как и сила инерции  $\bar{I} = \bar{I}_{abc}$  (см. (4.47a)), **не имеет никакого физического содержания** и в расчётных уравнениях **выполняет роль чисто математических величин**, посредством которых **учитывают влияние движения** тела с ускорением<sup>130</sup>.

Таким образом, учёт нормальной составляющей  $\bar{I}_n$  силы инерции в абсолютном движении в математической модели будет *имитировать* прохождение грузового вагона по кривому участку пути различного радиуса кривизны траектории в данной точке кривой с различной скоростью. Будет учтено взаимодействие механической системы «путь – тележка грузового вагона» в поперечном направлении.

Применительно к задачам по перевозке грузов можно отметить, что основной (пол вагона) и дополнительные (гибкие упругие (растяжка и обвязка), упорные и распорные (деревянные бруски)) внешние связи груза (объект) испытывают только воздействие переносных сил инерции, а не нормальной составляющей силы инерции в абсолютном движении (или центробежных сил). К *дополнительным* (избыточным) *связям* в задачах перевозки грузов относят гибкие упругие (растяжка и обвязка), упорные и распорные (деревянные бруски) средства креплений. Таким образом, именно для дополнительных связей переносные силы инерции являются реальными силами, вызывающими реальные деформации и напряжения в связях.

3. **П е р е н о с н ы е с и л ы и н е р ц и и**. Применительно к перевозке груза на ОПС различают продольную  $\bar{I}_{ex}$ , поперечную  $\bar{I}_{ey}$  и вертикальную  $\bar{I}_{ez}$  *переносные* силы инерции. Эти силы являются переменными, поскольку зависят от значений переносных ускорений по продольной  $\bar{a}_x = \bar{a}_{ex}$ , поперечной  $\bar{a}_y = \bar{a}_{ey}$  и вертикальной  $\bar{a}_z = \bar{a}_{ez}$  осям вагона. Переносные ускорения возникают в основном из-за отклонения норм содержания пути и изменчивости климатических условий перевозок; торможения вагона с грузом (отцепя) на первой и второй тормозной позиции механизированной горки, оборудованной вагонными замедлителями (из-за жесткой характеристики пневмоприводов); из-за соударения вагона с грузом о стоящие вагоны на путях сортировочной станции;

<sup>129</sup> Шахуньянц Г.М. Железнодорожный путь: учебник для вузов ж.-д. транспорта. – М.: Транспорт, 1987. – 479 с.

<sup>130</sup> Теория механизмов и машин: учебник для вузов / Под. ред. К.В. Фролова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 664 с.

служебного торможения подвижного состава, движущегося на спуск; из-за экстренного торможения подвижного состава; конструктивных особенностей тележек и автосцепных устройств вагона (наличие зазоров в соединениях деталей и упругих элементов в виде пружин), а также из-за наличия технологического зазора между гребнями колёсных пар и рельсовыми нитями (рис. 4.26), которые достигают до 29 мм и более<sup>131</sup>.

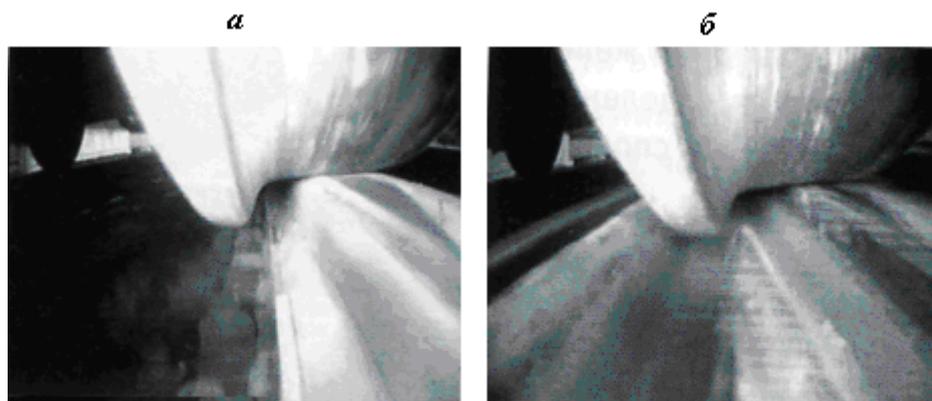


Рис. 4.26. Зазор между гребнями колёс и рельсовыми нитями.

Поясним физическую причину появления переносных сил инерции. Рассмотрим относительное движение груза, т. е. движение по отношению к *неинерциальной* системе отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$ , связанное с вагоном и произвольно движущееся по отношению к инерциальной системе отсчёта  $Oxyz$ . Система отсчёта  $Oxyz$  связана со станцией отправления поезда (см. рис. 4.22), появление переносных сил инерции – с влиянием на относительное движение груза перемещения подвижных осей  $O_1x_1y_1z_1$ , связанных с любой точкой вагона. Основная причина появления ускорений – *кинематическая* – движение подвижной системы отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$ , связанной с вагоном, т.е. с подвижным составом, движущимся со скоростью поезда  $\bar{V}$  по кривому участку пути с радиусом кривизны  $\rho$  траектории в данной точке<sup>132</sup>.

В неинерциальной системе отсчёта  $O_1x_1y_1z_1$  груз получает ускорение в результате ускоренного движения самой системы отсчёта вместе с вагоном. Иначе говоря, причиной колебаний груза служат заданные колебания точки крепления гибких упругих элементов, непосредственно связанных с увязочными устройствами вагона.

<sup>131</sup> Карпущенко Н.И., Котова И.А. Боковой износ рельсов и безопасность движения // Путь и путевое хозяйство. – 2005. – №5. – С. 9-11.

Аккерман Г.Л., Аккерман С.Г., Голубев О.В. и др. Оценка состояния железнодорожного пути // Транспорт Урала. – 2006. – №4 (11). – С. 37– 47.

<sup>132</sup> Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Рассмотрим вынужденные колебания груза, размещённого на колеблющейся платформе. Допустимые значения ускорений вагона с грузом установлены экспериментально и нормированы<sup>133</sup>.

3.1. *Физика появления продольной переносной силы инерции  $\bar{I}_{ex}$* . Возникновение переносного ускорения вагона с грузом по продольной оси  $\bar{a}_{ex}$  объясняется продольными колебаниями подвижного состава при движении поезда не только по прямому участку пути, но и по кривому. Причиной колебаний вагона является, *во-первых*, движение подвижного состава по волнам неровности пути, *во-вторых*, торможение вагона с грузом (отцепки) на первой и второй тормозной позициях механизированной горки, оборудованной вагонными замедлителями, *в-третьих*, соударение вагона с грузом о стоящие вагоны на путях сортировочной станции, *в-четвертых*, служебное торможение подвижного состава, движущегося на спуск, *в-пятых*, экстренное торможение подвижного состава, *в-шестых*, наличие в конструкции тележек зазоров между боковыми рамами и челюстями букс колесных пар, *в-седьмых*, наличие комплектов пружин (упругих элементов), размещённых в проемах боковых рам тележек, *в-восьмых*, наличие упругих элементов (пружины) и зазоров в конструкциях поглощающих аппаратов автосцепных устройств. По этим причинам, по-видимому, происходит продольный сдвиг груза.

Следует учесть, что при соударении вагонов в подгорочном парке и при служебном или экстренном торможении происходит явление «срыва» груза с места, хотя на него не действуют никакие силы. Такое явление происходит потому, что, согласно первому закону инерции механики (см. пп. 2.1.3), груз стремится сохранять своё свойство прямолинейно–равномерного движения со скоростью (или ускорением) вагона, равной скорости до соударения или торможения.

Учёт переносного ускорения вагона с грузом по продольной оси в математической модели будет имитировать движение поезда как по прямому, так и по кривому участку пути, при его движении на спуск в режиме служебного торможения или отпуска и при соударении вагона на подгорочном парке. При этом будет учтено взаимодействие механической системы «путь – вагон – груз – крепление» в продольном направлении.

3.2. *Физика появления поперечной переносной силы инерции при движении вагона по кривому участку пути*. Возникновение переносного ускорения вагона с грузом по поперечной оси  $\bar{a}_{ey}$  (соответственно силы  $\bar{I}_y$ ) объясняется поперечными колебаниями при движении подвижного состава не только по кривому

---

<sup>133</sup> Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д. Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1991. – 360 с.

Нормы для расчёта и проектирования новых и модернизируемых вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных). – ГосНИИВ. – М.: ВНИИЖТ, 1996. – 319 с.

участку пути, но и по прямому. Причиной колебаний вагона является, *во-первых*, возникновение поперечных колебаний надрессорного строения вагона с грузом из-за появления волны неровности пути; *во-вторых*, наличие в конструкции тележек зазоров между боковыми рамами и челюстями букс колесных пар, *в-третьих*, наличие комплектов пружин (упругих элементов), размещённых в проемах боковых рам тележек, *в-четвёртых*, наличие технологического зазора между гребнями колёс и рельсовыми нитями (см. рис. 4.26); *в-пятых*, наличие упругих элементов (пружины) и зазоров в конструкциях поглощающих аппаратов автосцепных устройств.

Кроме того, причиной колебаний может быть воздействие силы аэродинамического сопротивления переменного направления. В вагоне может быть «шальная тележка»<sup>134</sup>, способствующая увеличению величины ускорения  $\bar{a}_{ey}$ . По этим и другим причинам, по-видимому, происходит поперечный сдвиг груза.

Учёт переносного ускорения вагона с грузом по поперечной оси в математической модели будет имитировать движение грузового вагона, как по кривому, так и по прямому участкам пути. При этом будет учтено взаимодействие механической системы «путь – вагон – груз – крепление» в поперечном направлении.

3.3. *Физика появления поперечной переносной силы инерции при движении вагона по прямому участку пути  $\bar{I}_{ey}$* . Основными причинами возникновения поперечного переносного ускорения  $\bar{a}_{ey}$  (соответственно силы  $\bar{I}_{ey}$ ) в реальных условиях движения вагона по прямому участку пути являются: возникновение поперечных колебаний необрессоренной части вагона с грузом из-за появления волны неровности пути; наличие бокового зазора между гребнями колёс и рельсовыми нитями; поперечная деформация комплектов пружин тележек и действие силы аэродинамического сопротивления переменного направления.

Учёт поперечного ускорения вагона с грузом *по поперечной оси* вагона в математической модели будет *имитировать* движение поезда как по прямому, так и по кривому участку пути. При этом будет учтено взаимодействие механической системы «путь–вагон–груз–крепление» в поперечном направлении.

3.4. *Физика появления вертикальной переносной силы инерции  $\bar{I}_{ez}$* . Возникновение переносного ускорения вагона с грузом *по вертикальной оси*  $\bar{a}_{ez}$  (соответственно силы  $\bar{I}_{ez}$ ) объясняется торможением вагона с грузом (отцеп) на первой и второй тормозных позициях механизированной горки, оборудованной вагонными замедлителями, наличием упругих элементов (комплектов пружин)

<sup>134</sup> Лысюк В.С. Причины и механизм схода колеса с рельса. Проблема износа колес и рельсов. – М.: Транспорт, 1997. – 188 с.

жин) между боковыми рамами и надрессорными балками и состоянием пути (имеются неровности, связанные с просадкой, глубина которой достигает  $0,03 \div 0,04$  м, а длина порядка 10 м), по волнам неровностей которого движется поезд.

По этим причинам возникает вертикальная переносная сила инерции  $\bar{I}_{ez}$ , воспринимаемая упругими элементами креплений груза и полом вагона.

Учёт переносного ускорения вагона с грузом *по вертикальной оси* в математической модели будет *имитировать* явление «подпрыгивания вагона с грузом» из-за движения подвижного состава по волнам неровности пути, высота волны неровности которой зависит от соблюдения норм содержания пути, торможения вагона с грузом (отцепя) на первой и второй тормозных позициях механизированной горки, оборудованной вагонными замедлителями, по причине жесткой характеристики их пневмоприводов. При этом будет учтено взаимодействие механической системы «путь – вагон – груз – крепление» в вертикальном направлении при любом отклонении от норм содержания пути.

При выполнении расчёта по определению неизвестных внешних реакций связей продольную  $\bar{I}_{ex}$ , вертикальную  $\bar{I}_{ez}$  и поперечную  $\bar{I}_{ey}$  переносные силы инерции для груженых вагонов находят по максимальным нормированным значениям ускорений по продольной  $\bar{a}_{ex}$ , поперечной  $\bar{a}_{ey}$  и вертикальной  $\bar{a}_{ez}$  оси [Нормы..., 1996], появляющимся при движении вагона на перегоне:  $a_{ex} = 0,3g$ ,  $a_{ey} = 0,46g$  и  $a_{ez} = (0,4 \div 0,66)g$ . При несоблюдении нормы содержания пути ускорения могут значительно превысить допустимое значение.

Продольные, поперечные и вертикальные переносные силы инерции (кН) равны:

$$|\bar{I}_{ex}| = 10^{-3} Ma_{ex}; \quad |\bar{I}_{ey}| = 10^{-3} Ma_{ey}; \quad |\bar{I}_{ez}| = 10^{-3} Ma_{ez}, \quad (4.106)$$

или

$$I_{ex} = k_{dx} G; \quad I_{ey} = k_{dy} G; \quad I_{ez} = k_{dz} G, \quad (4.106a)$$

где  $M$  – масса материальной системы (груза), кг;  $a_{ex}$ ,  $a_{ey}$  и  $a_{ez}$  – продольное, поперечное и вертикальное максимальные нормативные значения переносных

ускорений груза,  $m/c^2$ ;  $G$  – вес груза, кН;  $k_{dx} = \frac{a_{ex}}{g}$ ,  $k_{dy} = \frac{a_{ey}}{g}$  и  $k_{dz} = \frac{a_{ez}}{g}$  –

коэффициенты продольной, поперечной и вертикальной динамики вагона (т.е. ускорения переносных движений вагона по соответствующим осям в долях  $g$ ).

При служебном торможении подвижного состава, который движется на спуск, значение переносного продольного ускорения принимают  $a_{ex} = 0,7g$ , а при экстренном торможении, торможении вагона с грузом (отцепя) на первой и второй тормозных позициях механизированной горки, оборудованной вагон-

ными замедлителями, или при соударении вагона в подгорочном парке  $a_{ex} = (1,2 \div 2)g$ .

Переносные силы инерции также являются *активными* силами, поскольку, начав действовать на покоящееся тело, *могут* привести его в движение.

Силы  $\bar{I}_{ex}$ ,  $\bar{I}_{ey}$  и  $\bar{I}_{ez}$  условно прикладывают к центру масс материальной системы (груза)  $C$ , однако их воздействие испытывают внешние связи – вагон, гибкие упругие (растяжка и обвязка), упорные и распорные (деревянные бруски) средства креплений.

При определении направления переносных сил инерции следует учитывать неблагоприятные случаи.

Если учитывать направление переносной силы инерции, то *неблагоприятным* будет случай *совпадения силы инерции по направлению с натяжением* (не с реакцией связи), поскольку к объекту (груз) приложены реакции связей, а не натяжения [Туранов, Бондаренко, 2006].

Таким образом, *в неблагоприятном случае переносная сила инерции должна быть направлена в сторону, противоположную реакции связей*. Естественно, что ускорение при этом будет направлено в сторону реакции при условии, что реакции, как обычно, направляются от объекта! Подобное сохраняется и для вертикального ускорения (пол вагона – односторонняя связь, и в рассмотренном случае сила инерции направлена вверх и нагружает в этом направлении вертикальные и наклонные растяжки).

При увеличении ускорения будут увеличиваться реакция и натяжение в гибких упругих элементах креплений груза.

В динамической модели переносные силы инерции  $\bar{I}_{ex}$ ,  $\bar{I}_{ey}$  и  $\bar{I}_{ez}$  направляют *от объекта (груз)*.

4. С и л а т р е н и я  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{\text{тр}}$ . Физика появления силы трения обсуждена в п. 3.1. Вместе с тем отметим, что воздействие реакции  $\bar{R}$  испытывает объект (груз), поэтому в динамической модели нормальную составляющую  $\bar{N}$  реакции направляют *к объекту*, а касательную составляющую  $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{\text{тр}}$  – к контактирующей поверхности объекта с внешней связью, противоположно скорости его движения.

Сила трения является *реактивной* силой. Для груза, размещённого в вагоне, сила трения – *удерживающая сила*, поэтому она весьма *полезна*, так как удерживает груз от линейных ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) и угловых ( $\Delta\phi$ ) перемещений (сдвиг). Грузоотправители обязаны принимать ряд профилактических мер с целью увеличения силы трения, например посыпать песком пол вагона.

5. С и л а у п р у г о с т и  $\bar{F}_{\text{упр}}$  ( $\bar{F}_{\text{упр},x}$  или  $\bar{F}_{\text{упр},y}$ ). Среди различных сил, которые могут действовать на материальную точку, особое место занимают силы упругости (или *восстанавливающие силы*), т. е. силы, стремящиеся вернуть

точку в положение равновесия. Такие силы зависят от отклонения точки от положения равновесия и направлены к положению равновесия. Восстанавливающие силы придают движению колебательный характер<sup>135</sup>.

Общеизвестно, что упругие элементы креплений, предназначенные для удержания груза от сдвига, формируются из отожжённой проволоки, которая подвергается предварительному натяжению, величина которого находится в пределах от 15 до 25 кН. При воздействии внешних сил эти элементы испытывают значительные деформации. Упругие элементы относят к классу неидеальных и неударяющих связей. Допускают, что такие связи согласно аксиоме отвердевания геометрической статики<sup>136</sup> можно рассматривать как прямолинейные стержни, испытывающие одноосное растяжение. В соответствии с этим коэффициенты жёсткости таких связей можно найти из зависимостей, соответствующих одноосному растяжению прямолинейного стержня, используя закон Гука.

Согласно закону Гука,  $\bar{F}_{\text{упр}}$  зависит от изменения длины (деформации) упругой связи и её значение определяют по (см. п. 3.1).

Вспомним, что выражение (3.1) относится к классу физических уравнений, связывающих силу и перемещения.

Учитывая, что  $R_i$  – натяжение (силы упругости) в гибком упругом элементе, соотношение (3.1) перепишем в виде

$$R_i = f(\Delta l) \leq [R_i], \quad (4.107)$$

где  $[R_i]$  – допустимое значение натяжений в  $i$ -м гибком упругом элементе, выбираемое по табл. 30 Приложения 14 к СМГС в зависимости от количества нитей ( $n_i$ , шт.) и диаметра проволоки ( $d_i$ , мм), кН.

Анализируя формулу (4.107), можно выдвинуть гипотезу о том, что натяжение в гибких упругих средствах креплений можно определить по критерию допускаемого значения (ограничения) сдвига груза как вдоль ( $\Delta x$ ), так и поперёк ( $\Delta y$ ) вагона. Для этого выражают удлинение гибкого упругого элемента ( $\Delta l_i$ ) через сдвиг груза ( $\Delta x$  или  $\Delta y$ ), используя либо геометрию креплений, либо метод строительной механики<sup>137</sup>:

$$\Delta l_i = \Delta x \cos \gamma_i \cos \beta_{0i}, \quad (4.108)$$

где  $\gamma_i$  – угол между проекцией длины гибкого упругого элемента креплений  $l_i$  на вертикальную плоскость ( $O_1 x_1 z_1$ ) и плоскостью пола вагона ( $O_1 x_1 y_1$ ):

<sup>135</sup> Бутенин, Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В 2 т. – СПб.: Издательство «Лань», 1998. – 736 с.

<sup>136</sup> Лойцянский, Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

<sup>137</sup> Туранов Х.Т. Взаимодействие открытого подвижного состава и твёрдотельного груза: учебн. пособие для вузов железнодорожного транспорта. М: ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2011. – 374 с.

$$\cos \gamma_i = \frac{a_i}{l_{vi}}.$$

Учитывая, что длина гибкого упругого элемента креплений  $l_i$  образует с её проекцией на вертикальную плоскость ( $O_1x_1z_1$ ) угол  $\beta_{0i}$ , который определяют по формуле

$$\cos \beta_{0i} = \frac{l_{vi}}{l_i},$$

окончательно представим выражение (4.108) в виде

$$\Delta l_i = \Delta x \frac{a_i}{l_i}. \quad (4.109)$$

Аналогично находят удлинение гибких упругих элементов при сдвиге груза поперёк вагона

$$\Delta l_i = \Delta y \cos \lambda_i \cos(90^\circ - \beta_{0i}), \quad (4.110)$$

где  $\lambda_i$  – угол между проекцией длины гибкого упругого элемента креплений  $l_i$  на вертикальную плоскость ( $O_1x_1z_1$ ) и плоскостью пола вагона ( $O_1x_1y_1$ ):

$$\cos \lambda_i = \frac{b_i}{l_{wi}}.$$

Учитывая, что длина гибкого упругого элемента креплений  $l_i$  образует с её проекцией на вертикальную плоскость ( $O_1y_1z_1$ ) угол  $\beta_{0i}$ :

$$\cos(90^\circ - \beta_{0i}) = \frac{l_{wi}}{l_i},$$

окончательно представим выражение (4.110) в виде

$$\Delta l_i = \Delta y \frac{b_i}{l_i}. \quad (4.111)$$

Анализируя соотношения (4.109) и (4.111), убеждаемся, что удлинения в гибких упругих элементах креплений произойдут лишь тогда, когда происходит сдвиг груза вдоль или поперёк вагона на величину  $\Delta x$  или  $\Delta y$ . Иначе, если не произойдёт сдвига груза, то гибкие упругие элементы креплений не включаются в работу.

