

Sh.O. Alimov
R.R. Ashurov

MATEMATIK TAHLIL

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

2-qism

22.16 ya 73

A.50

**Alimov Shavkat Orifjanovich
Ashurov Ravshan Rajabovich**

MATEMATIK TAHLIL

II-qism

O'quv qo'llanma

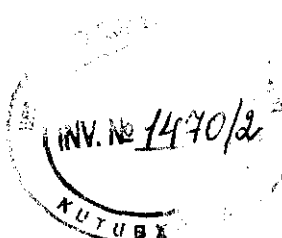
**TOSHKENT
«TURON-IQBOL»
2017**

UO'K:51(075)
KBK:22.16 M31

Alimov Shavkat Orifjonovich,
Ashurov Ravshan Rajabovich.

Matematik tahlil (2-qism): 5480100-amaliy matematika va informatika; 5521200 informatika va axborot texnologiyalari/
Sh.O.Alimov, R.R.Ashurov; O'zR oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. - Toshkent: «TURON-IQBOL». 2017. - 816-b.

UO'K:51(075)
KBK:22.16 M31



M U N D A R I J A

Qisqacha sharh	6
So'z boshi	9
11-bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar	13
11.1-§. $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosi	13
11.2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi	34
11.3-§. Vektor qiymatli ko'p o'zgaruvchili funksiyalar	46
11.4-§. Misollar	56
12-bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni differensial-	
lash	60
12.1-§. Qismaniy hosilalar	60
12.2-§. Teylor formulasi	80
12.3-§. Oshkormas funksiyalar	97
12.4-§. Funksiyalar sistemasining bog'liq va bog'liqmasligi	118
12.5-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi	128
12.6-§. Misollar	144
13-bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning integrallash	148
13.1-§. Kvadratlanuvchi shakllar	148
13.2-§. Ikki karrali Riman integralining ta'rif	162
13.3-§. Darbu nazariyasi	170
13.4-§. Ikki karrali integral xossalari	185
13.5-§. Ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish	204
13.6-§. Ikki karrali integralda o'zgaruvchini almashtirish	211
13.7-§. Uch karrali integrallar	228
13.8-§. n o'zgaruvchili funksiyalarni integrallash	249
13.9-§. Misollar	263
14-bob. Karrali xosmas integrallar	268
14.1-§. $\mathbb{R}^n$ fazosi bo'yicha integrallash	268
14.2-§. Ixtiyoriy soha bo'yicha xosmas integrallar	289
14.3-§. Karrali xosmas integralning bosh qiymati	300
14.4-§. Misollar	309

15-bob. Egri chiziqli integrallar	315
15.1-§. Birinchi tur egri chiziqli integrallar	315
15.2-§. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar	323
15.3-§. Grin formulasi	352
15.4-§. Egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq- maslik sharti	362
15.5-§. Misollar	375
16-bob. Sirt bo'yicha integrallar	380
16.1-§. Sirt yuzi	380
16.2-§. Sirtning birinchi kvadratik formasi	405
16.3-§*. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi	415
16.4-§. Birinchi tur sirt integrallari	441
16.5-§. Ikkinchi tur sirt integrallari	446
16.6-§. Stoks formulasi	458
16.7-§. Gauss-Ostrogradskiy formulasi	466
16.8-§. Misollar	471
17-bob. Parametrga bog'liq integrallar	476
17.1-§. Parametrga bog'liq integrallarning asosiy xos- salari	476
17.2-§. Parametrga bog'liq xosmas integrallar	495
17.3-§. Eylarning beta va gamma funksiyalari	532
17.4-§. Parametrga bog'liq integrallarni asimptotik hisoblash usullari	543
17.5-§. Parametrga bog'liq karrali integrallar	556
17.6-§. Misollar	573
18-bob. Maydon nazariyasi elementlari	577
18.1-§. Skalyar va vektor maydonlar	577
18.2-§. Vektor maydon divergensiyasi va rotori	585
18.3-§. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida maydon naza- riyasining asosiy operatsiyalari	595
18.4-§. Potensial va solenoidal maydonlar	613
18.5-§. Maksvell tenglamalari	620
18.6-§. Misollar	626

19-bob. Furye integrali	630
19.1-§. Furye almashtirishi	630
19.2-§. Furye integral formulasi	641
19.3-§. Bo'lakli-silliqli funksiyalarning Furye integraliga yoyilishi	651
19.4-§. Furye integraliga yoyilmalarni differensiallash ...	659
19.5-§*. Furye integrallarini Abel usuli bilan jamlash ...	668
19.6-§*. Plancherel teoremasi	678
19.7-§. Karrali Furye integrallari	684
19.8-§. Misollar	705
20-bob. Furye qatorlari	709
20.1-§. Evklid fazosidagi ortogonal qatorlar	712
20.2-§. $R[-\pi, \pi]$ dagi funksiyalarning trigonometrik Furye qatorlari	732
20.3-§. Furye qatorlari yaqinlashishining lokal shartlari ...	758
20.4-§. Furye qatorlarining regulyar usullar bilan jamlanishi	775
20.5-§. Furye qatorlarining kompleks shakli	785
20.6-§. Karrali Furye qatorlari	796
20.7-§. Misollar	806

Qisqacha sharh

Ushbu o'quv qo'llanma mualliflarning avvalgi "Matematik tahlil, 1- qism" kitobining davomi bo'lib, u o'z ichiga ko'p haqiqiy o'zgaruvchili funksiya differensial va integral hisobining klassik kursiga kiruvchi bo'limlarini olgan. Kitobda dastlab ko'p o'zgaruvchili funksiyalar xossalari o'rganiladi (11-bob). So'ngra bunday funksiyalarni differensiallash va integrallash nazariyalari (12-13-boblar) hamda ko'p o'zgaruvchili holda xosmas integrallarning yaqinlashish shartlari tadqiq qilinadi (14-bob). Bundan so'ng egri chiziqli (15-bob) va sirt (16-bob) integrallarining xossalari o'rganiladi. Bundan tashqari, kitobda parametrga bog'liq integrallar xossalari bir va ko'p o'zgaruvchili hollarda o'rganilgan (17-bob). Darslikdan maydon nazariyasi hamda Fyurje integrallari va qatorlariga bag'ishlangan boblar ham o'rin olgan (18-20-boblar).

Mazkur kitobda, xuddi birinchi qismdagi singari, barcha matematik xulosalar qisqa va sodda isbotlar asosida bayon qilingan va ko'p sonli misollar bilan oydinlashtirilgan. Har bir bobning oxirida mavzularni chuqur o'zlashtirishga yo'naltirilgan masalalar keltirilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma Mirzo Ulug'bek nomli O'zbekiston Milliy universiteti va M. V. Lomonosov nomli Moskva davlat universitetining Toshkentdagi filiali talabalariga mualliflar tomonidan o'qilgan ma'ruzalar asosida yozilgan. O'quv qo'llanma universitetlarning "Matematika", "Amaliy matematika va Informatika", "Mexauika", "Informatika va axborot texnologiyalari" yo'nalishlari bo'yicha ta'lim oluvchi hamda oliy matematika chuqur o'rganiladigan texnika oliy o'quv yurtlarida ta'lim oluvchi talabalar uchun mo'ljallangan.

Аннотация

Настоящее учебное пособие является продолжением предыдущей книги авторов «*Matematik tahlil, 1-qism*» и включает в себя разделы, входящие в классический курс дифференциального и интегрального исчисления функций многих действительных переменных. Вначале изучаются свойства функций многих переменных (Глава 11). Затем излагаются теории дифференцирования и интегрирования таких функций (Главы 12 и 13), а также вопросы сходимости несобственных интегралов в многомерном случае (Глава 14). Далее изучаются свойства криволинейных (Глава 15) и поверхностных интегралов (Глава 16). В книге излагаются свойства интегралов, зависящих от параметров, как в одномерном так и в многомерном случаях (Глава 17). Включены также элементы теории поля, интегралы и ряды Фурье (Главы 18–20).

Так же как и в первом томе, все математические утверждения снабжены краткими и простыми доказательствами и проиллюстрированы большим количеством примеров. В конце каждой главы приводится набор задач, предназначенных для лучшего усвоения материала.

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций, читавшихся авторами студентам Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Ташкентского филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Предназначено для студентов университетов по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информатика и информационные технологии» и «Механика» а также для студентов технических вузов с углубленным изучением высшей математики.

Annotation

This tutorial is a continuation of our previous book «*Matematik Tahlil, 1-qism*» and includes sections belonging to a classical course of differential and integral calculus of functions of several real variables. First, we study properties of functions of several variables (Chapter 11). Then we outline the theory of differentiation and integration of functions (Chapters 12 and 13), as well as issues of convergence of improper integrals in the multidimensional case (Chapter 14). Next, we study properties of curvilinear integrals (Chapter 15) and surface integrals (Chapter 16). The book outlines properties of integrals depending on parameters as in the one-dimensional and multidimensional cases (Chapter 17). Also elements of field theory and Fourier series and integrals are included (Chapters 18-20).

As in the first volume, all mathematical statements are equipped with short and simple proofs and are illustrated by many examples. At the end of each chapter there is a set of tasks designed to enable better absorption of the material.

This manual is based on lectures given by the authors to students of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek and the Tashkent branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov. It is designed for students of universities in areas of "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Information technology" and "Mechanics" as well as for advanced students of engineering with in-depth study of higher mathematics.

Soʻz boshi

Ushbu oʻquv qoʻllanma mualliflarining avvalgi "Matematik tahlil, 1- qism" kitobining uzviy davomi boʻlib, u koʻp haqiqiy oʻzgaruvchili funksiyalarni differensial va integral hisobining klassik kursiga kiruvchi boʻlimlarini oʻz ichiga olgan. Qoʻllanmada koʻp oʻzgaruvchili funksiyalarning xossalari, ularni differensiallash va integrallash nazariyalari, karrali xosmas integrallar, egri chiziqli va sirt integrallari, parametrga bogʻliq integrallar, maydon nazariyasi elementlari hamda Furiye integrallari va qatorlari oʻrganiladi.

Ravshaniki, matematik tahlilni oʻrganayotgan oʻquvchini eng choʻchitadigan narsa — bu isbotdagi eslab qolish shart boʻlgan uzundan-uzoq mulohazalardir. Mazkur qoʻllanmani yozishda tasdiqlarni oʻquvchilar uchun tushunarli, lekin shu bilan birga imkon darajasida qisqa isbotlarini topishga harakat qilindi. Chunonchi, qoʻllanmada deyarli barcha isbotlar bir betdan oshmagan boʻlib, toʻla va aniq matematik asoslarga tayangan holda bayon qilingan.

Barcha natijalar imkon darajasidagi eng keng umuniylikda keltirildi. Masalan, Furiye integrallari va qatorlari, odatda, uzluksiz yoki boʻlakli-uzluksiz funksiyalar uchun oʻrganiladi. Ushbu qoʻllanmada esa, Riman boʻyicha integrallanuvchi funksiyalar uchun oʻrganilgan. Bunday umuniylikka erishishga imkon bergan asosiy vosita birinchi qismda keltirilgan Nyuton - Leybnits formulasining klassik koʻrinishidir.

Koʻpchilik darsliklarda biror natijaning muhimligi haqida umumiy soʻzlar bilan cheklaniladi. Masalan, Maksvell nazariyasi toʻgʻrisida gap ketganda faqat Maksvell tenglamalarining katta ahamiyat kasb qilishi qayd qilinadi. Ushbu qoʻllanmada esa, maydon nazariyasining muhim yutuqlaridan biri aynan Maksvell nazariyasi ekanligi koʻrsatilgan va Maksvell tenglamalarining fizik mohiyati ochib berilgan. Bundan tashqari, Kulon potentsiali xossalari tayangan holda, Kulon qonuni hamda Bio-Savar qonuni keltirib chiqarilgan.

Odatda, biror taʼrif keltirilib, taʼrifning maqsadga muvofiq ekanligiga toʻxtalmasdan, keyingi bayonda undan foydalanib ketilaveradi. Mazkur qoʻllanmada esa, masalan, qatorlar haqidagi bobda, qa-

tor yig'indisi uchun mumkin bo'lgan ta'riflardan biri keltirilib, qatorni boshqa ta'riflarga asoslanib, qanday yig'indi olish mumkinligi tushuntirilgan.

Parametrğa bog'liq integrallarga bag'ishlangan bobda Laplas usulini bayon qilingan bo'lib, ushbu usulga asoslangan holda Stirling formulasi keltirib chiqarilgan. Uzilishga ega funksiyalarni silliqlash usuli ham shu bobda keltirilgan bo'lib, bu usulning tatbiqi sifatida Nyuton (Kulon) potentsialining xossalari o'rganilgan.

Furye qatorlari va integrallariga bag'ishlangan boblarga alohida to'xtalib o'tish maqsadga muvofiqdir. Odatda, Furye qatorlari Furye integrallaridan so'ng o'rganiladi. Biz bu an'anani o'zgartirishni taklif qildik, ya'ni bizda o'quvchi avval Furye integrallari bilan tanishib, so'ng Furye qatorlarini o'rganadi. Nima uchun biz bunday taklifni o'rtağa tashladik? Birinchidan, bizning o'ylashimizcha, Furye integrallari nazariyasini o'rganish Furye qatorlari nazariyasini o'rganishga nisbatan ancha oson. Ikkinchidan, bunday tartibda bayon qilganda, Furye integrallari nazariyasi bilan tanish bo'lgan o'quvchi Furye qatorlari nazariyasidagi ko'pgina natijalarni sezilarli darajada oson qabul qiladi. Shu sababli, Furye integrallariga bag'ishlangan bobdagi deyarli barcha natijalar yangi bo'lib, ular boshqa adabiyotlarda keltirilmagan. Bundan tashqari, qo'llanmada karrali Furye integrallari va qatorlari nisbatan ancha to'la o'rganilgan. Karrali Furye integrallarining xossalarini tadqiq qilishda biz karrali xosmas integrallarni regulyar jamlash usullarini qo'lladik.

Furye integrallari nazariyasini bayon qilishda asosiy qiyinchilik xosmas integrallarning yaqinlashishini isbotlashdan iborat. Mazkur kitobda, biz Furye integrali nazariyasini parametrğa bog'liq xosmas integrallar nazariyasining tatbiqi deb qarab, bu qiyinchilikni yengib o'tishda asosiy vosita sifatida Abel jamlash usulini tanladik. Bu usulni qo'llash ko'pgina teoremlarning isbotini sezilarli darajada soddalashtirish imkonini berdi.

Furye integrallarining muhim ahamiyatga ega ekanini qayd etish maqsadida, biz Helmholtz tenglamalari nazariyasiga oid misol keltirdik va Radon almashtirishi hamda kompyuter tomografiyasiğa bag'ishlangan band kiritdik. Bu bandda funksiyani uning Radon

almashtirishiga koʻra tiklash usuli asoslab berildi hamda bu almashtirishning kompyuter tomografiyasida qoʻllanilishi tushuntirildi.

Mazkur qoʻllanmaning yana bir oʻziga xosligi shundan iboratki, biz oʻrganilayotgan mavzuga yaqin baʼzi fandagi zamonaviy yutuqlarning matematik asoslarini keltirishga harakat qildik. Bunga misol sifatida kompyuter tomografiyasini va shu nuqtai nazardan oʻta muhim boʻlgan (umuman aytganda, juda sodda tushuntirish mumkin boʻlgan) Gibbs hodisasini olishimiz mumkin.

Ushbu kitobda misollarni tanlashga katta ahamiyat qaratilgan. Tanlangan misollar nafaqat isbotlangan tasdiqlarni oydinlashtirishga xizmat qiladi, balki ular katta gʻoyaviy ahamiyatga ham egadir.

Lotin alifbosiga oʻtish munosabati bilan taniqli olimlarning ismini va matematik terminlarni jahon adabiyotlarida umum qabul qilingan yozilishiga imkon darajada yaqinlashtirish zaruriyati tugʻildi. Shu munosabat bilan biz taniqli matematiklarning ismini hamda matematik terminlarni yozishda quyidagi usulni qoʻlladik: Hilbert, Helmholtz, homeomorfizm va hokazo. Oʻzgaruvchilarning biri boʻyicha hosila uchun, bu soʻzning original kelib chiqishi lotincha partialis-qisimiy ekanini hisobga olib, biz qisimiy hosila degan termini ishlatdik.

Xuddi birinchi qismdagi kabi, ayrim paragraflar, bandlar hamda alohida tasdiqlarning tartib raqamlariga yulduzcha qoʻyilgan. Bu qismda ham qoʻllanmada qulaylik uchun isbotlar yakuni qora kvadrat orqali belgilangan.

Kitob Mirzo Ulugʻbek nomli Oʻzbekiston Milliy universiteti va Lomonosov nomli Moskva davlat universitetining Toshkentdagi filiali talabalariga mualliflar tomonidan oʻqilgan maʼruzalar asosida yozilgan.

Ushbu Matematik tahlilning ikkinchi qismi birinchi qism bilan birgalikda universitetlarning "Matematika", "Amaliy matematika va informatika", "Mexanika", "Informatika va axborot texnologiyalari" va "Axborat tizimlarini matematik va dasturiy taʼminoti" yoʻnalishlari boʻyicha hamda oliy matematika chuqur oʻrganiladigan texnika oliy oʻquv yurtlarida taʼlim oluvchi talabalar uchun moʻljal-

langan bo'lib, u differensial va integral hisobi kursini to'la qamrab oladi.

Biz umid qilamizki, ushbu o'zbek tilida yaratilgan matematik tahlil kursi T. Qori-Niyoziy tomonidan ilk bor o'zbek tilida yozilgan "Matematik analiz asoslari" nomli darsligi va taniqli olimlari-miz T. Azlarov va H. Mansurovlarning "Matematik analiz" nomli darsliklarining an'anaviy davomi deb qabul qilinadi.

11-bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

11.1-§. $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosi

1. $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosi. Ushbu paragrafda biz n ni birdan katta tayinlangan natural son deb, $\mathbf{x}$ orqali quyidagi

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11.1.1)$$

tartiblangan n ta son jamlamasini belgilaymiz. Barcha bunday jamlamalar to'plami $\mathbb{R}^n$ fazoni tashkil qiladi. (11.1.1) jamlamalarining o'zini esa, $\mathbb{R}^n$ fazoning nuqtalari yoki elementlari deb ataymiz. Har qanday (11.1.1) ko'rinishdagi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ element uchun x_j haqiqiy sonlar bu elementning *komponentalari* yoki uning *koordinatalari* deyiladi.

$\mathbb{R}^n$ fazoda har qanday ikki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementning yig'indisi tabiiy ravishda mos koordinatalarning yig'indisi sifatida aniqlanadi:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (11.1.2)$$

Xuddi shu singari istalgan $\mathbf{x}$ elementning λ haqiqiy songa ko'paytmasi bu sonni har bir koordinataga ko'paytirish orqali kiritiladi:

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \quad (11.1.3)$$

Kiritilgan amallar $\mathbb{R}^n$ ni *vektor fazoga* (*chiziqli fazo* ham deb ataladi) aylantiradi. Vektor fazo elementlari *vektorlar* ham deb ataladi. $\mathbb{R}^n$ fazosida nol element sifatida

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

vektor olinadi. Agarda vektor fazosida skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, bunday fazo *Evklid fazosi* deyiladi. Biz istalgan ikki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ element uchun *skalyar ko'paytmani*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \quad (11.1.4)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

Bunday aniqlangan skalyar ko'paytma, ravshanki, quyidagi to'rtta xossaga ega:

- (i) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
- (ii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$,
- (iii) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
- (iv) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ va, agar $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ bo'lsa, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bo'ladi.

Berilgan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ element uzunligi $|\mathbf{x}|$ simvoli orqali belgilanib, u kvadrati $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ skalyar ko'paytmaga teng manfiy bo'lmagan son sifatida aniqlanadi, ya'ni

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (11.1.5)$$

Bunda, ravshanki, istalgan j nomer uchun $\mathbf{x}$ vektorning x_j komponentasi shu vektor uzunligi bilan baholanadi:

$$|x_j| \leq |\mathbf{x}|.$$

Bundan tashqari, vektor uzunligi o'zining eng katta komponentasining absolyut qiymati bilan yuqoridan baholanadi. Haqiqatan,

$$|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|^2$$

va shuning uchun,

$$|\mathbf{x}| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Bevosita yuqoridagi (11.1.5) ta'rif va skalyar ko'paytmaning xossalari ko'ra,

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2. \quad (11.1.6)$$

Agar

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

bo'lsa, $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ elementlar *ortogonal* (yoki perpendikulyar) deyiladi.

Xususan, nol istalgan elementga ortogonaldir. Bundan tashqari, agar $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ elementlar ortogonal bo'lsa, u holda (11.1.6) ayniyatga ko'ra,

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2.$$

Bu tenglik bizga ma'lum bo'lgan Pifagor teoremasining vektor ko'rinishidir.

11.1.1 - jumla. *Ixtiyoriy ikki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ element uchun, Koshi tengsizligi deb ataluvchi,*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \quad (11.1.7)$$

tengsizlik o'rinni.

Isbot. Albatta, agar $\mathbf{x}$ yoki $\mathbf{y}$ elementlardan aqalli bittasi nolga teng bo'lsa, (11.1.7) tengsizlik tenglikka aylanadi va uning bajarilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi.

Shuning uchun $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ va $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ deymiz. U holda, skalyar ko'paytma xossalardan va (11.1.6) ayniyatdan foydalanib,

$$\left| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \pm \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right|^2 = 1 \pm 2 \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} + 1 \geq 0$$

tengsizlikni olamiz. Bundan esa, quyidagi

$$\mp \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leq 1$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leq 1.$$

Ravshanki, bu tengsizlik (11.1.7) ning aynan o'zidir.

11.1.2 - jumla. *Ixtiyoriy ikki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ element uchun, uchburchak tengsizligi deb ataluvchi,*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \quad (11.1.8)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. (11.1.6) ayniyat va (11.1.7) Koshi tengsizligiga ko'ra,

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2 \leq$$

$$\leq |\mathbf{x}|^2 + 2 \cdot |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2.$$

Bu tengsizlikning har ikki tarafidan kvadrat ildiz olsak, talab qilingan (11.1.8) tengsizlikka kelamiz.

■

Yuqoridagi (11.1.8) munosabatning uchburchak tengsizligi deb atalishiga asos quyidagidan iborat. Ikki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ nuqtalar orasidagi masofa deb $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ manfiy bo'lmagan songa aytamiz. Agar $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ va $\mathbf{z}$ nuqtalar tomonlari $(\mathbf{x} - \mathbf{z})$, $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ va $(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ bo'lgan uchburchakning uchlari bo'lsa, u holda (11.1.8) dan

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \quad (11.1.9)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik esa, uchburchakning istalgan tomoni uzunligi uning qolgan ikki tomoni uzunliklari yig'indisidan katta emasligini anglatadi.

2. $\mathbb{R}^n$ fazosida istalgan $\{\mathbf{x}_k\}$ nuqtalar ketma-ketligini qaraylik. Yuqorida kiritilgan ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi bu ketma-ketlik uchun limit tushunchasini kiritish imkonini beradi.

Ta'rif. *Biror $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqta va $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $k \geq N$ bo'lganda*

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad (11.1.10)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\mathbf{a}$ nuqta $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi.

Bunda $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlik $\mathbf{a}$ nuqtaga yaqinlashadi deyiladi va

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$$

yoki

$$k \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$$

kabi yoziladi.

11.1.1 - teorema. Berilgan

$$\mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.1.11)$$

elementlar ketma-ketligining

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

elementga yaqinlashishi uchun istalgan $j = 1, 2, \dots, n$ nomerlarda $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklarning a_j elementlarga yaqinlashishi, ya'ni

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{jk} = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

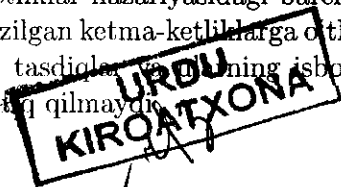
tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot yuqorida qayd etilgan

$$|x_{jk} - a_j| \leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_{jk} - a_j| \quad (11.1.12)$$

qo'shaloq tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi.

Keltirilgan teorema sonli ketma-ketliklar nazariyasidagi barcha asosiy natijalarni $\mathbb{R}^n$ elementlaridan tuzilgan ketma-ketliklarga o'tkazish imkonini beradi. Bunda ta'riflar, tasdiqlar va teoremlarning isboti sonli ketma-ketliklar holidan deyarli foydalanilgani qilmaydi.



Ta'rif. Agar $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ elementlar ketma-ketligi uchun har qanday $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $k \geq N$ va $m \geq N$ bo'lganda

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| < \varepsilon \quad (11.1.13)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlik **Koshi ketma-ketligi** deyiladi. Koshi ketma-ketligi fundamental ketma-ketlik ham deb ataladi. Ravshanki,

$$|x_{jk} - x_{jm}| \leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_{jk} - x_{jm}| \quad (11.1.14)$$

qo'sh tengsizlikdan (11.1.11) ko'rinishdagi $\mathbf{x}_k$ elementlar ketma-ketligi fundamental bo'lishi uchun istalgan $j = 1, 2, \dots, n$ larda $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ ketma-ketliklarning fundamental bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

11.1.2 - teorema (Koshi kriteriysi). $\mathbb{R}^n$ fazo elementlaridan tuzilgan ketma-ketlikning yaqinlashishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot 11.1.1 - teorema va sonli ketma-ketliklar uchun Koshi kriteriysidan (2.5.1 - teorema) kelib chiqadi. Haqiqatan, $\mathbb{R}^n$ fazosining $\mathbf{x}_k$ elementlaridan tuzilgan ketma-ketlikning yaqinlashishi uchun, 11.1.1 - teoreмага ko'ra, bu elementlar komponentlaridan iborat $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklarning yaqinlashishi zarur va yetarli. Buning uchun esa, 2.5.1 - teoreмага ko'ra, bu komponentlardan iborat sonli ketma-ketliklarning fundamental bo'lishi zarur va yetarli, bundan chiqdi, $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlikning fundamental bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlik uchun shunday $M > 0$ soni topilib, barcha k nomerlarda

$$|\mathbf{x}_k| \leq M \quad (11.1.15)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda bu ketma-ketlik *chegaralangan* deyiladi.

Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralangan ekanini ko'rsatish qiyin emas. Albatta, teskari tasdiq o'rinli emas, lekin,

xuddi sonli ketma-ketliklar holidagi singari, har qanday chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikka ega. Bunda $\mathbb{R}^n$ elementlarining qisman ketma-ketligi xuddi sonli qisman ketma-ketliklar singari aniqlanadi.

11.1.3 - teorema (Bolsano-Veyershtass). $\mathbb{R}^n$ fazosining har qanday chegaralangan ketma-ketligidan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

Isbot. Aytaylik, $\{x_k\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin. Ravshanki, har bir $j = 1, 2, \dots, n$ uchun $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ komponentalar ketma-ketligi ham chegaralangan bo'ladi. Xususan, birinchi komponentalardan tuzilgan $\{x_{1k}\}$ sonli ketma-ketlik chegaralangan, va shuning uchun, klassik Bolsano-Veyershtass teoremasiga ko'ra, biror a_1 soniga yaqinlashuvchi $\{x_{1p_k}\}$ ketma-ketlik mavjud.

Endi ikkinchi komponentalarning chegaralangan qisman $\{x_{2p_k}\}$ ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlikdan, xuddi yuqoridagi singari, biror a_2 soniga yaqinlashuvchi qisman $\{x_{2q_k}\}$ ketma-ketlikni ajratishimiz mumkin. Bu jarayonni davom ettirib, biz oxirgi n - komponentalarning biror a_n soniga yaqinlashuvchi $\{x_{nm_k}\}$ qisman ketma-ketligini olamiz. Shulhasiz, m_k nomerli barcha qisman ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$k \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad x_{jm_k} \rightarrow a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

11.1.1 - teoreмага asosan, bundan

$$x_{m_k} \rightarrow a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ekani, ya'ni $\{x_{m_k}\}$ qisman ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekani kelib chiqadi. ■

Shuni aytish kerakki, Koshi kriteriyasi ham, Bolsano-Veyershtass teoremasi ham haqiqiy sonlar to'planining to'lalik xossasiga asoslandi.

3. Ochiq va yopiq to'plamlar. Ushbu bandeda biz E orqali $\mathbb{R}^n$ fazosining biror to'plamini belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosining ixtiyoriy $\mathbf{a}$ nuqtasi va istalgan musbat $r > 0$ son berilgan bo'lsin. Radiusi r va markazi $\mathbf{a}$ nuqtada bo'lgan (n o'lchovli) *ochiq shar* deb

$$B(\mathbf{a}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\} \quad (11.1.16)$$

to'plamga aytamiz.

Radiusi r va markazi $\mathbf{a}$ nuqtada bo'lgan (n o'lchovli) *yopiq shar* deb

$$\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq r\} \quad (11.1.17)$$

to'plamga aytamiz.

Agar $\varepsilon > 0$ bo'lsa, berilgan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning ε -atrofi deb markazi $\mathbf{a}$ nuqtada va radiusi ε bo'lgan ochiq sharga aytamiz.

Ta'rif. Agar $\mathbf{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$ nuqta o'zining biror ε -atrofi bilan birga E to'plamga tegishli bo'lsa, bu nuqta E to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi.

Ochiq $B(\mathbf{a}, r)$ sharning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan, faraz qilaylik, $\mathbf{b} \in B(\mathbf{a}, r)$, ya'ni $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| < r$ bo'lsin. Musbat ε sonini

$$0 < \varepsilon < r - |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olaylik.

U holda radiusi ε va markazi $\mathbf{b}$ nuqtada bo'lgan $B(\mathbf{b}, \varepsilon)$ shar $B(\mathbf{a}, r)$ sharning ichida yotadi. Chunki, agar $\mathbf{x} \in B(\mathbf{b}, \varepsilon)$ bo'lsa,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{b}| + |\mathbf{b} - \mathbf{a}| < \varepsilon + |\mathbf{b} - \mathbf{a}| < r$$

bo'ladi, ya'ni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$.

Ta'rif. Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam berilgan bo'lib, markazi $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada bo'lgan har qanday shar bu to'plamga ham tegishli bo'lgan, ham tegishli bo'lmagan nuqtalarni o'z ichiga olsa, u holda $\mathbf{a}$ nuqta E to'plamning **chegaraviy** nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = r\} \quad (11.1.18)$$

tenglik bilan aniqlangan, radiusi r va markazi $\mathbf{a}$ bo'lgan $S(\mathbf{a}, r)$ sfera $B(\mathbf{a}, r)$ sharning barcha chegaraviy nuqtalari to'plami bo'ladi. Bay-onimizni murakkablashtirmaslik maqsadida, biz bu tasdiqni sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan holda, ya'ni $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ bo'lgan holda isbotlaymiz.

Aytaylik, $\mathbf{b} \in S(\mathbf{0}, r)$, ya'ni $|\mathbf{b}| = r$ bo'lsin. Ravshanki, $0 < \delta < 1$ intervaldan olingan istalgan δ uchun

$$\mathbf{x}_\delta = (1 - \delta)\mathbf{b}$$

nuqta $B(\mathbf{0}, r)$ sharga tegishli bo'lib,

$$\mathbf{y}_\delta = (1 + \delta)\mathbf{b}$$

nuqta esa, bu shardan tashqarida yotadi. Shu bilan birga,

$$|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{b}| = |\mathbf{y}_\delta - \mathbf{b}| = r\delta.$$

Demak, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun δ ni $r\delta < \varepsilon$ shartdan tanlab olsak, har ikki $\mathbf{x}_\delta$ va $\mathbf{y}_\delta$ nuqta $\mathbf{b}$ ning ε -atrofida yotadi. Bundan chiqdi, $\mathbf{b}$ nuqta $B(\mathbf{0}, r)$ shar uchun chegaraviy nuqta bo'lar ekan.

Berilgan E to'plamning barcha chegaraviy nuqtalari to'plami ∂E orqali belgilanadi va E ning *chegarasi* deb ataladi. Demak, $\partial B(\mathbf{a}, r) = S(\mathbf{a}, r)$.

Shubhasiz, istalgan $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning har bir nuqtasi uning yoki ichki, yoki chegaraviy nuqtasi bo'ladi.

E'tibor bering, E to'plamning chegaraviy nuqtalari E ga tegishli bo'lishi ham, va aksincha, tegishli bo'lmashligi ham mumkin. Masalan, agar E ochiq shar bo'lsa, ya'ni $E = B(\mathbf{a}, r)$ bo'lsa, u holda $S(\mathbf{a}, r)$ sferaning barcha nuqtalari E to'plamning chegaraviy nuqtalari bo'lib, ular E to'plamga tegishli bo'lmaydi. Ammo, agar E yopiq shar bo'lsa, ya'ni $E = \bar{B}(\mathbf{a}, r)$ bo'lsa, bunda ham $S(\mathbf{a}, r)$ sferaning barcha nuqtalari E to'plamning chegaraviy nuqtalari bo'ladi, lekin endi ularning barchasi E ga tegishli bo'ladi.

Ta'rif. Agar berilgan to'plamga uning **birorta ham** chegaraviy nuqtasi tegishli bo'lmasa, bunday to'plam **ochiq** to'plam deyiladi.

Ta'rif. Agar berilgan to'plamga uning **barcha** chegaraviy nuqtalari tegishli bo'lsa, bunday to'plam **yopiq** to'plam deyiladi.

Masalan, har qanday to'plam chegarasi yopiq to'plam bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Agar to'plam umuman chegaraviy nuqtaga ega bo'lmasa, bunday to'plam bir vaqtning o'zida ham ochiq va ham yopiq deb hisoblanadi. $\mathbb{R}^n$ fazosida bunday to'plamlar faqat ikkita: $\mathbb{R}^n$ fazosining o'zi va $\emptyset$ simvol bilan belgilanuvchi bo'sh to'plam, ya'ni birorta ham element-ga ega bo'lmagan to'plam.

Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, har qanday ochiq shar ochiq to'plam bo'ladi va har qanday yopiq shar yopiq to'plam bo'ladi.

Albatta, na ochiq va na yopiq bo'lgan to'plamlar ham mavjud. Bu shunday to'plamlarki, ular chegarasining bir qismini o'z ichiga olib, qolgan qismini o'z ichiga olmaydi. Bunday to'plamga misol sifatida

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : r < |\mathbf{x}| \leq R\}$$

to'plamni olishimiz mumkin.

Berilgan $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning *to'ldiruvchisi* deb $\mathbb{R}^n$ fazoning E to'plamga tegishli bo'lmagan barcha nuqtalari to'plamiga aytiladi.

E to'plamning to'ldiruvchisi

$$CE = \mathbb{R}^n \setminus E \quad (11.1.19)$$

simvol orqali belgilanadi.

Bevosita chegaraviy nuqtaning ta'rifidan, berilgan to'plamning har bir chegaraviy nuqtasi to'ldiruvchisining ham chegaraviy nuqtasi ekani kelib chiqadi. Shunday ekan, agar E to'plam ochiq bo'lsa, uning barcha chegaraviy nuqtalari E dan tashqarida yotadi, ya'ni CE ga tegishli bo'ladi va demak. CE yopiq to'plam bo'ladi. Xuddi shu singari, agar E yopiq bo'lsa, u o'zining barcha chegaraviy nuqtalarini o'z ichiga oladi, ya'ni birorta ham chegaraviy nuqta CE ga tegishli bo'lmaydi, bu esa, o'z navbatida, CE ning ochiq ekanini anglatadi.

Shunday qilib, agar to'plamning to'ldiruvchisi yopiq bo'lsa, to'plamning o'zi ochiq bo'ladi va, aksincha, to'ldiruvchisi ochiq bo'lsa, to'plam yopiq bo'ladi.

Ochiq to'plamga, avvalgisiga teng kuchli ravishda, quyidagicha ham ta'rif berish mumkin: agar to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa, bunday to'plamga ochiq to'plam deyiladi. Yopiq to'plamni esa, ochiq to'plamning to'ldiruvchisi sifatida aniqlashimiz mumkin.

E to'plamni o'z ichiga oluvchi eng kichik yopiq to'plamga E to'plamning *yopilmasi* deyiladi. Yopilma. odatda, $\bar{E}$ simvol orqali belgilanadi. Aynan shu sababli biz ochiq va yopiq sharlar uchun yuqoridagi belgilashlarni kiritgan edik.

To'plam yopilmasini *limit nuqta* tushunchasi yordamida konstruktiv ravishda tavsiflash mumkin.

Ta'rif. Faraz qilaylik, $a \in \mathbb{R}^n$ nuqta va $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar shunday $x_k \in E$ elementlar ketma-ketligi topilsaki, barcha k larda $x_k \neq a$ bo'lib, $x_k \rightarrow a$ bo'lsa, u holda a nuqta E to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

To'plam faqat va faqat barcha limit nuqtalarini o'z ichiga olganda yopiq bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Agar E to'plamning barcha limit nuqtalari to'plamini E' bilan belgilasak, u holda E

to'plamning yopiqqligi quyidagi

$$E' \subset E$$

munosabat bajarilishini anglatadi.

Har qanday $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam yopilmasini olish uchun unga limit nuqtalarini kiritish kifoya, ya'ni

$$\overline{E} = E \cup E'.$$

Yuqorida biz $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning ε -atrofi tushunchasini kiritgan edik. Ko'pincha nuqta atrofning markazi shu nuqtada bo'lgan shar ko'rinishida bo'lishi ahamiyatga ega emas. Shuning uchun, odatda, navbatdagi ta'rifdan foydalaniladi:

Ta'rif. Berilgan $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning *atrofi* deb shu nuqtani o'z ichiga oluvchi istalgan ochiq to'plamga aytiladi.

Berilgan a nuqtaning bunday atrofiga misol sifatida, har bir qirrasining uzunligi 2δ ga teng,

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j - \delta < x_j < a_j + \delta, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

ochiq kubni, yoki istalgan musbat β_j va γ_j haqiqiy sonlar uchun

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j - \beta_j < x_j < a_j + \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

ko'rinishdagi ochiq parallelepipedni olishimiz mumkin.

4. Bog'langan to'plamlar. $\mathbb{R}^n$ fazosida uzluksiz egri chiziq tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. $\mathbb{R}^n$ fazosida *uzluksiz egri chiziq* deb, barcha komponentlari sonlar o'qining biror $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ kesmasida bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyadan iborat bo'lgan, $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirishning qiymatlari to'plamiga aytamiz.

Boshqacha aytganda, $L \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning uzluksiz egri chiziq bo'lishi uchun shunday $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ kesma va $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirish topilishi kerak ekanki, bunda quyidagi 3 ta shart bajarilsin:

(i) $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ bo'lib, $\varphi_j(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsin;

(ii) istalgan $t \in [\alpha, \beta]$ uchun $\Phi(t)$ nuqta L to'plamga tegishli bo'lsin;

(iii) istalgan $\mathbf{x} \in L$ nuqta uchun shunday $t \in [\alpha, \beta]$ topilsinki, $\Phi(t) = \mathbf{x}$ tenglik bajarilsin.

Misol uchun,

$$\Phi(t) = (t, t^2, \dots, t^n), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

akslantirish $\mathbb{R}^n$ da uzluksiz egri chiziqni aniqlaydi.

Ta'rif. Faraz qilaylik, $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirish hamda $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Agar

$$\Phi(\alpha) = \mathbf{a}, \quad \Phi(\beta) = \mathbf{b}$$

tengliklar bajarilsa, Φ akslantirish bilan aniqlangan uzluksiz egri chiziq $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalarni tutashtiradi deyimiz.

Ravshanki, yuqoridagi misolda keltirilgan uzluksiz egri chiziq $(0, 0, \dots, 0)$ va $(1, 1, \dots, 1)$ nuqtalarni tutashtiradi.

11.1.1 - misol. Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ dan olingan biror $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalar berilgan bo'lsin. U holda

$$\Phi(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

akslantirish $\mathbb{R}^n$ da kesma deb ataluvchi va $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ simvol bilan belgilanuvchi uzluksiz egri chiziqni aniqlaydi.

Ta'rif. Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning istalgan ikki nuqtasini barcha nuqtalari shu to'plamda yotuvchi kesma bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda E qavariq to'plam deyiladi.

Qavariq to'plamga eng sodda misol sifatida istalgan sharni olishimiz mumkin. Haqiqatan, masalan markazi koordinatalar boshida

va radiusi r ga teng bo'lgan $B(\mathbf{0}, r)$ sharni olaylik. Agar $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ bu sharning ixtiyoriy ikki nuqtasi bo'lsa,

$$|\mathbf{a}| < r, \quad |\mathbf{b}| < r$$

bo'ladi. Bundan chiqdi, $0 \leq t \leq 1$ kesmadan olingan istalgan t uchun

$$|(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}| \leq (1-t)|\mathbf{a}| + t|\mathbf{b}| < (1-t)r + tr = r$$

tengsizlik o'rinli. Demak, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ kesmaning barcha nuqtalari $B(\mathbf{0}, r)$ sharda yotadi.

Ta'rif. Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning istalgan ikki nuqtasini barcha nuqtalari shu to'plamda yotuvchi uzluksiz egri chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda E bog'langan (*bog'lamli*) to'plam deyiladi.

Ravshanki, har qanday qavariq to'plam bog'langan bo'ladi. Xususan, har qanday shar bog'langan to'plamdir.

11.1.2 - misol. Agar $\mathbf{a} = (r, 0, 0, \dots, 0)$ desak, ikki o'zaro kesishmaydigan sharlardan tashkil topgan

$$E = B(-\mathbf{a}, r) \cup B(\mathbf{a}, r)$$

to'plam bog'langan emas.

Haqiqatan, ixtiyoriy $\mathbf{x} \in B(-\mathbf{a}, r)$ nuqtaning birinchi koordinatasi manfiy, ya'ni $x_1 < 0$; ixtiyoriy $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r)$ nuqtaning esa birinchi koordinatasi musbat, ya'ni $y_1 > 0$. Endi faraz qilaylik, L bunday ikki nuqtani tutashtiruvchi ixtiyoriy uzluksiz egri chiziq bo'lsin. U holda bu egri chiziq, barcha $\varphi_j(t)$ komponentalari $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lgan biror $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ akslantirish bilan aniqlanib, bunda

$$\varphi_1(\alpha) = x_1 < 0, \quad \varphi_1(\beta) = y_1 > 0$$

munosabatlar bajariladi.

Bundan chiqdi, φ_1 funksiyaning uzluksizligiga ko'ra, shunday ξ , $\alpha < \xi < \beta$, nuqta topiladiki, bu nuqtada $\varphi_1(\xi) = 0$ bo'ladi. Shunday ekan, E to'plam barcha elementlarining birinchi koordinatalari noldan farqli bo'lgani sababli, $\Phi(\xi)$ nuqta E to'plamiga tegishli emas. Bu degan so'z, L egri chiziq barcha nuqtalari bilan E to'plamda yotmaydi. Demak, E bog'langan to'plam emas.

Ta'rif. *Ochiq bog'langan to'plam soha deyiladi.*

Masalan, har qanday ochiq shar soha bo'ladi. Yana boshqa misol sifatida, barcha komponentalari $a_j < b_j$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan ikki $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ nuqtalar bilan aniqlangan,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

ochiq parallelepipedni olishimiz mumkin.

Shuni aytish kerakki, soha uchun bog'langanlik ta'rifini biroz soddalashtirish mumkin. Chunonchi, har qanday ikki nuqtani uzluksiz egri chiziq bilan emas, balki kesmalardan iborat maxsus egri chiziq bilan tutashtirish mumkinligini talab qilish yetarli. Bu tasdiqning isboti kompakt to'plamlar xossalariiga asoslangan bo'lib, biz uni 6* bandda keltiramiz.

Ta'rif. *Agar $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirish bilan aniqlangan uzluksiz egri chiziq uchun shunday*

$$P := \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta\} \quad (11.1.20)$$

*bo'linish topilsaki, bunda har bir qismaniy $[t_{k-1}, t_k]$ kesmada $\Phi(t)$ akslantirishning har bir komponentasi chiziqli funksiya bo'lsa, u holda bunday egri chiziq **siniq chiziq** deyiladi.*

Albatta, har qanday kesma siniq chiziqdir va har qanday siniq chiziq chekli sondagi kesmalarning birlashmasidir. Siniq chiziqni aniqlovchi akslantirish uzluksiz bo'lakli-chiziqli akslantirish deb ataladi.

Har qanday uzluksiz egri chiziqni siniq chiziqlar bilan yaqinlashtirish mumkin. Bu tasdiqni isbotlashda biz navbatdagi sodda lemma-dan foydalanamiz. Bu lemma har qanday chegaralangan funksiyani,

shu funksiya bilan kesmaning chekkalarida ustma-ust tushuvchi chiziqli funksiya bilan yaqinlashtirish usulini beradi.

Berilgan f funksiyaning $\Delta = [a, b]$ kesmadagi tebranishi

$$\omega(f, \Delta) = \sup_{a \leq t < s \leq b} |f(t) - f(s)| \quad (11.1.21)$$

kattalik bilan aniqlanganini eslatib o'tamiz.

11.1.1 - lemma. Berilgan f funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralangan bo'lsin. Agar

$$g(t) = \frac{b-t}{b-a} f(a) + \frac{t-a}{b-a} f(b) \quad (11.1.22)$$

deb belgilasak,

$$|f(t) - g(t)| \leq \omega(f, \Delta) \quad (11.1.23)$$

baho bajariladi.

Isbot. Talab qilingan baho

$$f(t) - g(t) = \frac{b-t}{b-a} [f(t) - f(a)] + \frac{t-a}{b-a} [f(t) - f(b)]$$

ayniyat va (11.1.21) ta'rifdan bevosita kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leq \frac{b-t}{b-a} |f(t) - f(a)| + \frac{t-a}{b-a} |f(t) - f(b)| \leq \\ &\leq \frac{b-t}{b-a} \omega(f, \Delta) + \frac{t-a}{b-a} \omega(f, \Delta) = \omega(f, \Delta). \end{aligned}$$

■

11.1.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, L uzluksiz egri chiziq $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirish bilan berilgan bo'lsin. U holda, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday K siniq chiziq topiladiki, bunda K ni aniqlovchi uzluksiz bo'lakli-chiziqli $\Psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirish

$$\Phi(\alpha) = \Psi(\alpha), \quad \Phi(\beta) = \Psi(\beta)$$

tengliklarni va

$$|\Phi(t) - \Psi(t)| < \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. Berilgan $[\alpha, \beta]$ kesmani m ta teng bo'lakka bo'lamiz va bunda hosil bo'lgan bo'linishni

$$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta\}$$

orqali belgilaymiz. K siniq chiziqni aniqlovchi Ψ akslantirish sifatida har bir $[t_{k-1}, t_k]$ kesmada chiziqli bo'lib, bo'linish nuqtalarida berilgan Φ akslantirish bilan ustma-ust tushuvchi, ya'ni

$$\Psi(t_k) = \Phi(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi uzluksiz akslantirishni olamiz.

Tekis uzluksizlik haqidagi teorema ko'ra, m nomerni shunday katta qilib olish mumkinki, bunda Φ akslantirishni har bir $\varphi_j(t)$ komponentasining $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ qisman kesmadagi tebranishi $\varepsilon/\sqrt{n}$ dan kichik bo'ladi. Shunday ekan, 11.1.1 - lemmaga asosan, Ψ akslantirishning $\psi_j(t)$ komponentalari uchun har bir Δ_k qisman kesmada

$$|\psi_i(t) - \varphi_j(t)| \leq \omega(\varphi_j, \Delta_k) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

baho bajariladi.

Demak,

$$|\Psi(t) - \Phi(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\psi_j(t) - \varphi_j(t)|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

■

Eslatma. $\mathbb{R}^n$ fazosida ikki nuqta va ularni tutashtiruvchi uzluksiz egri chiziq berilgan bo'lsin. Isbotlangan tasdiqqa ko'ra, berilgan chiziqni o'z ichiga oluvchi yo'lakchani qanchalik tor olmaylik, bu yo'lakchaga berilgan ikki nuqtani tutashtiruvchi siniq chiziqni joylash-tirish mumkin.

5. Kompakt to'plamlar. Zamonaviy matematik tahlilda muhim ahamiyatga ega bo'lgan yana bir tushunchani kiritamiz.

Ta'rif. Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamga tegishli har qanday $\mathbf{x}_k \in E$ nuqtalar ketma-ketligidan E ga tegishli nuqtaga yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, bu to'plam **kompakt** to'plam deyiladi.

Navbatdagi tasdiqlar $\mathbb{R}^n$ dagi kompakt qisman to'plamlarning to'la tavsifini beradi.

Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam berilgan bo'lib, shunday $M > 0$ son topilsaki, barcha $\mathbf{x} \in E$ elementlar uchun

$$|\mathbf{x}| \leq M, \quad \mathbf{x} \in E, \quad (11.1.24)$$

tengsizlik bajarilsa, E to'plam *chegaralangan* deyiladi.

11.1.3 - jumla. $\mathbb{R}^n$ ning har bir kompakt qisman to'plami yopiq va chegaralangan.

Isbot. Faraz qilaylik, E to'plam kompakt bo'lsin. Biz uni yopiq va chegaralangan ekanini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $\mathbf{a}$ nuqta E to'plamning ixtiyoriy chegaraviy nuqtasi bo'lsin. Chegaraviy nuqta ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\mathbf{x} \in E$ nuqta topiladiki, u uchun

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad (11.1.25)$$

bo'ladi.

Biz ε ga ketma-ket $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots$ qiymatlarni beramiz. Har bir $\varepsilon = \frac{1}{k}$ uchun shunday $\mathbf{x}_k \in E$ nuqta topiladiki, u (11.1.25) tengsizlikka ko'ra,

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \frac{1}{k}$$

shartni qanoatlantiradi.

Ravshanki, $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$ va E ning kompaktligi tufayli $\mathbf{a} \in E$, ya'ni E to'plam o'zining barcha chegaraviy nuqtalarini o'z ichiga olar ekan. Bundan chiqdi, E - yopiq to'plam.

Endi, agar E chegaralanmagan deb faraz qilsak, yuqoridagi chegaralangan to'plam ta'rifiga ko'ra, shunday $\mathbf{x}_k \in E$ nuqtalar ketma-ketligi topiladiki, u uchun $|\mathbf{x}_k| > k$ bo'ladi. Albatta, bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi. Bu esa E to'plamning kompaktligiga ziddir. Demak, E - chegaralangan to'plam.



11.1.4 - jumla. $\mathbb{R}^n$ fazosining har bir yopiq chegaralangan qismaniy to'plami kompaktdir.

Isbot. E to'plamni yopiq va chegaralangan deb faraz qilib, uni kompakt ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun ixtiyoriy $\mathbf{x}_k \in E$ nuqtalar ketma-ketligini olamiz. Tasdiq shartiga ko'ra, bu ketma-ketlik chegaralangan. Demak, Bolzano-Veyershtass teoremasiga (11.1.3 - teorema) asosan, bu ketma-ketlikdan biror $\mathbf{a}$ elementga yaqinlashuvchi qismaniy ketma-ketlik ajratish mumkin. Endi $\mathbf{a} \in E$ ekanini ko'rsatish yetarli.

Faraz qilaylik, $\mathbf{a}$ nuqta E to'plamga tegishli bo'lmasin. U holda istalgan $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ sharda E to'plamga tegishli bo'lgan (masalan, $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlikning yetarlicha katta k nomerli elementlari) va tegishli bo'lmagan (masalan, $\mathbf{a}$ nuqtaning o'zi) nuqtalar topiladi. Bundan chiqdi, $\mathbf{a}$ yopiq E to'plamining chegaraviy nuqtasi ekan. Demak, $\mathbf{a} \in E$. Hosil bo'lgan qaraina-qarshilik tasdig'imizning to'g'ri ekanini ko'rsatadi.