В задачах грузовых перевозок грузы удерживаются от сдвига относительно пола вагона гибкими упругими и упорными средствами креплений. При этом гибкие упругие элементы креплений одним концом крепятся за монтажные (грузовые) петли груза, а другим за увязочные устройства (стоечные скобы) вагона и имеют произвольное пространственное расположение.

Для определения натяжений в гибких упругих элементах креплений возникнет необходимость в приведении их жёсткости по направлениям действия внешних сил – либо по продольной ( $O_1x_1$ ), либо по поперечной ( $O_1y_1$ ) оси. Поскольку упругий элемент произвольно расположен в пространстве, для вычисления проекции необходимо использовать метод двойного проецирования так, как это делается в теоретической механике для произвольно расположенной силы. Применительно к креплению груза в вагоне эквивалентные (или приведённые) жёсткости гибких упругих элементов креплений по продольной и поперечной оси определяют, кН/м, [Туранов, 2007; 2011]

$$c_{\text{экв.}x} = 7,854d_i^2 \sum_{i=1}^{n_p} \frac{n_i}{l_i} \frac{a_i}{l_i} \frac{a_i}{l_i}; \quad (4.112)$$

$$c_{\text{экв.}y} = 7,854d_i^2 \sum_{i=1}^{n_p} \frac{n_i}{l_i} \frac{b_i}{l_i} \frac{b_i}{l_i}. \quad (4.113)$$

Выражения (4.112) и (4.113) будут в последующем активно использованы для определения сдвига груза и натяжений в креплениях от воздействия на механическую систему «вагон – крепление – груз» плоской системы сил.

Сила упругости является *реактивной* силой. В расчётной модели силы упругости  $\bar{F}_{\text{упр}}$  гибких упругих элементов креплений как реакции этих элементов  $\bar{R}_i$  к объекту направляют *от объекта* (груз).

7. Сила аэродинамического сопротивления  $\bar{F}_{\text{рв}}$  относится к классу реактивной силы, зависит от скорости и действует на объект, движущийся в такой, например, среде, как воздух (см. п. 3.1, (3.9) – (3.12)). В расчётной модели силу  $\bar{F}_{\text{рв}}$  направляют к *объекту* (груз).

#### 4.6.6. Примеры решения задач на относительное движение материальной точки

Рассмотрим случай, когда *связь идеальная, а поверхность гладкая*.

Отметим, что все рассматриваемые ниже задачи являются дальнейшим развитием задач, решённых в работе [Комаров, Яшин, 2004].

*Задача 1.* Груз массой  $M$  размещён на платформе и закреплён гибкими упругими элементами креплений (растяжка, обвязка), жёсткости  $c = c_{\text{экв.}x}$  которых приведены на продольную ось (см. (4.112), рис. 4.27).

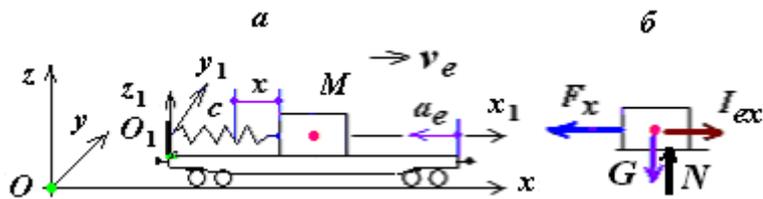


Рис. 4.27. Пример идеальной связи груза и схема приложения сил.

Платформа относительно неподвижной точки  $O$ , где находилась первоначально, движется поступательно со скоростью  $\bar{v}_e$ , т. е. переносное движение поступательное ( $\bar{\omega}_e = 0$ ). Такой случай соответствует движению подвижного состава по прямому участку пути.

*Постановка задачи.* Требуется сравнить максимальное натяжение растяжки при медленном росте переносного ускорения от 0 до  $a_0$  (рис. 4.28, а), что может соответствовать плавному торможению подвижного состава и случаю экстренного торможения, когда ускорение увеличивается скачком до  $a_0$  (рис. 4.28, б).

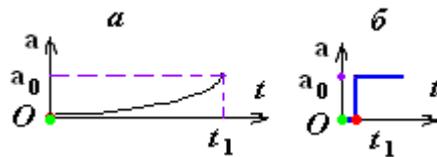


Рис. 4.28. Закон изменения ускорения подвижного состава.

*Принятые допущения.* Для простоты пренебрегаем трением груза о пол вагона. Это может соответствовать случаю перевозки груза на практике, когда между грузом и полом вагона в зимнее время образуется ледяная поверхность.

Отметим, что далее жёсткость системы гибких упругих элементов креплений различной жёсткости  $c_i$  (см. (3.2)) и геометрии  $A_i$  (см. (3.3)), расположенных горизонтально (как в частном случае), учитывается приведённой и/или эквивалентной жёсткостью  $c_{\text{экр.х}}$  (см. (4.112)).

Определение эквивалентной (или обобщённой) жёсткости гибких упругих элементов креплений груза по соответствующим направлениям координатных осей (см. рис. 2.41) является самостоятельной прикладной задачей и требует отдельного рассмотрения [Туранов, 2007; 2011]. Вместе с тем формула для нахождения эквивалентной жёсткости гибких упругих элементов креплений на продольную ось  $c_{\text{экр.х}}$  от воздействия плоской системы сил без вывода приведена при решении задачи 4 (см. (4.148)), а на поперечную ось  $c_{\text{экр.у}}$  – задачи 5 (см. (4.162)) [Туранов, 2009; 2011].

*Решение.* В момент торможения на груз (объект) действуют сила тяжести  $\bar{G}$ , нормальная составляющая  $\bar{N}$  реакции основной связи (пол вагона) и реак-

ция дополнительных связей (гибкий упругий элемент креплений)  $\bar{R}_{\text{упрх}} = \bar{F}_{\text{упрх}}$  (рис. 4.27, б). Согласно закону Гука (см. (3.1)), модуль упругой силы элементов креплений  $|\bar{F}_{\text{упрх}}| = cx$ , т. е. пропорционален удлинению  $x$ . Так как вагон движется с переносным ускорением  $\bar{a}_{ex}$ , то приложим к грузу переносную силу инерции  $|\bar{I}_e| = Ma_e$  (см. (4.92)).

По условию задачи платформа движется поступательно со скоростью  $\bar{v}_e$ , поэтому сила инерции Кориолиса равна нулю (см. случай 2 п. 4.5).

В этом случае основной закон относительного переносного движения груза описывается уравнением (4.100).

1. Рассмотрим случай *плавного торможения* подвижного состава. При медленном возрастании ускорения вагона от 0 до  $\bar{a}_0$  гибкие элементы креплений растягиваются постепенно, их натяжение равно по величине и противоположно переносной силе инерции. Относительное ускорение груза  $\bar{a}_r$  практически равно нулю из-за медленного роста переносного ускорения. Согласно уравнению (4.100), имеем уравнение равновесия в относительном движении (в покое)

$$0 = \bar{F} + \bar{N} + \bar{I}_e.$$

Проецируя последнее выражение на ось  $x$  (см. первое уравнение (4.94)), находим

$$F_{\text{упрх}} + I_{ex} = 0$$

или, учитывая, что  $|F_{\text{упрх}}| = cx$  (см. (3.1)) и  $|\bar{I}_e| = Ma_e$  (см. (4.106)), получим

$$cx = Ma_{ex}.$$

Когда переносное ускорение  $\bar{a}_{ex}$  достигнет максимального значения  $\bar{a}_0$  (см. рис. 4.28, а), то груз по продольной оси вагона сдвинется на максимальную величину, т. е.  $x = x_{\text{max}}$ . Поэтому последнее равенство примет вид

$$cx_{\text{max}} = Ma_0.$$

Отсюда максимальное перемещение (сдвиг) груза или удлинение гибких упругих элементов креплений

$$x_{\max} = \frac{Ma_0}{c}.$$

Следовательно, максимальное натяжение (усилие) в гибких упругих элементах креплений, расположенных параллельно продольной оси  $x$ :

$$F_{\max} = cx_{\max} = Ma_0. \quad (4.114)$$

*Анализ полученных результатов.* При плавном торможении подвижного состава, т. е. при плавном росте ускорения, что соответствует квазистатическому нагружению, максимальная реакция (или натяжение) возникает от максимального значения переносного ускорения.

2. Рассмотрим случай *экстренного торможения* подвижного состава. При этом переносная сила инерции скачком возрастает от 0 до  $|\bar{I}_e| = Ma_0$  (см. рис. 4.28, б). Напомним, что такой случай относится *ко второй, или основной, задаче динамики в неинерциальной системе отсчёта*, поскольку, зная действующие на точку силы, необходимо найти закон движения материального тела (груз).

Условие относительного равновесия (4.102) в проекциях на ось  $x$  (см. уравнение (4.94)) имеет вид

$$M\ddot{x} = -F_x + I_{ex}$$

или

$$M\ddot{x} = -cx + Ma_0. \quad (4.115)$$

Начальные условия задачи:  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$  при  $t = 0$ .

Разделив на массу груза обе части уравнения (4.115), получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + k^2 x = a_0, \quad (4.116)$$

где  $k$  – круговая частота колебаний, рад/с:

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}}. \quad (4.116a)$$

Общее и частное решение (4.122) имеет стандартный вид<sup>138</sup> [Матвеев, 1967; Пискунов, 1978]. Так, например, поскольку правая часть постоянна, частное решение можно также взять в виде постоянной величины  $x_{\text{част.неод.}} = A$ .

Подставляя это значение в (4.122), находим

$$k^2 A = a_0,$$

откуда

$$x_{\text{част.неод.}} = A = \frac{a_0}{k^2}. \quad (4.117)$$

Тогда общее решение (4.116)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{a_0}{k^2}. \quad (4.118)$$

Произведя дифференцирование (4.118) по времени, имеем

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (4.119)$$

Подставив в (4.118) и (4.119) начальные условия, получим систему уравнений

$$0 = C_1 + \frac{a_0}{k^2}; \quad 0 = C_2,$$

из которых находим произвольные постоянные

$$C_1 = -\frac{a_0}{k^2}, \quad C_2 = 0. \quad (4.120)$$

Подставляя последнее соотношение в (4.118), имеем уравнение движения груза

$$x = -\frac{a_0}{k^2} \cos kt + \frac{a_0}{k^2},$$

или

$$x = \frac{a_0}{k^2} (1 - \cos kt). \quad (4.121)$$

---

<sup>138</sup> Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1967. – 564 с.

Исследуем функцию (4.121). При  $kt = 0$  нет никакого сдвига груза относительно платформы, поскольку при  $t = 0$ :  $a_0 = 0$  (см. рис. 4.28, *a*) и платформа движется вместе с грузом. При  $kt = \pi$ , т. е. при  $t = t_1 = \frac{\pi}{k}$  ускорение достигает максимального значения  $a_e = a_0$  (см. рис. 4.28, *б*). Тогда максимальный сдвиг груза (или удлинение гибких упругих элементов креплений)

$$x_{\max} = 2 \frac{a_0}{k^2} = 2 \frac{Ma_0}{c}. \quad (4.122)$$

Следовательно, максимальное натяжение в гибких упругих элементах креплений груза

$$F_{\max} = cx_{\max} = 2Ma_0. \quad (4.123)$$

*Анализ полученных результатов.* При экстренном торможении подвижного состава максимальное натяжение в гибких упругих элементах креплений груза в 2 раза превышает натяжение, вычисленное по (4.114) при плавном торможении подвижного состава, т. е. при плавном росте ускорения. Это соответствует известному факту: при внезапном приложении нагрузки величина упругой силы в элементах креплений в 2 раза больше, чем в случае квазистатического приложения нагрузки.

Рассмотрим случай, когда *связь неидеальная, а плоскость или поверхность шероховатая.*

*Задача 2.* Решить задачу 1 с учётом трения груза о пол вагона (рис. 4.29). Это соответствует реальному случаю перевозки груза, когда учитывается трение груза о пол вагона. Тем самым учитываются климатические и другие условия перевозки груза (например, посыпка песком пола), при которых коэффициент трения скольжения может принимать различные значения в достаточно большом диапазоне.

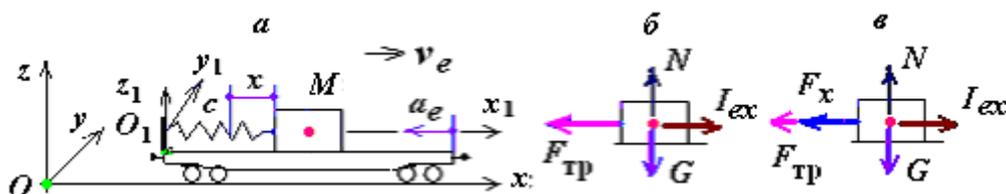


Рис. 4.29. Схема перевозки груза и приложения сил.

*Решение.* 1. Рассмотрим случай *плавного торможения* подвижного состава. При плавном росте ускорения от 0 до  $\bar{a}_0$  груз не движется вообще, растяжки не растягиваются, натяжение растяжек равно нулю, т. е.  $\bar{F}_x = 0$  (см. рис. 4.29, б). В этом случае условие относительного равновесия (4.104) в проекциях на ось  $x$  (см. (4.96а)) имеет вид:

$$\bar{F}_{\text{тр}} + \bar{I}_{ex} = 0, \quad (4.124)$$

или согласно закону Кулона (см. (2.64))

$$fMg = Ma_{ex},$$

или

$$a_{ex} = fg. \quad (4.125)$$

В дальнейшем происходит медленное смещение груза и при  $a_{ex} = a_0 > fg$  (см. рис. 4.29, в) получают

$$F_{\text{max}} = I_{ex} - F_{\text{тр}},$$

или

$$cx_{\text{max}} = M(a_0 - fg).$$

Отсюда максимальное смещение (сдвиг) груза или удлинение горизонтально расположенных гибких элементов креплений

$$x_{\text{max}} = \frac{M}{c}(a_0 - fg) = \frac{1}{k^2}(a_0 - fg). \quad (4.126)$$

Следовательно, максимальное натяжение в гибких упругих элементах креплений груза при медленном росте ускорения

$$F_{\text{max}} = cx_{\text{max}} = M(a_0 - fg). \quad (4.127)$$

*Решение 2.* Рассмотрим случай *экстренного торможения* подвижного состава, когда соблюдается условие  $a_e = a_0 > fg$ . Тогда условие относительного равновесия (4.93) в проекциях на ось  $X$  (см. уравнение (4.94а)) имеет вид

$$M\dot{x} = -F_x - F_{\text{тр}x} + I_{ex},$$

или

$$M\ddot{x} = -cx - fMg + Ma_0,$$

или

$$M\ddot{x} + cx = Ma_0 - fMg. \quad (4.128)$$

Разделив на массу груза обе части последнего уравнения, получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + k^2x = a_0 - fg. \quad (4.129)$$

Общее решение (4.129), удовлетворяющее начальным условиям:  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$  при  $t = 0$ , запишется аналогично (4.121):

$$x = \frac{a_0 - fg}{k^2}(1 - \cos kt)$$

или

$$x = \frac{M(a_0 - fg)}{c}(1 - \cos kt). \quad (4.130)$$

В момент остановки груза при  $t = t_0$  скорость  $v = v_0$  должна быть равной нулю. Однако по (4.130) получится, что при  $t = t_0$

$$v_0 = \dot{x} = \frac{M(a_0 - fg)}{c} \sin kt \neq 0. \quad (4.131)$$

Поэтому уравнение движения в виде (4.130) справедливо до момента остановки груза.

Максимальное перемещение груза принимает значения при  $t = t_1 = \frac{\pi}{k}$

$$x_{\max} = 2 \frac{M}{c}(a_0 - fg). \quad (4.132)$$

Соответственно этому максимальное натяжение в гибких упругих элементах креплений груза определяется так

$$F_{\max} = cx_{\max} = 2M(a_0 - fg). \quad (4.133)$$

При дальнейшем движении груза  $x < x_{\max}$  и  $F < F_{\max}$ , т. е. груз начнет двигаться в обратном направлении.

*Анализ полученных результатов.* При экстренном торможении подвижного состава максимальное натяжение в гибких упругих элементах креплений груза также в 2 раза больше натяжения (4.127) при плавном росте ускорения.

*Задача 3<sup>139</sup>.* Решить пример 2, применив в случае экстренного торможения теорему об изменении кинетической энергии для относительного движения точки (см. пп. 4.6.4).

*Решение.* Уравнение (4.104) для рассматриваемого случая запишется в виде:

$$\frac{Mv_r^2}{2} - \frac{Mv_{0r}^2}{2} = W(F_x) + W(F_{\text{тр}}) + W(I_e), \quad (4.134)$$

где  $W(F_x)$ ,  $W(F_{\text{тр}})$  и  $W(I_e)$  – соответственно работы упругих сил, сил трения и переносной силы инерции (как постоянной силы), которые определяются по (3.18), (3.19) и (3.35).

Подставляя (3.18), (3.19) и (3.35) в (4.134), получим

$$\frac{Mv_r^2}{2} - \frac{Mv_{0r}^2}{2} = -c \frac{x^2}{2} - fMgx + Ma_0x. \quad (4.135)$$

Так как в случае экстренного и/или служебного торможения начальная и конечная скорости равны нулю, т. е.  $v_{0r} = v_r = 0$ , то из последнего выражения после преобразований имеем алгебраическое уравнение второго порядка

$$c \frac{x^2}{2} + M(fg - a_0)x = 0$$

или

$$[cx + 2M(fg - a_0)]x = 0.$$

Его корни

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= \frac{2M}{c}(a - fg). \end{aligned} \quad (4.136)$$

---

<sup>139</sup> Комаров К.Л., Яшин А.Ф. Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта. – Новосибирск: Наука, 2004. – 296 с.

Как видно, получился тот же результат, что и в (4.132).

**Задача 4.** Груз силой тяжести  $G$  так же, как и в задаче 1, размещён на платформе и закреплён  $i$ -ми гибкими упругими элементами креплений (растяжка, обвязка) с учётом предварительных скруток проволоки (обычно принимают 20 кН) к стоечным скобам вагона (например,  $A_1$  и  $A_{11}$ ) и к грузовым петлям груза (например,  $M_1$  и  $M_{11}$ ). Реальная и расчётная модели крепления груза показаны на рис. 4.30 и 4.31.

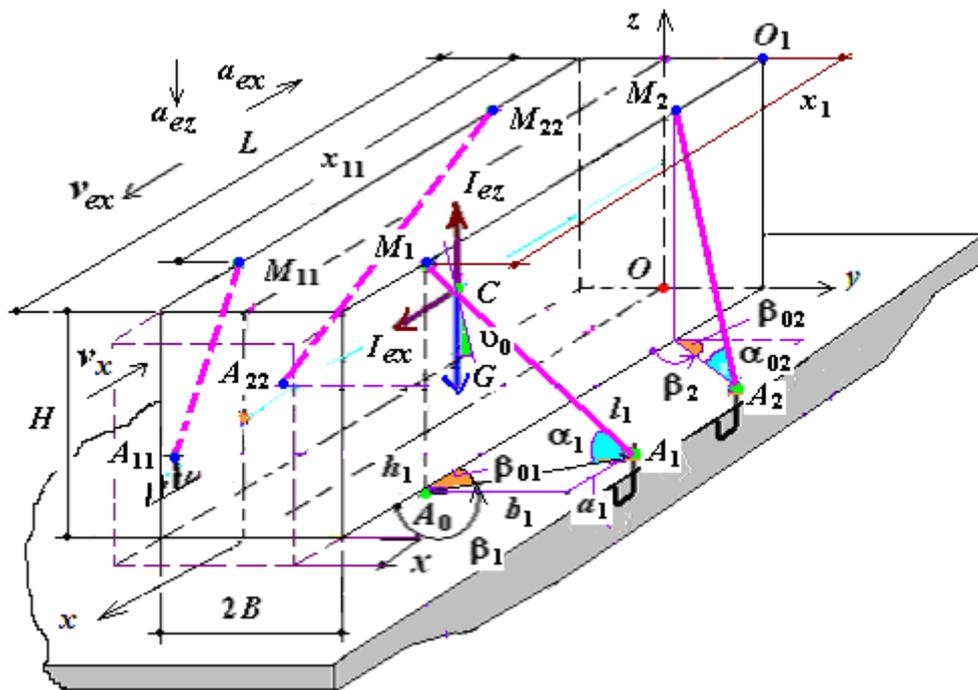


Рис. 4.30. Реальная модель размещения груза на платформе.

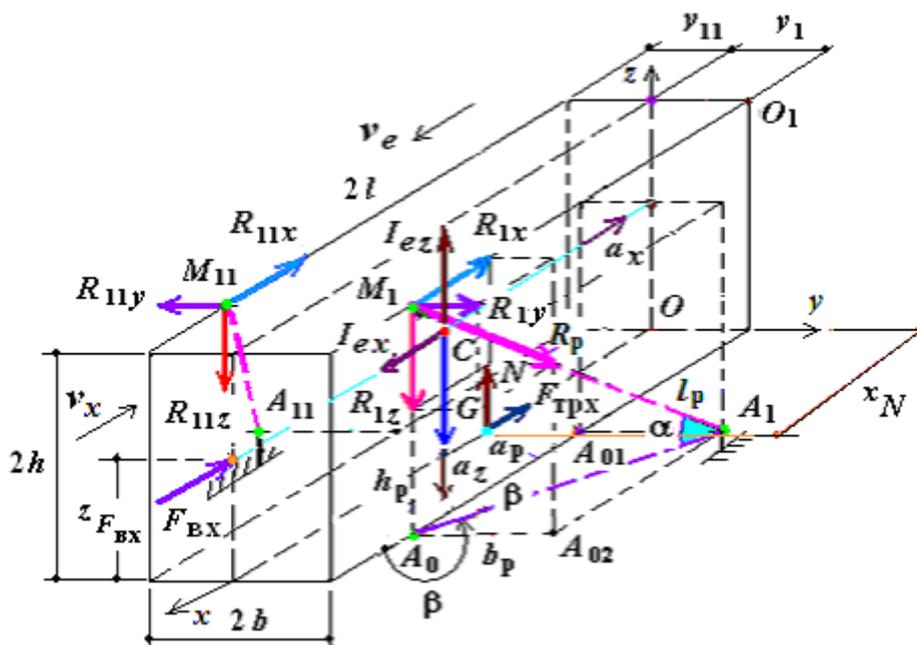


Рис. 4.31. Расчётная модель крепления груза на вагоне.