Bevosita 11.1.3 - va 11.1.4 - tasdiqlardan ushbu bandning quyidagi asosiy natijasi kelib chiqadi.

11.1.4 - teorema. $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning kompakt bo'lishi uchun uning yopiq va chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

$\mathbb{R}^n$ dagi kompakt to'plamlarga quyidagi misollarni keltirish mumkin:

- 1) chekli sondagi nuqtalar to'plami - bu to'plam chegaralangan va yopiq, chunki u o'zining barcha chegaraviy nuqtalaridan iborat;
- 2) $\overline{B(a, r)}$ yopiq shar;
- 3) $\mathbb{R}^n$ fazosining, koordinatalari

$$a_j \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

shartlarni qanoatlantiruvchi, istalgan $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ elementlari yordamida aniqlangan

$$P[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

yopiq parallelepiped.

Yuqoridagidek tanlangan $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ lar orqali aniqlanuvchi

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

ochiq parallelepiped kompakt emas, chunki u chegaralangan bo'lsa-da, yopiq emas.

$\mathbb{R}^n$ fazosining oxirgi koordinatalari manfiy bo'lmagan nuqtalaridan tashkil topgan

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

yarim fazo kompakt emas, chunki u yopiq bo'lsada, chegaralangan emas.

Kompakt to'plamlar *kompaktlar* deb ham ataladi.

6*. To'plamlar orasidagi masofa. Ikki $E \subset \mathbb{R}^n$ va $F \subset \mathbb{R}^n$ to'plam orasidagi masofa deb manfiy bo'lmagan

$$\text{dis}\{E, F\} = \inf_{\mathbf{x} \in E} \inf_{\mathbf{y} \in F} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

songa aytamiz.

Albatta, agar F va E to'plamlar aqalli bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda ular orasidagi masofa nolga teng. Yana ravshan-ki, har qanday to'plam va uning to'ldiruvchisi orasidagi masofa ham nolga teng, ya'ni o'zaro kesishmaydigan to'plamlar orasidagi masofa ham nol bo'lishi mumkin. Ammo, agar ikki o'zaro kesishmaydigan to'plamlardan biri yopiq va ikkinchisi kompakt bo'lsa, u holda bu ikki to'plam orasidagi masofa musbat ekanini, ya'ni noldan qat'iy katta ekanini ko'rsatish qiyin emas.

Ikki to'plam orasidagi masofaning navbatdagi xossasidan zamona-viy matematik tahlilda ko'p foydalaniladi.

11.1.2 - tasdiq. Agar K istalgan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohasining kompakt qismaniy to'plami bo'lsa, u holda $\text{dis}\{K, \partial\Omega\} > 0$ bo'ladi.

Isbot. Sohaning ta'rifiga ko'ra, Ω ochiq to'plam. Demak, u $\partial\Omega$ chegaraning birorta ham nuqtasini o'z ichiga olmaydi. Bundan chiqdi, $K \subset \Omega$ shartdan $K \cap \partial\Omega = \emptyset$ kelib chiqadi.

Endi, faraz qilaylik, $\text{dis}\{K, \partial\Omega\} = 0$ bo'lsin. U holda shunday $x_k \in K$ va $y_k \in \partial\Omega$ ketma-ketliklar topiladiki, ular uchun

$$|x_k - y_k| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

munosabat o'rinni bo'ladi.

K kompakt to'plam bo'lgani sababli, zarur bo'lsa qismaniy ketma-ketlik olib va uni qayta nomerlab, x_k ketma-ketlikni biror $a \in K$ ga yaqinlashadi deyishimiz mumkin. U holda, ravshan-ki, $y_k \rightarrow a$ va $\partial\Omega$ chegara yopiq bo'lgani uchun $a \in \partial\Omega$. Bundan chiqdi, a nuqta K kompakt va $\partial\Omega$ chegara uchun umumiy nuqta ekan. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik tasdiqning to'g'ri ekanini ko'rsatadi.

Isbotlangan tasdiq yordamida soha uchun bog'langanlik ta'rifini biroz soddalashtirish mumkin.

11.1.3 - tasdiq. Sohaning har qanday ikki nuqtasini shu sohada yotuvchi sinq chiziqli orqali tutashtirish mumkin.

INV. N 1470/2



Isbot. Aytaylik, Ω sohaning istalgan ikki $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, Ω soha bog'langan. Demak, bu ikki nuqtani tutashtiruvchi L uzluksiz egri chiziq mavjud. Uni aniqlovchi akslantirish $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bo'lsin, ya'ni $\Phi([0, 1]) = L$ bo'lsin. Ravshanki, L yopiq va chegaralangan to'plam, ya'ni kompakt. Demak, 11.1.2 - tasdiqqa asosan,

$$\text{dis}\{L, \partial\Omega\} > 0.$$

11.1.1 - tasdiqqa ko'ra esa, $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalarni tutashtiruvchi shunday K siniq chiziq topiladiki, uni aniqlovchi $\Psi : [0, 1] \rightarrow K$ akslantirish

$$|\Psi(t) - \Phi(t)| < \text{dis}\{L, \partial\Omega\}$$

bahoni qanoatlantiradi. Bu tengsizlikdan, shubhasiz, $K \subset \Omega$ kelib chiqadi.

■

Shunday qilib, har qanday ikki nuqtasini siniq chiziq bilan tutash-tirish mumkin bo'lgan ixtiyoriy ochiq to'plamni soha deb atash mumkin ekan.

11.2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

1. Ushbu paragrafda biz $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi funksiyalarni o'rganamiz. Ya'ni, o'rganiladigan f funksiyalar biror $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning har bir $\mathbf{x}$ elementiga $f(\mathbf{x})$ haqiqiy sonni mos qo'yadi. Bunda E to'plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deb ataladi va ba'zan $D(f)$ simvol orqali belgilanadi. Bunday funksiyalar-ni biz $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ko'rinishda ham belgilaymiz.

Ba'zan, f funksiyaning n ta o'zgaruvchiga bog'liq ekanini ko'rsatish maqsadida, funksiya qiymatini

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ko'inishda ham yozamiz.

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek, bir xil aniqlanish sohasiga ega bo'lgan har qanday ikki f va g funksiyaning $f + g$ yig'indisi, $f - g$ ayirmasi, $f \cdot g$ ko'paytmasi va $\frac{f}{g}$ nisbati tabiiy ravishda quyidagicha kiritiladi:

$$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}). \quad (f - g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}),$$

$$(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}), \quad \frac{f}{g}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \text{ (agar } g(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ bo'lsa),}$$

bunda nisbat faqat maxraj noldan farqli bo'lgan nuqtalarda aniqlangan deb hisoblanadi.

Ikki f va g funksiya ustidagi arifmetik amallarni bu funksiyalar turli aniqlanish sohasiga ega bo'lganda ham, ya'ni $D(f) \neq D(g)$ bo'lganda ham aniqlash mumkin. Odatda, bu holda arifmetik amallar ikki funksiyaning aniqlanish sohalari kesishmasida, ya'ni $D(f) \cap D(g)$ da aniqlangan deb hisoblanadi.

2. Bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishda ham ularning grafiklari muhim rol o'ynaydi.

Eslatib o'tamiz, bir o'zgaruvchili f funksiya grafigi deb, koordinatalari $x_2 = f(x_1)$ ko'inishda bog'langan, tartiblangan (x_1, x_2) juftliklar to'plamiga aytgan edik.

Bundan chiqdi, n o'zgaruvchili funksiya grafigini aniqlash uchun $n + 1$ - o'lchovli $\mathbb{R}^{n+1}$ fazoni qarashimiz kerak. Bu fazoning $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ nuqtalarini biz $(\mathbf{x}, x_{n+1})$ ko'inishda ham belgilaymiz. bunda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya *grafigi* deb

$$\Gamma(f) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{x} \in E\}$$

ko'inishda aniqlangan $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to'plamga aytiladi.

Boshqacha aytganda, f funktsiya grafigi - bu koordinatalari $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ munosabat bilan bog'langan barcha $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nuqtalar to'plamidir.

Ayniqsa ikki $(x_1, x_2) \in E \subset \mathbb{R}^2$ o'zgaruvchili funktsiya grafigini ko'z oldimizga yaqqol keltirishimiz mumkin. Bunda grafik funktsiyaning E aniqlanish sohasi ustida joylashgan Γ sirtidan iborat bo'lib, $\mathbb{R}^2$ ga perpendikulyar istalgan to'g'ri chiziq bu sirtning ko'pi bilan bir nuqtada kesishi mumkin.

3. Xuddi bir o'zgaruvchili funktsiyalar holidagidek, ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar uchun limit qiymat va uzluksizlik tushunchalari kiritiladi.

Bu tushunchalarni kiritishdan avval, berilgan $a \in \mathbb{R}^n$ nuqta $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam limit nuqtasi bo'lishining ta'rifini eslataylik: agar E to'plamning a ga yaqinlashuvchi va shu bilan birga, a dan farqli x_k elementlari mavjud bo'lsa, a nuqta E to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Ta'rif (H.E.Heine). $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan f funktsiya va bu to'plamning biror a limit nuqtasi berilgan bo'lsin. Agar argumentning a ga yaqinlashuvchi va $x_k \neq a$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_k \in E$ ketma-ketligi uchun $f(x_k)$ qiymatlar ketma-ketligi biror c soniga yaqinlashsa, bu son f funktsiyaning a nuqtadagi limit qiymati deyiladi.

Agar c soni f funktsiyaning a nuqtadagi limit qiymati bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

deb yoziladi.

Ta'rifdagi $x_k \neq a$ shartning mohiyati shundan iboratki, unga ko'ra funktsiya, umuman aytganda, a nuqtada aniqlanmagan bo'lishi mumkin. Bordiyu f funktsiya a nuqtada aniqlangan bo'lsa, bu shartga asosan, f funktsiyaning a nuqtadagi limit qiymati $f(a)$ bilan ustma-ust tushishi shart emas.

Funktsiyaning a nuqtadagi limit qiymati funktsiyaning a nuqtadagi *limiti* deb ham ataladi.

Navbatdagi tasdiq xuddi bir o'zgaruvchili funksiya holidagidek isbotlanadi.

11.2.1 - teorema. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \quad (11.2.1)$$

bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = b+c, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x) = b-c, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = b \cdot c \quad (11.2.2)$$

tengliklar bajariladi va $c \neq 0$ bo'lganda

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{b}{c} \quad (11.2.3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bir o'zgaruvchili funksiyaning limit qiymatiga biz boshqacha ham ta'rif bergan edik. Chunonchi, agar a nuqtaning yetarlicha kichik atrofida f funksiya qiymatlari b dan juda kam farq qilsa, biz b soniga f funksiyaning a nuqtadagi Koshi ma'nosidagi limit qiymati degan edik. Boshqacha aytganda, agar x nuqta a nuqtaning δ -atrofida bo'lib, $\delta > 0$ yetarlicha kichik bo'lsa, $f(x)$ qiymatlar b sonidan ε dan kichik songa farq qilishi kerak, ya'ni b nuqtaning ε -atrofida yotishi kerak. Ravshanki, bu ta'rifni ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham keltirish mumkin.

Ta'rif (A.L.Cauchy). Berilgan f funksiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta E to'plamning biror limit nuqtasi bo'lsin. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki,

$$0 < |x - a| < \delta, \quad x \in E, \quad (11.2.4)$$

shartni bajaruvchi barcha $x \in E$ lar uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (11.2.5)$$

tengsizlik bajarilsa, b soniga f funksiyaning a nuqtadagi limit qiymati deyiladi.

(11.2.4) tengsizlikning chap tomoni $x \neq a$ ekanini, ya'ni a nuqtaning δ -atrofida yotuvchi va a nuqtaning o'zidan farqli barcha $x \in E$ nuqtalar uchun (11.2.5) tengsizlik bajarilishini anglatadi. Bundan chiqdi, xuddi Heine ta'rifidagidek, limit qiymatni a nuqtada aniqlanmagan funktsiyalar uchun ham aniqlash mumkin, bordiyu funktsiya bu nuqtada aniqlangan bo'lsa, f funktsiyaning a nuqtadagi limit qiymati $f(a)$ bilan ustma-ust tushishi ham, tushmasligi ham mumkin.

Xuddi bir o'zgaruvchili funktsiyalar holidagidek, limit qiymatining yuqorida keltirilgan Koshi va Heine ta'riflari o'zaro teng kuchli, ya'ni navbatdagi teorema o'rinli.

11.2.2 - teorema. *Berilgan f funktsiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta shu to'plam limit nuqtasi bo'lsin. U holda, b son f funktsiyaning a nuqtadagi Koshi ma'nosida limit qiymati bo'lishi uchun bu son f funktsiyaning a nuqtadagi Heine ma'nosida limit qiymati bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot xuddi 3.1.2 - teorema isboti singari olib boriladi.

3. Ko'p o'zgaruvchili funktsiya uzluksizligi ham, funktsiya limit qiymati tushunchasiga suyangan ravishda, bir o'zgaruvchili funktsiya uzluksizligi kabi ta'riflanadi.

Ta'rif. *Berilgan f funktsiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $a \in E$ nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar f funktsiyaning a nuqtadagi limit qiymati mavjud bo'lib, u $f(a)$ ga teng bo'lsa, ya'ni*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (11.2.6)$$

bo'lsa, f funktsiya $a \in E$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Limit qiymatining Heine va Koshi ta'riflarini esga olsak, biz funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligiga ikki o'zaro teng kuchli ta'rif berishimiz mumkin.

Uzluksizlikning Heine bo'yicha ta'rif quyidagi ko'rinishga ega:

Ta'rif (H.E.Heine). *Berilgan f funktsiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $a \in E$ nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.*

Agar argumentning $\mathbf{a}$ ga yaqinlashuvchi istalgan $\mathbf{x}_k \in E$ ketma-ketligi uchun unga mos $f(\mathbf{x}_k)$ funksiya qiymatlari ketma-ketligi $f(\mathbf{a})$ ga yaqinlashsa, f funksiya $\mathbf{a} \in E$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksizlikning Koshi bo'yicha ta'rif esa quyidagi ko'rinishga ega:

Ta'rif (A.L.Cauchy). Berilgan f funksiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $\mathbf{a} \in E$ nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \quad \mathbf{x} \in E,$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $\mathbf{x}$ lar uchun

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, f funksiya $\mathbf{a} \in E$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Bundan buyon biror funksiyaning E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz deyish o'rniga, biz, qisqaroq qilib, o'sha funksiyaning E to'plam-da uzluksiz deyimiz.

Berilgan $f(\mathbf{x})$ funksiyaning $n - 1$ ta argumentini tayinlab, faqat bitta, masalan j - argumentini o'zgaruvchi deb qarasa, biz bir o'zgaruvchili

$$\varphi(x_j) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

funksiyani hosil qilamiz. Agar bu $\varphi(x_j)$ funksiya a_j nuqtada uzluksiz bo'lsa, $f(\mathbf{x})$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtada x_j o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz deyimiz. Masalan,

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \cdot \text{sign } x_2$$

funksiya x_1 o'zgaruvchi bo'yicha har bir $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ nuqtada uzluksiz bo'lib, x_2 o'zgaruvchi bo'yicha esa, absissalar o'qining musbat va manfiy nurlaridan tashqari, barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Uzluksiz funksiyalar quyidagi xossaga ega:

agar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya $\mathbf{a}$ nuqtada har bir x_j bo'yicha uzluksiz bo'ladi.

Masalan, ikki o'zgaruvchili $f = f(x_1, x_2)$ uzluksiz funksiyaning qaraydigan bo'lsak, bu xossa bir o'zgaruvchili $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2)$ funksiyaning $x_1 = a_1$ nuqtada va bir o'zgaruvchili $\psi(x_2) = f(a_1, x_2)$ funksiyaning $x_2 = a_2$ nuqtada uzluksizligini anglatadi.

Yuqoridagi xossaning teskarisi o'rinli emasligini ko'rish oson. Haqiqatan, quyidagi

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{agar } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (11.2.7)$$

ikki o'zgaruvchili funksiyaning qaraylik.

Ravshanki, har qanday tayinlangan $a_1 \in \mathbb{R}$ uchun $f(a_1, x_2)$ bir o'zgaruvchili funksiya sonlar o'qida, ya'ni $-\infty < x_2 < +\infty$ da uzluksiz va har qanday tayinlangan $a_2 \in \mathbb{R}$ uchun $f(x_1, a_2)$ bir o'zgaruvchili funksiya sonlar o'qida, ya'ni $-\infty < x_1 < +\infty$ da uzluksiz. Ammo o'rganilayotgan (11.2.7) ikki o'zgaruvchili funksiya $a = (0, 0)$ nuqtada uzluksiz emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \quad (11.2.8)$$

ketma-ketlikni qaraylik.

Albatta, $\mathbf{x}_k \rightarrow 0$ va shuning uchun $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f(0) = 0$ tenglik bajarilishi kerak edi, ammo

$$f(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2}$$

va, bundan chiqdi, (11.2.6) munosabat bajarilmaydi, ya'ni (11.2.7) funksiya nol nuqtada uzluksiz emas.

Shunday qilib, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning har bir argumenti bo'yicha uzluksizligidan uning ko'p o'zgaruvchili funksiya sifatida uzluksizligi kelib chiqmas ekan.

Agar biz

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^4 + x_2^4}, & \text{agar } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (11.2.9)$$

ko'rinishdagi funksiyani qaraydigan bo'lsak, tasdiqimiz yanada kuchayishi mumkin.

Ravshanki, $f(x_1, 0) = 0$ va noldan farqli har qanday $a_2 \in \mathbb{R}$ uchun

$$f(x_1, a_2) = \frac{x_1 \cdot a_2}{x_1^4 + a_2^4},$$

tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, (11.2.9) funksiya ikkinchi argument tayinlanganda, birinchi argument bo'yicha uzluksiz ekan. (11.2.9) funksiya simmetrik bo'lganligi uchun, u birinchi argument tayinlanganda, ikkinchisi bo'yicha ham uzluksizdir. Ammo bu funksiya nol nuqtada ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida na faqat uzluksiz emas, balki chegaralangan ham emasdir. Haqiqatan, yana nolga intiluvchi (11.2.8) ketma-ketlikni qarasak,

$$f(x_k) = \frac{k^2}{2}$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni (11.2.9) funksiya koordinatalar boshining istalgan atrofida chegaralanmagan ekan.

4. Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ham xuddi bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar kabi xossalarga ega. Bunda xossalar isboti xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek bo'lgani sababli, biz navbatdagi teoremlardan ba'zilarini to'la isbotlamasdan, isbotning asosiy qadamlarinigina keltiramiz.

11.2.1 - tasdiq (uzluksiz funksiya ishorasi saqlanishi haqida). Berilgan $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan f funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar $f(a) > 0$ bo'lsa, shunday $B(a, R)$ shar topiladiki, unda

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(a), \quad |x - a| < R,$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot bir o'zgaruvchili holga to'la o'xshash bo'lib, bevosita uzluksizlik ta'rifidan kelib chiqadi.

11.2.3 - teorema. *Biror $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtada uzluksiz bo'lgan ikki uzluksiz funktsiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati (maxraj noldan farqli bo'lganda) shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Isbot bevosita uzluksizlik ta'rifi va 11.2.1 - teoremadan kelib chiqadi.

Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar uchun superpozitsiya tushunchasini, ya'ni murakkab funktsiya tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funktsiya va $V \subset \mathbb{R}^m$ to'plamda aniqlangan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ funktsiya berilgan bo'lsin. Bunda φ vektor-funktsiya bo'lib, agar $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ desak, u

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t \in V,$$

ko'rinishga ega (vektor-funktsiyalar keyingi paragrafda batafsil o'rganiladi).

Biz φ akslantirish qiymatlari to'plami E da yotsin deb faraz qilamiz, ya'ni istalgan $t \in V$ uchun $\varphi(t) \in E$ bo'lsin deymiz. Boshqacha aytganda,

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

$$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

$$\dots$$

$$x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

koordinatalarga ega bo'lgan $x \in \mathbb{R}^n$ nuqta E to'plamga tegishli bo'lsin.

U holda

$$F(t) = f[\varphi(t)], \quad t \in V,$$

ko'rinishda ta'sir qiluvchi $F = f[\varphi] : V \rightarrow \mathbb{R}$ murakkab funktsiyani aniqlash mumkin.

F funksiya f va φ akslantirishlar superpozitsiyasi deb ham ataladi va

$$F = f \circ \varphi$$

ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib,

$$(f \circ \varphi)(t) = f[\varphi(t)].$$

Navbatdagi teorema uzluksiz akslantirishlar superpozitsiyasi uzluksiz ekanini ta'kidlaydi.

11.2.4 - teorema. Faraz qilaylik, $V \subset \mathbb{R}^m$ to'plamda aniqlangan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektor-funksiya qiymatlari $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda yotsin va E to'plamda aniqlangan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin.

Agar $\varphi(\mathbf{t})$ vektor-funksiya biror $\mathbf{a} \in V$ nuqtada va $f(\mathbf{x})$ funksiya esa, $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f[\varphi(\mathbf{t})]$ murakkab funksiya $\mathbf{t} = \mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot bevosita uzluksizlik va limit qiymatning Heine bo'yicha ta'riflaridan kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $\mathbf{t}_k \rightarrow \mathbf{a}$ bo'lsa, $\mathbf{x}_k = \varphi(\mathbf{t}_k) \rightarrow \mathbf{b}$ va demak, $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f(\mathbf{b}) = f[\varphi(\mathbf{a})]$ bo'ladi.

11.2.5 - teorema (har qanday oraliq qiymatni qabul qilish haqida). Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ sohada uzluksiz $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lib,

$$f(\mathbf{a}) = A, \quad f(\mathbf{b}) = B, \quad \mathbf{a} \in E, \quad \mathbf{b} \in E,$$

bo'lsin.

U holda A va B orasidan istalgan C haqiqiy son olganda ham shunday $\mathbf{c} \in E$ nuqta topiladiki, u uchun

$$f(\mathbf{c}) = C$$

bo'ladi.

Isbot. Soha ta'rifiga ko'ra, E to'plam bog'langandir. Shunday ekan, $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalarni butunlay E da yotuvchi biror uzluksiz L egri chiziq bilan tutashtirish mumkin. Faraz qilaylik, mana shu L egri

chiziq $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ akslantirish orqali aniqlangan bo'lib, $\Phi(\alpha) = \mathbf{a}$ va $\Phi(\beta) = \mathbf{b}$ bo'lsin. Quyidagi

$$F(t) = f[\Phi(t)], \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

murakkab funktsiyani qaraymiz.

Bu murakkab funktsiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lib, $F(\alpha) = A$ va $F(\beta) = B$ shartlarni qanoatlantiradi. Demak, 3.5.3 - teorema-ga ko'ra, shunday $\xi \in (\alpha, \beta)$ nuqta topiladiki, u uchun $F(\xi) = C$ bo'ladi. Endi $\mathbf{c} = \Phi(\xi)$ deb olish yetarli.

■

11.2.6 - teorema (Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremlari). *Kompakt to'plamda uzluksiz bo'lgan funktsiya chegaralangan bo'lib, u o'zining maksimal va minimal qiymatlariga erishadi.*

Isbot. Aytaylik, f funktsiya biror $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktda uzluksiz bo'lsin. Quyidagi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \sup_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}) \quad (11.2.10)$$

shartni qanoatlantiruvchi $\mathbf{x}_k \in K$ ketma-ketlikni qaraymiz (bunda biz $\sup f(\mathbf{x}) = +\infty$ holni ham inkor qilayotganimiz yo'q). K kompakt bo'lgani uchun $\mathbf{x}_{k_j} \rightarrow \mathbf{a} \in K$ qisman ketma-ketlik topiladi. Bundan chiqdi, uzluksizlikka ko'ra,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_{k_j}) = f(\mathbf{a}). \quad (11.2.11)$$

Agar (11.2.10) va (11.2.11) tengliklarni taqqoslasak, talab qilingan

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni aniq yuqori chegara chekli bo'lib, unga f funktsiya $\mathbf{a}$ nuqtada erishar ekan.

■

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham $\mathbb{R}^n$ dagi to'plamlarda tekis uzluksizlik tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif. Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $\mathbf{x} \in E$ va $\mathbf{y} \in E$ lar uchun

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, f funksiya E to'plamda tekis uzluksiz deyiladi.

11.2.7 - teorema (kompaktda tekis uzluksizlik haqidagi Kantor teoremasi). $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt to'plamda uzluksiz funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

Isbot xuddi bir o'zgaruvchili funksiya holidagidek, teskarisini faraz qilish usuli bilan olib boriladi. Chunonchi, teorema tasdig'i o'rinli emas deb faraz qilsak, biz shunday $\varepsilon_0 > 0$ son hamda ikki $\mathbf{x}_k \in E$ va $\mathbf{y}_k \in E$ ketma-ketlikka ega bo'lamizki, ular uchun

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| < \frac{1}{k}$$

bo'lsada,

$$|f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k)| \geq \varepsilon_0 \quad (11.2.12)$$

bo'ladi.

K to'plamning kompaktligiga ko'ra, $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlikdan biror $\mathbf{a} \in K$ ga yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Biz bu ketma-ketlikni, belgilashni soddalashtirish maqsadida, yana $\{\mathbf{x}_k\}$ orqali belgilaymiz. Ravshaniki, bunga mos $\{\mathbf{y}_k\}$ ketma-ketlik ham o'sha $\mathbf{a}$ soniga yaqinlashadi. U holda, f funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksizligi sababli, $\{f(\mathbf{x}_n)\}$ va $\{f(\mathbf{y}_n)\}$ sonli ketma-ketliklar $f(\mathbf{a})$ ga teng bo'lgan umumiy limitga ega. Bu esa (11.2.12) tengsizlikka ziddir.