Платформа движется поступательно со скоростью  $\bar{v}_e$  (т. е. переносное движение поступательное ( $\bar{\omega} = 0$ )), с продольными  $\bar{a}_x = \bar{a}_{ex}$  и вертикальными  $\bar{a}_z = \bar{a}_{ez}$  переносными ускорениями, возникающими от волны неровности пути из-за отклонения норм его содержания и конструктивных особенностей вагона (наличие упругих элементов типа пружин и технологических зазоров в соединениях деталей). В результате этого крепления испытывают продольные  $\bar{I}_{ex} = \bar{I}_x$  и вертикальные  $\bar{I}_{ez} = \bar{I}_z$  переносные силы инерции. Элементы креплений (как связи) воспринимают силу аэродинамического сопротивления  $\bar{F}_{rvx}$  с продольной составляющей относительной скорости воздуха  $\bar{v}_{rx} = \bar{v}_{rvx}$  (см. (1.49а)). Такой случай соответствует движению подвижного состава по прямому участку пути.

Коэффициент трения сцепления груза о пол вагона –  $f_{сц}$ . Коэффициент трения скольжения –  $f$ . Коэффициент трения скольжения может принимать различные значения в весьма большом диапазоне, т. е.  $f < f_{сц}$ .

Учёт трения груза о пол вагона соответствует реальному случаю перевозки груза, т. е. учёту климатических и других условий (например, посыпка песком пола). Неучёт трения груза о пол вагона (например,  $0 \leq f \leq 0,01$ ) также будет соответствовать реальному случаю перевозки груза, когда между грузом и полом вагона в зимнее время образуется ледяная поверхность.

*Задание.* Требуется определить натяжения (усилие) гибких упругих элементов креплений  $\bar{R}$  и точку приложения  $x_N$  нормальной составляющей  $\bar{N}$  реакции связи по продольной оси вагона с учётом усилия предварительных скруток проволоки  $\bar{R}0_i$ .

Допустим, что относительное ускорение груза  $\bar{a}_r$  практически равно нулю, т. е. груз движется вместе с платформой.

*Решение.* В качестве объекта выбирают груз. К объекту условно прикладывают активные силы – силы тяжести  $\bar{G}$  и аэродинамического сопротивления  $\bar{F}_{rv,x}$ , а также реактивные силы – нормальную  $\bar{N}$  и касательную  $\bar{F}_{tx}$  составляющую реакции пола вагона  $\bar{R}$ , и натяжение гибких упругих элементов креплений  $\bar{R}_i$  (см. рис. 4.31). Касательная составляющая  $\bar{F}_{tx}$  равна предельной силе трения (сила сцепления груза с полом платформы)  $\bar{F}_{тр,x}$ . Добавляют переносные силы инерции, которых испытывают гибкие элементы креплений. На-

помним, что прибавлением сил инерции *переносного* движения  $\bar{I}_e$  и *Кориолиса*  $\bar{I}_c$  к действующим силам *учитывается влияние* на относительное движение точки *подвижной системы отсчёта* (п. 4.6.3).

Считают, что действующие на груз поперечные силы по направлению совпадают, а гибкие упругие элементы креплений другого направления провисают, т. е.  $\bar{R}_{i1} = 0$ .

По условию задачи платформа движется *поступательно* со скоростью  $\bar{v}_e$ , поэтому сила инерции Кориолиса равна нулю (см. случай 2 п. 4.6.3). В этом случае переносные силы инерции формально приводятся к *равнодействующей*, приложенной к *центру тяжести* груза. Тогда продольные и вертикальные переносные силы инерции равны (см. (4.106)):

$$|\bar{I}_{ex}| = Ma_{ex}; \quad |\bar{I}_{ez}| = Ma_{ez},$$

где  $\bar{a}_{ex}$  и  $\bar{a}_{ez}$  – продольные и вертикальные максимальные переносные ускорения груза.

При определении направления сил инерции следует учитывать неблагоприятные случаи. Так, неблагоприятным случаем является совпадение силы инерции по направлению с натяжением (не реакцией) связи, поскольку к объекту (груз) приложены реакции связей, а не натяжения. Таким образом, в неблагоприятном случае сила инерции должна быть направлена в сторону, противоположную реакции связей. Естественно, что ускорение при этом будет направлено в сторону реакции при условии, что они, как обычно, направляются от объекта! Это сохраняется и для вертикального ускорения (пол – односторонняя связь, и в рассмотренном случае сила инерции направлена вверх и нагружает в этом направлении вертикальные и наклонные растяжки). Вертикальная переносная сила инерции оказывает влияние на изменение силы трения в случае, если она будет направлена вверх (см. рис. 4.31). При этом уменьшится сила давления со стороны груза и упругих элементов креплений на пол вагона.

При увеличении ускорения, соответственно, будут увеличиваться реакция и натяжение гибкого упругого элемента.

Силу аэродинамического сопротивления на груз определяют по (3.9) – (3.12) (см. п. 3.1).

Таким образом, на груз будет условно приложена плоская система активных сил и в случае пренебрежения проекциями реакций гибких упругих элементов креплений (растяжек) на поперечную ось, всю систему сил, которые испытывают элементы креплений груза, можно считать *плоской системой*.

В этом случае основной закон относительного переносного движения груза описывают уравнением (4.100).

Поскольку по условию задачи принято, что относительное ускорение груза  $\bar{a}_r$  практически равно нулю, то имеем *относительное* равновесие.

Тогда уравнения относительного равновесия плоской системы сил (см. пп. 2.3.1, (2.47)), имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: - \sum_{i=1}^{n_p} R_{ix} - \sum_{i=1}^{n_p} R0_{ix} + I_{ex} - F_{r_{bx}.x} - F_{тр.x} = 0; \quad (4.137)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0: - \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} - \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} - (G - I_{ez}) + N = 0; \quad (4.138)$$

$$\sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0: \left( \sum_{i=1}^{n_p} R_{ix} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{ix} \right) z_1 + \left( \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} \right) x_1 + \\ + I_{ex} z_C - (G - I_{ez}) x_C - F_{r_{bx}} z_{F_{bx}} - N x_N = 0, \quad (4.139)$$

где  $i = 1, n_p$  – количество гибких упругих элементов креплений, шт.

Из (4.138) найдем нормальную реакцию

$$N = \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} + (G - I_{ez}). \quad (4.140)$$

Согласно закону Кулона (см. (2.64)), сила трения между грузом и полом вагона

$$F_{трx} = f \left( \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} + (G - I_{ez}) \right). \quad (4.141)$$

Подставляя (4.141) в (4.137), будем иметь

$$- \sum_{i=1}^{n_p} R_{ix} - \sum_{i=1}^{n_p} R0_{ix} + I_{ex} - F_{r_{bx}} - f \left( \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} + (G - I_{ez}) \right) = 0,$$

или

$$- \sum_{i=1}^{n_p} R_{ix} - f \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} - \sum_{i=1}^{n_p} R0_{ix} - f \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} + I_{ex} - F_{r_{bx}} - f(G - I_{ez}) = 0, \quad (4.142)$$

где  $\sum_{i=1}^{n_p} R_{ix}$ ,  $\sum_{i=1}^{n_p} R0_{ix}$  и  $\sum_{i=1}^{n_p} R_{iz}$ ,  $\sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz}$  – сумма проекции всех элементов креплений на продольную  $x$  и вертикальную  $z$  оси:

$$\sum_{i=1}^{n_p} R_{ix} = \sum_{i=1}^{n_p} R_i \cos \alpha_i \cos \beta_{0i}; \quad \sum_{i=1}^{n_p} R0_{ix} = \sum_{i=1}^{n_p} R0_i \cos \alpha_i \cos \beta_{0i}; \quad (4.142a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} = \sum_{i=1}^{n_p} R_i \sin \alpha_i; \quad \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} = \sum_{i=1}^{n_p} R0_i \sin \alpha_i, \quad (4.142б)$$

с учётом того, что  $R_i$  – усилие в элементах креплений (см. (2.56));  $\alpha_i$  и  $\beta_{0i}$  – углы, характеризующие геометрию креплений (см. рис. 2.47).

Перепишем (4.142) с учётом последних соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_p} R_i (\cos \alpha_i \cos \beta_{0i} + f \sin \alpha_i) &= I_{ex} - f(G - I_{ez}) - F_{rvx} - \\ &- \sum_{i=1}^{n_p} R0_i (\cos \alpha_i \cos \beta_{0i} + f \sin \alpha_i). \end{aligned}$$

Отсюда реакция гибких упругих элементов креплений *с учётом упругости и предварительных скруток проволоки* [Туранов, 2009, 2011] примет вид

$$R_i = \frac{\Delta F_{пр}}{\sum_{i=1}^{n_p} (f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \cos \beta_{0i})}, \quad (4.143)$$

где  $\Delta F_{пр}$  – продольная сила, воспринимаемая креплениями, в отличие от ТУ<sup>140</sup>:

$$\Delta F_{пр} = I_{ex} - F_{rv.x} - f(G - I_{ez}) - \sum_{i=1}^{n_p} R0_i (f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \cos \beta_{0i}). \quad (4.144)$$

Таким образом, формула (4.143) соответствует случаю крепления груза  $i$ -ми гибкими упругими элементами креплений и без учёта усилия предварительных скруток проволоки  $\bar{R}0_i$  совпадают с (34) ТУ.

<sup>140</sup> Приложение 14 к СМГМ «Правила размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах». – М.: Планета, 2005. – 191 с.

Из уравнения (4.139) найдём координату точки приложения нормальной реакции связи

$$x_N = \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R_{0i})(f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \cos \beta_{0i}) z_1 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R_{0i}) \sin \alpha_i x_1 + I_{ex} z_C - (G - I_{ez}) x_C - F_{rв.х} z_{F_{вх}} \right]. \quad (4.145)$$

Если сила аэродинамического сопротивления  $\overline{F}_{rвх}$  будет действовать с тыльного торца груза, то во всех приведённых формулах эту силу следует подставлять с положительным знаком, учитывая при этом знак координаты точки её приложения.

Без доказательств приводим формулу для нахождения натяжений (усилие)  $R_{упр.i}$  в  $i$ -м гибком упругом элементе креплений с учётом упругости и натяжений предварительных скруток проволоки [Туранов, 2009, 2011], кН:

$$R_{упр.i} = 7,854 d_i^2 \Delta x \frac{n_i}{l_i} \cos \alpha_i \cos \beta_i \leq [R_i] \quad (4.146)$$

или в проекциях на координатную ось  $x$  (см. (2.61a))

$$R_{упр.i} = 7,854 d_i^2 \Delta x \frac{n_i}{l_i} \frac{a_i}{l_i} \leq [R_i], \quad (4.146a)$$

где  $[R_i]$  – допустимое значение натяжений в проволоках креплений (см. табл. 30 Приложения 14 к СМГС) в зависимости от количества нитей  $n_i$  (шт.) и диаметра  $d_i$  (мм) проволоки креплений, кН;

$a_i$  – проекции элементов креплений на продольную ось  $x$ , м (см. рис. 2.47);

$\Delta x$  – сдвиг груза вдоль вагона, м:

$$\Delta x = \frac{\Delta F_x^{(i)}}{c_{эқв.х}}. \quad (4.147)$$

Здесь  $\Delta F_x^{(i)} = \Delta F_{пр}$  – продольная сила, воспринимаемая гибкими упругими элементами креплений с учётом предварительных скруток проволоки

(обычно принимают 20 кН), кН (см. (4.144));  $C_{\text{ЭКВ.}x}$  – эквивалентная жёсткость гибких элементов креплений по продольной оси вагона, кН/м:

$$c_{\text{ЭКВ.}x} = 7,854d_i^2 \sum_{i=1}^{n_p} \left( \frac{n_i}{l_i} (f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \cos \beta_i) \cos \alpha_i \cos \beta_i \right) \quad (4.148)$$

или, через проекции гибких элементов креплений на координатную ось  $x$ ,

$$c_{\text{ЭКВ.}x0} = 7,854d_i^2 \sum_{i=1}^{n_p} \left[ \frac{n_i}{l_i} \left( f \frac{h_i}{l_i} + \frac{a_i}{l_i} \right) \frac{a_i}{l_i} \right], \quad (4.148a)$$

где  $h_i$  – проекции элементов креплений на вертикальную ось  $z$ , м (см. рис. 2.47).

*Задача 5.* Груз силой тяжести  $G$  так же, как и в задаче 4, размещён на платформе и закреплён  $i$ -ми гибкими упругими элементами креплений (растяжка, обвязка) с учётом предварительных скруток проволоки к стоечным скобам вагона (например,  $A_1$  и  $A_2$ ) и к грузовым петлям груза (например,  $M_1$  и  $M_2$ ). Реальная и расчётная модели крепления груза показаны на рис. 4.32 и 4.33.

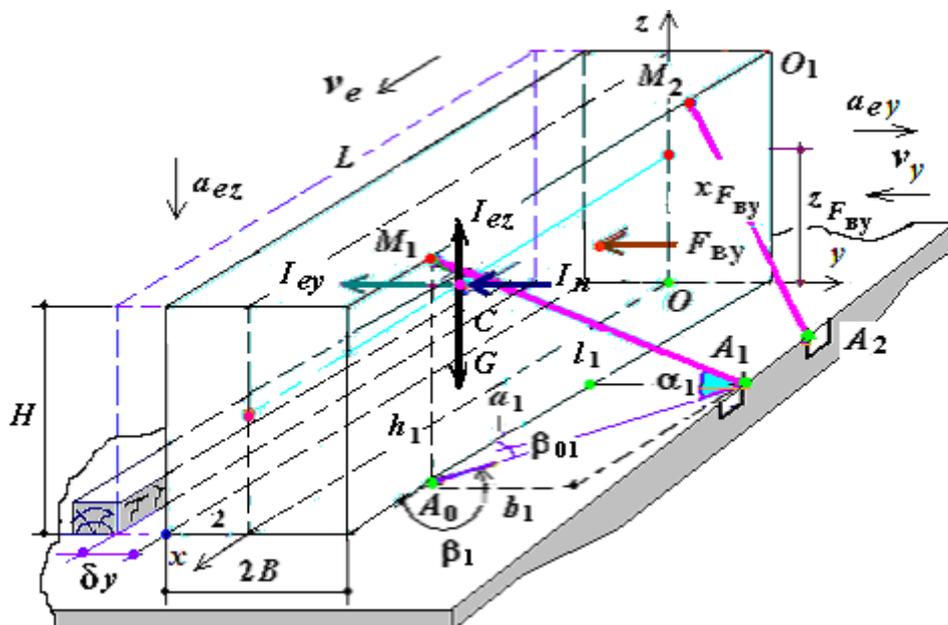


Рис. 4.32. Реальная модель груза на платформе.

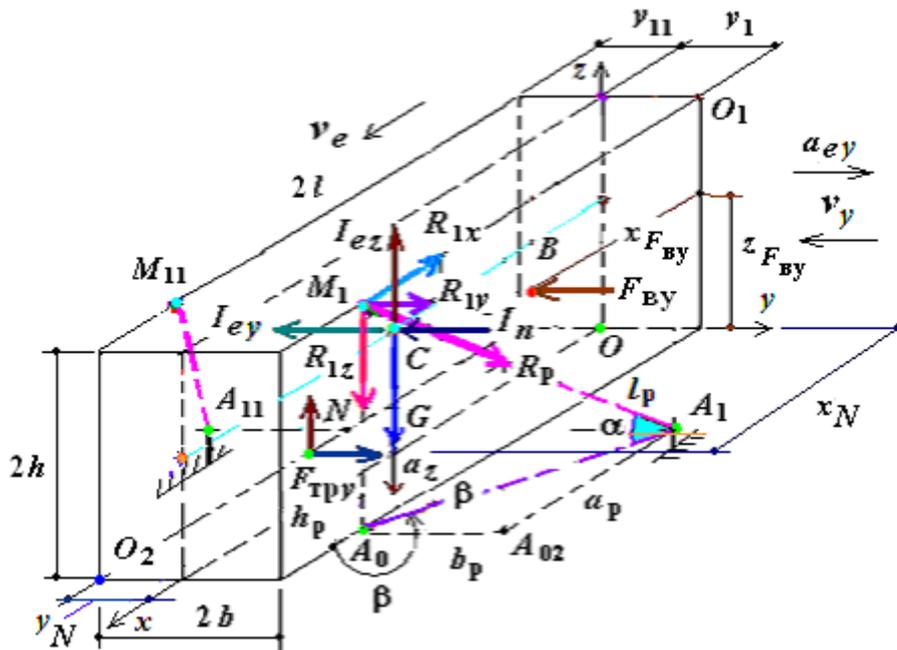


Рис. 4.33. Расчётная модель крепления груза на вагоне.

При больших радиусах закругления нормальные (поперечные) составляющие силы инерции, приложенные к каждой материальной точке груза, размеры которого малы по сравнению с радиусом кривизны, можно считать параллельными, а движение поступательным, хотя угловая скорость не равняется нулю.

Платформа движется с поперечными  $\bar{a}_y = \bar{a}_{ey}$  и вертикальными  $\bar{a}_z = \bar{a}_{ez}$  ускорениями. Поперечное переносное ускорение возникает из-за наличия технологического зазора между гребнями колес и рельсовыми нитями, конструктивных особенностей вагона (наличия комплектов пружин и зазоров в соединениях деталей тележек) и из-за волны неровности пути. Вертикальное переносное ускорение возникает от волны неровности пути из-за отклонения норм его содержания. Крепления испытывают поперечные  $\bar{I}_{ey} = \bar{I}_y$  и вертикальные  $\bar{I}_{ez} = \bar{I}_z$  переносные силы инерции. Кроме того, при движении груза с ускорением формально учтена нормальная составляющая  $\bar{I}_n$  силы инерции в абсолютном движении. Учёт силы  $\bar{I}_n$  в математической модели позволяет рассматривать прохождение поезда по кривому участку пути различного радиуса кривизны траектории  $\rho$  в данной точке кривой с различной скоростью  $\bar{V}$ .

Элементы креплений воспринимают силу аэродинамического сопротивления  $\bar{F}_{ry}$  с поперечной составляющей относительной скорости воздуха  $\bar{v}_{ry} = \bar{v}_{ry}$  (см. (3.12)).

Требуется определить натяжения (усилие) гибких упругих элементов креплений  $\bar{R}$  и точку приложения  $Y_N$  нормальной реакции связи  $\bar{N}$  по продольной оси вагона с учётом усилия предварительных скруток проволоки  $\bar{R}0_i$ .

Считают, что действующие на груз поперечные силы по направлению совпадают, а гибкие упругие элементы креплений другого направления провисают, т. е.  $\bar{R}_{i1} = 0$ .

*Решение.* В качестве объекта выбирают груз. К грузу условно прикладывают активные силы – силы тяжести  $\bar{G}$  и аэродинамического сопротивления  $\bar{F}_{рву}$ , а также реактивные силы – нормальную  $\bar{N}$  и касательную  $\bar{F}_{ту}$  составляющую реакции пола вагона  $\bar{R}$ , и натяжение гибких упругих элементов креплений  $\bar{R}_i$  (см. рис. 4.33). Касательная составляющая  $\bar{F}_{ту}$  равна предельной силе трения (сила сцепления груза с полом платформы)  $\bar{F}_{тру}$ . Рассматривая случай предельного равновесия, нормальную  $\bar{N}$  и касательную (сила трения)  $\bar{F}_{тру}$  составляющие реакции связи  $\bar{R}$  прикладывают к ребру  $O_2$ , относительно которого возможно опрокидывание груза. Добавляют переносные силы инерции, которые испытывают гибкие элементы креплений.

Переносные силы инерции *условно* приводят к *равнодействующей*, приложенной в центре масс груза. Тогда поперечные и вертикальные переносные силы инерции (см. (4.106)), а также нормальная составляющая силы инерции в абсолютном движении (см. (4.47)) равны

$$|\bar{I}_{ey}| = Ma_{ey}; \quad |\bar{I}_{ez}| = Ma_{ez}; \quad \bar{I}_n = 10^{-3} M \frac{v^2}{12,96\rho},$$

где  $\bar{a}_{ey}$  и  $\bar{a}_{ez}$  – поперечные и вертикальные максимальные переносные ускорения груза;  $\rho$  – радиус кривизны траектории в данной точке кривой, где  $12,96 = 3,6^2$  – переводной коэффициент м/с в км/ч.

Когда гибкие упругие элементы креплений другого направления провисают, т. е.  $\bar{R}_{i1} = 0$ , реакция  $\bar{R}_i$  разложена на прямоугольные составляющие  $\bar{R}_{iy}$ ,  $\bar{R}_{iz}$  и пренебрегают составляющим  $\bar{R}_{ix}$ , то можно считать, что элементы креплений груза испытывают плоскую систему сил.