1-eslatma. Agar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soha kompakt bo'lmasa, ya'ni yopiq hamda chegaralangan bo'lmasa, u holda Ω da uzluksiz bo'lib, lekin tekis uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltirish qiyin emas.

2-eslatma. Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek, tekis uzluksizlik haqidagi Kantor teoremasi ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning integrallanuvchi ekanini isbotlashda muhim rol o'ynaydi.

11.3-§. Vektor qiymatli ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

1. O'zaro bir qiymatli akslantirishlar. Ushbu paragrafda ixtiyoriy $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $\mathbb{R}^m$ fazosining biror to'plamiga o'tkazuvchi akslantirishlar o'rganiladi. Har bir shunday $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ akslantirish $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ nuqtani biror $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ nuqtaga o'tkazadi va n o'zgaruvchili m ta sonli funksiya orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Har bir $\mathbf{x} \in E$ uchun f akslantirishning qiymati $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^m$ ko'rinishdagi vektor bo'lgani sababli, f akslantirish *vektor qiymatli* funksiya yoki soddaroq qilib, *vektor-funksiya* deb ataladi.

Agar $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ akslantirish turli nuqtalarni turli nuqtalarga o'tkazsa, ya'ni istalgan $\mathbf{x}' \in E$ va $\mathbf{x}'' \in E$ uchun $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ shartdan $f(\mathbf{x}') \neq f(\mathbf{x}'')$ shart kelib chiqsa, u holda bunday akslantirishni E to'plamda *teskarilananuvchi* deb ataymiz. Har qanday teskarilananuvchi f vektor-funksiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $M = f(E) \subset \mathbb{R}^m$ to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Ravshanki, bunda $f^{-1} : M \rightarrow E$ teskari akslantirish mavjud bo'lib, bu akslantirish qiymatlari $\mathbb{R}^n$ da yotgan vektor-funksiya bo'ladi.

Bundan buyon vektor-funksiyani, faqat vektor qiymat qabul qilishini qayd etish zarur bo'lsagina, qalin f harfi bilan belgilaymiz.

Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ va $M \subset \mathbb{R}^m$ to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ya'ni o'zaro bir qiymatli $f: E \rightarrow M$ akslantirish mavjud bo'lsa, bunday to'plamlarni ekvivalent deb atagan edik. Bunda E va M to'plamlar bir xil quvvatga ega ham deyiladi. Chunonchi, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ kesmaga ekvivalent bo'lgan barcha to'plamlar kontinuum quvvatli to'plamlar deyiladi.

Bu borada shuni qayd etish kerakki, istalgan natural n va m larda $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$ fazolarning bir xil quvvatga ega bo'lishi haqidagi G. Kantor natijasi nihoyatda kutilmagan hol bo'ldi. G. Kantor, xususan, n o'lchovli

$$Q^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n\}$$

birlik kubning $[0, 1]$ kesmaga ekvivalentligini isbotladi.

Masalan, Q^2 kvadratning $Q^1 = [0, 1]$ kesmaga ekvivalentligini quyidagicha ko'rsatish mumkin. Aytaylik, (a, b) – birlik Q^2 kvadratning istalgan nuqtasi bo'lsin. Bu nuqtaning koordinatalarini cheksiz o'nli kasr sifatida yozamiz:

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

Agar bu koordinatalardan birortasi ikki xil o'nli kasr ko'rinishiga ega bo'lsa (ya'ni 0 yoki 9 sonlari davriy qatnashsa), biz 9 soni davriy qatnashgan holni olamiz. Birlik Q^2 kvadratning (a, b) nuqtasiga $Q^1 = [0, 1]$ kesmaning

$$c = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

nuqtasini mos qo'yamiz. Ravshanki, bunday qurilgan $c = f(a, b)$ akslantirish teskarilantiruvchidir, ya'ni u turli nuqtalarga turli nuqtalarni mos qo'yadi. Bundan chiqdi, Q^2 kvadrat $[0, 1]$ kesmaning biror $f(Q^2)$ qismiga ekvivalent ekan. E'tibor bering, bunda $f(Q^2) \neq Q^1$, chunki, masalan

$$c = 0,4590909090\dots$$

nuqta $[0, 1]$ kesmada yotsada, u $f(Q^2)$ to'plamga tegishli emas.

Lekin shunga qaramasdan, Q^2 va Q^1 to'plamlar bir xil quvvatga ega. Chunki, hozir ko'rsatganimizdek, Q^2 kvadrat Q^1 kesmaning biror qismiga ekvivalent, kesma bo'lsa, ravshanki, kvadratning biror qismiga ekvivalent. Bundan Q^2 va Q^1 to'plamlarning o'zaro ekvivalent ekanini keltirib chiqarish qiyin emas.

Shunday qilib, o'zaro bir qiymatli akslantirishlar $n \neq m$ ko'rsatkichli $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$ fazolarini farqlamas ekan, chunki bu fazolarning barchasi $\mathbb{R}$ sonlar o'qiga ekvivalentdir.

2. Uzluksiz akslantirishlar. Uzluksiz akslantirishlar sinfi nisbatan muhimroq va ancha mazmundordir. Akslantirish uzluksizligining Koshi ma'nosidagi ta'rifini keltiraylik.

Ta'rif. $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $\mathbb{R}^m$ fazoga o'tkazuvchi $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ akslantirish va $a \in E$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki,

$$x \in E, \quad |x - a| < \delta,$$

shartdan

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqsa, u holda f akslantirish a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar akslantirish E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u E to'plamda uzluksiz deyiladi.

Navbatdagi tasdiqqa o'tishdan avval, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ akslantirish deganda biz $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ vektor-funksiyani tushu-nishimizni yana eslatamiz, bunda har bir f_j komponenta n o'lchovli $x \in E$ o'zgaruvchining funksiyasidir.

11.3.1 - tasdiq. Berilgan $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektor-funksiyaning $a \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun shu nuqtada har bir f_j , $j = 1, 2, \dots, m$ komponentaning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot 11.1.1-teoremaning isbotiga o'xshash bo'lib,

$$|f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a})| \leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = \left(\sum_{k=1}^m |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{a})|^2 \right)^{1/2}$$

munosabatdan kelib chiqadi.

Biror kesmada berilgan uzluksiz sonli funksiyalar uchun o'rinli bo'lgan bir qator tasdiqlar vektor qiymatli funksiyalar uchun ham o'rinlidir. Bunda faqat kesmani ixtiyoriy kompakt bilan almashtirish yetarli. Misol sifatida navbatdagi ko'p foydalaniladigan tasdiqni keltiramiz.

11.3.2 - tasdiq. Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ fazosining E kompakt to'plami berilgan bo'lsin. Agar $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ akslantirish uzluksiz bo'lsa, u holda $f(E)$ to'plam $\mathbb{R}^m$ fazosininig kompakt qismaniy to'plami bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $\mathbf{y}_k \in f(E)$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Ushbu $f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\mathbf{x}_k \in E$ ketma-ketlikni qaraymiz. Kompakt to'plam ta'rifiga ko'ra, biror $\mathbf{a} \in E$ nuqtaga yaqinlashuvchi $\mathbf{x}_{k_j}$ qismaniy ketma-ketlik topiladi. O'z navbatida, f akslantirishning uzluksizligiga ko'ra, mos $\mathbf{y}_{k_j} = f(\mathbf{x}_{k_j})$ ketma-ketlik $f(\mathbf{a}) \in f(E)$ nuqtaga yaqinlashadi. Bu esa $f(E)$ to'planning kompaktligini anglatadi.

Ixtiyoriy uzluksiz akslantirishlar nihoyatda umumiy tabiatga ega va ularning xossalari, yuqorida keltirilgan G. Kantor natijasi singari, geometrik intuitsiyaga ziddek ko'rinishi mumkin. Masalan, Italiyalik matematik G. Peano $[0, 1]$ kesmani butun $\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ kvadratga o'tkazuvchi uzluksiz akslantirish qurdi (bu akslantirish Peano egri chizig'i deb ataladi). Bundan $\mathbb{R}$ sonlar o'qini $\mathbb{R}^2$ tekislikka o'tkazuvchi uzluksiz akslantirish (ya'ni, butun tekislikni to'ldiruvchi uzluksiz egri chiziq) mavjudligi kelib chiqadi. Demak, $n < m$ shart bajarilganda, istalgan $\mathbb{R}^n$ fazosini $\mathbb{R}^m$ fazoga uzluksiz akslantirish mavjud ekan.

Shuni qayd etish zarurki, Peano qurgan uzluksiz akslantirish o'zaro bir qiymatli emas.

3. Homeomorfizm. Agar o'zaro bir qiymatli akslantirishning o'zi va teskarisi uzluksiz bo'lsa, bunday akslantirish *homeomorfizm* (yoki *homeomorf akslantirish*) deyiladi.

Masalan,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1 + |\mathbf{x}|^2}}$$

funksiya $\mathbb{R}^n$ fazo va n o'lchovli $B = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y}| < 1\}$ ochiq shar orasida homeomorfizm o'rnatadi. Bunda teskari akslantirish

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{1 - |\mathbf{y}|^2}}$$

ko'rinishga ega.

Xususan, $n = 1$ da bu akslantirish $\mathbb{R}$ sonlar o'qi va $(-1, 1)$ interval o'rtasida o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz moslik o'rnatadi.

Bir o'lchovli holda har qanday uzluksiz akslantirish kesmani kesmaga o'tkazishini ko'rgan edik. Agarda bu uzluksiz akslantirish yana o'zaro bir qiymatli ham bo'lsa, u homeomorfizm bo'ladi, chunki bunda teskari akslantirishning uzluksiz bo'lishi shart (3-bobdagi 3.5.6 - teoreмага qarang).

Bu teoremaning ko'p o'lchovli analogi navbatdagi tasdiqdan iborat.

11.3.1 - teorema. Faraz qilaylik, $E \in \mathbb{R}^n$ va $M \in \mathbb{R}^m$ kompakt to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar o'zaro bir qiymatli $f : E \rightarrow M$ akslantirish uzluksiz bo'lsa, uning teskarisi ham uzluksiz bo'lib, natijada f homeomorfizm bo'ladi.

Isbot 3.5.6 - teorema isbotidagi mulohazalarni so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

Eslatma. 11.3.1 - teorema kompaktlik sharti muhimdir. Ko'p o'lchovli holda ixtiyoriy (kompakt bo'lmagan) bog'langan to'plarni o'zaro bir qiymatli akslantirishning uzluksizligidan, umuman aytganda, uni teskarisining uzluksizligi kelib chiqmaydi.

11.3.1* - misol. Quyidagi

$$Q = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : a < t_1 < b, 0 \leq t_2 < 2\pi\}$$

to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan va

$$\begin{cases} f_1(t) = t_1 \cos t_2, \\ f_2(t) = t_1 \sin t_2 \end{cases} \quad (11.3.1)$$

ko'rinishga ega bo'lgan $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ akslantirishni qaraylik.

Agar $b > a > 0$ bo'lsa, $\mathbf{x} = f(t)$ akslantirish Q to'g'ri to'rtburchakni

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\}$$

halqaga o'tkazadi.

Ravshanki, bu akslantirish uzluksiz va o'zaro bir qiymatlidir. Bunda, agar $\varphi(\mathbf{x})$ deb quyidagi

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \arctg \frac{x_2}{x_1}, & \text{birinchi kvadrantda,} \\ \pi + \arctg \frac{x_2}{x_1}, & \text{ikkinchi va uchinchi kvadrantlarda,} \\ 2\pi + \arctg \frac{x_2}{x_1}, & \text{to'rtinchi kvadrantda,} \\ 0, & \text{abssissa o'qida,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ordinata o'qining musbat qismida,} \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{ordinata o'qining manfiy qismida,} \end{cases}$$

funksiyani olsak, u holda teskari $t = f^{-1}(\mathbf{x})$ akslantirish

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ t_2 = \varphi(x_1, x_2), \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili $\varphi(x_1, x_2)$ funksiyani

$$I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < b, x_2 = 0\}$$

intervalda uzluksizlikka tekshiraylik. Ravshanki, bunda $\varphi(x_1, 0) = 0$ bo'lsada, $\varphi(x_1, 0 - 0) = 2\pi$ ekanini tekshirish qiyin emas. Demak, $\varphi(x_1, x_2)$ funksiya uzluksiz emas; u x_2 o'zgaruvchining funksiyasi sifatida I intervalning har bir nuqtasida ikkinchi turdagi uzilishga ega bo'lib, bunda uning sakrashi 2π ga teng.

Shunday qilib, yuqoridagi eslatmada qayd qilinganidek, o'zaro bir qiymatli akslantirish uzluksiz bo'lsa ham, uni teskarisining uzluksiz bo'lishi shart emas ekan. Shuning uchun homeomorfizm ta'rifida akslantirishning o'zini ham, teskarisini ham uzluksizligi talab qilinadi.

Ravshanki, 11.3.1*-misolda qaralgan Q ni R ga akslantirish homeomorfizm emas.

Eslatma. Agar 11.3.1*-misolda Q va R o'rniga mos ravishda quyidagi ko'rinishda aniqlangan

$$Q_1 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : a < t_1 < b, 0 < t_2 < 2\pi\}$$

va

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\} \setminus \{(x_1, x_2) : a < x_1 < b, x_2 = 0\}$$

ochiq to'plamlarni olsak, u holda (11.3.1) akslantirish homeomorfizm bo'ladi.

Aytaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ va $M \subset \mathbb{R}^m$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlar orasidagi $f : E \rightarrow M$ uzluksiz akslantirish tushunchasi ochiq to'plam tushunchasi bilan chambarchas bog'liq. Ochiq to'plam deb har bir nuqtasi ichki nuqta bo'lgan to'plamga, ya'ni har bir nuqtasi o'zining biror atrofi bilan shu to'plamga tegishli bo'lgan to'plamga aytgan edik.

Yuqoridagi fikrimiz tasdig'i sifatida $a \in E$ nuqtada uzluksizlikning Koshi ta'rifini eslatamiz: agar $f(a) \in M$ nuqtaning istalgan ε -atrofi V uchun a nuqtaning shunday δ -atrofi U topilsaki,

$$f(U \cap E) \subset V \quad (11.3.2)$$

shart bajarilsa, $f : E \rightarrow M$ akslantirish a nuqtada uzluksiz deyiladi.

E'tibor bering, bu ta'rifda atroflar o'lchovini ko'rsatish zarur emas, chunonchi, navbatdagi teng kuchli ta'rif o'rinlidir:

agar $f(a) \in M$ nuqtaning istalgan V atrofi uchun a nuqtaning shunday U atrofi topilib, (11.3.2) tegishlilik sharti bajarilsa, $f : E \rightarrow M$ akslantirishni $a \in E$ nuqtada uzluksiz deymiz.

Uzluksiz akslantirishda ochiq to'plamning aksi ochiq bo'lishi shart emasligini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan, masalan, E to'plamda o'zgarmas bo'lgan funksiya, uning ixtiyoriy qismaniy to'plamini nuqtaga akslantiradi, qaysiki ochiq to'plam emas.

Shunga qaramasdan, navbatdagi sodda tasdiq o'rinli.

11.3.3 - tasdiq. Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ ochiq to'plam bo'lsin. Agar $f : E \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ akslantirish uzluksiz va teskarilantiruvchi bo'lsa, $f^{-1} : M \rightarrow E$ akslantirish ochiq to'plamni ochiq to'plamga o'tkazadi.

Isbot. Ixtiyoriy $G \subset M$ ochiq to'plam uchun $\Omega = f^{-1}(G)$ to'plamning ochiqligini isbotlaymiz. Buning uchun har bir $a \in \Omega$ nuqta o'zining biror atrofi bilan Ω ga tegishli ekanini, ya'ni bunday nuqta Ω to'plamining ichki nuqtasi ekanini ko'rsatamiz.

G ochiq to'plam bo'lgani uchun, $f(a)$ nuqta o'zining biror V atrofi bilan G to'plamga tegishli. f akslantirishning uzluksizligi sababli, a nuqtaning shunday U atrofi topiladiki, u uchun (11.3.2) shart bajariladi. Endi, birinchidan, E ning ochiqligi tufayli, $U_1 = U \cap E$ to'plam ham a nuqtaning atrofi bo'ladi, ikkinchidan, (11.3.2) ga ko'ra, $U_1 \subset \Omega$, ya'ni, a nuqta Ω to'plamning ichki nuqtasi bo'ladi.

■

Eslatma. 11.3.1* - misoldan ko'rinib turibdiki, agar 11.3.3 - tasdiqda E to'plamning ochiqligini talab qilmasak, tasdiq o'rinli bo'lmay qoladi. Haqiqatan, qayd qilingan misolda R ochiq halqa ochiq bo'lmagan Q to'g'ri to'rtburchakka akslantiriladi.

Homeomorfizm, ya'ni o'zi va teskarisi uzluksiz bo'lgan akslantirish, to'plamning ochiqligini saqlash xossasiga ega.

11.3.2 - teorema. Ochiq $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni ochiq $M \subset \mathbb{R}^n$ to'plamga o'tkazuvchi $f : \Omega \rightarrow M$ homeomorf akslantirish berilgan

bo'lsin. U holda istalgan ochiq $G \subset \Omega$ qismaniy to'plam uchun $f(G)$ to'plam ochiq bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $f : \Omega \rightarrow M$ akslantirish teorema shartlarini qanoatlantirsin. U holda, ravshanki, teskari $f^{-1} : M \rightarrow \Omega$ akslantirish ham homeomorfizm bo'ladi. Bundan chiqdi, bu akslantirishga teskari bo'lgan f , 11.3.2 - tasdiqqa ko'ra, har bir ochiq $G \subset \Omega$ to'plamni ochiq $f(G) \subset M$ to'plamga akslantiradi.

■

11.3.4 - tasdiq. Homeomorfizm bog'langan to'plamni bog'langan to'plamga akslantiradi.

Isbot. Aytaylik, f bog'langan E to'plamni M to'plamga homeomorf akslantirsin. M to'plamning bog'langanligini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, M to'plamning ixtiyoriy ikki b_1 va b_2 nuqtasi berilgan bo'lsin. E to'plamdan shunday a_1 va a_2 nuqtalarni olamizki, ular uchun $f(a_j) = b_j$, $j = 1, 2$ tengliklar bajarilsin. E to'plam bog'langanligi sababli, a_1 va a_2 nuqtalarni tutashtiruvchi va butunligicha E to'plamda yotuvchi uzluksiz L egri chiziq mavjud. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi 11.2.4 - teoremdan $f(L)$ ning ham uzluksiz egri chiziq ekani kelib chiqadi. Ravshanki, bu chiziq $b_1 = f(a_1)$ va $b_2 = f(a_2)$ nuqtalarni tutashtiradi hamda butunligicha M da yotadi. Bu esa M ning bog'langan to'plam ekanini anglatadi.

■

Ochiq bog'langan to'plamni biz soha deb atagan edik. Sohaning yopilmasi $\overline{G} = G \cup \partial G$ ko'rinishdagi yopiq to'plam bo'lib, bunda ∂G berilgan G soha chegarasidir.

11.3.3 - teorema. Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ochiq to'plamni $M \subset \mathbb{R}^n$ ochiq to'plamga akslantiruvchi $f : \Omega \rightarrow M$ homeomorfizm berilgan bo'lsin. U holda, $\overline{G} \subset \Omega$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy G soha uchun $E = f(G)$ to'plam ham soha bo'lib, bu akslantirishda ∂G chegara ∂E chegaraga o'tadi.

Isbot. 11.3.2 - teorema ko'ra, $E = f(G)$ ochiq to'plam bo'lib, uning bog'langan ekani 11.3.4 - tasdiqdan kelib chiqadi. Demak, $f(\partial G) = \partial f(G)$ tenglikni ko'rsatish yetarli.

Agar $G^* = \Omega \setminus \overline{G}$ desak, G , ∂G va G^* to'plamlar, ravshanki, o'zaro kesishmaydi va ularning yig'indisi Ω ga teng bo'ladi, ya'ni

$$G \cup \partial G \cup G^* = \Omega.$$

Agar $E^* = M \setminus \overline{E}$ deb belgilasak, $E^* = f(G^*)$ tenglik bajarilishini ko'rish qiyin emas.

Agar yana $F = f(\partial G)$ desak, f akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lgani sababli, G , ∂G va G^* to'plamlar aksi, ya'ni, mos ravishda, E , F va E^* to'plamlar ham o'zaro kesishmaydi va ularning yig'indisi M ga teng bo'ladi, ya'ni

$$E \cup F \cup E^* = M.$$

Shunday qilib, yuqoridagi bayonimizdan E va E^* to'plamlarning ochiq ekani kelib chiqadi. Demak, ularning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lib, chegaraga tegishli bo'la olmaydi. Shunday ekan, E to'plam chegarasi F to'plamda yotadi, ya'ni

$$\partial E \subset F.$$

Teskari tasdiq ham o'rinli ekanini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\mathbf{b} \in F$ va V shu nuqtaning ixtiyoriy atrofi bo'lsin. U holda, F to'plam ta'rifiga ko'ra, $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\mathbf{a} \in \partial G$ nuqta topiladi. f akslantirishning uzluksizligi sababli, $\mathbf{a}$ nuqtaning shunday U atrofi topiladiki, u uchun $f(U) \subset V$ bo'ladi.

Nihoyat, $\mathbf{a}$ nuqta G to'plamning chegaraviy nuqtasi bo'lgani uchun, uning ko'rsatilgan U atrofida $\mathbf{x} \in G$ va $\mathbf{y} \notin G$ nuqtalar topiladi. Ravshanki, u holda $f(\mathbf{x}) \in E$ va $f(\mathbf{y}) \notin E$, buning ustiga bu ikki nuqta $\mathbf{b}$ nuqtaning V atrofida yotadi. Demak, $\mathbf{b}$ nuqta E sohaning chegaraviy nuqtasi bo'lar ekan va bu nuqtaning tanlanishi erkin bo'lgani sababli,

$$F \subset \partial E.$$

Shunday qilib, $F = \partial E$, ya'ni $f(\partial G) = \partial f(G)$.

Eslatma. "Homeomorfizm" iborasini atoqli fransuz matematigi A. Puankare (H. Poincare) kiritgan.

Shuni ta'kidlash joizki, Kantorning barcha $\mathbb{R}^n$ fazolarining teng kuchliligi haqidagi natijasi u qurgan o'zaro bir qiymatli, lekin uzluksiz bo'lmagan akslantirishga asoslangan. Boshqa tarafdin, $n < m$ bo'lganda Peano misoliga asoslanib qurilgan $\mathbb{R}^n$ fazosini $\mathbb{R}^m$ fazosiga o'tkazuvchi akslantirish uzluksiz, lekin o'zaro bir qiymatli emas. Shunday qilib, o'zaro bir qiymatli akslantirish ham, xuddi uzluksiz akslantirish kabi, fazo o'lchovini saqlamasligi mumkin ekan.

Bu borada, agar $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$ fazolari homeomorf bo'lsa, u holda albatta $n = m$ bo'lishi haqidagi Hollandiyalik matematik L. Brauerning (L. Brouwer) teoremasi ajoyib bo'lib chiqdi. Shunday qilib, homeomorfizm (ya'ni, o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz akslantirishda), bizga geometrik intuitsiyamiz bildirganidek, fazolar o'lchovi saqlanar ekan.

11.4-§. Misollar

1 - misol. Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ elementlaridan tuzilgan $\mathbf{x}_k$ ketma-ketlik yaqinlashsin, $\mathbf{y}_k$ ketma-ketlik esa, uzoqlashsin. U holda $\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k$ ketma-ketlikning yaqinlashishi haqida nima deyish mumkin?

Ko'rsatma. Sonli ketma-ketliklarda ikki yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ayirmasi ham yaqinlashuvchi bo'ladi (birinchi qismdagi 2.1.1 - va 2.1.2 - teoremlar natijasiga qarang). 11.1.1 - teoremdan foydalanib, bu tasdiqni $\mathbb{R}^n$ elementlari uchun isbotlang.

2 - misol. $z = f(\sqrt{x+y})$ tenglama bilan berilgan sirt xarakterini aniqlang hamda sath chiziqlarini toping.

Ko'rsatma. Faqat bitta $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ o'zgaruvchiga bog'liq funksiyalar radial funksiyalar deyiladi. Berilgan funksiya aynan shunday funksiya. Bunday funksiyalar grafigi $z = f(t)$

bir o'zgaruvchili funksiya grafigini Oz o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladi. Masalan, $f(t) = t$ bo'lsa, bunga mos grafik konusdan iboratdir.

Biror $g(\mathbf{x})$ ko'p o'zgaruvchili funksiya sath chizig'i (argumentlar soni uchdan katta bo'lganda sath sirti deyiladi) deb bu funksiya bir xil qiymat qabul qiladigan nuqtalar to'plamiga aytiladi, ya'ni sath chizig'i $g(\mathbf{x}) = C$ tenglama bilan aniqlanadi.

3 - misol. Quyidagi

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \{ \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \} = 1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \{ \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \} = -1$$

bo'lsada, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{x})$ mavjud emas ekanini tekshiring.

Ko'rsatma. Birinchi ikki limitni hisoblash oson. Oxirgi limitni tekshirish uchun $\mathbf{x}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ va $\mathbf{y}_k = (\frac{2}{k}, \frac{1}{k})$ ketma-ketliklarga mos kelgan limitlarni hisoblang.

4 - misol. Quyidagi

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}$$

funksiya uchun

$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \{ \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \}$ va $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \{ \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \}$ takroriy limitlar mavjud bo'lmasada, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) = 0$ ekanini tekshiring.

Ko'rsatma. Takroriy limitlar mavjud emasligini tekshirish oson. Oxirgi limitni hisoblash maqsadida berilgan funksiya uchun, barcha $x_1 \neq 0$ va $x_2 \neq 0$ larda o'rinli bo'lgan, $0 \leq |f(x_1, x_2)| \leq |x_1| + |x_2|$ bahodan foydalaning.

5 - misol. Agar $f(x, y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$ funksiyada qutb koordinatalariga o'tsak, ya'ni $x = \rho \cos \varphi$ va $y = \rho \sin \varphi$ almashtirish bajarsak, φ burchakning qanday qiymatlari uchun quyidagi

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

limit mavjud bo'ladi?

Ko'rsatma. $f(x, y)$ funksiya qutb koordinatalarida $e^{\frac{\cos \varphi}{\rho}}$ ko'rinishga ega ekanini qayd qilish yetarli.

6 - misol. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 9$ chiziqli funksiyani $\mathbb{R}^3$ fazoda tekis uzluksizlikka tekshiring.

Ko'rsatma. $\mathbb{R}^3$ fazosining ixtiyoriy $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ nuqtalari uchun

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq 2|x_1 - y_1| + 3|x_2 - y_2| + 5|x_3 - y_3|$$

baholar foydalaning.

7 - misol. Quyidagi $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ funksiyani $\mathbb{R}^n$ fazoda tekis uzluksizlikka tekshiring.

Ko'rsatma. Istalgan $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ uchun

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$$

tengsizlik o'rinli ekanini isbotlang.

8 - misol. Agar biror $G \subseteq \mathbb{R}^2$ sohada aniqlangan $f(x_1, x_2)$ funksiya x_1 bo'yicha uzluksiz bo'lib, x_2 bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, ya'ni bu funksiya uchun biror L o'zgarmas bilan

$$|f(x_1, x'_2) - f(x_1, x''_2)| \leq L|x'_2 - x''_2|, \quad (x_1, x'_2), (x_1, x''_2) \in G,$$

baho o'rinli bo'lsa, u holda $f(x_1, x_2)$ funksiya G sohada uzluksiz ekanini ko'rsating.

Ko'rsatma. Lipshits shartidan foydalanib, G sohaning istalgan $\mathbf{x}$ va $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ nuqtalari uchun

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq L|x_2 - x_2^0| + |f(x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)|$$

bahoni isbotlang. So'ngra berilgan funksiyaning birinchi argument bo'yicha uzluksizligidan foydalaning.

9 - misol. Agar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ lar uchun aniqlangan $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$ akslantirishda

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \sin \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$$

bo'lsa, bu akslantirishning uzluksiz ekanini ko'rsating.

Ko'rsatma. 11.3.1 - tasdiqdan foydalaning.

10 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{x-a}{b-a} \right)$$

funksiya $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ochiq interval va $\mathbb{R}$ sonlar o'qi orasida homeomorfizm o'rnatishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Teskari funksiya uzluksiz ekanini isbotlash yetarli.

12-bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni differensiallash

12.1-§. Qismaniy hosilalar

1. Qismaniy hosilalar. Faraz qilaylik, ko'p o'zgaruvchili f funksiya berilgan bo'lsin. Agar bitta o'zgaruvchidan boshqa barcha o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qarajak, biz bir o'zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. Bu bir o'zgaruvchili funksiyani differensiallasak, biz qismaniy hosila deb ataluvchi hosilaga ega bo'lamiz. Aniqroq tasavvur qilish maqsadida, biz avval ikki o'zgaruvchili funksiyalarni qaraymiz va $\mathbb{R}^2$ fazo elementlarini $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ deb belgilaymiz, bunda $x \in \mathbb{R}$ va $y \in \mathbb{R}$.

Ta'rif. $f(x, y)$ funksiya $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. f funksiyaning (a, b) nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha qismaniy hosilasi deb

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

limitga aytiladi va u quyidagi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad (12.1.1)$$

simvollaridan biri orqali belgilanadi.

Xuddi shu singari y o'zgaruvchi bo'yicha f'_y qismaniy hosila ham aniqlanadi.

12.1.1 - misol. Quyidagi

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

funksiyaning istalgan (x, y) nuqtada qisman hosilalari uchun

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y \cos(xy), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \cos(xy)$$

tengliklar o'rinli.

12.1.2 - misol. Avvalgi bobda qaralgan (11.2.9) funksiya, ya'ni

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^4 + y^4}, & \text{agar } (x, y) \neq (0, 0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x, y) = (0, 0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (12.1.2)$$

funksiya misolida har ikki f'_x va f'_y qisman hosilaga ega bo'lgan funksiya hattoki chegaralanmagan ham bo'lishi mumkinligini ko'rsatib beriladi. Haqiqatan,

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y \frac{y^4 - 3x^4}{(x^4 + y^4)^2}, & \text{agar } (x, y) \neq (0, 0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x, y) = (0, 0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (12.1.3)$$

tenglik bajarilishini ko'rish qiyin emas. Xuddi shu singari tenglik f'_y uchun ham o'rinli. Demak, qarayotgan funksiya $\mathbb{R}^2$ fazoning har bir nuqtasida qisman hosilalarga ega bo'lsada, u koordinatalar boshining istalgan atrofida chegaralanmagan.

Umumiy holda ixtiyoriy n ta o'zgaruvchili funksiyaning qisman hosilalari ham yuqoridagidek kiritiladi. Buning uchun $\mathbf{e}_k$ orqali k -nomerli komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentalari nolga teng bo'lgan

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

vektorni belgilaylik. Shubhasiz, har qanday $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor uchun

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k$$

tenglik o'rinli.

Ta'rif. $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. f funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi x_k o'zgaruvchi bo'yicha qismaniy hosilasi deb

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{h}$$

limitga aytiladi va u quyidagi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = f'_{x_k}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{h} \quad (12.1.4)$$

simvollaridan biri orqali belgilanadi.

(12.1.4) tenglikdan ko'rinib turibdiki, berilgan funksiyaning biror o'zgaruvchi bo'yicha qismaniy hosilasini topish uchun, biz qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb hisoblab, funksiyaning o'sha o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashimiz kerak ekan.

12.1.3 - misol. Quyidagi

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (12.1.5)$$

funksiyaning ixtiyoriy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nuqtadagi qismaniy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = 2x_k \quad (12.1.6)$$

ko'rinishga ega.

12.1.4 - misol. Bir o'zgaruvchili holdagidek, $|\mathbf{x}|$ funksiya $\mathbb{R}^n$ fazoda uzluksiz bo'lib, koordinatalar boshidan tashqari barcha nuqtalarda qismaniy hosilalarga ega. Haqiqatan,

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (12.1.7)$$

funksiyaning ixtiyoriy $\mathbf{x} \neq 0$ nuqtadagi qismaniy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{x_k}{|\mathbf{x}|} \quad (12.1.8)$$

ko'rinishga ega.

2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun differensiallanuvchanlik tushunchasini qisman hosilalarning mavjudligi bilan bog'lamash kerak ekani (12.1.2) misoldan ko'rinishga ega. Buning o'rniga funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishining 4.1.1 - teoremda keltirilgan ta'rifini asos qilib olish tabiiyroq bo'ladi.

Bir o'zgaruvchili funksiya holidagi kabi, agar $\alpha(\mathbf{h})$ funksiya yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ larda aniqlangan bo'lib,

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\alpha(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|^k} = 0 \quad (12.1.9)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\alpha(\mathbf{h})$ kattalikni $\mathbf{h} \rightarrow 0$ da $|\mathbf{h}|^k$ ga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik deymiz va

$$\alpha(\mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|^k), \quad \mathbf{h} \rightarrow 0, \quad (12.1.10)$$

deb yozamiz.

Xususan,

$$\alpha(\mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|), \quad \mathbf{h} \rightarrow 0, \quad (12.1.11)$$

belgilash

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\alpha(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = 0 \quad (12.1.12)$$

tenglikning bajarilishini anglatadi.

Ta'rif. Agar f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shunday $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor topilsaki, u uchun

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = (\mathbf{A}, \mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|), \quad \mathbf{h} \rightarrow 0, \quad (12.1.13)$$

tenglik bajarilsa, u holda bu funksiyani $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi deymiz.

Bu tenglikning o'ng tarafidagi birinchi qo'shiluvchi $\mathbf{A}$ va $\mathbf{h}$ vektorlarining skalyar ko'paytmasidir. (12.1.13) tenglikni batafsilroq

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$

$$= A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}\right) \quad (12.1.14)$$

ko'rinishda yozish murakkin.

Keltirilgan ta'rifdan ko'p o'zgaruvchili differensiallanuvchi funktsiyaning har bir o'zgaruvchisi bo'yicha qismaniy hosilaga ega bo'lishi kelib chiqadi.

12.1.1 - teorema. Agar f funktsiya biror $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu nuqtada f funktsiyaning har bir o'zgaruvchi bo'yicha qismaniy hosilalari mavjud bo'lib,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) h_k + o(|\mathbf{h}|), \quad \mathbf{h} \rightarrow 0, \quad (12.1.15)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Shartga ko'ra f differensiallanuvchi bo'lgani uchun (12.1.13) tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, unga teng kuchli bo'lgan (12.1.14) tenglik ham bajariladi. Faraz qilaylik, $\mathbf{h}$ vektor

$$\mathbf{h} = (h_1, 0, 0, \dots, 0)$$

ko'rinishga ega bo'lib, h_1 shunday haqiqiy son bo'lsinki, $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ vektor f funktsiyaning aniqlanish sohasida yotsin. U holda (12.1.14) tenglikni

$$f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = A_1 h_1 + o(|h_1|)$$

deb yozish mumkin.

Demak,

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h_1} = A_1 + o(1).$$

Agar h_1 ni nolga intiltirsak, qismaniy hosila ta'rifiga ko'ra,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = A_1$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Xuddi shu usulda boshqa o'zgaruvchilar bo'yicha ham qisman hosilalar mavjudligini va ular uchun

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = A_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

tengliklarning bajarilishini ko'rsatish mumkin.

Endi A_k larning topilgan qiymatlarini (12.1.14) formulaga qo'y-sak, talab qilingan (12.1.15) munosabatni olamiz.

■

(12.1.15) formulani ixchamroq ko'rinishga keltirish maqsadida quyidagi

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) \quad (12.1.16)$$

belgilashni kiritamiz (∇ belgisi irlandiyalik matematik Hamilton (W. R. Hamilton, (1805–1865)) tomonidan kiritilgan bo'lib, ko'rinishi o'xshash bo'lgan musiqa asbobi nomi bilan «nabla» deb o'qiladi).

(12.1.16) tenglikning o'ng tarafidagi vektor f funksiyaning $\mathbf{x}$ nuqtadagi *gradienti* deb ataladi va u

$$\text{grad} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \quad (12.1.17)$$

simvollar orqali ham belgilanadi.

Agar f funksiya $\mathbf{x}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, (12.1.16) belgilash yordamida (12.1.15) tenglikni

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad (12.1.18)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda nuqta orqali skalyar ko'paytirish belgilangan.

3. Ikki o'zgaruvchili funksiya differensiallanuvchi bo'lishining geometrik ma'nosi. Aytaylik, ikki o'zgaruvchili $f(x, y)$

funksiya $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Yuqorida qayd qilganimizdek, bunday funksiyaning grafigi uch o'lchovli fazoda

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

ko'rinishdagi sirtidan iborat.

Agar $c = f(a, b)$ desak, (a, b, c) nuqta, albatta, shu grafikda yotadi. Ravshanki, har qanday λ va μ haqiqiy sonlar uchun $\mathbb{R}^3$ fazosida

$$z = f(a, b) + \lambda(x - a) + \mu(y - b) \quad (12.1.19)$$

tenglama bilan berilgan P tekislik grafikning (a, b, c) nuqtasidan o'tadi.

Agar

$$f(x, y) = f(a, b) + \lambda(x - a) + \mu(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}) \quad (12.1.20)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, P tekislik f funksiya grafigiga $(a, b, f(a, b)) \in \mathbb{R}^3$ nuqtada urinadi deymiz. Boshqacha aytganda, agar berilgan funksiya bilan tekislik tenglamasi orasidagi farq biror nuqta atrofida bu nuqtagacha bo'lgan masofaga nisbatan yuqoriroq tartibdagi cheksiz kichik miqdor bo'lsa, u holda P tekislik f funksiya grafigiga o'sha nuqtada urinadi deymiz.

Ravshanki, agar (12.1.20) tenglik bilan (12.1.15) differensiallanuvchi bo'lishlik shartini solishtirsak, biz navbatdagi tasdiqqa ega bo'lamiz: P tekislikning f funksiya grafigiga $(a, b, f(a, b))$ nuqtada urinishi uchun f funksiya (a, b) nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, urinma tekislik tenglamasining

$$z = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad (12.1.21)$$

ko'rinishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

4. Murakkab funksiyaning differensiallanuvchanligi. Ushbu bandeda biz ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyaning differensiallanuvchi bo'lish shartlarini o'rganamiz.

Buning uchun biz $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan biror $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani va $V \subset \mathbb{R}^m$ to'plamda aniqlangan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ funksiyani qaraymiz. Bunda φ vektor-funksiya bo'lib, agar $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ desak, u

$$\varphi(\mathbf{t}) = (\varphi_1(\mathbf{t}), \varphi_2(\mathbf{t}), \dots, \varphi_n(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in V,$$

ko'rinishga ega.

Biz φ akslantirishning qiymatlar to'plami E da yotsin deb faraz qilamiz, ya'ni istalgan $\mathbf{t} \in V$ uchun

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

$$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

...

$$x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

koordinatalarga ega bo'lgan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nuqta E to'plamga tegishli bo'lsin.

U holda, yuqorida qayd qilinganidek,

$$F(\mathbf{t}) = f[\varphi(\mathbf{t})], \quad \mathbf{t} \in V,$$

ko'rinishda ta'sir qiluvchi $F = f[\varphi] : V \rightarrow \mathbb{R}$ murakkab funksiyani aniqlash mumkin.

Navbatdagi teoremda murakkab funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi uchun shartlar va uning qisman hosilalarini hisoblash qoidasi keltiriladi.

12.1.2 - teorema. $V \subset \mathbb{R}^m$ to'plamda aniqlangan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektor-funksiyaning qiymatlar to'plami $E \subset \mathbb{R}^n$ da yotsin va shu to'plamda aniqlangan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin.

Agar $\varphi(\mathbf{t})$ funksiyaning har bir komponentasi biror $\mathbf{a} \in V$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $F(\mathbf{t}) = f[\varphi(\mathbf{t})]$ murakkab funksiya

$\mathbf{t} = \mathbf{a}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning qismaniy hosilalari uchun

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (12.1.22)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra, $\varphi_j(\mathbf{t})$ funksiyalar $\mathbf{a}$ nuqtada differensiallanuvchi. Bundan chiqdi, ixtiyoriy yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ vektor uchun, (12.1.15) formulaga ko'ra,

$$\varphi_j(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \varphi_j(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}) h_k + o(|\mathbf{h}|) \quad (12.1.23)$$

tenglik bajariladi.

Agar

$$\Delta \varphi = \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{a}) \quad (12.1.24)$$

deb belgilasak, (12.1.23) tenglikka ko'ra, bu vektorni har bir komponentasi $\mathbf{h} \rightarrow 0$ da nolga intiladi. Demak, 11.1.1 - teoremaga asosan, $\mathbf{h} \rightarrow 0$ da $\Delta \varphi \rightarrow 0$, yoki, yanada aniqroq,

$$\Delta \varphi = O(|\mathbf{h}|). \quad (12.1.25)$$

Shunday ekan, f funksiyaning differensiallanuvchanligi tufayli, (12.1.17) va (12.1.15) tengliklarga ko'ra,

$$f(\mathbf{b} + \Delta \varphi) - f(\mathbf{b}) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \Delta \varphi + o(|\Delta \varphi|) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \Delta \varphi_j + o(|\mathbf{h}|) \quad (12.1.26)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ma'lumki, $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$ va (12.1.24) belgilashga ko'ra, $\mathbf{b} + \Delta \varphi = \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{h})$. Shuning uchun, bevosita $F(\mathbf{t}) = f[\varphi(\mathbf{t})]$ murakkab funksiyaning ta'rifi va (12.1.23)-(12.1.26) formulalardan

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b} + \Delta \varphi) - f(\mathbf{b}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \Delta \varphi_j + o(|\mathbf{h}|) = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}) h_k + o(|\mathbf{h}|) \right) + o(|\mathbf{h}|).
\end{aligned}$$

tenglik kelib chiqadi.

Bundan, yig'ish tartibini o'zgartirib, quyidagi

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}) \right) h_k + o(|\mathbf{h}|)$$

tenglikni olamiz.

Hosil bo'lgan tenglik, (12.1.15) ga ko'ra, $F(\mathbf{t})$ murakkab funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini va uning qisman hosilalarini (12.1.22) formulalar bilan hisoblanishini anglatadi.

Q. E. D.

1 - eslatma. Agar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_k} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \right)$$

deb belgilash kiritsak, ravshanki, (12.1.22) tenglikni

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(\mathbf{a}), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

kabi yozish mumkin.

2 - eslatma. Agar φ akslantirish har bir k o'lchovli $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ vektorga biror n o'lchovli $\varphi(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$ vektorni mos qo'ysa, $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow$

$\mathbb{R}^n$ deb yozamiz. Bunda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix} \quad (12.1.27)$$

simvol orqali φ vektor-funksiya komponentalarining qismaniy hosilalaridan iborat $(n \times k)$ - matritsani belgilaymiz. (12.1.16) vektorni (12.1.27) matritsaga ko'paytirish qoidasiga ko'ra, (12.1.22) tenglikni

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} \quad (12.1.28)$$

ko'rinishda, ya'ni xuddi bir o'zgaruvchili funksiya uchun zanjir qoidasi singari, yozish mumkin (bunda biz (12.1.17) belgilashdan foydalandik).

5. Yo'nalish bo'yicha hosila. Faraz qilaylik, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu nuqtaning o'zida differensiallanuvchi bo'lgan f funksiya berilgan bo'lsin. 12.1.1 - teorema ko'ra, $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya har bir x_j o'zgaruvchi bo'yicha qismaniy hosilaga ega, ya'ni f ni, qolgan koordinatalarni tayinlab, shu bir o'zgaruvchining funksiyasi deb qarasak, bu funksiya o'sha koordinata o'qi bo'ylab differensiallanuvchidir. Boshqacha aytganda, agar $\mathbf{s}$ simvoli orqali koordinata o'qlaridan biri bo'ylab yo'naltirilgan birlik vektorni belgilasak, u holda faqat t o'zgaruvchi funksiyasi deb qaralgan $f(\mathbf{a} + t\mathbf{s})$ funksiya $t = 0$ nuqtada hosilaga ega va bu hosila mos qismaniy hosila bilan ustma-ust tushadi.

Endi $\mathbf{s}$ deb koordinata o'qlari bilan α_1, α_2 va α_3 burchaklarni tashkil qiluvchi birlik vektorni belgilaylik. Bu vektorning koordinata o'qlariga proeksiyalari yuqoridagi burchaklarning kosinuslari bo'lgani sababli,

$$\mathbf{s} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3) \quad (12.1.29)$$

deb yozishimiz mumkin.

Agar $F(t) = f(a + ts)$ ni t ning bir o'zgaruvchili funksiyasi deb qarashak, u $t = 0$ da differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi, 12.1.2 - teorema ga ko'ra,

$$F'(t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} \cos \alpha_j$$

formula yordamida hisoblanadi.

Bu hosilaga f funksiyaning s yo'nalish bo'yicha hosilasi deb ataladi va u

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} \cos \alpha_j$$

kabi belgilanadi.

Agar gradient ta'rifini yodga olsak, oxirgi tenglikni gradient va s vektorning skalyar ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot s.$$

12.1.5 - misol. Quyidagi

$$f(x) = |x|^2$$

funksiyaning ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^3$ nuqtadagi (12.1.29) yo'nalish bo'yicha hosilasini hisoblang.

Ravshanki,

$$\nabla f(x) = (2x_1, 2x_2, 2x_3) = 2x.$$

Demak,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot s = 2x \cdot s.$$

Xuddi shu usulda ixtiyoriy n o'zgaruvchili funksiya uchun yo'nalish bo'yicha hosila aniqlanadi. Chunonchi, $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror

atrofida aniqlangan va shu nuqtaning o'zida differensiallanuvchi bo'lgan f funksiya berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ixtiyoriy birlik vektor bo'lsin, ya'ni

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2} = 1.$$

Bu vektorni har bir komponentasining absolyut qiymati 1 dan katta bo'lmagani uchun, bir qiymatli aniqlangan shunday α_j burchaklar topiladiki, ular uchun

$$s_j = \cos \alpha_j, \quad 0 \leq \alpha_j \leq \pi, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

tengliklar bajariladi.

Shunday qilib, har bir birlik vektorni

$$\mathbf{s} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n) \quad (12.1.30)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektor-funksiya

$$\varphi(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{s}$$

tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, u holda uning qiymatlar to'plami $\mathbf{a}$ nuqtadan $\mathbf{s}$ yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Endi $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s})$ funksiyani t ning bir o'zgaruvchili funksiyasi deb qarasak, u $t = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi f funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi $\mathbf{s}$ yo'nalish bo'yicha hosilasi deyiladi. 12.1.2 - teorema ko'ra, $\mathbf{s}$ yo'nalish bo'yicha hosila

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cos \alpha_j = \nabla f \cdot \mathbf{s} \quad (12.1.31)$$

ko'rinishga ega.

Navbatdagi tasdiqqa ko'ra, differensiallanuvchi funksiya gradienti bu funksiya grafigini «eng tik» ko'tarilishining yo'nalishini aniqlaydi.

12.1.1.1 - tasdiq. Agar $\mathbf{s}^* = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ desak,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}^*} = \max_{|\mathbf{s}|=1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = |\nabla f| \quad (12.1.32)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (12.1.31) tenglikka Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llasak,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right| = |\nabla f \cdot \mathbf{s}| \leq |\nabla f| \cdot |\mathbf{s}| = |\nabla f| \quad (12.1.33)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Yana o'sha (12.1.31) tenglikka ko'ra,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}^*} = \nabla f \cdot \mathbf{s}^* = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = |\nabla f|. \quad (12.1.34)$$

Ravshanki, (12.1.33) va (12.1.34) munosabatlardan talab qilingan (12.1.32) tenglik kelib chiqadi.



Shunday qilib, biror nuqtadagi yo'nalish bo'yicha hosila o'zining eng katta qiymatiga gradient yo'nalishi bo'yicha erishar ekan.

12.1.1.1 - lemma. Berilgan f funksiya biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada differentsiallanuvchi bo'lib, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ kesma butunligicha Ω da yotsin. Agar bu kesmaning har bir nuqtasida

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad (12.1.35)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ bo'ladi.

Isbot. $\mathbf{h} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ deb belgilab, quyidagi

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

bir o'zgaruvchili funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya t bo'yicha $[0, 1]$ kesmada differentsiallanuvchidir. Shunday ekan, hosilani murakkab funksiyani differentsiallash qoidasi bo'yicha topib, (12.1.35) shartni e'tiborga olsak,

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (12.1.36)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Lagranj formulasiga ko'ra, $0 < t < 1$ intervaldan shunday t topiladiki, u uchun

$$F(1) - F(0) = F'(t)$$

tenglik bajariladi. Bundan chiqdi, (12.1.36) tenglikka asosan, $F(1) = F(0)$, ya'ni $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$. ■

Eslatib o'tamiz, soha deb ochiq bog'langan to'plamga aytgan edik.

12.1.3 - teorema. Faraz qilaylik, f funksiya biror $\Omega \subset R^n$ sohada differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar bu sohaning har bir nuqtasida

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

tenglik bajarilsa, u holda f funksiya Ω da o'zgarmas bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ berilgan Ω sohaning ixtiyoriy ikki nuqtasi bo'lsin. Bu ikki nuqtani Ω da butunligicha yotuvchi sinq chiziq bilan tutashtiramiz (11.1.3 - tasdiqqa asosan buning imkoni bor). U holda, 12.1.1 - lemmaga asosan, bu sinq chiziqning har bir kesmasida f funksiya o'zgarmas bo'ladi. Demak, ravshanki, $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ va, bundan chiqdi, f funksiya Ω sohada o'zgarmas bo'lar ekan. ■

6. Yuqori tartibli qismaniy hosilalar. Faraz qilaylik, ikki o'zgaruvchili $f(x, y)$ funksiya biror $\Omega \in \mathbb{R}^2$ sohada $\frac{\partial f}{\partial x}$ qismaniy hosilaga ega bo'lib, bu hosila ham, o'z navbatida, Ω sohada xuddi o'sha x o'zgaruvchi bo'yicha

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

qismaniy hosilaga ega bo'lsin.

Bu hosila f funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha ikkinchi tartibli qismaniy hosilasi deb atalib,

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Xuddi shu kabi y o'zgaruvchi bo'yicha ikkinchi tartibli qismaniy hosila aniqlanadi:

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Endi $\frac{\partial f}{\partial x}$ qismaniy hosila Ω da y bo'yicha qismaniy hosilaga ega bo'lsin deylik:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Bu hosila f funksiyaning x va y bo'yicha ikkinchi tartibli (aralash) qismaniy hosilasi deb ataladi va

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

kabi belgilanadi.

Shunday qilib, bu ikkinchi tartibli aralash qismaniy hosilani topish uchun avval f funksiyaning x bo'yicha, so'ngra y bo'yicha differensiallash kerak.

Xuddi shu kabi quyidagi

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

ikkinchi tartibli aralash qismaniy hosila aniqlanadi.

12.1.6 - misol. Quyidagi

$$f(x, y) = y \sin x$$

funksiyani qaraylik.