Уравнения относительного равновесия плоской системы сил (выражения (2.50), а также уравнение (4.102)), имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: \sum_{i=1}^{n_p} R_{iy} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iy} - I_{ey} - I_n - F_{rBy} + F_{тpy} = 0; \quad (4.149)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0: -\sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} - \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} - (G - I_{ez}) + N = 0; \quad (4.150)$$

$$\sum_{k=1}^n m_{O_2}(F_k) = 0: -\left(\sum_{i=1}^{n_p} R_{iy} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iy}\right)z_1 - \sum_{i=1}^{n_p} (R_{iz} + R0_{iz})2b - (G - I_z)b + (I_{ey} + I_n)z_C + F_{rBy}z_{F_{By}} = 0$$

или, учитывая, что  $b = 0,5(2b)$ ,

$$-\left(\sum_{i=1}^{n_p} R_{iy} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iy}\right)z_1 - \sum_{i=1}^{n_p} (R_{iz} + R0_{iz})2b - 0,5(G - I_z)2b + (I_{ey} + I_n)z_C + F_{rBy}z_{F_{By}} = 0. \quad (4.151)$$

Из (4.150) найдём нормальную составляющую реакции внешней связи (пол вагона)

$$N = \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} + (G - I_{ez}). \quad (4.152)$$

Согласно закону Кулона (см. (2.64)), сила трения между грузом и полом вагона

$$F_{тpy} = f \left( \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} + (G - I_{ez}) \right). \quad (4.153)$$

Подставляя последнее равенство в (4.149), будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n_p} R_{iy} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iy} - I_{ey} - I_n - F_{rBy} + f \left( \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} + \sum_{i=1}^{n_p} R0_{iz} + (G - I_{ez}) \right) = 0,$$

или, учитывая (4.142б) и (2.56):

$$\sum_{i=1}^{n_p} R_{iy} = \sum_{i=1}^{n_p} R_i \cos \alpha_i \sin \beta_{0i}; \quad \sum_{i=1}^{n_p} R_{iz} = \sum_{i=1}^{n_p} R_i \cos \alpha_i \sin \beta_{0i}, \quad (4.153a)$$

запишем

$$\sum_{i=1}^{n_p} R_i (\cos \alpha_i \sin \beta_{0i} + f \sin \alpha_i) = I_{ey} - I_n - F_{rBy} - f \left( (G - I_{ez}) + \sum_{i=1}^{n_p} R0_i f \sin \alpha_i \right). \quad (4.154)$$

Отсюда натяжение в гибких элементах креплений *с учётом упругости и усилий предварительных скруток проволоки* [Туранов, 2009, 2011]:

$$R_i = \frac{\Delta F_{\Pi}}{\sum_{i=1}^{n_p} (f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \sin \beta_{0i})}, \quad (4.155)$$

где  $\Delta F_{\Pi}$  – поперечная сила, воспринимаемая креплениями, в отличие от ТУ<sup>141</sup>:

$$\Delta F_{\Pi} = I_{ey} + I_n + F_{rBy} - f \left( (G - I_{ez}) + \sum_{i=1}^{n_p} R0_i \sin \alpha_i \right). \quad (4.156)$$

Таким образом, формула (4.156) соответствует случаю крепления груза *i*-ми гибкими упругими элементами креплений и без учёта усилия предварительных скруток проволоки  $\bar{R}0_i$  совпадает с (35) ТУ.

Из уравнения (4.151) можно найти ширину груза  $2b$  из условия, при котором не произойдет его опрокидывание:

$$2b > \frac{-\sum_{i=1}^{n_p} R_i (f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) z_1 + (I_{ey} + I_n) z_C + F_{rBy} z_{F_{By}}}{\sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) \sin \alpha_i + 0,5(G - I_z)}. \quad (4.157)$$

Либо из уравнения (4.151) можно найти ординату центра тяжести груза  $z_C$  из условия, при котором не произойдет опрокидывания груза

<sup>141</sup> Приложение 14 к СМГМ «Правила размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах». – М.: Планета, 2005. – 191 с.

$$z_C < \frac{\sum_{i=1}^{n_p} R_i (f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R_{0i}) \sin \alpha_i 2b + (G - I_z)b - F_{rBy} z_{F_{ey}}}{I_{ey} + I_n}. \quad (4.158)$$

Если сила аэродинамического сопротивления  $F_{rBy}$  будет действовать с тыльного торца груза, то во всех приведённых формулах её следует подставлять с отрицательным знаком, учитывая при этом знак координаты точки её приложения.

Без доказательств приводим формулу для нахождения натяжений (усилие)  $R_{упр.i}$  в  $i$ -м гибком упругом элементе креплений с учётом упругости и натяжений предварительных скруток проволоки [Туранов, 2009, 2011], кН:

$$R_{упр.i} = 7,854 d_i^2 \Delta y \frac{n_i}{l_i} \cos \alpha_i \sin \beta_i \leq [R_i] \quad (4.159)$$

или в проекциях на координатную ось  $y$  (см. (2.61a))

$$R_{упр.i} = 7,854 d_i^2 \Delta x \frac{n_i}{l_i} \frac{b_i}{l_i} \leq [R_i], \quad (4.160)$$

где  $[R_i]$  – допустимое значение натяжений в проволоках креплений (см. табл. 30 Приложения 14 к СМГС) в зависимости от количества нитей  $n_i$  (шт.) и диаметра  $d_i$  (мм) проволоки креплений, кН;

$b_i$  – проекции элемента крепления на поперечную ось  $y$ , м (см. рис. 2.47);

$\Delta y$  – сдвиг груза поперёк вагона, м:

$$\Delta y = \frac{\Delta F_y^{(i)}}{C_{эkv.y}}. \quad (4.161)$$

Здесь  $\Delta F_y^{(i)} = \Delta F_{\Pi}$  – поперечная сила, воспринимаемая гибкими упругими элементами креплений с учётом предварительных скруток проволоки, кН (см. (4.156)); где  $C_{эkv.y}$  – эквивалентная жёсткость гибких элементов креплений по поперечной оси вагона, кН/м:

$$c_{\text{экв.}y} = 7,854d_i^2 \sum_{i=1}^{n_p} \left( \frac{n_i}{l_i} (f \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i) \cos \alpha_i \sin \beta_i \right) \quad (4.162)$$

или через проекции гибких элементов креплений на координатную ось  $y$

$$c_{\text{экв.}y} = 7,854d_i^2 \sum_{i=1}^{n_p} \left[ \frac{n_i}{l_i} \left( f \frac{h_i}{l_i} + \frac{b_i}{l_i} \right) \frac{b_i}{l_i} \right], \quad (4.162a)$$

где  $h_i$  – проекции элемента крепления на поперечную  $y$  и вертикальную  $z$  оси, м (см. рис. 2.47);

### Проверка устойчивости груза

1. На основе уравнения (4.149) вводим понятие *сдвигающей* и *удерживающей силы* (см. ссылку, приведённую при решении задачи 3):

$$F_{\text{сд}}^0 = I_{ey} + I_n + F_{\text{рв.}y}, \quad (4.163)$$

$$F_{\text{уд}}^0 = \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) (\cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) + F_{\text{тр.}y}. \quad (4.164)$$

Здесь силу трения  $F_{\text{тр.}y}$  находят согласно (4.153):

$$F_{\text{тр.}y} = f \left( (G - I_{ez}) + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) \sin \beta_{0i} \right).$$

С учётом последнего выражения перепишем (4.164) в виде

$$F_{\text{уд}}^0 = \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) (\cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) + f \left( (G - I_{ez}) + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) \sin \beta_{0i} \right). \quad (4.164a)$$

В предельном случае  $F_{\text{сд}}^0 = F_{\text{уд}}^0$ . Заведомо сдвиг груза поперёк вагона не произойдёт, если выполняется условие

$$F_{\text{сд}}^0 < F_{\text{уд}}^0. \quad (4.165)$$

Если условие (4.165) не выполняется, то явно произойдет сдвиг груза поперёк вагона. Разница между сдвигающей и удерживающей силой будет вос-

принята упорным брусом, использованным как дополнительное средство крепления. Может произойти выворачивание упорного бруса.

Прикладываем к грузу дополнительно реакцию бруса  $\bar{R}_{\text{бр}}$ . Уравнение проекций сил на поперечную ось имеет вид

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: -R_{\text{бр}} + F_{\text{сд}}^{\circ} - F_{\text{уд}}^{\circ} = 0.$$

Отсюда горизонтальная реакция бруса

$$R_{\text{бр}} = F_{\text{сд}}^{\circ} - F_{\text{уд}}^{\circ}. \quad (4.166)$$

По ТУ нормативное значение поперечной нагрузки, допускаемое на один крепёжный элемент (гвоздь) диаметром 6 мм, составляет  $[R_{\text{кр}}] = 1,08$  кН. Найдём количество крепёжных элементов, необходимых для крепления упорного бруса, при котором не произойдёт сдвиг груза поперёк вагона:

$$n_{\text{кр}} = \left[ \frac{R_{\text{бр}}}{[R_{\text{кр}}]} \right]. \quad (4.167)$$

Следует помнить, что удерживающие силы  $\bar{F}_{\text{уд}}^{\circ}$  возникают всегда, даже когда вовсе не происходит сдвиг груза. Этому соответствует равенство

$$F_{\text{уд}}^{\circ} = \sum_{i=1}^{n_p} R0_i (\cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) + f \left( (G - I_z) + \sum_{i=1}^{n_p} R0_i \sin \beta_{0i} \right). \quad (4.168)$$

Это означает, что в (4.163) величина сдвигающей силы  $I_{ey}$  мала по сравнению с реакцией бруса  $R_{\text{бр}}$ , прибитого к полу вагона согласно ТУ вплотную к боковой поверхности груза, т. е.  $R_{\text{бр}} > I_{ey}$ . В этом случае гибкие элементы креплений не включаются в работу по удержанию груза от сдвига.

Гибкие элементы креплений включаются в работу по удержанию груза от сдвига лишь при соблюдении условия  $R_{\text{бр}} < I_{ey}$ . Это происходит тогда, когда начинается выворачивание упорного бруса. Основной причиной выворачивания упорных брусков является то, что при резком торможении или при соударении вагонов, когда время торможения или удара  $\tau \ll 0$ , значение сдвигающей силы  $\bar{F}_{\text{сд}}^{\circ}$  велико (см. (4.163)), а значение  $\bar{F}_{\text{уд}}^{\circ}$  (см. (4.168)) мало. В этом случае для удержания груза от сдвига включаются упругие силы гибких элементов креплений.

Таким образом, поскольку в ТУ предварительные скрутки проволоки не учитываются, то упорные бруски крепят при завышенных значениях  $n_{\text{кр}}$ .

2. Аналогично на основе уравнения (4.151) вводим понятие *удерживающего* и *опрокидывающего* момента<sup>142</sup>:

$$M_{уд}^o = Gb + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) \sin \alpha_i 2b + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) (\cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) z_1; \quad (4.169)$$

$$M_{опр}^o = I_{ez} b + (I_{ey} + I_n) z_C + F_{vy} z_{F_{vy}}. \quad (4.170)$$

В случае равенства последних соотношений груз находится в предельном равновесии. Груз заведомо не будет опрокидываться при выполнении неравенства (см. неравенства (2.134))

$$M_{опр}^o < M_{уд}^o. \quad (4.171)$$

Коэффициент устойчивости от опрокидывания определяют по (2.135).

По ТУ груз является *устойчивым* и *не требует дополнительного крепления от опрокидывания*, если при упругом креплении  $\eta > 1,25$ .

Можно потребовать, чтобы новый коэффициент устойчивости равнялся нормативному значению  $[\eta] = 1,25$ . Для этого, подставляя в (4.171) равенства (4.169) и (4.170), имеем

$$\eta = \frac{Gb + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) \sin \alpha_i 2b + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i) (\cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) z_1}{I_z b + (I_{ey} + I_n) z_C + F_{rvy} z_{F_{vy}}} = [\eta] \quad (4.172)$$

Отсюда также можно найти упругие силы (натяжение) гибкого элемента крепления

$$R_1 = \frac{(I_z b + (I_{ey} + I_n) z_C + F_{rvy} z_{F_{vy}}) [\eta] - Gb - \sum_{i=1}^{n_p} R0_i \sin \alpha_i 2b - \sum_{i=1}^{n_p} R0_i (\cos \alpha_i \sin \beta_{0i}) z_1}{2b \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sin \beta_{01} z_1}. \quad (4.173)$$

<sup>142</sup> Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. I. Статика. Кинематика. – М: Высш. шк., 1977. – 368 с.

Сравнивая вычисленное значение натяжения гибкого упругого элемента крепления с допустимым значением  $[R_1]$  для принятого диаметра проволоки  $d$ , мм, можно вычислить количество нитей  $n$ , шт. (см. (4.167)):

$$n = \frac{R_1}{[R_1]}.$$

Следует иметь в виду, что принятое количество нитей проволоки  $n$  должно быть чётным и находиться в пределах  $2 \leq n \leq 10$  в зависимости от диаметра проволоки.

*Задача 6.* Рассмотрим случай, когда крепление груза цилиндрической формы (труба большого диаметра) от сдвига вдоль вагона можно обеспечить стяжками, а поперёк вагона – подкладками (обычно используют две деревянные подкладки) (рис. 4.34, а).

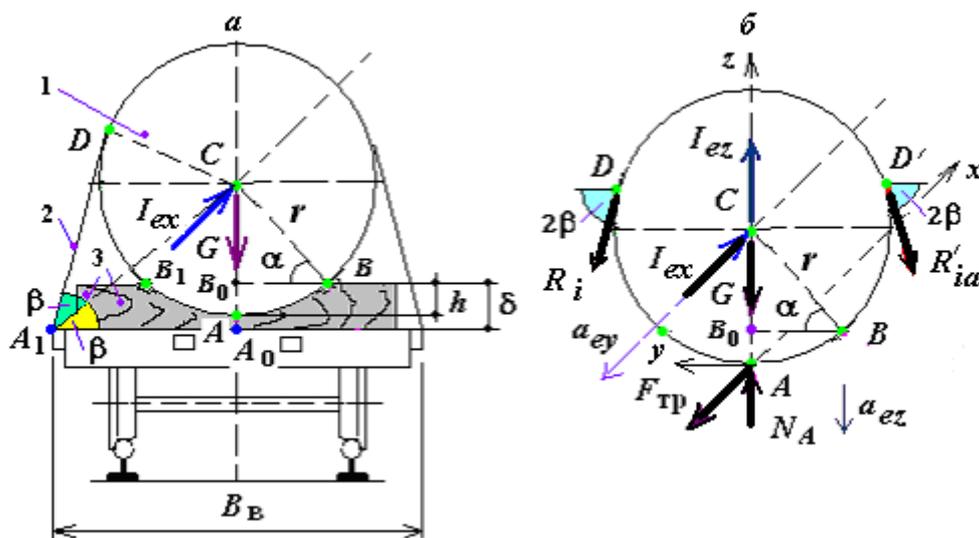


Рис. 4.34. Крепление груза цилиндрической формы и расчётная схема.  
1 – груз цилиндрической формы; 2 – стяжки.

На рис. 4.34 обозначено: сила тяжести трубы  $G$ , его радиус  $r$  и длина  $L$ . Толщина подкладок  $\delta$ , а глубина вырубki  $h$ . Ширина платформы  $B_B = 2,77$  м.

*Постановка задачи.* Требуется определить минимальное натяжение стяжек  $S_2$  для увязки трубы большого диаметра и/или котла цистерны и найти координату точки приложения  $x_N$  реакции связи  $N_A$ .

*Условия задачи.* Горизонтальную поперечную переносную силу инерции  $\bar{I}_{ex}$ , стремящуюся сдвинуть груз вдоль вагона, можно считать возникшей из-за продольного переносного ускорения вагона  $\bar{a}_{ex}$ , значение которого задается

техническими нормами на проектирование вагона. Рассмотрим неблагоприятный случай, когда составляющие ускорения максимальны по величине (описание неблагоприятного случая см. в п. 4.6.5). Примем, что груз испытывает переносное вертикальное ускорение  $\bar{a}_{ez}$ , направленное вниз.

Допустим, что относительное ускорение груза  $\bar{a}_r$  практически равно нулю.

*Решение.* В качестве объекта выбираем груз. Приложим к грузу внешние силы (активные и реактивные) – вес  $\bar{G}$ , нормальную  $\bar{N}_A$  и касательную  $\bar{F}_{тр} < f\bar{N}$  составляющие реакции связей (упорный брус), а также реакции связей (стяжек) –  $\bar{R}_i$  и  $\bar{R}'_{ia}$  (где  $i$  и  $ia$  – количество стяжек), приложенных в точках  $D$  и  $D'$ . К этим силам добавим продольные и вертикальные переносные силы инерции  $|\bar{I}_{ex}| = \frac{G}{g} a_{ex}$  и  $|\bar{I}_{ez}| = \frac{G}{g} a_{ez}$ . Выбираем оси координат, как показано на рис. 4.34, б.

Груз находится в *относительном равновесии*. Его движение описывается уравнением (4.102):  $\bar{F} + \bar{N} + \bar{I}_e = 0$ . Проекция этого уравнения на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\bar{F}_x + \bar{I}_{ex} = 0; \quad \bar{F}_y = 0; \quad \bar{F}_z + \bar{N}_z + \bar{I}_{ez} = 0. \quad (4.174)$$

Силы, действующие на трубу, являются произвольной *пространственной системой непересекающихся сил*, для которой составляются 6 уравнений равновесия. Однако в данной задаче с учётом особенностей приложения сил некоторые уравнения обращаются в тождества. Поэтому *достаточно* составить три уравнения равновесия в виде (2.46), приравняв к нулю сумму проекций всех сил на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и уравнение моментов всех сил вокруг оси  $x$  в виде первого уравнения (2.47) (рис. 4.35) [Туранов, 2011]:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: \quad I_{ex} - F_{тр} = 0. \quad (4.175)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: \quad -\sum_{i=1}^{n_p} (R_{iy} + R0_{iy}) + \sum_{i=1}^{n_p} (R_{iay} + R0_{iay}) = 0; \quad (4.176)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0: \quad N - (G - I_{ez}) - \sum_{i=1}^{n_p} (R_{iz} + R0_{iz}) - \sum_{i=1}^{n_p} (R_{iaz} + R0_{iaz}) = 0; \quad (4.177)$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0 : -I_{ex} \cdot r - G \cdot x_C - \sum_{i=1}^{n_p} (R_{iz} + R0_{iz})x_i + Nx_N = 0 \quad (4.178)$$

В последних выражениях  $R0_{iy}$ ,  $R0_{iz}$  и  $R0_{iay}$ ,  $R0_{iaz}$  проекции усилий  $R0_i$  предварительных затяжек стержней (обычно задаваемые величины).

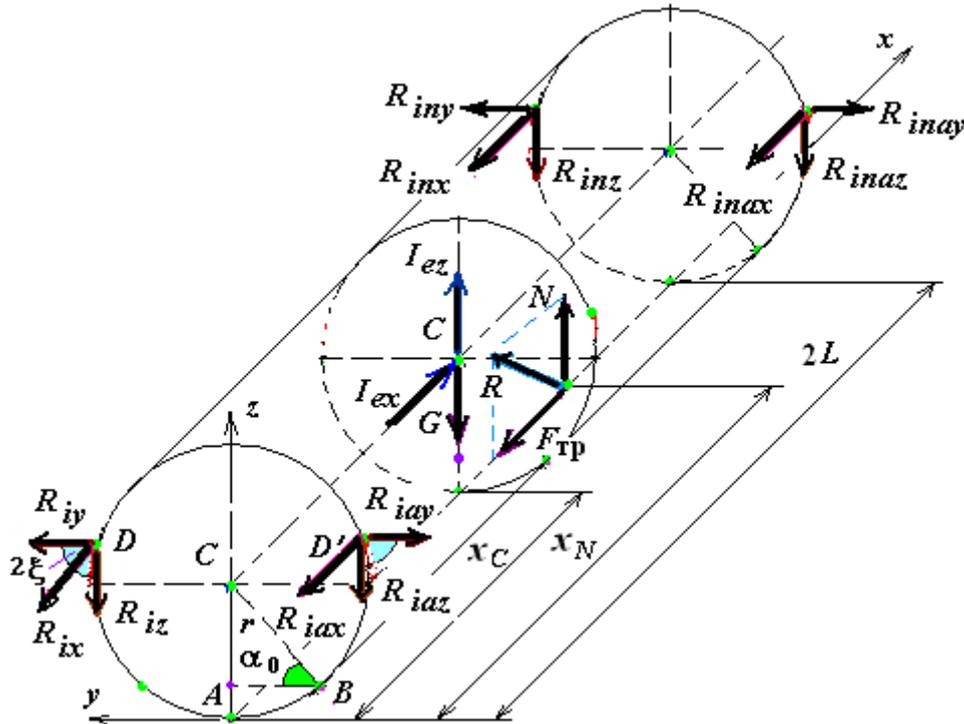


Рис. 4.35. Схема действия пространственных систем сил.