Bu funksiyaning har ikki f'_x va f'_y qismaniy hosilaga ega bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bunda

$$f'_x(x, y) = y \cos x$$

va

$$f'_y(x, y) = \sin x.$$

Demak, har qanday x va y lar uchun

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \cos x.$$

Shunday qilib, $f(x, y) = y \sin x$ funksiyaning qismaniy hosilalari barcha x va y lar uchun

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (12.1.37)$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Albatta, (12.1.37) tenglikni funksiyalarning juda keng sinfi uchun bajarilishini kutish tabiiydir. Bu haqiqatan ham shunday va biz bu tasdiqni quyida isbotlaymiz. Lekin, shunga qaramasdan, bu tenglikni doimo o'rinli bo'ladi deb bo'lmaydi, chunki shunday funksiyalar ham borki, ular har ikki qismaniy hosilaga ega bo'lsada, bu hosilalar o'zaro teng emas.

12.1.7 - misol. Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya quyidagi

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \cdot (x + y)}{x^2 + y^2}, & \text{agar } (x, y) \neq (0, 0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x, y) = (0, 0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (12.1.38)$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsin.

Bu funksiya va $(x - y)$ ning ko'paytmasidan iborat

$$u(x, y) = (x - y)f(x, y) \quad (12.1.39)$$

funksiyani qaraymiz.

Ravshanki, koordinata o'qlarida f nolga teng:

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0. \quad (12.1.40)$$

Bundan tashqari, to'g'ridan-to'g'ri hisoblash orqali bu funksiyaning $\mathbb{R}^2$ fazosining har bir nuqtasida x va y bo'yicha qisman hosilalarga ega ekanini ko'rsatish mumkin. Bunda, agar $x \neq 0$ va $y \neq 0$ bo'lsa,

$$f'_x(0, y) = 1, \quad f'_y(x, 0) = 1 \quad (12.1.41)$$

tengliklar bajariladi.

Demak, (12.1.39) tenglik bilan aniqlangan $u(x, y)$ funksiya ham x va y bo'yicha $\mathbb{R}^2$ fazosining har bir nuqtasida qisman hosilalarga ega. Biz endi, bu funksiya koordinatalar boshida ikkinchi tartibli aralash qisman hosilalarga ega bo'lsada, bu qisman hosilalar o'zaro teng bo'lmashligini ko'rsatamiz. Haqiqatan,

$$u'_x(x, y) = f(x, y) + (x - y)f'_x(x, y)$$

va xususan, $u'_x(0, 0) = 0$.

Shunday ekan, (12.1.40) va (12.1.41) tengliklarga ko'ra,

$$u'_x(0, h) - u'_x(0, 0) = f(0, h) + (0 - h)f'_x(0, h) = -hf'_x(0, h) = -h,$$

va demak,

$$u''_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [u'_x(0, h) - u'_x(0, 0)] = -1.$$

Xuddi shu usulda

$$u''_{yx}(0, 0) = 1$$

ekanini ko'rsatiladi.

Shunday qilib, (12.1.39) funksiya uchun (12.1.37) tenglik koordinatalar boshida bajarilmas ekan.

Qaralgan misolda $u(x, y)$ funksiyaning aralash qismaniy hosilalari koordinatalar boshida uzilishga ega ekanini ko'rish qiyin emas. Bordinyu bu aralash hosilalar uzluksiz bo'lsa, navbatdagi teorema ularning o'zaro teng bo'lishini ta'kidlaydi.

12.1.4 - teorema. Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida $f'_x(x, y)$ va $f'_y(x, y)$ qismaniy hosilalarga ega bo'lsin. Agar o'sha atrofda ikkinchi tartibli $f''_{xy}(x, y)$ va $f''_{yx}(x, y)$ aralash qismaniy hosilalar mavjud bo'lib, ular (a, b) nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \quad (12.1.42)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Ixtiyoriy yetarlicha kichik h sonini tayinlab,

$$\Phi(x) = f(x, b+h) - f(x, b) \quad (12.1.43)$$

funksiyani qaraymiz.

Ikki marta Lagranj formulasini qo'llasak, a va $a+h$ orasida yotuvchi shunday ξ_1 hamda b va $b+h$ orasida yotuvchi shunday η_1 sonlar topiladiki, ular uchun

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) - \Phi(a) &= \Phi'(\xi_1) \cdot h = \\ &= [f'_x(\xi_1, b+h) - f'_x(\xi_1, b)]h = f''_{xy}(\xi_1, \eta_1) \cdot h^2 \end{aligned} \quad (12.1.44)$$

tenglik bajariladi.

Xuddi shunga o'xshash,

$$\Psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

funksiyani qarasak, a va $a+h$ orasida yotuvchi shunday ξ_2 hamda b va $b+h$ orasida yotuvchi shunday η_2 sonlar topiladiki, ular uchun

$$\Psi(b+h) - \Psi(b) = \Psi'(\eta_2) \cdot h =$$

$$= [f'_y(a+h, \eta_2) - f'_y(a, \eta_2)]h = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2) \cdot h^2 \quad (12.1.45)$$

tenglik bajariladi.

Boshqa tarafdin, to'g'ridan-to'g'ri hisoblash orqali

$$\Phi(a+h) - \Phi(a) = \Psi(b+h) - \Psi(b)$$

ekanini ko'rish mumkin.

Shunday ekan, (12.1.44) va (12.1.45) tengliklarni taqqoslab,

$$f''_{xy}(\xi_1, \eta_2) = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)$$

munosabatni olamiz.

Oxirgi tenglikda $h \rightarrow 0$ deb (bunda, albatta, $\xi_k \rightarrow a$ va $\eta_k \rightarrow b$), aralash hosilalarning uzluksizligini esga olsak, talab qilingan (12.1.42) tenglikka ega bo'lamiz.

■

Endi biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan $f(\mathbf{x})$ funksiyani qaraymiz. Faraz qilaylik, bu funksiya Ω sohada $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ qisman hosilaga ega bo'lib, bu qisman hosila ham, o'z navbatida, Ω da x_j o'zgaruvchi bo'yicha qisman hosilaga ega bo'lsin:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Bu hosila f funksiyaning x_k va x_j o'zgaruvchilar bo'yicha **ikkinchi tartibli qisman hosilasi** deb ataladi va u

$$f''_{x_k x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Agar $f''_{x_k x_j}$ va $f''_{x_j x_k}$ ikkinchi tartibli hosilalar uzluksiz bo'lsa, **12.1.3 - teorema**ga ko'ra,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Umumiy holda, $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$ o'zgaruvchilar bo'yicha m - tartibli qisman hosila induktiv ravishda quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \partial x_{k_{m-1}} \dots \partial x_{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_m}} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_{m-1}} \partial x_{k_{m-2}} \dots \partial x_{k_1}}. \quad (12.1.46)$$

Agar berilgan funksiyaning m - tartibgacha bo'lgan barcha qisman hosilalari biror sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya o'sha sohada m marta uzluksiz differensiallanuvchi deyiladi.

Albatta, m marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya uchun m - tartibgacha bo'lgan qisman hosilalarning qaysi tartibda hisoblanishi ahamiyatga ega emas. Bunda, agar (12.1.46) ta'rifdagi indekslardan ba'zilari o'zaro ustma-ust tushsa, maxrajdagi ko'paytma, odatda, daraja bilan almashtiriladi. Masalan,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}.$$

12.2-§. Teylor formulasi

1. Differensial.

Ta'rif. Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi differensial $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ deb argumentning yetarlicha kichik $\mathbf{h}$ orttirmasiga mos kelgan funksiya orttirmasining $\mathbf{h}$ ga nisbatan chiziqli qismiga aytiladi, ya'ni

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|), \quad h \rightarrow 0. \quad (12.2.1)$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensialining aniq ko'rinishi haqidagi navbatdagi tasdiq bevosita 12.1.1 - teoremdan kelib chiqadi.

12.2.1 - tasdiq. Agar f funksiya biror $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi differensial

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) h_k = \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{a}) \quad (12.2.2)$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, agar f funksiya har bir $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning differensial ikki $\mathbf{x}$ va $\mathbf{h}$ vektor o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, $\mathbf{h}$ argument bo'yicha chiziq-li bo'ladi:

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{x}).$$

Odatda, $\mathbf{h}$ o'zgaruvchi $d\mathbf{x}$ simvol orqali belgilanadi va differensial

$$df(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) dx_k \quad (12.2.3)$$

ko'rinishda yoziladi.

2. Birinchi differensial formasining invariantligi.

Berilgan $f(\mathbf{x})$ funksiyaning $\mathbf{x}$ argumenti $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ o'zgaruvchining vektor-funksiyasi bo'lgan vaqtdagi differensialini topamiz. Bunda, agar bu vektor-funksiyaning har bir komponentasi differensiallanuvchi bo'lsa, uni differensiallanuvchi deymiz. Shunday qilib,

$$F(\mathbf{t}) = f[\mathbf{x}(\mathbf{t})] \quad (12.2.4)$$

ko'rinishdagi murakkab funksiyani qaraymiz va bu funksiyani $\mathbf{t}$ argumentining $d\mathbf{t}$ orttirmasiga mos keluvchi differensialini topamiz.

Agar $f(\mathbf{x})$ va $\mathbf{x}(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, F murakkab funksiya ham differensiallanuvchi bo'lib, murakkab funktsiya-ni differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$dF = dF(t, dt) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial t_j} \cdot dt_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \right) \cdot dt_j$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bundan, yig'ish tartibini o'zgartirib,

$$dF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \cdot dt_j \right)$$

formulaga ega bo'lamiz.

E'tibor bering, bu formulaning o'ng tarafida turgan qavs ichidagi ifoda $x_k(t)$ funksiyaning dx_k differensialidir. Shuning uchun bu tenglikni

$$dF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib,

$$d[f(\mathbf{x}(t))] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k. \quad (12.2.5)$$

Bu formuladan ko'rinib turibdiki, $f(\mathbf{x})$ funksiyaning birinchi differensial, $\mathbf{x}$ argumentining o'zi biror o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan vaqtda ham, xuddi (12.2.3) ko'rinishda bo'lar ekan. Bunda farq shundan iboratki, (12.2.5) tenglikda dx_k funksiya differensialidir va shuning uchun, bu formulani aslida

$$df(\mathbf{x}(t), dt) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k(t, dt) \quad (12.2.6)$$

deb tushuniladi.

Keltirilgan tasdiq *birinchi differensial formasining invariantligi* deb yuritiladi.

3. Ikkinchi differensial.

1^o. Biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada differensiallanuvchi bo'lgan f funksiyani qaraylik. Faraz qilaylik, bu funksiyaning differensial, ya'ni

$$df(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

funksiya, orttirmaning har bir tayinlangan $d\mathbf{x}$ qiymatida $\mathbf{x}$ o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin. U holda, $\mathbf{x}$ ga $\mathbf{h}$ orttirma berib,

$$df(\mathbf{x} + \mathbf{h}, d\mathbf{x}) - df(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = [\nabla f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \nabla f(\mathbf{x})] d\mathbf{x} =$$

$$= \{ \nabla [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}] + \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \} d\mathbf{x}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda $\mathbf{h} \rightarrow 0$ da $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \rightarrow 0$.

Demak, birinchi differensialning differensial, ya'ni birinchi differensial orttirmasining $\mathbf{h}$ ga nisbatan chiziqli qismi,

$$\nabla [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}] d\mathbf{x}$$

ko'rinishga ega.

Uning $\mathbf{h} = d\mathbf{x}$ dagi qiymatiga f funksiyaning ikkinchi differensial deb ataladi va u $d^2f = d^2f(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ simvol bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$d^2f(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \nabla [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}] d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot dx_j dx_k, \quad (12.2.7)$$

ya'ni ikkinchi differensial dx orttirmaning kvadratik funksiyasi bo'lar ekan.

Masalan,

$$d^2[\sin(x+y)] = -\sin(x+y) (dx+dy)^2.$$

20. Endi berilgan $f(\mathbf{x})$ funksiyaning ikkinchi differensialini $\mathbf{x}$ argumentning o'zi biror $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan vaqtda hisoblaymiz. Boshqacha aytganda,

$$F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}) = f[\mathbf{x}(\mathbf{t})] \quad (12.2.8)$$

murakkab funksiyani qaraymiz va uning $\mathbf{t}$ argumentini $d\mathbf{t}$ orttirmasiga mos kelgan ikkinchi differensialini topamiz.

Agar $f(\mathbf{x})$ va $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ funksiyalar ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda F murakkab funksiya ham ikki marta differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial t_\beta} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 x_j}{\partial t_\alpha \partial t_\beta}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak,

$$\begin{aligned} d^2 F &= d^2 F(\mathbf{t}, d\mathbf{t}) = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} dt_\alpha dt_\beta = \\ &= \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial t_\beta} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 x_j}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} \right) dt_\alpha dt_\beta. \end{aligned}$$

Agar yig'ish tartibini o'zgartirsak, (12.2.8) murakkab funksiya uchun

$$d^2 f = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot dx_j dx_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot d^2 x_j \quad (12.2.9)$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikni olishda biz

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x_j}{\partial t_\alpha} \cdot dt_\alpha = dx_j$$

ekanini, ya'ni yig'indi $x_j(t)$ funksiyaning birinchi differensialiga teng ekanini va

$$\sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial^2 x_j}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} \cdot dt_\alpha dt_\beta = d^2 x_j$$

tenglikni, ya'ni qo'sh yig'indi o'sha funksiyaning ikkinchi differensialiga teng ekanini hisobga oldik.

Agar (12.2.7) va (12.2.9) tengliklarni taqqoslasak, x o'zgaruvchining o'zi boshqa bir t o'zgaruvchining funksiyasi bo'lganda ikkinchi differensialda qo'shimcha had paydo bo'lganini ko'ramiz. Bu qo'shimcha had (12.2.9) ning o'ng tarafidagi ikkinchi yig'indidan iborat. Bunda, yuqorida qayd etilganidek, $d^2 x_j$ simvol x_j o'zgaruvchining ikkinchi differensialini anglatadi. Shunday qilib, murakkab funksiyaning ikkinchi differensialining ko'rinishi (12.2.7) dan farq qilar ekan, ya'ni ikkinchi differensial invariantlik xossasiga ega emas ekan.

Shuni aytish kerakki. agar $t \in \mathbb{R}^n$ bo'lib, $x_k(t)$ o'zgaruvchilar t_j o'zgaruvchilarga chiziqli bog'liq bo'lsa (ya'ni biror $a_{k,j}$ o'zgarmas koeffitsientlar bilan $x_k = \sum_{j=1}^m a_{k,j} t_j$ tenglik bajarilsa), $d^2 x_k(t)$ ikkinchi differensiallar nolga teng bo'lib, (12.2.9) ga ko'ra, f funksiyaning ikkinchi differensial o'zining (12.2.7) ko'rinishini saqlaydi.

3^o. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning turli xossalarini o'rganishda ikkinchi differensialning muhimligi tufayli, ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan quyidagi

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \quad (12.2.10)$$

matritsa bilan bog'liq

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot h_j h_k \quad (12.2.11)$$

kvadratik forma maxsus *hessian* degan nom olgan (nemis matematigi O. Hesse (Otto Hesse (1811-1874)) sharafiga). Ravshanki, (12.2.7) tenglikka ko'ra, ikkinchi differensial hessian orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$d^2 f(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = (H d\mathbf{x}, d\mathbf{x}).$$

12.1.4 - teorema ga asosan, (12.2.10) matritsa simmetrikdir. Shuning uchun (12.2.11) kvadratik forma ham *simmetrik* deyiladi. Bundan tashqari, agar ixtiyoriy $\mathbf{h} \neq 0$ vektor uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0, \quad \mathbf{h} \neq 0, \quad (12.2.12)$$

tengsizlik bajarilsa, (12.2.11) kvadratik forma *musbat aniqlangan* deb ataladi.

(12.2.11) kvadratik forma $\mathbf{h}$ argumentning uzluksiz funksiyasi bo'lgani uchun u, Veyersht rassning ikkinchi teoremasiga asosan, kompakt bo'lgan $\{\mathbf{h} \in R^n : |\mathbf{h}| = 1\}$ birlik sferada o'zining aniq quyi chegarasiga erishadi, ya'ni

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \geq (H\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0), \quad |\mathbf{h}| = |\mathbf{h}_0| = 1.$$

Agar $\mu = (H\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)$ deb belgilasak, musbat aniqlangan kvadratik forma uchun, (12.2.12) shartga ko'ra, $\mu > 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak,

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \geq \mu > 0, \quad |\mathbf{h}| = 1.$$

Endi, agar $\mathbf{h}$ noldan farqli ixtiyoriy vektor bo'lsa, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$ deb, oxirgi tengsizlikka ko'ra,

$$0 < \mu \leq (H\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \left(H \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}, \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{h}|^2} (H\mathbf{h}, \mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \neq 0,$$

munosabatni olamiz.

Bunda biz kvadratik formaning 2-darajali bir jinsli funksiya ekani-ni, ya'ni istalgan λ haqiqiy son uchun

$$(H\lambda\mathbf{h}, \lambda\mathbf{h}) = \lambda^2 (H\mathbf{h}, \mathbf{h})$$

tenglik bajarilishini hisobga oldik.

Shunday qilib, agar (12.2.11) kvadratik forma musbat aniqlan-gan bo'lsa, u holda istalgan $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \geq \mu |\mathbf{h}|^2, \quad \mu > 0, \quad (12.2.13)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, $\mu > 0$ kattalik, umuman aytganda, hes-sian hisoblanayotgan $\mathbf{x}$ nuqtaga bog'liq. Lekin, agar f funksiyaning ikkin-chi hosilalari uzluksiz bo'lsa, u holda μ kattalikni ixtiyoriy kompakt-da, undan olingan barcha $\mathbf{x}$ lar uchun, o'zgaras qilib ol-ish mumkin. Bunga ishonch hosil qilish uchun, yana yuqoridagidek, Veyershtass-ning ikkinchi teoremasini qo'llash yetarli.

Agar ixtiyoriy $\mathbf{h} \neq 0$ vektor uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) < 0, \quad \mathbf{h} \neq 0,$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (12.2.11) kvadratik forma *manfiy aniqlan-gan* deyiladi.

Manfiy aniqlangan kvadratik forma uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \leq -\mu |\mathbf{h}|^2, \quad \mu > 0,$$

tengsizlik o'rinli.

4^o. Faraz qilaylik, $\mathbf{h}$ vektor $\mathbf{t}$ o'zgaruvchining chiziqli funksiyasi bo'lsin, ya'ni biror kvadratik S matritsa bilan

$$\mathbf{h} = S\mathbf{t}$$

tenglikni qanoatlantirsin. Bundan tashqari, bu almashtirishni ortogonal deb faraz qilaylik, ya'ni $S^{-1} = S^*$ bo'lsin deylik. U holda

$$(Hh, h) = (HSt, St) = (S^{-1}HSt, t)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

H matritsa simmetrik bo'lgani uchun, S matritsani shunday tanlash mumkinki, natijada yangi hosil bo'lgan $\tilde{H} = S^{-1}HS$ matritsa diagonal ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\tilde{H} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Bunda λ_k sonlar haqiqiy bo'lib, agar ularni o'sish tartibida joylashgan desak, ular bir qiymatli aniqlanadilar.

Agar barcha λ_k sonlar noldan farqli bo'lsa, $\tilde{H}$ matritsa *xosmas* deb va aks holda bu matritsa *xos* deb hisoblanadi. Bunga mos ravishda yuqoridagi (Hh, h) kvadratik forma ham *xosmas* yoki *xos* deb ataladi.

Agar barcha λ_k sonlar bir xil ishorali bo'lsa, *xosmas* (Hh, h) kvadratik formaning ishorasi aniqlangan deyiladi va agar bu sonlardan ba'zilari (hammasi emas) musbat bo'lib, qolganlari manfiy bo'lsa, bu kvadratik formaning ishorasi o'zgaruvchan deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi differensial *xos* yoki *xosmas* kvadratik formadan iborat bo'lib, oxirgi holda bu formaning ishorasi aniqlangan yoki aniqlanmagan bo'lishi mumkin. Funksiya ikkinchi differensial ishorasining aniqlanganligi ekstremal nuqtalarni topishda muhim ahamiyatga egadir.

4. Yuqori tartibli differensiallar.

Berilgan f funksiyaning m -tartibli differensial induktiv ravishda aniqlanadi. Chunonchi, faraz qilaylik, f funksiya biror Ω so-

hada m marta differensiallanuvchi bo'lib, uning $(m - 1)$ -tartibli $d^{m-1}f(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ differensiali barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun aniqlangan bo'lsin. U holda bu $(m - 1)$ -tartibli differensial $\mathbf{x}$ o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'ladi. Demak,

$$d^{m-1}f(\mathbf{x} + \mathbf{h}, d\mathbf{x}) - d^{m-1}f(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \nabla[d^{m-1}f(\mathbf{x}, d\mathbf{x})] \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|).$$

Bu orttirmaning $\mathbf{h}$ bo'yicha chiziqli qismi

$$\nabla[d^{m-1}f(\mathbf{x}, d\mathbf{x})] \cdot \mathbf{h} \quad (12.2.14)$$

ga teng bo'lib, uning $\mathbf{h} = d\mathbf{x}$ dagi qiymati f funksiyaning m -tartibli differensial deyiladi.

Bu differensialning ko'rinishini aniqlash maqsadida quyidagi

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

formal ko'rinishdagi amalni kiritamiz.

Bu amal yordamida istalgan differensiallanuvchi f funksiya uchun

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \quad (12.2.15)$$

deb yozish mumkin.

Endi $m = 2, 3, \dots$ uchun induktiv ravishda

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^m f(\mathbf{x}) = (\mathbf{h} \cdot \nabla)[(\mathbf{h} \cdot \nabla)^{m-1} f(\mathbf{x})] \quad (12.2.16)$$

deb aniqlaymiz.

Yuqorida keltirilgan m -tartibli differensialning (12.2.14) ta'rifini hisobga olib, $m = 1, 2, \dots$ uchun induktiv ravishda bu differensialning

$$d^m f(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = (d\mathbf{x} \cdot \nabla)^m f(\mathbf{x}) \quad (12.2.17)$$

ko'rinishga ega ekanini ko'rsatish mumkin.

O'z navbatida, (12.2.15) va (12.2.16) ta'riflardan foydalanib,

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^m f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_m=1}^n \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}} h_{k_1} h_{k_2} \cdots h_{k_m} \quad (12.2.18)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, biz quyidagi tasdiqqa kelamiz.

12.2.2 - tasdiq. m -tartibli differensial uchun

$$d^m f(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_m=1}^n \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}} dx_{k_1} dx_{k_2} \cdots dx_{k_m} \quad (12.2.19)$$

tenglik o'rinli.

Isbot bevosita (12.2.17) va (12.2.18) tengliklardan kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlash joizki, agar $\mathbf{x}$ argument $\mathbf{t}$ o'zgaruvchining chiziq-li bo'lmagan funksiyasi bo'lsa, u holda $m \geq 2$ lar uchun $f(\mathbf{x})$ funksiya m -tartibli differensialining ko'rinishi biroz murakkabroq bo'ladi, ya'ni yuqori tartibli differensial invariantlik xossasiga ega bo'lmaydi.

Biror nuqtada m marta uzluksiz differensiullanuvchi funksiyalar uchun quyidagi tasdiq o'rinli.

12.2.3 - tasdiq. Agar f funksiya biror $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada m marta uzluksiz differensiullanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning m -tartibli differensial ham shu nuqtada uzluksiz bo'lib, yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ lar uchun

$$d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) |\mathbf{h}|^m \quad (12.2.20)$$

tenglik o'rinli bo'ladi; bunda $\mathbf{h}$ bo'yicha tekis ravishda

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \quad \text{da} \quad \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \rightarrow 0.$$

Bu yerda "tekis ravishda" deganimiz quyidagini anglatadi: istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ bo'lganda barcha qaralayotgan $\mathbf{h}$ lar uchun

$$|\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})| < \varepsilon \quad (12.2.21)$$

tengsizlik bajariladi.

Tasdiqning isboti bevosita 12.2.2 - tasdiqdan kelib chiqadi. Haqiqatan, 12.2.2 - tasdiqqa ko'ra,

$$d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) =$$

$$\sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_m=1}^n \left(\frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_m}} - \frac{\partial^m f(\mathbf{a})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_m}} \right) h_{k_1} h_{k_2} \dots h_{k_m}. \quad (12.2.22)$$

Berilgan f funksiyaning barcha m -tartibli qisman hosilalari $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun, har qanday $\varepsilon' > 0$ olsak ham, shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ bo'lganda qavs ichidagi ifoda ε' dan kichik bo'ladi. Shunday ekan, (12.2.22) ga ko'ra,

$$\begin{aligned} |\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \cdot |\mathbf{h}|^m &= |d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h})| \leq \\ &\leq \varepsilon' \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_m=1}^n |h_{k_1} h_{k_2} \dots h_{k_m}| = \varepsilon' \left(\sum_{k=1}^n |h_k| \right)^m. \end{aligned}$$

Lekin Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga asosan,

$$\sum_{k=1}^n |h_k| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n h_k^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} |\mathbf{h}|.$$

Demak,

$$|\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \cdot |\mathbf{h}|^m \leq \varepsilon' n^{m/2} |\mathbf{h}|^m$$

yoki

$$|\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \leq \varepsilon' n^{m/2}. \quad (12.2.23)$$

Shunday ekan, $\varepsilon' = n^{-m/2} \varepsilon$ deb tanlab, (12.2.23) dan talab qilingan (12.2.21) bahoni olamiz.

■

5. Teylor formulasi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasining eng ixcham ko'rinishi differentsiallarda yoziladi. Bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasining differentsiallardagi ko'rinishi 4.6 - paragraf oxiridagi eslatmada keltirilgan edi.