Относительно оси  $x$  и  $z$  суммы моментов действительно тождественно равняются нулю (по симметрии реакций при отсутствии активных поперечных сил). На рис. 4.35 предполагают, что натяжения во всех стержнях одинаковы, т. е.  $\bar{R}_{2i} = \bar{R}_{ia} = \bar{R}'_{2i} = \bar{R}'_{ia}$

Решая уравнения (4.175) – (4.177), после некоторых математических выкладок с учётом закона Кулона (см. (2.64)) получим минимальное натяжение стержней (см. (2.96)) [Туранов, 2011]

$$R_i \geq \frac{I_{ex} - f(G - I_{ez}) - 2f \sum_{i=1}^{n_p} R0_i \sin 2\beta}{2f \sin 2\beta}, \quad (4.179)$$

где  $\sin 2\beta$  согласно (2.95а):

$$\sin 2\beta = \frac{B_B (r + (\delta - h))}{B_B^2 + (r + (\delta - h))^2}.$$

Решая уравнения (4.178), находим координату точки приложения реакции связи  $N_A$  в виде

$$x_N = \frac{I_{ex}r + (G - I_z)x_C + \sum_{i=1}^{n_p} (R_i + R0_i)(\sin 2\beta)x_i}{N}. \quad (4.180)$$

Из формулы (4.175) следует, что трубу следует увязывать стяжками лишь при выполнении условия:

$$I_{ex} \geq f(G - I_{ez}) + 2f \sum_{i=1}^{n_p} R0_i \sin 2\beta. \quad (4.181)$$

Условие (4.181) может соблюдаться при соударениях вагонов на подгорочном парке сортировочной горки. Усилие стяжек  $R_i$  и  $R_{ia}$  уменьшаются с увеличением их угла наклона  $\beta$  к плоскости пола платформы, что одно и то же с увеличением диаметра трубы.

*Анализ полученных результатов.* Из формулы (4.179) следует, что трубу необходимо увязывать стяжками лишь при  $a_{ey} > f(g - a_{ez})$ . Данное условие может соблюдаться при соударениях вагонов на сортировочных горках и при экстренном торможении подвижного состава. Натяжение стяжек  $\overline{R}_i$  уменьшается с увеличением их угла наклона  $\beta$  к плоскости пола платформы, что аналогично увеличению диаметра трубы.

Сечение стяжек (ширина  $b$  и толщина  $\delta$ ) определяется методом подбора, а количество стяжек  $n$  – из условия прочности их на растяжение по формулам сопротивления материалов.

## 5. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

### 5.1. Принцип Д'Аламбера для системы

#### *Понятие о принципе Д'Аламбера для системы*

Если к каждой точке системы добавить соответствующие им силы инерции Д'Аламбера  $\bar{I}_k$  (т. е. силы инерции в абсолютном движении (см. п. 4.6.3, (4.44))), то силы  $\bar{F}_k$ , приложенные к этим точкам системы, реакции связи  $\bar{R}_k$  и силы инерции Д'Аламбера будут удовлетворять уравнениям равновесия.

Следовательно, указанные силы, действующие на систему, также будут удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \sum_{k=1}^n \bar{I}_k = 0, \quad (5.1)$$

где  $\bar{R}_k$  – реакции связей:  $\bar{R}_k = \bar{F}_{\tau k} + \bar{N}_k$  с учётом того, что  $\bar{F}_{\tau k}$  и  $\bar{N}_k$  – касательные и нормальные составляющие реакции связи.

Для идеальных связей, где  $\bar{F}_{\tau k} = 0$ , (5.1) имеет вид

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{I}_k = 0. \quad (5.2)$$

В данном случае получим пространственную систему сил.

Таким образом, в общем случае для механической системы можно составить шесть уравнений равновесия.

*Примеры на применение принципа Д'Аламбера для системы*

Особо отметим, что отсутствуют примеры применения принципа Д'Аламбера для системы в задачах грузовых перевозок. Поэтому приведём пример, который соответствует задачам погрузки–выгрузки грузов посредством полиспастов в погрузочно-разгрузочных машинах (козловых и мостовых кранах, лебёдках и др.) и натяжения полиспастом контактных сетей электрифицированных железных дорог [Туранов, 2008].

*Пример 1.* К концам гибкого упругого элемента (нить), переброшенного через блок с неподвижной осью вращения  $O$ , подвешены грузы силой тяжести  $G_1$  и  $G_2$ , причём  $G_1 < G_2$  (рис. 5.1). Найти ускорение грузов  $\bar{a}$  и натяжение нити  $\bar{R}$ , пренебрегая трением нити как идеальной связи о блок с неподвижной осью вращения.

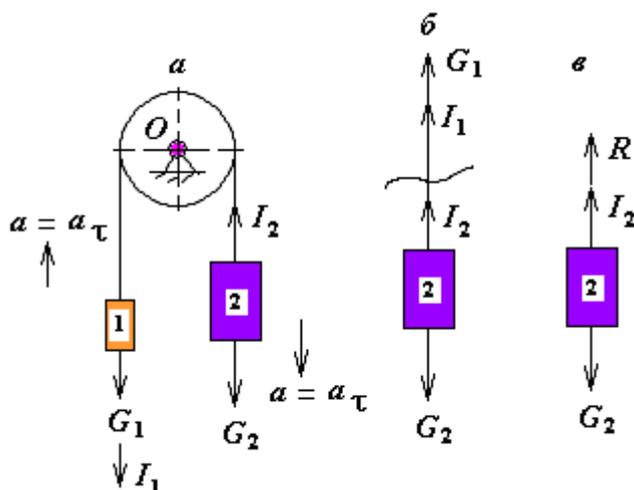


Рис. 5.1. Схема приложения сил через блок с неподвижной осью вращения.

*Решение.* Будем учитывать, что натяжение нити  $\bar{R}$  везде одинаково, и ускорение грузов также одинаково. Рассмотрим равновесие нити, охватывающей блок с неподвижной осью вращения.

Так как оба груза движутся поступательно с одним и тем же ускорением (нить не растяжима), то по модулю нормальные составляющие силы инерции пропорциональны массам грузов:

$$I_{abc1} = M_1 a_{abc1} = G_1 \frac{a_{abc}}{g}; \quad I_{abc2} = M_2 a_{abc2} = G_2 \frac{a_{abc}}{g}.$$

Составим уравнение равновесия нити (проекция всех сил на вертикаль), добавив силы инерции грузов к их силам тяжести согласно (5.1) (см. рис. 5.1, б):

$$G_1 + I_{a\bar{b}c1} + I_{a\bar{b}c2} - G_2 = 0,$$

или

$$G_1 + \frac{G_1}{g} a_{a\bar{b}c} + \frac{G_2}{g} a_{a\bar{b}c} - G_2 = 0.$$

Отсюда ускорение грузов

$$a_{a\bar{b}c} = g \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2}. \quad (5.3)$$

Ускорение грузов будет направлено в сторону более тяжёлого груза, что и логично.

Применяя принцип освобождённости от связей геометрической статики (см. рис. 5.1, б, в), запишем:

$$R + \frac{G_2}{g} a_{a\bar{b}c} = G_2 \quad \text{или} \quad R = G_2 - \frac{G_2}{g} a_{a\bar{b}c}.$$

Подставляя (5.2) в последнее равенство, имеем

$$R = G_2 - \frac{G_2}{g} \times g \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2}$$

или

$$R = \frac{G_1 G_2 + G_2^2 - G_2^2 + G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Из последнего выражения получим формулу для определения натяжения нити

$$R = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2}. \quad (5.4)$$

Натяжение нити, переброшенной через блок с неподвижной осью вращения, равно удвоенному произведению силы тяжести грузов, делённому на их сумму.

## 5.2. Общее уравнение динамики системы

Применяя к механической системе принцип Д'Аламбера, находим систему сил, которая будет удовлетворять уравнениям относительного равновесия геометрической статики. Вместо составления соответствующих уравнений относительного равновесия для рассматриваемой движущейся системы можно применить принцип возможных перемещений. Напомним, что при использовании принципа возможных перемещений можно рассматривать несвободные или не совсем свободные системы и получать меньшее количество уравнений в силу малого количества степеней свободы или задаваемых возможных перемещений рассматриваемых на практике механических систем.

По аналогии с уравнением (3.81) имеем: *сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции Д'Аламбера на любом возможном перемещении системы равна нулю*, т. е.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{I}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (5.5)$$

В последнем уравнении  $\bar{I}_k = -m_k \bar{a}_k$  – сила инерции Д'Аламбера (см. (4.44)), где  $m_k$  – масса материальной точки системы, кг;  $\bar{a}_k$  – вектор абсолютного ускорения материальной точки системы, м/с<sup>2</sup>.

Особо отметим, что под *системой сил* в динамике систем понимают заданные силы, реакций связей (включая силы упругости упругих элементов как реакций связей) и силы инерции отдельных точек движущейся механической системы. Здесь к заданным силам можно отнести, например, силу тяжести и силу аэродинамического сопротивления, к реакциям связей в случае неидеальной связи – силу трения, учитывающую воздействие вагона на груз. К силам упругости можно отнести реакцию гибких упругих элементов креплений груза, к силам инерции отдельных точек движущейся механической системы – такие силы, как неважно при абсолютном и/или же относительном движении (см. (4.46) и/или (4.93)).

Как известно, заданные силы, реакции связей и силы инерции отдельных точек движущейся механической системы образуют уравновешенную систему сил. Сумма работ этих сил на всех возможных, т. е. допускаемых связями бесконечно малых перемещениях системы из любых положений, какие она занимает в своём действительном движении, равна нулю<sup>143</sup>. Если предполагать, что работа реакций связей на допускаемых этими связями возможных перемещениях системы равна нулю (*такие связи, как известно, называют идеальными*) и связи являются удерживающими, то условие эквивалентности нулю системы сил (т. е. уравнение (5.5)) для абсолютного движения материальных точек системы запишется в виде (см. уравнение (3.81)):

<sup>143</sup> Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 628 с.; Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560 с.

$$\sum_{k=1}^n \left( (F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k \right) = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^n \left( \left( F_{kx} - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) \delta x_k + \left( F_{ky} - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) \delta y_k + \left( F_{kz} - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right) \delta z_k \right) = 0, \quad (5.6)$$

где  $\delta x_k$ ,  $\delta y_k$  и  $\delta z_k$  являются **вариациями** (элементарными изменениями) **координат**.

Заменяя в уравнении (3.81) вектор абсолютного ускорения материальных точек системы  $\bar{a}_k$  согласно теореме сложения ускорений (см. пп. 1.9.2, уравнение (1.56)) составляющими переносного  $\bar{a}_e$  и относительного  $\bar{a}_r$  ускорения и ускорение Кориолиса  $\bar{a}_C$ , будем иметь

$$\sum_{k=1}^n \left( \bar{F}_k^{(a)} - m_k \bar{a}_{ek} - m_k \bar{a}_{rk} - m_k \bar{a}_{Ck} \right) \delta \bar{r}_{rk} = 0,$$

где  $\delta \bar{r}_{rk}$  – вектор возможного перемещения материальных точек системы в относительном движении.

Перепишем последнее уравнение для относительного движения материальных точек системы с учётом уравнения (4.93):

$$\sum_{k=1}^n \left( \bar{F}_k^{(a)} + \bar{I}_{ek} + \bar{I}_{Ck} - m_k \bar{a}_{rk} \right) \delta \bar{r}_{rk} = 0. \quad (5.7)$$

Если проекции вектора относительного ускорения материальных точек  $\bar{a}_{rk}$  на координатные оси обозначить через  $\ddot{x}_{rk}$ ,  $\ddot{y}_{rk}$  и  $\ddot{z}_{rk}$  и проекции вектора возможного перемещения материальных точек системы в относительном движении  $\delta \bar{r}_{rk}$  обозначить через вариации координат  $\delta x_{rk}$ ,  $\delta y_{rk}$  и  $\delta z_{rk}$ , то, развёртывая скалярное произведение, стоящее под знаком суммы в (5.7), получим

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx}^{(a)} + I_{ekx} + I_{Ckx} - m_k \ddot{x}_{rk}) \delta x_{rk} + \sum_{k=1}^n (F_{ky}^{(a)} + I_{eky} + I_{Cky} - m_k \ddot{y}_{rk}) \delta y_{rk} + \sum_{k=1}^n (F_{kz}^{(a)} + I_{ekz} + I_{Ckz} - m_k \ddot{z}_{rk}) \delta z_{rk} = 0. \quad (5.8)$$

Здесь следует вспомнить, что проекция силы инерции Кориолиса на вертикальную ось в задачах грузовых перевозок  $I_{Ckz} = 0$ , поскольку угол  $\varphi$  между векторами  $\bar{\omega}_e$  и  $\bar{v}_r$  равен нулю (см. (4.96)) из-за их коллинеарности.

Перепишем уравнение (5.6) для относительного движения материальных точек системы по аналогии с (5.7):

$$\sum_{k=1}^n \left( \begin{aligned} & (F_{kx} + I_{ekx} + I_{Ckx} - m_k \frac{d^2 x_{rk}}{dt^2}) \delta x_{rk} + \\ & + (F_{ky} + I_{eky} + I_{Cky} - m_k \frac{d^2 y_{rk}}{dt^2}) \delta y_{rk} + \\ & + (F_{kz} + I_{ekz} + I_{Ckz} - m_k \frac{d^2 z_{rk}}{dt^2}) \delta z_{rk} \end{aligned} \right) = 0. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.5) или (5.6) – это математическое представление *общего уравнения динамики* при абсолютном движении системы материальных точек, а уравнения (5.7) – (5.9) – при относительном движении.

Из общего уравнения динамики могут быть получены *дифференциальные уравнения движения любой механической системы*.

В частном случае уравнение (5.6) (когда связь идеальная) в проекциях на оси координат можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F_{kx} - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}) \delta x_k &= 0; \\ \sum_{k=1}^n (F_{ky} - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}) \delta y_k &= 0; \\ \sum_{k=1}^n (F_{kz} - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}) \delta z_k &= 0 \end{aligned}$$

или, в силу независимости вариации декартовых координат  $\delta\vec{r}_k$  (аналогично обобщённым координатам  $\delta q_i$ ) от заданной силы и силы инерции Д'Аламбера, в виде

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kx}; \\ \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{ky}; \\ \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kz}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Полученные уравнения представляют собой систему трёх *дифференциальных уравнений второго порядка*, выражающих в координатной форме второй закон динамики (см. пп. 2.1.3, уравнения (2.4)).

Перепишем последнее уравнение для *относительного движения* материальных точек системы (когда связь идеальная) по аналогии с (5.8)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 x_{rk}}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} + I_{kex} + I_{kCx}; \\ \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 y_{rk}}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} + I_{key} + I_{kCy}; \\ \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 z_{rk}}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} + I_{kez} + I_{kCz}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

**Особые оговорки.** Последние уравнения не могут быть представлены для случая *неидеальных связей*, поскольку силы реакций связей не включены в *общие уравнения динамики* (5.5) – (5.10), несмотря на то что в *задачах динамики несвободной системы материальных точек* также используют *принцип освобожденности от связей* (аксиома геометрической статики). При этом несвободную систему материальных точек рассматривают как систему свободную, которая движется под действием задаваемых сил и реакций связей. Реакции неидеальной связи не включены в *общие уравнения динамики* лишь потому, что при движении системы силы реакций связей зависят от положений точек, их скоростей, ускорений и времени, т. е. являются *переменными*. Это усложняет решение второй задачи динамики, в которой движение точек системы определяют в зависимости от приложенных сил, в частности от сил реакций связей. Для решения подобных задач из системы дифференциальных уравнений исключают силы реакций связей так, как это выполнено в (5.8) и (5.11). После на-

хождения движения точек системы, а следовательно, их скоростей и ускорений находят величины сил реакций связей<sup>144</sup>.

### 5.2.1. Классификация сил, действующих на системы

В динамике системы наряду с известной классификацией сил (активные – все *известные* по модулю, направлению и точкам приложения силы, реактивные – все *неизвестные* силы, подлежащие нахождению) введена новая классификация (см. п. 3.1), а именно: силы, действующие на материальные точки системы, подразделяют на внутренние и внешние.

Силы, с которыми действуют друг на друга точки, входящие в систему, называют *внутренними* силами –  $\bar{F}^i$  ( $i$  франц. *interieur* – внутренний). Примером внутренних сил в задачах грузовых перевозок являются натяжения (усилия) в креплениях грузов и силы сжатия в сечениях деревянных подкладок под груз. Аналогично момент внутренних сил системы можно назвать *моментами внутренних сил* –  $\bar{M}^i$ . Примером момента внутренних сил является момент трения качения в подшипниках буксовых узлов тележек вагона, для погрузочно-разгрузочных машин (ПРМ) (краны козловые (см. рис. 2.2), мостовые, стреловые и др.) – вращающий момент, развиваемый на валу электродвигателей, а для локомотива – вращающие моменты, развиваемые на валах тяговых электродвигателей. Особо отметим, что моменты внутренних сил в указанных примерах работу на передвижения этих механизмов (вагон) и машин (краны и локомотив) не совершают. В указанных механических системах работу совершают силы трения (*так называемые касательные силы тяги*), развиваемые между контактируемыми поверхностями ведущих колёс и рельсовыми нитями (или подкрановыми путями), которые относят к классу активных сил. Например, для локомотива серии 2ТЭ25К касательная сила тяги (сумма всех сил трения, развиваемых между контактируемыми поверхностями ведущих колёс и рельсовыми нитями) длительного режима каждой секции равна 300 кН при силе тяжести каждой секции 1 380 кН (138 тс).

Согласно закону равенства действия и противодействия (третий закон механики), внутренние силы (или моменты сил) попарно равны и противоположны. Отсюда вытекают два замечательных свойства внутренних сил:

- *главный вектор внутренних сил системы равен нулю;*
- *главный момент внутренних сил системы равен нулю.*

Равнодействующую внутренних сил, приложенных в точке с массой  $m_k$ , обозначим  $\bar{F}_k^i$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Именно это обстоятельство и является причиной введения новой классификации. С учётом отмеченных свойств можно ограничиться рассмотрением

<sup>144</sup> Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2 (специальные главы механики). – М.: Наука, 1966. – 663 с.

только *внешних* сил (и/или моментов внешних сил) при описании движений системы *в целом* (теоремы динамики).

Силы, с которыми действуют на точки системы точки тела, не входящие в систему, называют *внешними* силами –  $\bar{F}^e$  ( $e$  франц. *exterieur* – внешний). Аналогично момент внешних сил  $\bar{F}^e$  можно назвать *моментами внешних сил* –  $M^e$ .

### 5.2.2. Дифференциальные уравнения движения системы в общем виде

#### О дифференциальных уравнениях движения системы в общем виде

В соответствии с принятой классификацией, для каждой точки системы можно записать основное уравнение динамики (см. (2.4)) в виде

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^e \quad (k = \overline{1, n}), \quad (5.12)$$

где  $n$  – количество точек системы.

Последнее уравнение для *относительного движения* материальных точек системы (когда связь идеальная) представим аналогично уравнениям (5.7) – (5.9):

$$m_k \bar{a}_{rk} = \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^e + \bar{I}_{ek} + \bar{I}_{Ck} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (5.13)$$

Проецируя уравнение (5.12) на координатные оси, получим:

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= F_{xk}^i + F_{xk}^e; \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= F_{yk}^i + F_{yk}^e; \quad (k = \overline{1, n}) \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= F_{zk}^i + F_{zk}^e. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Последнее уравнение представим для *относительного движения* материальных точек системы (когда связь идеальная) по аналогии с (5.11):

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_{rk}}{dt^2} &= F_{xk}^i + F_{xk}^e + \bar{I}_{ex} + \bar{I}_{Cx}; \\ m_k \frac{d^2 y_{rk}}{dt^2} &= F_{yk}^i + F_{yk}^e + \bar{I}_{ey} + \bar{I}_{Cy}; \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$m_k \frac{d^2 z_{rk}}{dt^2} = F_{zk}^i + F_{zk}^e + \bar{I}_{ez} + \bar{I}_{Cz}.$$

Уравнения (5.14) и есть дифференциальные уравнения движения системы в общем виде.

В частном случае, когда  $\bar{F}_k^i = 0$ , из уравнения (5.14) получим уравнения (5.11), т. е. дифференциальные уравнения второго порядка, выражающие в координатной форме второй закон динамики (см. пп. 2.1.3, уравнение (2.4)).

Количество дифференциальных уравнений движения системы в общем случае равно  $3n$ , где  $n$  – количество материальных точек, образующих систему. Во многих случаях представляет интерес изучение не движения каждой из точек системы, а движения системы в целом, например движение центра масс системы.

### 5.2.3. Теорема о движении центра масс системы<sup>145</sup>

Центром масс системы называют геометрическую точку  $C$ , радиус-вектор которой

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}, \quad (5.16)$$

где  $M$  – масса системы, кг;  $m_k$  – масса  $k$ -й точки системы, кг.

В проекциях последнее выражение дает формулы для определения координат центра масс

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \\ y_C &= \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \\ z_C &= \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \end{aligned} \quad (5.16a)$$

Суммируя уравнение (5.12), получим

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \quad (k = \overline{1, n}). \quad (5.17)$$

<sup>145</sup> Данный параграф написан канд. техн. наук, доцентом А.Н. Бондаренко.

Записывая (5.16) в виде:

$$M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k \quad (5.18)$$

и вычисляя вторую производную по времени для обеих частей этого выражения, находим для левой части (5.17)

$$\sum m_k \bar{a}_k = M\bar{a}_C. \quad (5.18a)$$

Суммирование элементов правой части (5.17) приводит к главному вектору внешних сил системы (главный вектор внутренних сил равен нулю). В результате получают уравнение для ускорения центра масс системы

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e, \quad (5.19)$$

выражающее *теорему о движении центра масс*, которую формулируют следующим образом.