12.2.1 - teorema (Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi). Faraz qilaylik, $m \geq 0$ butun son bo'lib, f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda $(m+1)$ marta differentsiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ shunday vektor bo'lsinki, $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ nuqta $\mathbf{a}$ ning yuqoridagi atrofida yotsin. U holda $0 < \theta < 1$ intervaldan shunday θ son topiladiki, u uchun

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{2!} + \dots + \frac{d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{m!} + R_{m+1}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \quad (12.2.24)$$

tenglik bajariladi, bunda

$$R_{m+1}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \frac{d^{m+1} f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}, \mathbf{h})}{(m+1)!}. \quad (12.2.25)$$

Isbot. Ushbu

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

tenglik bilan $0 \leq t \leq 1$ kesmada aniqlangan bir o'zgaruvchili $F(t)$ funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $[0, 1]$ kesmada $(m+1)$ marta differentsiallanuvchi va bundan chiqdi, tining uchun Lagranj

ko'rinishidagi qoldiq hadli

$$F(1) - F(0) = \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (12.2.26)$$

Taylor formulasi o'rinni.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga asoslanib, F funksiyaning hosilasini topamiz:

$$F'(t) = \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}).$$

Hosila olishni davom ettirib,

$$F^{(k)}(t) = (\mathbf{h} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}), \quad k = 1, 2, \dots, m+1,$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan formulani (12.2.17) bilan taqqoslasak,

$$F^{(k)}(t) = d^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}, \mathbf{h}) \quad (12.2.27)$$

tenglikni olamiz.

Xususan, $t = 0$ da $k = 1, 2, \dots, m$ uchun

$$F^{(k)}(0) = d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \quad (12.2.28)$$

bo'ladi.

Shunga o'xshash, $k = m+1$ uchun yana (12.2.27) formulani qo'llasak,

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}, \mathbf{h}) \quad (12.2.29)$$

tenglikka kelamiz.

Endi F funksiya hosilalari uchun topilgan (12.2.28) va (12.2.29) ifodalarni (12.2.26) formulaga qo'ysak, talab qilingan (12.2.24) va (12.2.25) tengliklarni olamiz.



Natija (Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi). Faraz qilaylik, $m \geq 0$ butun son bo'lib, f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu nuqtada m marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. U holda quyidagi

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{2!} + \dots + \frac{d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{m!} + o(|\mathbf{h}|^m) \quad (12.2.30)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar 12.2.1 - teoremda m o'rniga $m - 1$ ni olsak,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{2!} + \dots + \\ &+ \frac{d^{m-1} f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{(m-1)!} + \frac{d^m f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}, \mathbf{h})}{m!} \end{aligned} \quad (12.2.31)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Lekin, 12.2.3 - tasdiqqa ko'ra,

$$\frac{d^m f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}, \mathbf{h})}{m!} = \frac{d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{m!} + o(|\mathbf{h}|^m).$$

Shunday ekan, talab qilingan (12.2.30) formula bevosita (12.2.31) tenglikdan kelib chiqadi.

■

6*. Multiindekslar. Ushbu bandda biz zamonaviy matematik adabiyotlarda formulalar ko'rinishini ixchamlashtirish maqsadida foydalaniladigan maxsus belgilashlar bilan tanishamiz. Quyida biz biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan funksiyalarni qaraymiz.

Multiindeks deb komponentalari manfiy bo'lmagan butun sonlardan iborat vektorga aytamiz. Multiindekslarni yunoncha harflar orqali belgilaymiz, masalan:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j = 0, 1, 2, \dots, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Multiindeksning uzunligi deb manfiy bo'lmagan $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ butun songa aytamiz va uni $|\alpha|$ simvoli orqali belgilaymiz, ya'ni $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Aynan shu simvol orqali (11.1.5) vektorning ham uzunligini belgilaganimiz hech qanday anglashmovchilik keltirmaydi, chunki har gal shu simvolga duch kelganimizda qanday uzunlik to'g'risida gap ketayotgani matn mazmunidan tushunarli bo'ladi.

Har qanday $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor va α multiindeks uchun

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad (12.2.32)$$

belgilashni kiritamiz va bu belgilashdan foydalanishda $0^0 = 1$ deb kelishib olamiz.

Endi

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (12.2.33)$$

deb belgilab, quyidagi

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_n) \quad (12.2.34)$$

differensiallash vektorini kiritaylik.

(12.2.33) va (12.2.34) belgilashlardan

$$Df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$$

tenglik kelib chiqadi.

Har qanday α multiindeks uchun

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot D_n^{\alpha_n} \quad (12.2.35)$$

deymiz.

Bu belgilash quyidagi

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (12.2.36)$$

tenglik o'rinli ekanini anglatadi.

Masalan, agar $n = 3$ va $\alpha = (3, 2, 1)$ desak, $|\alpha| = 6$ bo'lib,

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^6 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2^2 \partial x_3}$$

tenglik bajariladi.

Multiindekslar matematik tahlildagi ko'p tasdiqlarni ixcham ko'rinishda yozishga imkon beradi. Masalan, Teylor formulasi va ikki funksiya ko'paytmasini differensiallashning Leybnits qoidasi shular jumlasidandir.

Har qanday $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ multiindeks uchun

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \alpha_n!$$

deb belgilaymiz.

Yuqoridagi belgilashlarda, masalan, Teylor formulasi

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x})}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha + R_{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \quad (12.2.37)$$

kabi yoziladi, bunda Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had

$$R_{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha \quad (12.2.38)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Keltirilgan (12.2.37) va (12.2.38) formulalarda, odatdagidek, f funksiya $x \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida $(m+1)$ marta differensiallanuvchi deb faraz qilinadi va $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ yetarlicha kichik vektor, θ esa $0 < \theta < 1$ intervaldan olingan biror son deb hisoblanadi.

Istalgan γ multiindeks uchun ikki funksiya ko'paytmasini differensiallashning Leybnits formulasi quyidagi

$$D^\gamma [u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})] = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} D^\alpha u(\mathbf{x}) \cdot D^\beta v(\mathbf{x}) \quad (12.2.39)$$

ko'rinishda yoziladi, bunda yig'indi, yig'indisi γ ga teng bo'lgan, barcha α va β multiindekslar bo'yicha olinadi.

Yuqoridagi (12.2.37)-(12.2.39) formulalardan qisman hosilali differensial tenglamalarning zamonaviy nazariyasida keng foydalaniladi.

12.3-§. Oshkormas funksiyalar

1. Oshkormas funksiyalar. $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosidan biror Ω sohani olib, barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ va barcha $u \in \mathbb{R}$ larda aniqlangan hamda sonli qiymat qabul qiluvchi $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyani, ya'ni

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

funksiyani qaraymiz.

Agar shunday $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya topilsaki, barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun

$$F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0 \quad (12.3.1)$$

tenglik bajarilsa, u holda f funksiya (12.3.1) tenglama orqali oshkormas ko'rinishda berilgan deyiladi va bu funksiya *oshkormas funksiya* deb ataladi.

12.3.1 - misol. Quyidagi

$$F(\mathbf{x}, u) = e^u - 1 - |\mathbf{x}|^2$$

ko'rinishda aniqlangan $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani qaraylik.

Ravshanki, bunda (12.3.1) tenglama birgina

$$f(\mathbf{x}) = \ln(1 + |\mathbf{x}|^2)$$

oshkormas funksiyani aniqlaydi. Bundan chiqdi, ushbu misolda oshkormas funksiya mavjud, yagona, uzluksiz va istalgan marta differensiallanuvchi bo'lar ekan.

12.3.2 - misol. Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tekislikdagi birlik doira bo'lsin:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Ushbu

$$F(\mathbf{x}, u) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - u^2 \quad (12.3.2)$$

ko'rinishdagi $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani qaraylik.

Bu holda (12.3.1) tenglik birdan ko'p oshkormas funksiyani aniqlashini ko'rish qiyin emas. Masalan, bunday oshkormas funksiyalardan biri

$$f_1(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

kabi aniqlanadi. Ravshanki, (12.3.1) tenglik

$$f_2(\mathbf{x}) = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

oshkormas funksiyani ham aniqlaydi.

Bundan tashqari, agar E to'plam Ω sohasining istalgan qisman to'plami bo'lsa,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2}, & \text{agar } \mathbf{x} \in E \text{ bo'lsa,} \\ -\sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2}, & \text{agar } \mathbf{x} \in \Omega \setminus E \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (12.3.3)$$

ko'rinishdagi funksiya ham (12.3.1) tenglik bilan aniqlangan oshkormas funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, oshkormas funksiya, umuman aytganda, bir qiymatli aniqlanmas ekan. Bundan tashqari, (12.3.3) funksiya misolida ko'rinib turibdiki, oshkormas funksiyani aniqlovchi F funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lishiga qaramasdan, oshkormas funksiyaning o'zi uzilishga ega bo'lishi ham mumkin ekan (qaralayotgan misolda F funksiya (12.3.2) ko'rinishdagi polinomdir).

Shuni qayd qilish kerakki, agar F funksiya hech bir nuqtada nol qiymatni qabul qilmasa, masalan,

$$F(\mathbf{x}, u) = e^u + 1 + |\mathbf{x}|^2$$

ko'rinishga ega bo'lsa, (12.3.1) tenglama hech qanday oshkormas funksiyani aniqlamaydi, ya'ni oshkormas funksiya, umuman aytganda, mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

2. Oshkormas funksiyaning mavjudligi va differensiallanuvchanligi.

$F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaning u o'zgaruvchi bo'yicha qat'iy monotonligi (12.3.1) tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiya uchun muhim mavjudlik va yagonalik shartidir.

Buni ko'rish uchun $\mathbb{R}^{n+1}$ fazoda silindr tushunchasini kiritamiz. Chunonchi, agar B (ochiq yoki yopiq) $\mathbb{R}^n$ dagi biror shar bo'lib, $I = [\alpha, \beta]$ biror kesma bo'lsa, $Q = B \times I$ to'plamga *silindr* deyimiz. Shunday qilib,

$$Q = \{(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in B, \quad \alpha \leq u \leq \beta\}. \quad (12.3.4)$$

Berilgan $[\alpha, \beta]$ kesmadan olingan istalgan t uchun

$$S(t) = \{(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in B, \quad u = t\}$$

to'plamga Q silindrning *kesimi* deyimiz, bunda $S(\alpha)$ kesimga Q silindrning *quyi asosi* va $S(\beta)$ kesimga esa, silindrning *yuqori asosi* deyimiz.

Monotonlik shartining ahamiyati quyidagi lemmada yaqqol ko'rinadi.

12.3.1 - lemma. Faraz qilaylik, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya (12.3.4) ko'rinishdagi biror silindrda aniqlangan bo'lib, uning quyi asosida manfiy va yuqori asosida musbat qiymatlarni qabul qilsin.

Agar har bir tayinlangan $\mathbf{x}$ uchun $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya u bo'yicha uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'lsa, u holda (12.3.1) tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiya mavjud va yagonadir.

Isbot. Aytaylik, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya $Q = B \times [\alpha, \beta]$ silindrning barcha nuqtalarida aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy tayinlangan $\mathbf{x} \in B$ uchun

$$F(\mathbf{x}, \alpha) < 0, \quad F(\mathbf{x}, \beta) > 0$$

tengsizliklar bajarilsin.

U holda, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya u o'zgaruvchi bo'yicha $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun, 3.5.3 - teorema ko'ra, u barcha oraliq qiymatlarni qabul qiladi. Shunday ekan, har bir $\mathbf{x} \in B$ nuqta uchun $[\alpha, \beta]$ kesmada yotuvchi shunday $\xi = \xi(\mathbf{x})$ son topiladiki,

$$F(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in B,$$

tenglik bajariladi. $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaning u o'zgaruvchi bo'yicha qat'iy monotonligidan esa, bu nuqtaning yagonaligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $f(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})$ oshkormas funksiya mavjud va yagona ekan.

■

Albatta, lemmadagi $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya, silindrning yuqori va quyi asoslarida har xil ishoralarga ega bo'lib, silindr ichida u o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz va qat'iy monoton bo'lsin deb shart qo'yish yetarlidir.

Bunga misol tariqasida B deb radiusi $1/2$ ga teng va markazi koordinatalar boshida bo'lgan doirani olib, ya'ni $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1/2\}$ deb, 12.3.2 - misoldagi (12.3.2) funksiyaning endi

$$Q = B \times [0, 2]$$

silindrda qaraylik. U holda, barcha $\mathbf{x} \in B$ lar uchun

$$F(\mathbf{x}, 0) > 0, \quad F(\mathbf{x}, 2) < 0$$

tengsizliklar bajariladi. Bundan B doirada aniqlangan yagona oshkormas funksiyaning mavjudligi kelib chiqadi. Bu funksiyaning

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2}$$

ko'rinishga ega ekanini ko'rsatish oson.

Ma'lumki, funksiya hosilasining noldan farqliligi uni monotonligining yetarlilik shartidir. Navbatdagi lemmada faqat bir nuqtadagi-na hosilaning noldan farqli va uzluksiz bo'lishi shu nuqtaning biror atrofida funksiya monotonligini ta'minlashi ko'rsatiladi.

Ixtiyoriy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ va $\delta > 0$ uchun $B_{\mathbf{a},\delta}$ orqali quyidagi sharni belgilaymiz:

$$B_{\mathbf{a},\delta} = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\}. \quad (12.3.5)$$

12.3.2 - lemma. Faraz qilaylik, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya $(\mathbf{a}, w) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo'lib,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{a}, w) \neq 0$$

shartni qanoatlantiruvchi va $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz $\frac{\partial F}{\partial u}$ qismaniy hosilaga ega bo'lsin. Bundan tashqari,

$$F(\mathbf{a}, w) = 0 \quad (12.3.6)$$

bo'lsin.

U holda ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$$Q = B_{\mathbf{a},\delta} \times [w - \varepsilon, w + \varepsilon] \quad (12.3.7)$$

silindrda F funksiya u o'zgaruvchi bo'yicha qat'iy monoton bo'lib, bu silindrning quyi va yuqori asoslarida turli ishorali qiymatlar qabul qiladi.

Isbot. Aniqlik uchun

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{a}, w) > 0$$

deylik (teskari tengsizlik bajarilgan hol ham bir xilda o'rganiladi).

Bu tengsizlik va qisman hosilaning $(\mathbf{a}, w)$ nuqtada uzluksizligidan, 11.2.1 - tasdiqqa ko'ra, qayd etilgan nuqtada markazga ega bo'lgan biror $(n+1)$ -o'lchovli sharda

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u) > 0 \quad (12.3.8)$$

shartning bajarilishi kelib chiqadi.

Xususan, $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ desak, $F(\mathbf{a}, u)$ funksiyaning u o'zgaruvchi bo'yicha biror $(w - \varepsilon_0, w + \varepsilon_0)$ intervalda qat'iy monotonligini olamiz. Shunday ekan, istalgan musbat $\varepsilon < \varepsilon_0$ uchun (12.3.6) shartdan

$$F(\mathbf{a}, w - \varepsilon) < 0, \quad F(\mathbf{a}, w + \varepsilon) > 0$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Lekin, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaning $\mathbf{x}$ o'zgaruvchi bo'yicha uzluksizligiga ko'ra, shunday $\delta > 0$ topiladiki, bu ikki tengsizliklar $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqta-ning δ -atrofida ham saqlanadi, ya'ni

$$F(\mathbf{x}, w - \varepsilon) < 0, \quad F(\mathbf{x}, w + \varepsilon) > 0, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta.$$

Demak, F funksiya (12.3.7) silindrning quyi asosida manfiy va yuqori asosida esa, musbat bo'ladi.

Nihoyat, agar δ ni yetarlicha kichik qilib olsak, qaralayotgan silindr (12.3.8) tengsizlik bajariladigan yuqoridagi $(n+1)$ -o'lchovli sharning ichida yotadi, ya'ni bunday silindrda $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya u o'zgaruvchi bo'yicha qat'iy o'sadi.

■

Shuni aytish kerakki, umumiy holda (12.3.1) tenglamaning yechimga ega bo'lishini ta'minlaydigan shartlar lokal xarakterga ega, ya'ni bunday shartlar yechimning qaralayotgan nuqtaning yetarlicha kichik atrofida mavjud va yagonaligini kafolatlaydi. Muhimi shundaki, bu atrof $\mathbf{x}$ o'zgaruvchining $\mathbb{R}^n$ fazosidan emas, balki $(\mathbf{x}, u)$ o'zgaruvchining $\mathbb{R}^{n+1}$ fazosidan olinadi. Chunonchi, navbatdagi teorema o'rinli.

12.3.1 - teorema. Faraz qilaylik,

$$F : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

funksiya $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosidan olingan biror Ω sohasining barcha $\mathbf{x}$ nuqtalarida va biror I intervalning barcha u nuqtalarida aniqlangan bo'lib, $\mathbf{x} \in \Omega$ bo'yicha uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari, biror $(\mathbf{a}, w) \in \Omega \times I$ nuqtada

$$F(\mathbf{a}, w) = 0 \quad (12.3.9)$$

tenglik bajarilsin.

Nihoyat, $(\mathbf{a}, w) \in \Omega \times I$ nuqtaning biror atrofida, shu nuqtada uzluksiz bo'lgan va

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{a}, w) \neq 0 \quad (12.3.10)$$

shartni qanoatlantiruvchi $\frac{\partial F}{\partial u}$ qismaniy hosila mavjud bo'lsin. U holda $(\mathbf{a}, w)$ nuqtaning

$$Q = B_{\mathbf{a}, \delta} \times [w - \varepsilon, w + \varepsilon], \quad B_{\mathbf{a}, \delta} \subset \Omega. \quad [w - \varepsilon, w + \varepsilon] \subset I, \quad (12.3.11)$$

ko'rinishdagi shunday silindrik atrofi topiladiki,

$$F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in Q, \quad (12.3.12)$$

tenglama $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz bo'lgan yagona $f : B_{\mathbf{a}, \delta} \rightarrow \mathbb{R}$ oshkormas funksiyani aniqlaydi.

Isbot. 12.3.1 - va 12.3.2 - lemmalarga ko'ra, istalgan yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ uchun (12.3.11) ko'rinishdagi shunday silindrik atrof topiladiki, unda oshkormas funksiyani aniqlaydigan (12.3.12) tenglama $f = f(\mathbf{x})$ ko'rinishdagi yechimga ega bo'lib, bu yechim yagona bo'ladi. Bunda, albatta, $f(\mathbf{a}) = w$ munosabat o'rinalidir.

Endi f funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksizligini ko'rsatish yetarli. Lekin biz ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topdikki, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ bo'lganda bu funksiyaning grafigi, 12.3.2 - lemmaga ko'ra, (12.3.11) silindr ichida yotadi. Demak,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = |f(\mathbf{x}) - w| \leq \varepsilon.$$

Bu esa f funksiyaning a nuqtadagi uzluksizligini anglatadi.

Eslatma. Yuqoridagi teoremaning ma'nosi quyidagidan iborat: (12.3.11) silindrik atrofda yotuvchi va $F(x, u) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar oshkormas funksiyaning grafigidan iborat sirtini tashkil etadi.

Isbotlangan teorema (12.3.10) shart bajarilganda (12.3.1) tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiyaning mavjud, yagona va uzluksiz ekanini ko'rsatadi. Agar, qo'shimcha ravishda, $F(x, u)$ funksiyaning (x, u) argumentlar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchiligi talab qilinsa, u holda oshkormas funksiyaning ham uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishini isbotlash mumkin. Bunda, ko'p o'zgaruvchili funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi deganda, biz bu funksiyaning har bir o'zgaruvchi bo'yicha birinchi tartibli uzluksiz qismaniy hosilalarga ega ekanini tushunamiz.

12.3.2 - teorema. Faraz qilaylik, $F(x, u)$ funksiya 12.3.1 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantirsin hamda bunga qo'shimcha ravishda, $(a, w) \in \Omega \times I$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, (12.3.1) tenglik bilan aniqlanuvchi $f(x)$ oshkormas funksiya (12.3.5) ko'rinishdagi biror $B_{a, \delta}$ sharda uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Isbot. 12.3.1 - teorema ko'ra, (12.3.11) ko'rinishdagi biror Q silindrda

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \neq 0$$

tengsizlik bajariladi.

12.3.1 - teorema $x \in B_{a, \delta}$ uchun mavjudligi, yagonaligi va uzluksizligi kafolatlangan oshkormas funksiyani $f(x)$ deb belgilaylik. Istalgan $x \in B_{a, \delta}$ nuqtani tayinlab, $x + h \in B_{a, \delta}$ shartni qanoatlantiruvchi $h \in \mathbb{R}^n$ orttirma olamiz. So'ngra

$$\Delta f = f(x + h) - f(x)$$

deb belgilaymiz.

U holda, (12.3.12) tenglikka asosan,

$$0 = F(\mathbf{x} + \mathbf{h}, f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x} + \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \Delta f) - F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})).$$

Lagranj formulasiga ko'ra, $(0, 1)$ intervalda shunday θ son topiladi-ki, u uchun

$$\begin{aligned} 0 &= F(\mathbf{x} + \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \Delta f) - F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \theta \Delta f) \cdot \mathbf{h} + \frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \theta \Delta f) \cdot \Delta f \end{aligned}$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikka ko'ra,

$$\Delta f = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \theta \Delta f) \cdot \mathbf{h}}{\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \theta \Delta f)}. \quad (12.3.13)$$

Quyidagi

$$A(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \quad (12.3.14)$$

vektorni qaraylik. Teorema shartiga ko'ra, $\frac{\partial F}{\partial u}$ qisman hosila uzluksiz va (12.3.11) ko'rinishdagi Q yopiq silindrda noldan farqli. Shuning uchun, qaralayotgan funksiyalarning uzluksizligiga asosan,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \theta \Delta f)}{\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}, f(\mathbf{x}) + \theta \Delta f)} = A(\mathbf{x}) + o(1), \quad \mathbf{h} \rightarrow 0, \quad (12.3.15)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Natijada, (12.3.13) tenglik va (12.3.15) bahodan

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu esa f funksiyaning $\mathbf{x}$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini anglatadi. Bundan tashqari, (12.3.15) va (12.3.14) munosabatlarga ko'ra,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}. \quad (12.3.16)$$

Bu tenglikdan, teorema shartiga ko'ra, f oshkormas funksiyani barcha qisman hosilalarining uzluksizligi kelib chiqadi. Demak, f uzluksiz differensiallanuvchi bo'lar ekan.

■

Eslatma. (12.3.16) vektor tenglikni gradientning har bir komponentasi uchun alohida yozish mumkin. Bunda biz qisman hosilalar uchun quyidagi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \quad (12.3.17)$$

tengliklarni olamiz.

3. Funksiyalar sistemasi va vektor funksiyalar.

1⁰. Ikki oshkormas funksiyani aniqlash uchun quyidagi ikki tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, u_1, u_2) &= 0, \\ F_2(\mathbf{x}, u_1, u_2) &= 0, \end{aligned} \quad (12.3.18)$$

bu yerda, agar $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ desak, $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ berilgan haqiqiy funksiyalar bo'lib, ular n ta $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va ikkita (u_1, u_2) larning funksiyalaridir.

Faraz qilaylik, biror $(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ nuqtada

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \neq 0 \quad (12.3.19)$$

bo'lsin. U holda, 12.3.1 - teoremaga ko'ra,

$$F_1(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, u_2), u_2) = 0$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi

$$u_1 = \varphi(\mathbf{x}, u_2) \quad (12.3.20)$$

funksiya mavjud va yagonadir.

Topilgan u_1 qiymatni (12.3.18) ning ikkinchi tengligiga qo'ysak, u_2 funksiyani aniqlash uchun

$$F_2(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, u_2), u_2) = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz. 12.3.1 - teoremani yana bir marta qo'llash maqsadida,

$$v(\mathbf{x}, u_2) = F_2(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, u_2), u_2) \quad (12.3.21)$$

funksiyani u_2 bo'yicha qisman hosilasining noldan farqli bo'lish shartini topamiz.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial v}{\partial u_2} = \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \frac{\partial F_2}{\partial u_2}.$$

Bundan tashqari, (12.3.17) formulaga asosan,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = - \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial u_1}} \frac{\partial F_1}{\partial u_2}.$$

Shunday ekan,

$$\frac{\partial v}{\partial u_2} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial u_1}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial u_2} - \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right).$$

Agar $\mathbf{F}$ simvol orqali $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), F_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ vektor-funksiyani belgilasak, qavs ichidagi ifoda

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{array} \right\|$$

matritsaning determinanti ekanini ko'ramiz. Bu matritsa Yakobi matritsasi deb va uning determinanti esa, *yakobian* deb ataladi.

Shunday qilib, $\frac{\partial v}{\partial u_2}$ qismaniy hosilaning noldan farqli bo'lish sharti quyidagi

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \neq 0 \quad (12.3.22)$$

ko'rinishga ega ekan.

Bu shart bajarildi deb faraz qilib, (12.3.21) funksiyaga 12.3.1 - teoremani qo'llasak,

$$v(\mathbf{x}, f_2(\mathbf{x})) = F_2[x, \varphi(\mathbf{x}, f_2(\mathbf{x})), f_2(\mathbf{x})] = 0$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi

$$u_2 = f_2(\mathbf{x})$$

funksiyaning mavjud va yagona ekaniga iqror bo'lamiz.

Nihoyat,

$$f_1(\mathbf{x}) = \varphi(x, f_2(\mathbf{x}))$$

deb belgilasak, (f_1, f_2) funksiyalar juftligi (12.3.18) tenglamalar sistemasini qanoatlantirishini ko'ramiz.

2^o. Umumiy holda ham, ixtiyoriy sondagi tenglamalar sistemasining yechimga ega bo'lishini mos yakobianing noldan farqli bo'lishi kafolatlashini kutish tabiiydir. Ushbu bandda haqiqatan ham shunday ekanini ko'rsatamiz.