*Центр масс системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системе, под действием главного вектора внешних сил.*

В проекциях на координатные оси (5.19) имеет вид

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^e; \\ M\ddot{y}_C &= R_y^e; \\ M\ddot{z}_C &= R_z^e. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Уравнения (5.20) представляют собой *дифференциальные уравнения движения центра масс системы*. Как показывают уравнения, внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс. Однако они могут являться *причиной* возникновения внешних сил. Например, внутренние силы, приводящие во вращение ведущее колесо локомотива, вызывают появление внешней силы сцепления (т. е. силы трения), приложенной к ободу колеса. В изменяемой системе материальных точек внутренние силы изменяют взаимное расположение точек, не изменяя положения центра масс системы.

Из уравнения (5.19) вытекают следствия рассматриваемой теоремы:

1) если главный вектор внешних сил в интервале времени  $[t_0, t_1]$  равен нулю ( $\bar{R}^e = 0$ ), то скорость центра масс  $\bar{v}_C$  есть величина постоянная (поскольку  $\bar{a}_C = 0$ ) – центр масс системы находится в покое или движется равномерно прямолинейно (*закон сохранения движения центра масс*). При этом будет ли иметь место покой или движение, зависит от начальных условий;

2) если главный вектор внешних сил в интервале времени  $[t_0, t_1]$  равен нулю ( $\bar{R}^e = 0$ ) и скорость центра масс в начальный момент также равна нулю ( $\bar{v}_C = 0$ ), то центр масс находится в покое (закон сохранения положения центра масс).

Аналогичные следствия или законы могут быть получены из уравнений (5.20) для проекций скорости или координат центра масс. Например, если  $v_{Cx} = 0$ , тогда первое уравнение (5.20) будет иметь  $\ddot{x}_C = 0$ , т. е.  $x_C = v_{0x}t + x_{C0}$ . Это означает, что проекция центра масс на ось  $Ox$  неподвижна (при  $v_{0x} = 0$ ) или движется равномерно вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v_{0x}$ .

Практическое применение содержания теоремы о движении центра масс на примере движения локомотива по прямому участку пути в упрощённом виде общеизвестно<sup>146</sup>.

**Пример 1**<sup>147</sup>. В электромоторе погрузочно-разгрузочных машин (например, козлового (см. рис. 2.2) и мостового крана, или стрелового крана на железнодорожном ходу) силой тяжести  $G = 7$  кН вращается ротор силой тяжести  $G_2 = 3$  кН с угловой скоростью  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup> против направления часовой стрелки. Центр масс ротора, вследствие его несимметрии, отстоит от оси вращения на расстоянии (т. е. имеет эксцентриситет)  $OC = e = 0,05$  м (рис. 5.2, а)).

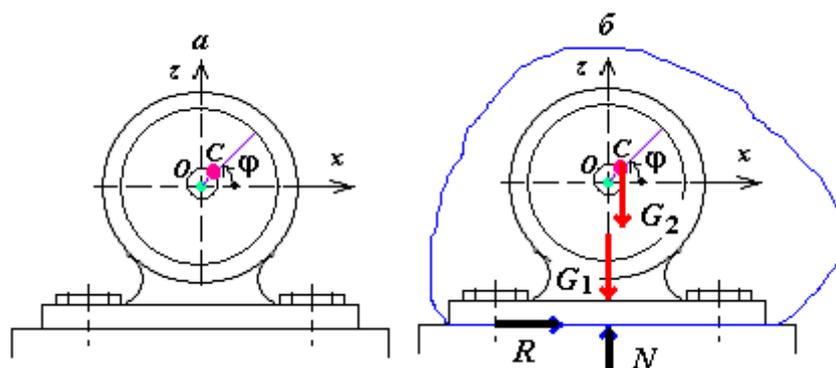


Рис. 5.2. Схематическое представление электромотора.

Определить горизонтальную силу  $\bar{F}$ , с которой действует мотор на крепёжные болты, и вертикальное давление на ферму козлового (см. рис. 2.2) (или мост мостового крана, или корпус стрелового крана на железнодорожном ходу)  $\bar{Q}$ .

<sup>146</sup> Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

<sup>147</sup> Пример решён канд. техн. наук, доцентом А.Н.Бондаренко (см.: Туранов Х.Т., Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в задачах погрузки–выгрузки и перевозки грузов в вагонах. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 451 с.).

**Решение.** Выбираем в качестве *объекта движения* всю систему в целом (ротор и статор с опорным устройством, далее называемый корпусом), отбрасываем *связи* (опорная плоскость, болты) и заменяем их действие *реакциями* ( $\bar{N}$  – нормальная составляющая реакция поверхности,  $\bar{R}$  – равнодействующая горизонтальных реактивных усилий от всех болтов). Равнодействующую вертикальных реактивных усилий от этих же болтов включаем в величину нормальной реакции поверхности.

Добавляем активные силы ( $G_2$  – сила тяжести ротора,  $G_1 = G - G_2$  – сила тяжести корпуса).

Запишем теорему о движении центра масс

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{N} + \bar{R},$$

где  $M$  – масса системы, кг:

$$M = M_1 + M_2$$

с учётом того, что в ней  $M_1$  и  $M_2$  – массы корпуса мотора и ротора.

Спроецируем это уравнение на горизонтальную ось  $x$  и ось  $y$ :

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^e = R, \\ M\ddot{y}_C &= R_y^e = -G_1 - G_2 + N. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для определения реакций  $\bar{R}$  и  $\bar{N}$  необходимо составить выражения для координат центра масс в произвольный момент времени.

При *равномерном* вращении ( $\omega = \text{const}$ ) угол поворота линейно зависит от времени (аналогично равномерному криволинейному движению, см. пп. 1.8, (1.28)):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Пусть при  $t = 0$  центр масс ротора  $C$  находился на оси  $Ox$ . Тогда начальный угол поворота можно принять равным нулю, и в момент  $t$  координаты центра масс ротора  $x_2$  и  $y_2$  будут

$$x_2 = e \cos \varphi = e \cos \omega t; \quad y_2 = e \sin \varphi = e \sin \omega t.$$

Координаты центра масс системы определяют выражениями (5.16):

$$x_C = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M}; \quad y_C = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M},$$

где  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  – координаты центров масс, м.

В данном случае центр масс корпуса мотора является неподвижной точкой и находится в начале координат, следовательно,  $x_1 = 0$  и  $y_1 = 0$  и для  $x_C$  и  $y_C$ :

$$x_C = \frac{M_2 x_2}{M} \quad \text{или} \quad M x_C = M_2 x_2;$$

$$y_C = \frac{M_2 y_2}{M} \quad \text{или} \quad M y_C = M_2 y_2.$$

Дифференцируем дважды по времени эти выражения с учётом полученных ранее зависимостей для координат

$$M \ddot{x}_C = M_2 \ddot{x}_2 = -M_2 \omega^2 e \cos(\omega t),$$

$$M \ddot{y}_C = M_2 \ddot{y}_2 = -M_2 \omega^2 e \sin(\omega t).$$

Из первого уравнения (5.21) определяем равнодействующую  $\bar{R}$  горизонтальных реакций болтов, а из второго – нормальную составляющую  $\bar{N}$  реакции опорной поверхности (включая равнодействующую вертикальных реакций болтов)

$$R = M \dot{x}_C = -M_2 \omega^2 e \cos(\omega t),$$

$$N = M \dot{y}_C + G_1 + G_2 = -M_2 \omega^2 e \sin(\omega t) + G_1 + G_2.$$

Знак минус в выражении для равнодействующей  $\bar{R}$  указывает на то, что при  $\varphi < \pi/2$  (центр масс ротора смещен вправо) эта сила на самом деле имеет направление, противоположное первоначально показанному направлению на рис. 5.2, б. Согласно закону равенства действия и противодействия, горизонтальная сила  $\bar{F}$ , с которой действует мотор на крепёжные болты, равна равнодействующей  $\bar{R}$  и направлена в сторону, противоположную направлению этой силы действующей  $\bar{T}$ , т. е. в сторону смещения центра масс ротора. По этому же закону давление  $\bar{Q}$  мотора на пол (включая болты) равно нормальной реакции  $\bar{N}$  и направлено в сторону, противоположную ей (вниз при малых скоростях вращения).

При вращении ротора центр масс циклически смещается в обе стороны по оси  $x$  и горизонтальная сила  $\bar{F}$  соответственно меняет свое направление. Такая

переменная по направлению сила может *вызывать усталостное разрушение* крепёжных болтов. Заметим, что величина силы также переменная и пропорциональна квадрату угловой скорости. Таким образом, при увеличении скорости, например в 2 раза, силы, действующие на болты, увеличиваются в 4 раза.

Подобное переменное слагаемое, связанное с угловой скоростью, присутствует в выражении для нормальной реакции  $\bar{N}$ . При больших скоростях вращения нормальная реакция может изменять свое направление. В этом случае, поскольку ферма козлового крана (см. рис. 2.2) представляет собой *одностороннюю* (неудерживающую) *связь*, реакция целиком и полностью должна быть обеспечена болтами крепления, при этом на болты действует растягивающая сила со стороны гаек, опирающихся на верхнюю поверхность станины мотора.

Наибольшие значения величин сил  $F_{\max}$  и  $Q_{\max}$ , кН:

$$F_{\max} = \frac{G_2}{g} e\omega^2 = \frac{3 \cdot 0.05 \cdot 100^2}{9.81} = 152.9,$$

$$Q_{\max} = G_1 + G_2 + \frac{G_2}{g} e\omega^2 = (7 - 3) + 3 + \frac{3 \cdot 0.05 \cdot 100^2}{9.81} = 159.9.$$

Как видно из этого расчёта – динамические силы намного превышают статические, и учёт динамических сил обязателен при расчёте движущихся механических систем (двигатели, крепления на подвижном составе, детали подвижного состава).

#### 5.2.4. Теорема об изменении количества движения системы

Вспомним, что количеством движения материальной точки называют произведение массы точки  $m$  на вектор скорости точки  $\bar{v}$  (см. п. 2.1):

$$\bar{Q} = m\bar{v}. \quad (5.22)$$

Как и скорость, количество (англ. quantity) движения точки есть *векторная* величина.

*Количество движения системы* равно сумме количеств движения точек, образующих систему:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k.$$

С использованием выражения (5.18) можно записать количество движения системы как

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C, \quad (5.23)$$

где  $\bar{v}_C$  – скорость центра масс системы, м/с.

Дифференцируя по времени последнее выражение в виде (см. (5.18a))

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = M\bar{a}_C$$

и подставляя полученный результат в уравнение движения центра масс (5.19), находим

$$M\bar{a}_C = \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e.$$

В результате имеем уравнение, выражающее *теорему об изменении количества движения системы*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e. \quad (5.24)$$

*Теорема. Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору внешних сил, приложенных к системе (см. (2.4)).*

Проецируя уравнение (5.24) на оси координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= R_x^e; \\ \frac{dQ_y}{dt} &= R_y^e; \\ \frac{dQ_z}{dt} &= R_z^e, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = Mv_{Cx}; \\ Q_y &= \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = Mv_{Cy}; \\ Q_z &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = Mv_{Cz}. \end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть главный вектор внешних сил  $\bar{R}^e = 0$ , т. е. точка движется под действием внутренних сил.

Тогда из (5.24) получим  $\overline{Q} = \overline{\text{const}}$  (закон сохранения количества движения системы), т. е. внутренние силы не могут изменить количество движения системы.

2. Допустим  $\overline{R}_x^e = 0$ , т. е. внешние силы (например, сила тяжести  $G$ ) перпендикулярны оси  $Ox$ .

Тогда из первого уравнения (5.25) получим  $Q_x = \text{const}$ , т. е. проекция количества системы на ось  $Ox$  остается постоянной (см. (4.17), описывающей математическое представление первого закона инерции).

**П р и м е р** <sup>148</sup>. Два гружёных вагона с массами  $M_1$  и  $M_2$  движутся по прямому горизонтальному участку пути со скоростями  $\overline{v}_1$  и  $\overline{v}_2$  (рис. 5.3), причём  $\overline{v}_1 > \overline{v}_2$ .



Рис. 5.3. Движение вагонов до (а) и после (б) столкновения.

Предполагая, что удар первого вагона (отцепы) о неподвижно стоящие вагоны *абсолютно неупругий* (идеальный случай, когда коэффициент восстановления  $k = 1$ ), что соответствует случаю, когда пружины автосцепных устройств вагонов находятся в полностью замкнутом состоянии (т. е. жёсткости автосцепных устройств  $c_{\text{асц}} = \infty$ ) и нет зазоров в соединениях деталей этих устройств (см. рис. 5.3, б)), найти их общую скорость  $\overline{v}$  после удара.

**Р е ш е н и е.** Для решения задачи используем частный случай 1, когда главный вектор внешних сил  $\overline{R}^e = 0$ , т. е. точка движется под действием внутренних сил. Тогда согласно закону сохранения количества движения системы, внутренние силы не могут изменить количество движения системы.

Внешними (активными) силами в данном случае являются общая сила тяжести вагонов  $\overline{G}_1, \overline{G}_2$  и нормальные составляющие  $\overline{N}$  реакции связи (рельсы) как реактивные силы. При этом пренебрегаем внешней силой трения колёс о рельсы, считая, что колеса катятся по рельсам без скольжения (т. е. случай чистого качения) (см. пп. 2.4.2, (2.75)). Силы давления вагонов друг на друга, развивающиеся при ударе, являются *внутренними силами*, которые, согласно закону сохранения количества движения системы, не могут изменить количество движения системы.

<sup>148</sup> Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1966. – 596 с.

Внешние силы ( $\overline{G}_1$ ,  $\overline{G}_2$  и  $\overline{N}$ ) перпендикулярны горизонтальной оси. Следовательно, сумма проекции внешних сил на эту ось равна нулю, а потому проекция количества движения системы на эту же ось будет постоянной, т. е. после удара будет оставаться той же, что и до удара. Имеем

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M v$$

с учётом того, что в ней  $M = M_1 + M_2$ , откуда находим общую скорость вагонов после столкновения

$$v = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M}. \quad (5.26)$$

После удара скорости становятся одинаковыми. Это естественно, так как вагоны после удара не расходятся, а двигаются вместе.

**П р и м е р 2<sup>149</sup>.** Решить задачу в примере 1, предполагая удар при столкновении вагонов на подгорочном парке сортировочной станции *абсолютно упругим* (т. е.  $c \neq 0$  – жёсткость поглощающего устройства автосцепки (см. рис. 5.3, б)), и найти скорости вагонов  $\overline{v}_{01}$  и  $\overline{v}_{02}$  после удара.

**Р е ш е н и е.** Непосредственно составим уравнение сохранения количества движения системы и, имея в виду, что внешних ударов нет, а количество движения до и после удара одно и то же, получим

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v_{01} + M_2 v_{02}.$$

Поскольку относительная скорость вагонов до их соударения  $v_{r1,2}$  равна вследствие абсолютной упругости удара относительной скорости вагонов после удара  $v_{r02,01}$ , запишем

$$v_{r1,2} = v_{r02,01},$$

где  $v_{r1,2} = v_1 - v_2$  и  $v_{r02,01} = v_{02} - v_{01}$ .

Разрешая полученные два уравнения методом определителей, найдём скорости вагонов  $v_{01}$  и  $v_{02}$  после удара:

$$v_{01} = \frac{(M_1 - M_2)v_1 + 2M_2 v_2}{M_1 + M_2}; \quad (5.26a)$$

$$v_{02} = \frac{2M_1}{M_1 + M_2} v_1. \quad (5.26б)$$

<sup>149</sup> Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Ч. 2. Динамика. – М.–Л: ГИТТЛ, 1952. – 484 с.

При этом  $v_{01} < v_{02}$ , что естественно, поскольку вагон, движущийся с меньшей скоростью, за короткое время получит импульс, равный  $M_1 v_1$ . Например, если  $M_1 = 82$  и  $M_2 = 90$  т,  $v_1 = 4$  и  $v_2 = 2$  км/ч, то  $v_{01} = 1,9$  и  $v_{02} = 3,81$  км/ч. Если вагон с массой  $M_2$  неподвижный, т. е.  $v_2 = 0$ , то  $v_{01} = -0,186$  и  $v_{02} = 3,81$  км/ч. Отрицательный знак скорости  $v_{01}$ , означает, что первый вагон с меньшей массой либо остановится, либо может отскочить назад относительно второго с большей массой.

### 5.2.5. Примеры решения задач на применение теоремы о количестве движения системы

**Задача 1<sup>150</sup>.** Вагон (отцеп) с массой  $M_1$  при роспуске с вершины горки движется со скоростью  $\bar{v}_0$  и ударяется в неподвижно стоящую сцепку (группа вагонов) из  $n$  таких же вагонов различной массы (рис. 5.4).

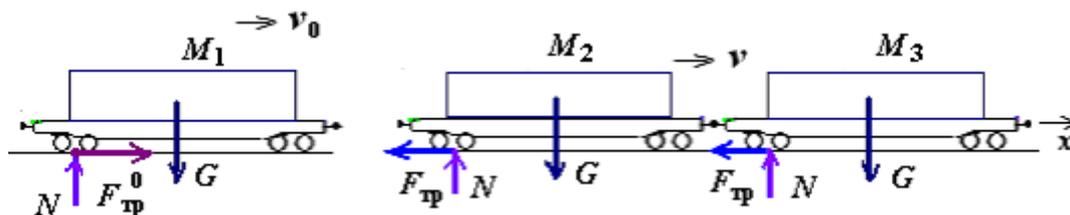


Рис. 5.4. Схематическое представление ударяющего и ударяемых вагонов.

Коэффициент трения скольжения между контактирующими поверхностями груза и пола вагона  $f$ .

**Постановка задачи.** Требуется определить скорость вагонов после соударения  $\bar{v}$  (*первая задача*). Кроме того, используя условие первой задачи, необходимо определить расстояние по отношению к полу вагона, на которое переместится незакреплённый груз в одиночном вагоне и в вагоне, находящемся в сцепке, с последующим обоснованием необходимости надёжного закрепления груза, размещённого в ударяющем вагоне, дополнительными элементами креплений (*вторая задача*).

**Принятые допущения.** Считать удар первого вагона (отцепа) о неподвижно стоящие вагоны *абсолютно неупругим* (идеальный случай, когда коэффициент восстановления  $k = 1$ ), что соответствует случаю, когда пружины автосцепных устройств вагонов находятся в полностью замкнутом состоянии (т. е. жёсткости автосцепных устройств  $c_{асц} = \infty$ ) и нет зазоров в соединениях деталей

<sup>150</sup> Комаров К.Л., Яшин А.Ф. Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта. – Новосибирск: Наука, 2004. – 296 с.

этих устройств. Принять, что масса  $n$  неподвижно стоящих вагонов  $\sum_{i=2}^n M_i$  в частном случае равна массе одиночного вагона  $M_1$ , т. е.  $\sum_{i=2}^n M_i = M_1 = M$ , а в общем случае допустить, что массы вагонов в сцепке  $M_2, M_3$  и т. д. различные, т. е.  $M_2 \neq M_3 \neq M_1$ .

*Решение первой задачи.* Используем теорему об изменении количества движения системы [Лойцянский, Лурье, 1983], аналитически представленную уравнением (5.24).

Во время удара на вагоны действуют сила тяжести  $\bar{G}$ , нормальные составляющие  $\bar{N}$  реакции рельсов, сила трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  для вагонов в сцепке и  $\bar{F}_{\text{тр}}^0$  для одиночного вагона, приложенные к колёсам колёсных пар тележек вагонов как движущиеся силы (см. рис. 5.4).

Направив ось  $x$  в сторону движения вагонов, из первого равенства (5.25) получим

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = F_{\text{тр}x}^0 - nF_{\text{тр}x} = R_x^e = \text{const.} \quad (5.27)$$

Считая время удара  $\tau$  бесконечно малой величиной ( $\tau \ll 1$ ), после интегрирования с учётом того, что произведение бесконечно малой величины  $\tau$  на конечную величину  $R_x^e$  будет бесконечно малым, имеем

$$\int_{Q_x^0}^{Q_x} dQ_x = \int_0^{\tau} R_x^e dt = R_x^e \tau;$$

$$Q_x - Q_x^0 = 0, \quad Q_x = Q_x^0. \quad (5.28)$$

Таким образом, проекции количества движения системы на ось  $x$  до удара и после удара равны.

До удара один вагон (отцеп) двигался со скоростью  $\bar{v}_0$ . Так как удар неупругий, то после удара  $n + 1$  вагон движется со скоростью  $\bar{v}$ . Тогда

$$M(n+1)v = Mv_0. \quad (5.29)$$

Отсюда находим скорость вагонов после соударения

$$v = \frac{v_0}{n+1}. \quad (5.30)$$

В общем случае, если массы вагонов в сцепке различные, т. е.  $\sum_{i=2}^n M_i \neq M_1$ , то последняя формула имеет вид

$$\bar{v} = \frac{M}{\sum_{i=2}^n M_i + M} \bar{v}_0. \quad (5.30a)$$

Очевидно, что с увеличением массы неподвижных вагонов  $\sum_{i=2}^n M_i$  скорость вагонов после соударения уменьшается, причём при любых значениях массы соударяемых вагонов  $\sum_{i=2}^n M_i$  и  $M_1$ .

*Решение второй задачи.* Применим основной закон динамики для относительного движения точки (см. (4.93)).

Допустим, что подвижная система координат  $O_1x_1y_1z_1$ , связанная с вагонами, после удара движется поступательно, прямолинейно и равномерно (т. е.  $\bar{v} = \text{const}$  и  $\bar{a} = 0$ ). Тогда продольная переносная сила инерции  $\bar{I}_{ex}$  и сила инерции Кориолиса  $\bar{I}_{Cx}$  (см. (4.94)) для груза с массой  $M_1$  равны нулю и основной закон динамики для относительно движения точки (4.100) (см. пп. 4.6.3, случай 3) запишется как основной закон динамики для абсолютного движения точки (см. (2.6)):

$$M_1 \bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (5.31)$$

На груз массой  $M_1$ , находящийся на одиночном вагоне (рис. 5.5, а), после соударения условно приложены сила тяжести  $\bar{G}_1$ , нормальная  $\bar{N}_1$  и касательная (силы трения)  $\bar{F}_{\text{тр}1} = f\bar{N}_1 = fM_1\bar{g}$  составляющие реакции связи (пол вагона)  $\bar{R}_1$ . Груз имеет начальную относительную скорость  $\bar{v}_{r1}^0$ , определяемую по (5.30) в виде  $v_{r1}^0 = \frac{v_0}{n+1}$ , и конечную скорость  $v_{r1}^k = 0$  (т. е. после сдвига относительно пола вагона на некоторую величину).

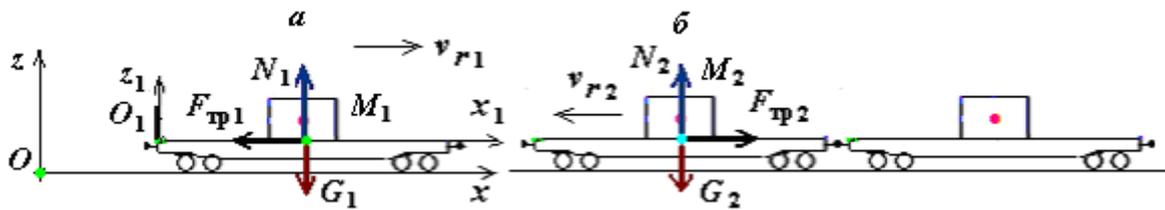


Рис. 5.5. Схема приложения сил к грузу на ударяющем и ударяемом вагонах.

Груз в одиночном вагоне имел до столкновения скорость  $\bar{v}_0$  такую же, как и вагон. И эти скорости абсолютные. После столкновения вагон имеет скорость  $\bar{v}_1$ , которая будет для груза переносной:  $\bar{v}_1 = \bar{v}_{r1}$ . Относительную скорость груза после столкновения  $\bar{v}_{r1}$ , пренебрегая при этом силой трения в момент удара (из-за кратковременности удара), можно считать равной скорости вагона до столкновения, т. е.  $\bar{v}_{r1} = \bar{v}_0$ .

Начальная относительная скорость груза после столкновения вагона о вагоны в сцепке равна разности скорости вагона до удара  $\bar{v}_0$  (это скорость груза, оторвавшегося от пола вагона при ударе, в случае пренебрежения силой трения в момент удара) и скорости вагона после удара  $\bar{v}$  по формуле (5.30). Оставляя принятые предположения (скорость сцепки после удара постоянная, нет сил сопротивления движению сцепки, например, в виде силы аэродинамического сопротивления), запишем для груза массой  $M_1$  дифференциальное уравнение относительного движения точки (см. (5.31)):

$$M_1 \frac{dv_{r1}}{dt} = -fM_1g,$$

или [Бухгольц, 1967]

$$M_1 v_{r1} \frac{dv_{r1}}{ds} = -fM_1g.$$

Разделяя переменные в последнем выражении, имеем

$$\int_{v_0-v}^0 v_{r1} dv_{r1} = -fg \int_0^{s_1} ds$$

и, интегрируя, найдём

$$-\frac{(v_0 - v)^2}{2} = -fgs_1,$$

или

$$-\frac{\left(v_0 - \frac{v_0}{n+1}\right)^2}{2} = -fgs_1.$$

Последнее равенство с учётом (5.30а) примет вид

$$-\frac{\left(v_0 - \frac{M}{\sum_{i=2}^n M_i + M} v_0\right)^2}{2} = -fgs_1.$$

$$s_1 = \frac{v_0^2 n^2}{2fg(n+1)^2}, \quad (5.32)$$

или, с учётом различных масс грузов в вагоне сцепки, т. е.  $\sum_{i=2}^n M_i \neq M_1$ ,

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2fg} \left( \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=2}^n M_i + M_1} \right)^2. \quad (5.32a)$$

*Анализ полученной аналитической формулы.* Отсюда очевидно, что произойдёт сдвиг груза массой  $M_1$  в одиночном вагоне в сторону передней автосцепки (знак  $s_1$  положительный). Увеличение скорости первого вагона приводит к удвоенному увеличению сдвига груза одиночного вагона. Увеличение массы груза в первом вагоне приводит к резкому уменьшению сдвига груза первого вагона по нелинейному закону (асимптота), а увеличение массы груза в вагоне сцепки – к увеличению сдвига груза первого вагона по нелинейному закону. Уменьшение коэффициента трения, если произойдёт таковое из-за изменения климатических условий перевозок, приводит к увеличению сдвига груза.

На груз, массой  $M_2$ , находящийся в вагоне сцепки (см. рис. 5.5, б), после удара условно приложены сила тяжести  $M_2 \bar{g}$ , нормальная  $\bar{N}_2 = |M_2 \bar{g}|$  и касательная (сила трения)  $\bar{F}_{\text{тр}2} = f\bar{N}_2 = fM_2 \bar{g}$  (см. (2.64)) составляющие реакции связи (пол вагона)  $\bar{R}_2$ .

Найдём начальную относительную скорость груза в сцепке. Переносная скорость груза – скорость сцепки и относительная скорость противоположны по направлению и равны по модулю:

$$\bar{v}_{r2}^0 = -\bar{v} = -\frac{\bar{v}_0}{n+1} \quad (5.33)$$

или при условии  $\sum_{i=2}^n M_i \neq M_1$

$$\bar{v}_{r2}^0 = -\bar{v} = -\frac{M_1}{\sum_{i=2}^n M_i + M_1} \bar{v}_0 \quad (5.33a)$$

и конечная относительная скорость тоже равна нулю, т. е.  $\bar{v}_{r2}^k = \bar{v}_{r2} = 0$ .

Составляем дифференциальное уравнение относительного движения второго груза, разделяем в нём переменные и интегрируем:

$$M_2 \frac{dv_{r2}}{dt} = fM_2 g,$$

или [Бухгольц, 1967]

$$M_2 v_{r2} \frac{dv_{r2}}{ds} = fM_2 g;$$

$$\int_{v_{r2}^0}^{v_{r2}} v_{r2} dv_{r2} = fg \int_0^{s_2} ds,$$

$$-\frac{(v_{r2}^0)^2}{2} = fgs_2,$$

или, подставляя начальную относительную скорость  $\bar{v}_{r2}^0$ , получим

$$-\frac{v_0^2}{2(n+1)^2} = fgs_2,$$

или с учётом (5.30a)

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{M_1}{\sum_{i=2}^n M_i + M_1} \right)^2 v_0^2 = fgs_2.$$

Отсюда относительное перемещение груза в вагоне сцепки

$$s_2 = -\frac{v_0^2}{2fg(n+1)^2}, \quad (5.34)$$

или с учётом различных масс грузов в вагоне сцепки, т. е.  $\sum_{i=2}^n M_i \neq M_1$

$$s_2 = -\frac{1}{2fg} \left( \frac{M_1}{\sum_{i=2}^n M_i + M_1} \right)^2 v_0^2. \quad (5.34a)$$

*Анализ результатов аналитической формулы.* Анализируя (5.34), или (5.34a), можно отметить, что произойдёт сдвиг первого груза в вагоне сцепки в сторону задней автосцепки (знак  $s_2$  отрицательный). Увеличение скорости первого вагона приводит к удвоенному увеличению сдвига груза в вагоне сцепки. Увеличение массы груза в первом вагоне приводит к резкому увеличению сдвига груза в вагоне сцепки почти по линейному закону, а увеличение массы груза в вагоне сцепки – к увеличению сдвига груза этого вагона по нелинейному закону. Уменьшение коэффициента трения, если произойдёт таковое из-за изменения климатических условий перевозок, приводит к увеличению сдвига груза.

Анализируя результаты сдвигов грузов в вагонах, необходимо сравнить  $s_1$  и  $s_2$ . Если получится так, что  $s_1 > s_2$ , то возникнет необходимость надёжного закрепления первого груза с массой  $M_1$  в одиночном вагоне гибкими упругими элементами креплений, не исключается также необходимость закрепления груза в вагоне сцепки.

**Пример расчёта.** Исходные данные приведены ниже.

$M_1$ : = 82 – масса первого вагона, т;

$M_2$ : = 50 – масса первого вагона в сцепке, т;

$v_0$ : = 1,2 – скорость первого вагона до удара, м/с (или ~ 4 км/ч);

$f$ : = 0,4 – коэффициент трения скольжения груза о пол вагона;

$n$ : = 2 – количество вагонов в сцепке (ударяемые вагоны);  
 $g$ : = 9,81 – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Результаты расчёта, реализованного в системе MathCAD [Кириянов, 2006].

$$v1a := \frac{v0}{n + 1} \quad \text{- скорость вагонов после соударения при } M1=M2, \text{ м/с}$$

$$v1a = 0.4$$

$$v := \frac{M1}{M2 \cdot n + M1} \cdot v0 \quad \text{- скорость вагонов после соударения при } M1 \ll M2, \text{ м/с}$$

$$v = 0.541$$

$$s01 := \frac{v0^2 \cdot n^2}{2 \cdot f \cdot g \cdot (n + 1)^2} \quad \text{- относительное перемещение первого груза при } M1=M2, \text{ м}$$

$$s01 = 0.082$$

$$s1 := \frac{v0^2}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M2 \cdot n}{M2 \cdot n + M1} \right)^2 \quad \text{- относительное перемещение первого груза при } M1 \ll M2, \text{ м}$$

$$s1 = 0.055$$

$$vr0 := -v \quad \text{- начальная относительная скорость груза, находящегося в вагоне сцепки при } M1 \ll M2, \text{ м/с}$$

$$vr0 = -0.541$$

$$s02 := -\frac{v0^2}{2 \cdot f \cdot g \cdot (n + 1)^2} \quad \text{- относительное перемещение второго груза при } M1=M2, \text{ м}$$

$$s2 := -\frac{1}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M1}{M2 \cdot n + M1} \right)^2 \cdot v0^2 \quad \text{- относительное перемещение второго груза при } M1 \ll M2, \text{ м}$$

$$s2 = -0.037$$

*Анализ полученных результатов исследований.* Анализируя полученные на основе (5.34) данные, можно отметить, что произошёл сдвиг первого груза с массой  $M_1$  в сторону передней автосцепки при заданных исходных данных на  $s_1 = 55$  мм, а второго груза с массой  $M_2$ , размещённого на вагоне сцепки, – к задней автосцепке на  $s_2 = -37$  мм (о чём свидетельствует отрицательный знак  $s_2$ ). Относительное расстояние перемещения груза, размещённого на первом вагоне, при наличии в сцепке двух вагонов почти 1,5 раза больше, чем у груза, размещённого на первом вагоне сцепки ( $0,055/0,037 \sim 1,5$ ).

Приводим результаты расчётов сдвигов грузов при вариации количества вагонов в сцепке  $n = \text{var}$  при сохранении остальных исходных данных постоянными.

Варьируемые параметры расчёта следующие:

$n := 1, 2 \dots 5$  - количество вагонов в сцепке

$v(n) := \frac{v_0}{n+1}$  - скорость вагонов после соударения при  $M_1=M_2$ , м/с

$s_{01}(n) := \frac{v_0^2 \cdot n^2}{2 \cdot f \cdot g \cdot (n+1)^2}$  - относительное перемещение первого груза при  $M_1=M_2$ , м

$s_1(n) := \frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_2 \cdot n}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2$  - относительное перемещение первого груза при  $M_1 \ll M_2$ , м

$s_{02}(n) := -\frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g \cdot (n+1)^2}$  - относительное перемещение второго груза при  $M_1=M_2$ , м

$s_2(n) := -\frac{1}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_1}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2 \cdot v_0^2$  - относительное перемещение второго груза при  $M_1 \ll M_2$ , м

Графические зависимости перемещений (сдвигов) первого и второго грузов от вариации количества вагонов в сцепке приведены на рис. 5.6, а, б.

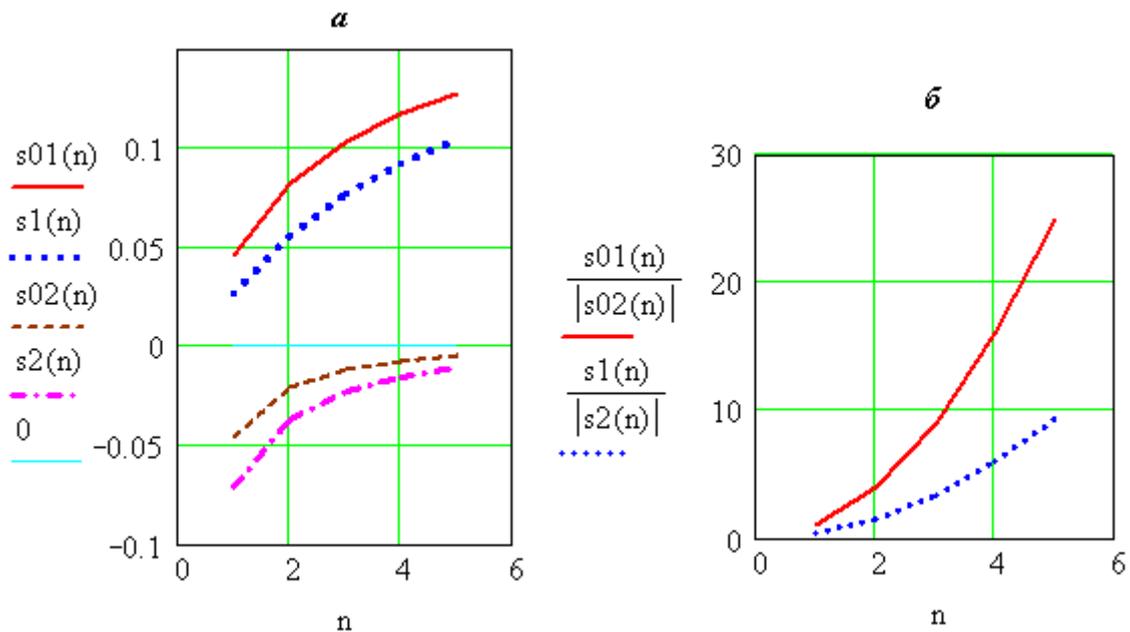


Рис. 5.6. Зависимости  $s_1 = f(n)$ ,  $s_2 = f(n)$  (а) и  $\frac{s_1}{|s_2|} = f(n)$  (б).

*Анализ полученных результатов исследований.* С увеличением количества вагонов в сцепке независимо от массы грузов в вагонах резко увеличивается относительное перемещение (сдвиг) незакреплённого в вагоне первого груза, в то время как в вагоне сцепки – уменьшается. Так, например, полученное значение относительного сдвига первого груза слишком значительное в случае, когда массы грузов в вагонах одинаковые (например, при  $n = 5$  до 25 раз), нежели когда эти величины различные (например, при  $n = 5$  до 9 раз), что практически соответствует удару об абсолютно жёсткую стенку.

Приводим результаты расчётов сдвигов грузов при вариации скорости первого вагона  $v_0 = \text{var}$  при сохранении остальных исходных данных постоянными.

Варьируемые параметры расчёта следующие:

$n := 2$  - количество вагонов в сцепке, вагон

$v_0 := 1, 1.01 \dots 5$  - скорость вагона до удара, м/с (от 3,96 до 18 км/ч)

$v(v_0) := \frac{v_0}{n + 1}$  - скорость вагонов после соударения при  $M_1 = M_2$ , м/с

$s_{01}(v_0) := \frac{v_0^2 \cdot n^2}{2 \cdot f \cdot g \cdot (n + 1)^2}$  - относительное перемещение первого груза при  $M_1 = M_2$ , м

$s_1(v_0) := \frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_2 \cdot n}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2$  - относительное перемещение первого груза при  $M_1 \ll M_2$ , м

$s_2(v_0) := -\frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g \cdot (n + 1)^2}$  - относительное перемещение второго груза при  $M_1 = M_2$ , м

$s_2(v_0) := -\frac{1}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_1}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2 \cdot v_0^2$  - относительное перемещение второго груза при  $M_1 \ll M_2$ , м

Графические зависимости перемещений (сдвигов) первого и второго груза от вариации скорости первого вагона приведены на рис. 5.7.

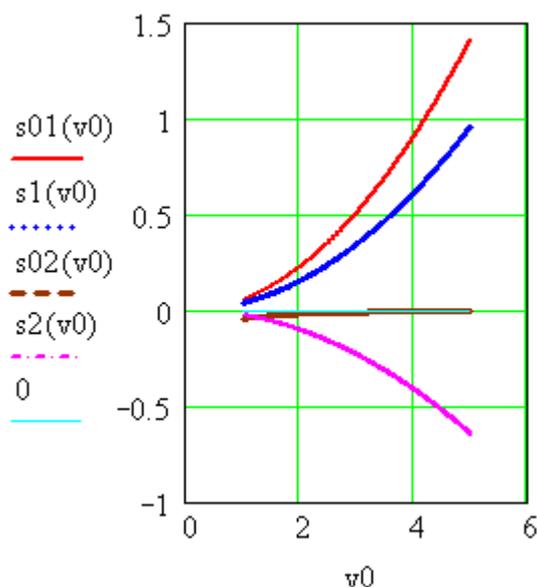


Рис. 5.7. Зависимости  $s_1 = f(v_0)$  и  $s_2 = f(v_0)$ .

*Анализ полученных результатов исследований.* Увеличение скорости первого вагона приводит к резкому увеличению сдвига груза как в первом вагоне, так и в вагоне сцепки независимо от того, одинаковы массы ударяющего и ударяемых вагонов или же разные.

Приводим результаты расчёта сдвигов грузов при вариации массы первого вагона  $M_1 = \text{var}$  при сохранении остальных исходных данных постоянными.

Варьируемые параметры расчёта следующие:

$M_2 := 50$  – масса одного вагона в сцепке, т;

$v_0 := 1,2$  – скорость первого вагона до удара, м/с (или  $\sim 4$  км/ч);

$M_1 := 30, 32.. 90$  - вариация массы первого вагона, т

$$v(M_1) := \frac{M_1}{M_2 \cdot n + M_1} \cdot v_0 \quad \text{- скорость вагонов после соударения при } M_1 = \text{var.}, \text{ м/с}$$

$$s_1(M_1) := \frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_2 \cdot n}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2 \quad \text{- относительное перемещение первого груза при } M_1 = \text{var.}, \text{ м}$$

$$v_{i0}(M_1) := -v(M_1)$$

- начальная относительная скорость груза, находящегося в вагоне сцепки при  $M_1 = \text{var.}, \text{ м/с}$

$$s_2(M_1) := -\frac{1}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_1}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2 \cdot v_0^2$$

- относительное перемещение второго груза при  $M_1 = \text{var.}, \text{ м}$

Графические зависимости перемещений (сдвигов) первого и второго груза от вариации массы первого вагона приведены на рис. 5.8, а, б.

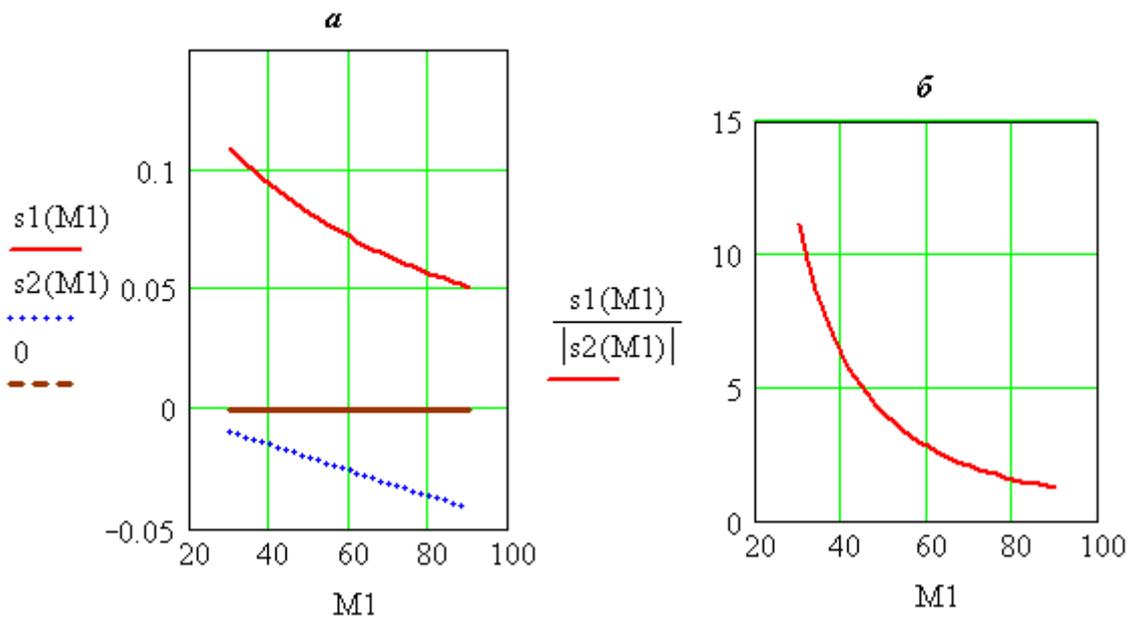


Рис. 5.8.,. Зависимости  $s_1 = f(M_1)$  и  $s_2 = f(M_1)$  (а)

и зависимость  $\frac{s_1}{|s_2|} = f(M_1)$  (б).

*Анализ полученных результатов исследований.* Увеличение массы груза в первом вагоне приводит к резкому увеличению сдвига груза этого вагона (по нелинейному закону) и к постепенному увеличению сдвига груза первого вагона сцепки почти по линейному закону. С увеличением массы первого вагона отношение сдвига грузов уменьшается по закону асимптоты.

Приводим результаты расчёта сдвигов грузов при вариации массы одного вагона в сцепке  $M_2 = \text{var}$  при сохранении остальных исходных данных постоянными.

Варьируемые параметры расчёта следующие:

$M_1 := 82$  – масса первого вагона, т;

$v_0 := 1,2$  – скорость первого вагона до удара, м/с (или  $\sim 4$  км/ч);

$M_2 := 30, 32 \dots 90$  - вариация массы одного вагона в сцепке, т

$v(M_2) := \frac{M_1}{M_2 \cdot n + M_1} \cdot v_0$  - скорость вагонов после соударения при  $M_2 = \text{var.}$ , м/с

$s_1(M_2) := \frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_2 \cdot n}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2$  - относительное перемещение первого груза при  $M_2 = \text{var.}$ , м

$v_{i0}(M_2) := -v(M_2)$

- начальная относительная скорость груза, находящегося в вагоне сцепки при  $M_2 = \text{var.}$ , м/с

$$s_2(M_2) := -\frac{1}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left( \frac{M_1}{M_2 \cdot n + M_1} \right)^2 \cdot v_0^2$$

- относительное перемещение второго груза при  $M_2 = \text{var.}$ , м

Графические зависимости перемещений (сдвигов) первого и второго груза от вариации массы груза, размещённого на первом вагоне сцепки, приведены на рис. 5.9, а, б.

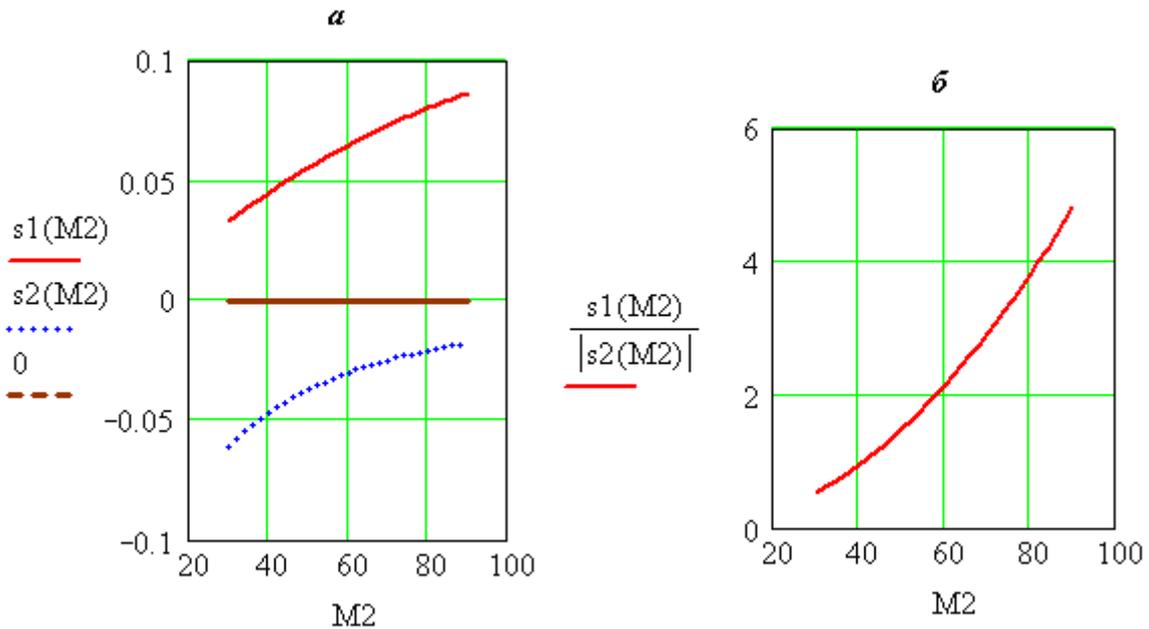


Рис. 5.9. Зависимости  $s_1 = f(M_2)$  и  $s_2 = f(M_2)$  (а)

и зависимость  $\frac{s_1}{|s_2|} = f(M_2)$  (б).

*Анализ полученных результатов исследований.* Увеличение массы груза в вагоне сцепки приводит к заметному увеличению сдвига груза в первом вагоне и уменьшению сдвига груза в вагоне сцепки по нелинейному закону. С увеличением массы груза второго вагона отношение сдвига грузов увеличивается по закону параболы.

*Обобщающий анализ результатов математического моделирования.* Обобщая полученные результаты вычислительных экспериментов, можно отметить, что доказана необходимость надёжного закрепления груза, размещённого в ударяющем и ударяемом вагоне, дополнительными элементами креплений, например гибкими упругими, количество которых в основном зависит от массы вагонов и от количества вагонов в сцепке.

Особо отметим, что если масса ударяемых вагонов в сцепке  $\sum_{i=2}^n M_i$  значительно больше массы ударяющего вагона  $M_1$ , т. е. при соблюдении условия

$\sum_{i=2}^n M_i \gg M_1$ , и если удар *абсолютно упругий*, что соответствует случаю, ко-

гда вагоны в автосцепном устройстве связаны упруго, что соответствует действительности (т.е.  $C_{асц} \neq \infty$  – жёсткости автосцепных устройств), то результаты исследований будут иными, нежели полученные в рассмотренном случае.

В ы в о д ы. На основе математического моделирования соударения вагонов на подгорочном парке сортировочной станции с использованием теоремы об изменении количества движения системы получены аналитические формулы сдвига грузов как в ударяющем, так и в ударяемом вагонах в зависимости от скорости ударяющего вагона (отцепа), массы и количества вагонов, а также от состояния контактируемых поверхностей грузов, размещённых в вагоне, с полом вагонов, позволившие установить характер изменения сдвига грузов в вагонах.

#### 5.2.6. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Теорема<sup>151</sup>: Приращение кинетической энергии  $\Delta E$  равно сумме работ внешних  $W^e$  и внутренних  $W^i$  сил и/или моментов сил.

Математически теорему записывают в виде

$$\Delta E = W^e + W^i,$$

или, учитывая, что  $\Delta E = E - E_0$ ,

$$E - E_0 = W^e + W^i, \quad (5.35)$$

где  $E = mv^2/2$  и  $E_0 = mv_0^2/2$  – кинетические энергии системы, кДж (или кН·м), с учётом того, что  $v_0$  – начальная скорость, а  $v$  – конечная, м/с (см. (4.31));

$W^e$  – работы внешних сил (см. для постоянной силы – (3.18); силы трения – (3.18) или (4.105); силы упругости – (3.35), или (3.41), или (4.105); вертикальной составляющей силы тяжести и нормальной составляющей реакции связи – (3.40); переносной силы инерции – (4.105)) и/или моментов внешних сил (см. (3.27)), кДж (или кН·м);  $W^i$  – работы внутренних сил и/или моментов внутренних сил (см. (3.28)), кДж (или кН·м).

<sup>151</sup> Комаров К.Л., Яшин А.Ф. Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта. – Новосибирск: Наука, 2004. – 296 с.

**Примеры решения задач на применение теоремы об изменении  
кинетической энергии системы**

Напомним, что в п. 2.4 (см. задача 1) за упрощённую расчётную модель скатывания вагона с горки, учитывающую трение качения со скольжением, принята упрощённая модель, показанная на рис. 2.61.

В п. 2.4 принято, что на участках горки, где отсутствуют случайные (или так называемые «эпизодические») сопротивления колёса с радиусом  $r_k$  (для грузового вагона 0,475 м) катятся без проскальзывания с коэффициентом трения качения колеса по рельсу  $f_k$ , внутренний радиус  $r_{вн}$  внутреннего кольца подшипника качения вращается с коэффициентом трения качения  $f_{к0}$ .

В п. 3.2 определены работы моментов трения качения колёс о рельсовые нити  $W(M_{тр}) = W^e$  (см. (3.27), как моменты *внешних* сил) и тел качения подшипников в буксовых узлах  $W(M_{трп}) = W^i$  (см. (3.28), как моменты *внутренних* сил) тележек вагона, скатывающегося с горки. Работы проекции силы тяжести  $G$  и силы аэродинамического сопротивления  $F'_{rвх}$  на направление движения вагона и силы  $F'_{rвп}$  определены в виде (3.44) (см. (3.18), (3.45)).

**З а д а ч а 1.** Требуется определить путь, пройденный вагоном, при его скатывании с горки при условии, что известна начальная скорость  $v_0$  и скорость скатывания вагона  $v = v_e$  в момент  $t = t_1$  либо в момент остановки ( $v = v_e = 0$  при  $t = t_1$ ).

Данная задача относится ко *второй задаче динамики в инерциальной системе отсчёта*. Зная действующие на вагон с грузом силы (составляющие силы тяжести вагона с грузом и силы аэродинамического сопротивления на направление движения вагона), требуется найти закон движения вагона (см. п. 4.1).

*Условия задачи.* Задачу следует решить при условии, что заданы начальная скорость  $v_0$  и скорость скатывания вагона  $v = v_e$  в момент  $t$  либо в момент остановки ( $v = v_e = 0$  при  $t = t_1$ ). За внешние силы, ускоряющие и замедляющие движение вагона, считать проекции силы тяжести  $G$  (как движущей силы, ускоряющей движение):  $G_x = G \sin \psi_0$  и силы аэродинамического сопротивления  $F'_{rвх}$  (как силы сопротивления при встречном ветре, замедляющие движение) на направление движения при скатывании вагона с горки.

Случайными, или так называемыми «*эпизодическими*», силами, появляющимися при прохождении вагона на длине горочной или парковой тормозной позиции; при ударе колёсных пар на стрелочные переводы (об острияки, крестовины и контррельсы); при вхождении вагона на стрелочные переводы; в зимних условиях при изменении плотности воздушной среды, сопровождаемой снегом или инеем в пределах стрелочной зоны пучков и на сортировочных путях; при движении по кривой; движении вагона на подгорочном парке при применении

ручного башмака – *пренебречь*. Нахождение этих сил выходит за рамки программы курса теоретической механики.

*Решение.* Применяя теорему об изменении кинетической энергии системы, перепишем (5.35), в котором  $E$  – кинетическая энергия вагона (системы) с учётом массы вращающихся деталей (колёсных пар):

$$E = E_1 + n_{\text{кп}} E_2 . \quad (5.36)$$

Здесь  $E_1$  – кинетическая энергия поступательно движущихся деталей вагона (кузова с грузом и тележек), кДж;  $E_2$  – кинетическая энергия одной колёсной пары вагона, совершающей сложное (т. е. плоскопараллельное) движение, кДж (см. (4.33));  $n_{\text{кп}}$  – количество осей (колёсных пар) вагона (для четырёхосного вагона  $n_{\text{кп}} = 4$ ), шт.

Кинетическая энергия поступательно движущихся частей вагона (см. (4.31)):

$$E_1 = M \frac{v^2}{2} , \quad (5.37)$$

где  $M$  – масса поступательно движущихся частей (т. е. не вращающихся частей) вагона, кг.

Кинетическую энергию одной колёсной пары вагона, совершающего плоскопараллельное движение (теорема Кёнига)<sup>152</sup> находят по (4.33)).

Подставляя (5.37) и (4.34) в (5.36), после преобразований получим

$$E = M_0 \frac{v^2}{2} , \quad (5.38)$$

где  $M_0$  – масса вагона с грузом с учётом массы вращающихся частей (колёсных пар), кг:

$$M_0 = M + n_{\text{кп}} \left( M_{\text{кп}} + \frac{J_{\text{Ск}}}{r_{\text{кп}}^2} \right) . \quad (5.39)$$

С учётом выполненных в (4.34а) выкладок перепишем (5.39):

<sup>152</sup> Бутенин Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В 2 т. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 736 с.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 768 с.

$$M_0 \approx M + n_{\text{кп}} \left( M_{\text{кп}} + \frac{M_{\text{кп}}}{2} \right),$$

или

$$M_0 \approx M + \frac{3}{2} n_{\text{кп}} M_{\text{кп}}, \quad (5.39a)$$

или, учитывая, что для четырёхосных вагонов  $n_{\text{кп}} = 4$ ,

$$M_0 \approx M + 6M_{\text{кп}}. \quad (5.39б)$$

Вагон скатывается с горки поступательно. Если его начальная скорость  $v_0$ , а конечная –  $v$ , то, подставляя (5.37), (5.38), (3.27), (3.28) и (3.46) в (5.35), будем иметь

$$\begin{aligned} M_0 \frac{v^2}{2} - M_0 \frac{v_0^2}{2} = & Mg \sin \psi_0 s \mp F'_{r_{\text{вх}}} \cos \psi_0 s - \\ & - n_{\text{к}} f_{\text{к}} (G \cos \psi_0 + F'_{r_{\text{вх}}} \sin \psi_0) \frac{s}{r_{\text{к}}} - f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k (G \cos \psi_0 + F'_{r_{\text{вх}}} \sin \psi_0) \frac{s}{r_{\text{вн}}} - \\ & - (f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{r_{\text{вх}}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск0}} F'_{r_{\text{вн}}}) s. \end{aligned}$$

Здесь знак «минус» перед силой  $F'_{r_{\text{вх}}}$  при встречном ветре (при этом сила стремится замедлить скорость скатывания вагона с горки), а «плюс» при попутном ветре (при этом сила ускоряет движение вагона с горки).

После преобразований, последнее выражение примет вид

$$M_0 \frac{v^2}{2} - M_0 \frac{v_0^2}{2} = F_0 s, \quad (5.40)$$

где  $F_0$  – разность движущих сил и сил сопротивлений, приложенных к системе «груз – вагон – путь», кН:

$$\begin{aligned} F_0 = & Mg \sin \psi_0 \mp F'_{r_{\text{вх}}} \cos \psi_0 - \left( n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} \right) (G \cos \psi_0 + \\ & + F'_{r_{\text{вх}}} \sin \psi_0) - \\ & - f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{r_{\text{вх}}} \sin \psi_0) - f_{\text{ск0}} F'_{r_{\text{вн}}} \end{aligned}$$

или после преобразований

$$F_0 = Mg \sin \psi_0 \mp F'_{\text{BX}} \cos \psi_0 - \left( n_{\text{K}} f_{\text{K}} \frac{1}{r_{\text{K}}} + f_{\text{K0}} \frac{n_{\text{G}}}{n_{\text{TK}}} k \frac{1}{r_{\text{BH}}} + f_{\text{CK}} \right) Mg \cos \psi_0 -$$

$$- \left( n_{\text{K}} f_{\text{K}} \frac{1}{r_{\text{K}}} + f_{\text{K0}} \frac{n_{\text{G}}}{n_{\text{TK}}} k \frac{1}{r_{\text{BH}}} + f_{\text{CK}} \right) F'_{\text{BX}} \sin \psi_0 - f_{\text{CK0}} F'_{r_{\text{BY}}}.$$

Вынося в последнем равенстве за скобку  $Mg \cos \psi_0$  и учитывая, что  $\text{tg} \psi_0 = i$ , получим

$$F_0 = Mg \left[ i \mp \frac{1}{Mg} F'_{r_{\text{BX}}} - \left( n_{\text{K}} f_{\text{K}} \frac{1}{r_{\text{K}}} + f_{\text{K0}} \frac{n_{\text{G}}}{n_{\text{TK}}} k \frac{1}{r_{\text{BH}}} + f_{\text{CK}} \right) - \right. \\ \left. \left( n_{\text{K}} f_{\text{K}} \frac{1}{r_{\text{K}}} + f_{\text{K0}} \frac{n_{\text{G}}}{n_{\text{TK}}} k \frac{1}{r_{\text{BH}}} + f_{\text{CK}} \right) \frac{F'_{r_{\text{BX}}}}{Mg} i - f_{\text{CK0}} \frac{F'_{r_{\text{BY}}}}{Mg} \frac{1}{\cos \psi_0} \right] \cos \psi_0. \quad (5.41)$$

Принимая на конце спускной части горки, где крутизны профиля  $i = 1,5 \div 2 \text{‰}$ ,  $\cos \psi_0 \approx 1$  (как для малых углов), будем иметь

$$F_0 = Mg \left[ \mp \frac{1}{Mg} F'_{r_{\text{BX}}} - \left( n_{\text{K}} f_{\text{K}} \frac{1}{r_{\text{K}}} + f_{\text{K0}} \frac{n_{\text{G}}}{n_{\text{TK}}} k \frac{1}{r_{\text{BH}}} + f_{\text{CK}} \right) - f_{\text{CK0}} \frac{F'_{r_{\text{BY}}}}{Mg} \right]. \quad (5.41a)$$

Разделяя обе части (5.40) на силу тяжести вагона с грузом  $G = Mg$ , получим выражение, имеющее размерность длины, м:

$$\frac{M_0}{2Mg} (v^2 - v_0^2) = ws, \quad (5.42)$$

где  $w$  – удельные безразмерные движущие силы и силы сопротивлений:  
– при попутном ветре

$$w = i + C_0 - \sum_{k=1}^n w_k \quad (5.43)$$

с учётом того, что  $C_0$  – удельная безразмерная движущая сила, появление кото-

рой связана с действием попутного ветра:  $C_0 = \frac{1}{Mg} F'_{r_{\text{BX}}}$ ;  $\sum_{k=1}^n w_k$  – вычитаемые в скобке (5.41);

– при встречном ветре

$$w = i - \sum_{k=1}^n w_k, \quad (5.43a)$$

с учётом того, что  $\sum_{k=1}^n w_k = w_0$  – основное удельное сопротивление при качении колёс со скольжением по рельсу:

$$w_0 = \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{Mg} F'_{r_{BX}} + \left( n_k f_k \frac{1}{r_k} + f_{k0} \frac{n_{\bar{6}}}{n_{TK}} k \frac{1}{r_{BH}} + f_{CK} \right) \left( 1 + \frac{F'_{r_{BX}}}{Mg} i \right) + \\ & + f_{CK0} \frac{F'_{r_{BY}}}{Mg} \frac{1}{\cos \psi_0} \end{aligned} \right] \cos \psi_0. \quad (5.44)$$

Для частного случая (см. (5.41a)), где крутизны профиля  $i = 1,5 \dots 2 \text{ ‰}$ ,  $\sin \psi_0 \approx 0$  и  $\cos \psi_0 \approx 1$  (как для малых углов), (5.44) запишется в виде

$$w_0 = \frac{1}{Mg} F'_{r_{BX}} - \left( n_k f_k \frac{1}{r_k} + f_{k0} \frac{n_{\bar{6}}}{n_{TK}} k \frac{1}{r_{BH}} + f_{CK} \right) - f_{CK0} \frac{F'_{r_{BY}}}{Mg}. \quad (5.44a)$$

Подставляя (5.43) в (5.42), после преобразований найдём путь, который пройдёт вагон при скатывании с горки за некоторое время  $t = t_1$  (вплоть до остановки, где при  $t = t_k$   $v = 0$ ):

– при попутном ветре

$$s = \frac{M_0}{2Mg} \frac{1}{i + C_0 - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2); \quad (5.38)$$

– при встречном ветре

$$s = \frac{M_0}{2Mg} \frac{1}{i - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2). \quad (5.38a)$$

или, обозначив  $\frac{M_0}{Mg} = \frac{1}{g'}$  или  $g' = \frac{M}{M_0} g$  (где  $g' < g$ , поскольку  $M < M_0$ ) – доля ускорения свободного падения,  $m/c^2$ , получим:

– при попутном ветре

$$s = \frac{1}{2g'} \frac{1}{i + C_0 - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2); \quad (5.46)$$

– при встречном ветре

$$s = \frac{1}{2g'} \frac{1}{i - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2). \quad (5.46a)$$

Отметим, что (5.46a) *по форме* совпадает с (4.1), полученной в работе [Правила и нормы..., 2003]<sup>153</sup>. Значит в в последней работе рассмотрен только случай воздействия на вагон встречного ветра.

*Замечание.* При этом допускают, что конечная скорость вагона  $v_k = v$  должна быть известной величиной, в противном случае дальнейшее решение задачи в такой постановке окажется также бессмысленным, как это выполнено в [Правила и нормы..., 2003; Железнодорожные..., 2002]. В соответствии с этим отметим, что *теорема об изменении кинетической энергии системы* для решения задачи определения пройденного пути при скатывании вагона с горки применима только тогда, когда известна конечная скорость вагона. Особо подчеркнём, что определение скорости скатывания вагона с горки является самостоятельной задачей, требующей своего решения на основе составления дифференциального уравнения движения.

---

<sup>153</sup> Правила и нормы проектирования сортировочных устройств на железных дорогах колеи 1 520 мм. – М.: ТЕХИНФОРМ, 2003. – 168 с.

Железнодорожные станции и узлы: учебник для вузов ж.-д. транспорта / В.Г. Шубко, Н.В. Правдин и др. – М: УМК МПС России, 2002. – 368 с.