Vektor qiymat qabul qiluvchi akslantirishlarni (ya'ni vektor-funksiyalarni), skalyar (ya'ni sonli qiymat qabul qiluvchi) funksiyalardan farqlash maqsadida, qalin harflar bilan belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektor-funksiya berilgan bo'lsin. Ya'ni,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

bo'lib, har bir $f_k(\mathbf{x})$ funksiya n ta $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o'zgaruvchining haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyasi bo'lsin. Albatta, bu ko'rinishdagi oshkormas vektor-funksiyani aniqlash uchun biror $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ larda aniqlangan m ta $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $j = 1, 2, \dots, m$, funksiyani qarash lozim.

Agar $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ deb belgilasak,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \quad (12.3.23)$$

tenglama $\mathbf{x}$ ga bog'liq m ta noma'lum funksiyani aniqlash uchun m ta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.

$\mathbf{F}$ vektor-funksiyani differentsiallanuvchi deb faraz qilamiz, ya'ni uning har bir komponentasi $\mathbf{x}$ va $\mathbf{u}$ bo'yicha differentsiallanuvchi bo'lsin deyimiz.

(12.3.23) sistemaga mos keluvchi

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \left\| \frac{\partial F_j}{\partial u_k} \right\|$$

Yakobi matritsasini qaraylik.

Ta'rif. $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ vektor-funksiyaning $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ o'zgaruvchilar bo'yicha Yakobi determinanti yoki yakobiani deb quyidagi

$$J = \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{u}} = \det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$$

determinantga aytamiz.

Bundan keyin $\mathbb{R}^n$ fazosidagi radiusi r va markazi $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada bo'lgan sharni, o'lchovini alohida qayd etish maqsadida, $B_n(\mathbf{a}, r)$ simvoli orqali belgilaymiz, ya'ni

$$B_n(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

12.3.3 - teorema. Faraz qilaylik, $F(x, u)$ biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohaning barcha x nuqtalarida va biror $G \subset \mathbb{R}^m$ sohaning barcha u nuqtalarida aniqlangan bo'lib, qiymatlar to'plami $\mathbb{R}^m$ da bo'lgan vektor-funksiya bo'lsin:

$$F : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Bundan tashqari, biror $(a, w) \in \Omega \times G$ nuqtada

$$F(a, w) = 0 \quad (12.3.24)$$

tenglik bajarilib, shu (a, w) nuqtaning biror atrofida F vektor-funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin va o'sha nuqtaning o'zida esa, yakobian noldan farqli bo'lsin:

$$\det \frac{\partial F}{\partial u}(a, w) \neq 0. \quad (12.3.25)$$

U holda, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $(a, w) \in \Omega \times G$ nuqtaning shunday $Q = B_n(a, \delta) \times B_m(w, \varepsilon)$ atrofi, ya'ni

$$Q = \{(x, u) : |x - a| < \delta, |u - w| < \varepsilon, x \in \Omega, u \in G\}$$

atrofi topiladiki, bunda

$$F(x, f(x)) = 0 \quad (12.3.26)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi va $B_n(a, \delta)$ sharda uzluksiz differensiallanuvchi $f : B_n(a, \delta) \rightarrow B_m(w, \varepsilon)$ oshkormas vektor-funksiya mavjud va yagona bo'ladi.

Isbot. Avval $m = 1$ bo'lganda bu teorema 12.3.2 - teorema bilan ustma-ust tushishini qayd etamiz. Shuning uchun, teoremani umumiy holda isbot qilish uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz.

Shunday qilib, $m = 1$ da teorema o'rinli. Endi birdan katta istalgan m natural sonini olib, teorema $(m - 1)$ ta tenglama uchun o'rinli bo'lsin deylik. Biz bundan teoremaning m ta tenglama uchun o'rinli bo'lishini keltirib chiqaramiz.

(12.3.25) shartga ko'ra, (a, w) nuqtada (hosilalarning uzluksizligiga ko'ra, bu nuqtaning biror atrofida ham)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Shunday ekan, bu yakobianning biror $(m-1)$ -tartibli minori ham noldan farqli bo'ladi. Faraz qilaylik, noldan farqli minor matritsasi-ning chap yuqori burchagidagi minor bo'lsin, ya'ni

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Biz u_m ni erkli o'zgaruvchi deb hisoblashimiz mumkin. U holda, induksiyaning faraziga ko'ra, shunday $(m-1)$ ta

$$u_k = \varphi_k(\mathbf{x}, u_m), \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

funksiyalar topiladiki, ular uchun quyidagi

$$F_j(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, u_m), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, u_m), u_m) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (12.3.27)$$

ayniyatlar bajariladi.

Endi u_m ni shunday tanlash kerakki, yuqoridagi singari ayniyat $j = m$ da ham bajarilsin. Buning uchun

$$v(\mathbf{x}, u_m) = F_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, u_m), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, u_m), u_m) \quad (12.3.28)$$

deb, $\frac{\partial v}{\partial u_m}(\mathbf{a}, w_m) \neq 0$ ekanini ko'rsatamiz. Bundan so'ng 12.3.1 - teoremani qo'llasak, (12.3.27) ko'rinishdagi tenglamaning $j = m$ da ham yechimga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial v}{\partial u_m} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F_m}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_m} + \frac{\partial F_m}{\partial u_m}. \quad (12.3.29)$$

Endi (12.3.27) ayniyatni u_m bo'yicha differensiallasak,

$$0 = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F_j}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_m} + \frac{\partial F_j}{\partial u_m}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (12.3.30)$$

tengliklarni olamiz.

Ravshanki, hosil bo'lgan (12.3.29) va (12.3.30) tengliklar birgalikda

$$A\mathbf{y} = \mathbf{g}$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini tashkil qiladi, bu yerda

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$$

matritsa bo'lib, $\mathbf{y}$ va $\mathbf{g}$ lar esa $\mathbb{R}^m$ fazosining

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_m}, \dots, \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m}, 1 \right) \quad \text{va} \quad \mathbf{g} = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial v}{\partial u_m} \right)$$

ko'rinishda aniqlangan vektorlaridir.

Shartga ko'ra, A matritsaning determinanti noldan farqli. Shuning uchun, agar $\frac{\partial v}{\partial u_m}(\mathbf{a}, u_m) = 0$ deb faraz qilsak, ya'ni $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ desak, yuqoridagi tenglamalar sistemasining o'ng tarafi nolga teng bo'lib, bundan $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ tenglik kelib chiqar edi. Bu esa $y_m = 1$ tenglikka ziddir.

Demak, bizni qiziqtirayotgan hosila noldan farqli ekan. Bundan chiqdi, (12.3.28) funksiyaga 12.3.1 - teoremani qo'llashimiz mumkin. Bu teoreмага ko'ra,

$$u_m = f_m(\mathbf{x})$$

ko'rinishdagi shunday oshkormas funksiya topiladiki, u uchun

$$F_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, u_m), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, u_m), f_m(\mathbf{x})) = 0$$

ayniyat bajariladi.

Shunday ekan,

$$f_k(\mathbf{x}) = \varphi_k(\mathbf{x}, f_m(\mathbf{x})), \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

deb belgilab, biz (12.3.26) tenglamani qanoatlantiruvchi $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ vektor-funksiyaga ega bo'lamiz.

Eslatma. Keltirilgan isbotdan oshkormas funksiyaning x_i o'zgaruvchi bo'yicha qisman hosilasini hisoblash qoidasini topishimiz mumkin. Buning uchun (12.3.26) ayniyatni, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra, x_i bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}.$$

So'ngra hosil bo'lgan tenglikni quyidagi

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \quad (12.3.31)$$

m ta chiziqli tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozamiz. Bu sistemada

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$$

noma'lum vektordir.

Shartga ko'ra, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$ matritsaning determinanti noldan farqli yakobiandir. Shu sababli, (12.3.31) sistema yechimga ega. Shunday ekan, chiziqli tenglamalar sistemasini bizga ma'lum usullar bilan yechib, izlanayotgan hosilalarni topishimiz mumkin.

12.3.3 - misol. Faraz qilaylik, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektor-funksiyaning komponentalari

$$F_1(x, y, u, v) = e^u + v - x, \quad F_2(x, y, u, v) = e^v - u - y$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Bu funksiyaga mos kelgan yakobian oson hisoblanadi. Haqiqatan,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^u & 1 \\ -1 & e^v \end{vmatrix} = e^{u+v} + 1.$$

Demak, yakobian hech qaysi nuqtada nolga aylanmaydi. Bundan chiqdi, istalgan (x_0, y_0, u_0, v_0) nuqta atrofida $\mathbf{F}(x, y, u, v) = 0$ tenglama ikki $u = u(x, y)$ va $v = v(x, y)$ oshkormas funksiyani aniqlaydi.

Masalan, $x_0 = y_0 = 1$ va $u_0 = v_0 = 0$ koordinatalarga ega bo'lgan nuqtani olaylik. U holda, 12.3.3 - teorema ko'ra, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ oshkormas funksiyalar $(1, 1)$ nuqtaning biror atrofida mavjud va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, ular $u(1, 1) = v(1, 1) = 0$ shartlarni qanoatlantiradi.

Misol tariqasida, bu funksiyalarning x bo'yicha $(1, 1)$ nuqtadagi qisman hosilalarini hisoblaylik. Ravshanki, bu holda (12.3.31) sistema

$$\begin{cases} e^u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ e^v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Bundan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^v}{1 + e^{u+v}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + e^{u+v}}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Demak, $u(1, 1) = v(1, 1) = 0$ shartimizga ko'ra,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2}.$$

4. Teskari funksiya haqidagi teorema.

Faraz qilaylik, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektor-funksiya berilgan bo'lsin. Ushbu bandda biz teskari f^{-1} vektor-funksiyaning mavjud bo'lish shartlarini va uning qanday sohada aniqlanganligini hamda qanchalik silliq bo'lishini o'rganamiz.

Berilgan f akslantirish har bir $\mathbf{x} \in \Omega$ nuqtaga $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in G$ nuqtani mos qo'ysin deylik. Ya'ni, agar $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ desak,

$$y_k = f_k(\mathbf{x}) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

bo'lsin.

12.3.4 - teorema. Faraz qilaylik, $f(\mathbf{x})$ vektor-funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $\mathbb{R}^n$ da qiymat qabul qilsin. Bundan tashqari, $\mathbf{a}$ nuqtaning o'zida

$$\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \neq 0 \quad (12.3.32)$$

shart bajarilsin.

U holda, $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi teskari f^{-1} funksiya aniqlangan bo'lib, u bu atrofni $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofiga o'tkazadi.

Isbot. $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan shunday $\mathbf{u}$ vektor-funksiyani topish talab qilinadiki, u qayd qilingan atrofdan olingan barcha $\mathbf{y}$ lar uchun

$$f(\mathbf{u}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad (12.3.33)$$

tenglikni qanoatlantirsin.

Buning uchun

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) - \mathbf{y} \quad (12.3.34)$$

funksiyani qaraymiz.

(12.3.32) shartga ko'ra,

$$\det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) \neq 0. \quad (12.3.35)$$

Bundan tashqari, (12.3.34) ta'rifdan, agar $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ va $\mathbf{y} = \mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ desak,

$$F(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0 \quad (12.3.36)$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, oshkormas funksiya haqidagi 12.3.3 - teoremaning barcha shartlari o'rinli. Bundan chiqdi, $F(\mathbf{y}, \mathbf{u}(\mathbf{y})) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi va uzluksiz differensiallanuvchi $\mathbf{u}$ vektor-funksiya mavjud. Oxirgi tenglik esa, F funksiyaning (12.3.34) ta'rifiga asosan, (12.3.33) tenglikka teng kuchlidir. Shunday ekan, $\mathbf{u}$ vektor-funksiya biz izlayotgan f^{-1} funksiya bo'ladi.

■

Shuni qayd etish kerakki, isbotlangan teorema lokal xarakterga ega, ya'ni $\mathbf{u}$ teskari funksiyani qaralayotgan nuqtaning faqat biror yetarlicha kichik atrofida mavjudligini kafolatlaydi, xolos. Bunga sabab masalaning mohiyatida ekanligini navbatdagi misolda ko'rish mumkin.

12.3.4 - misol. Faraz qilaylik, $f : (0, 1) \times (0, 4\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektor-funksiya quyidagi

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x \cos y, x \sin y) \quad (12.3.37)$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsin.

Bu funksiyaning Yakobi matritsasi

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{vmatrix}$$

ko'rinishga ega. Demak,

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = x > 0.$$

Shunday ekan, 12.3.4 - teoreмага ko'ra, $(0, 1) \times (0, 4\pi)$ to'g'ri to'rtburchakning har bir nuqtasi shunday atrofga egaki, uni qaralayotgan vektor-funksiya biror ochiq to'plamga o'zaro bir qiymatli ravishda akslantiradi. Lekin, shunga qaramasdan,

$$f(x, \pi) = (-x, 0), \quad f(x, 3\pi) = (-x, 0)$$

tengliklardan ko'rinib turibdiki, bu akslantirish to'g'ri to'rtburchakning ikki turli nuqtasini bir nuqtaga akslantirar ekan. Bundan chiqdi, qaralayotgan akslantirish butun to'g'ri to'rtburchakda o'zaro bir qiymatli emas. Demak, teoremaning global varianti to'g'ri bo'lmas ekan.

Agar (12.3.37) vektor-funksiyani yopiq $[0, 1] \times [0, 4\pi]$ to'g'ri to'rtburchakda qarasak, ravshanki, u to'g'ri to'rtburchakning $x = r$ absissali har bir vertikal kesmasini radiusi r ga teng bo'lgan aylanaga akslantiradi. Bunda y o'zgaruvchi 0 dan 4π gacha o'zgarganda, bu aylana ikki marta o'tiladi.

5. Diffeomorfizm. Agar o'zaro bir qiymatli akslantirishning o'zi va teskarisi differensiallanuvchi bo'lsa, bu akslantirish *diffeomorfizm* deb ataladi.

Aytaylik, $\mathbb{R}^n$ fazosining biror ochiq Ω to'plami berilgan bo'lsin. Bu to'plamda $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirishni qaraymiz. Faraz qilaylik, f akslantirish Ω da uzluksiz differensiallanuvchi va teskarilananuvchi bo'lsin, ya'ni f turli nuqtalarda turli qiymatlarni qabul qilsin. Bunda, albatta, f akslantirish Ω to'plamni $E = f(\Omega)$ to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantiradi.

Endi, qo'shimcha ravishda, f akslantirishning yakobiani, ya'ni $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ matritsaning determinanti, butun Ω da noldan farqli bo'lsin, deb faraz qilaylik:

$$\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (12.3.38)$$

U holda, teskari funksiya haqidagi 12.3.4 - teoreмага ko'ra, f^{-1} funksiya har bir $\mathbf{b} \in E = f(\Omega)$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, (12.3.38) shart teskarilananuvchi funksiya uchun uning diffeomorfizm bo'lishini ta'minlaydi.

12.4-§. Funksiyalar sistemasining bog'liq va bog'liqmasligi

Biror $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan bo'lib, uzluksiz differentsiallanuvchi va haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi m ta

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (12.4.1)$$

funksiyalarni qaraylik.

Bu funksiyalardan birining, masalan φ_m ning, qolganlariga bog'liqligi quyidagicha ta'riflanadi: agar $m - 1$ ta o'zgaruvchiga bog'liq shunday $F(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$ uzluksiz differentsiallanuvchi funksiya topilsaki, barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun

$$\varphi_m(\mathbf{x}) = F(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x})) \quad (12.4.2)$$

tenglik bajarilsa, u holda φ_m funksiya Ω sohada (12.4.1) funksiyalarining birinchi $m - 1$ tasiga bog'liq deyiladi.

Agar (12.4.1) funksiyalardan birortasi (qaysi biri bo'lishidan qat'iy nazar) qolganlariga Ω sohasida bog'liq bo'lsa, bu m ta funksiyalarni Ω sohada *bog'liq* deymiz. Aks holda esa, (12.4.1) funksiyalarni Ω sohada *bog'liqmas* deymiz.

Bu ta'rifga ko'ra, agar (12.4.1) funksiyalar biror $V \subset \Omega$ qisimiy sohada bog'liqmas bo'lsa, ular, albatta, butun Ω sohada ham bog'liqmas bo'ladi. Xususan, agar berilgan funksiyalar biror $a \in \Omega$ nuqta-ning qandaydir atrofida bog'liqmas bo'lsa, ular Ω da ham bog'liqmas bo'ladi.

Eslatma. Chiziqli algebra kursida berilgan m ta funksiyaning chiziqli bog'liqlik tushunchasi kiritiladi: agar (12.4.2) tenglikda F funksiya o'z argumentlarining chiziqli funksiyasi bo'lsa, u holda (12.4.1) funksiyalar chiziqli bog'liq deyiladi.

Ravshanki, agar (12.4.1) funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, ular bog'liq ham bo'ladi. Navbatdagi misol bu tasdiqning teskarisi o'rinli emasligini ko'rsatadi.

12.4.1 - misol. Uch o'zgaruvchili quyidagi funksiyalarni qaraymiz:

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y + z,$$

$$\varphi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\varphi_3(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

Bu funksiyalarning chiziqli bog'liqmasligi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi, chunki ularning chiziqli kombinatsiyasi ikkinchi tartibli ko'phad bo'lib, u aynan nolga teng bo'lishi uchun chiziqli kombinatsiyaning barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo'lishi zarur. Lekin shunga qaramasdan, qaralayotgan funksiyalar o'zaro bog'liqdir, chunki

$$\varphi_2 = (\varphi_1)^2 - 2\varphi_3.$$

Ko'plab amaliy masalalarni yechishda (12.4.1) ko'rinishdagi m ta $\varphi_k(\mathbf{x})$ funksiyalar sistemasining bog'liq yoki bog'liqmasligini aniqlash muammosi muhimdir. Agar

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$$

deb belgilasak, bu muammoni yechishda quyidagi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (12.4.3)$$

$(m \times n)$ matritsaning rangi hal qiluvchi rol o'ynaydi.

12.4.1 - teorema. Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, n ta o'zgaruvchili m ta (12.4.1) funksiya $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar x_j o'zgaruvchilarning biror m tasi bo'yicha bu funksiyalardan tuzilgan yakobian qandaydir $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada noldan farqli bo'lsa, u holda bu funksiyalar Ω da bog'liqmas bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ o'zgaruvchilar bo'yicha olingan yakobian biror $\mathbf{a}$ nuqtada noldan farqli bo'lsin deylik, ya'ni

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12.4.4)$$

(12.4.1) funksiyalarning bog'liqmas ekanini isbotlaymiz. Agar buning aksi bo'lsa, bu funksiyalardan bittasi, masalan φ_m , $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida qolganlariga bog'liq bo'lar edi. Ya'ni, $b_k = \varphi_k(\mathbf{a})$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) koordinatalarga ega bo'lgan $\mathbf{b} \in R^{m-1}$ nuqtaning atrofida uzluksiz differensiallanuvchi shunday $F(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$ funksiya mavjud bo'lar ediki, $\mathbf{a}$ nuqtaning ko'rsatilgan atrofidan olingan barcha $\mathbf{x}$ lar uchun

$$\varphi_m(\mathbf{x}) = F(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}))$$

tenglik bajarilar edi.

Bundan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial F}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Demak, agar $\lambda_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{a})$ desak, u holda $\mathbf{a}$ nuqtada

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

deb yozish mumkin.

Bu tenglik (12.4.4) determinantning m -satri a nuqtada qolgan satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini anglatadi. Bundan chiqdi, bu determinant nolga tengdir. Lekin bu tasdiq (12.4.4) shartga zid. Hosil bo'lgan ziddiyat teoremani isbotlaydi.



12.4.2 - misol. Hosilalari noldan farqli bo'lgan, bir o'zgaruvchili ikkita $f(t)$ va $g(t)$ differensiallanuvchi funksiyalar berilgan bo'lsin. Ikki o'zgaruvchili

$$\varphi(x, y) = f(x - y),$$

$$\psi(x, y) = g(x + y)$$

funksiyalarning bog'liqmas ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun mos yakobianni hisoblaylik:

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} f'(x - y) & -f'(x - y) \\ g'(x + y) & g'(x + y) \end{vmatrix} = 2f'(x - y)g'(x + y) \neq 0.$$

Shunday ekan, bu funksiyalarning bog'liqmas ekani 12.4.1 - teoremadan kelib chiqadi. Bu ikki funksiya quyidagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tenglikni qanoatlantirishiga e'tibor beraylik. Demak, qaralayotgan funksiyalar yuqoridagi qismaniy hosilali differensial tenglamaning ikki o'zaro bog'liqmas yechimlaridan iborat ekan.

Isbotlangan 12.4.1 - teoremani (12.4.3) matritsa rangi iboralarida ifodalash mumkin. To'g'ri to'rtburchakli matritsa rangi deb uning chiziqli bog'liq bo'lmagan satrlarining maksimal soniga aytilishini eslatib o'tamiz. Berilgan matritsaning rangini hisoblash uchun uning noldan farqli minorlarini olib, ular ichida maksimal tartibni topish kerak. Ana shu tartib matritsaning rangi bo'ladi. Shunday qilib, 12.4.1 - teoreмага teng kuchli tasdiq quyidagi ko'rinishga ega.

12.4.1* - teorema. Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, n ta o'zgaruvchili m ta (12.4.1) funksiya $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar (12.4.3) matritsaning rangi $\mathbf{a}$ nuqtada m ga teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar $\mathbf{a}$ nuqtaning qayd etilgan atrofida bog'liqmas bo'ladi.

Agar qaralayotgan (12.4.3) matritsaning rangi funksiyalar soni m dan kichik bo'lsa, u holda (12.4.1) funksiyalar bog'liqmas bo'la olmaydi. Chunonchi, navbatdagi tasdiq o'rinli.

12.4.2 - teorema. Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, (12.4.1) funksiyalar Ω sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, (12.4.3) matritsaning rangi barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun $m - 1$ ga teng bo'lsin. Agar biror $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada quyidagi

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})} \quad (12.4.5)$$

yakobian noldan farqli bo'lsa, u holda φ_m funksiya $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$ funksiyalarga bog'liq bo'ladi.

Isbot. (12.4.3) matritsa elementlarining uzluksizligiga ko'ra, (12.4.5) yakobianni $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida noldan farqli deyishimiz mumkin. Shunday ekan, ana shu atrofda (12.4.3) matritsaning birinchi $(m - 1)$ ta satr va ustunlari bazis minorni tashkil qiladi. Shu sababli, m -satr, ya'ni,

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \right),$$

birinchi $(m - 1)$ ta satrning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Demak, shunday λ_j koeffitsientlar topiladiki, umuman aytganda $\mathbf{x}$ ga bog'liq bo'lgan, ular uchun

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{x}}$$

tenglik bajariladi.

Bu tenglikni komponentalar bo'yicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.4.6)$$

Quyidagi $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ va $\mathbf{x}' = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ belgilashlarni kiritaylik. Bunda $\mathbf{a}^*$ va $\mathbf{a}'$ belgilashlar ham xuddi shu ma'noga ega bo'lsin.

Birinchi $m - 1$ ta komponentadan tashkil topgan

$$\varphi^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}') = (\varphi_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}'), \varphi_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}'), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}'))$$

vektor-funksiyani kiritib, uni $\mathbf{x}^*$ ning funksiyasi deb va $\mathbf{x}'$ ni esa, parametrlar deb qaraymiz.

Agar $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ desak,

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}^*) = \varphi^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}')$$

vektor-funksiya, (12.4.5) shartga va 12.4.4 - teorema ko'ra, teskari

$$\mathbf{x}^* = \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \quad (12.4.7)$$

vektor-funksiyaga ega. Teskari funksiya ta'rifiga asosan, bu funksiya

$$\varphi^*[\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}'), \mathbf{x}'] = \mathbf{y}$$

ayniyatni qanoatlantiradi.

Boshqacha aytganda, $\varphi^*(\mathbf{a})$ nuqtaning biror atrofidagi barcha $\mathbf{y}$ lar va $\mathbf{a}'$ nuqtaning biror atrofidagi barcha $\mathbf{x}'$ lar uchun

$$\varphi_j[\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}'), \mathbf{x}'] = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (12.4.8)$$

tengliklar o'rinli.

Shunday ekan, (12.4.8) ayniyatlarni $\mathbf{x}'$ o'zgaruvchi bo'yicha differentsiallashtirib, zanjir qoidasini qo'llasak,

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{x}^*} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{x}'} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (12.4.9)$$

tengliklarni olamiz.

Agar (12.4.9) dagi har bir tenglikni λ_j ga ko'paytirib, ularni yig'sak, (12.4.6) tenglikka ko'ra, quyidagi

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}^*} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}'} = 0 \quad (12.4.10)$$

muhim munosabatga ega bo'lamiz.

Endi

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{x}') = \varphi_m[\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}'), \mathbf{x}'] \quad (12.4.11)$$

funksiyani kiritib, uni $\mathbf{x}'$ parametrlarga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. 12.1.3 - teoreмага asosan, buning uchun

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}, \frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

vektorning nolga tengligini ko'rsatish yetarli.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}^*} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}'} \quad (12.4.12)$$

Agar (12.4.12) ni (12.4.10) bilan taqqoslasak, talab qilingan $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}'} = 0$ munosabatga ega bo'lamiz. Demak, F funksiya $\mathbf{x}'$ o'zgaruvchilarga bog'liqmas va shuning uchun, (12.4.11) tenglikni

$$\varphi_m[\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}'), \mathbf{x}'] = F(\mathbf{y})$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bunda $\mathbf{y}$ va $\mathbf{x}'$ lar mos ravishda $\varphi^*(\mathbf{a})$ va $\mathbf{a}'$ nuqtalarning atroflaridan olingan ixtiyoriy vektorlardir. Oxirgi tenglikda $\mathbf{y} = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}))$ desak, u holda (12.4.7) ga ko'ra,

$$\varphi_m(\mathbf{x}) = F(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}))$$

ayniyatni olamiz. Bu esa, φ_m funksiyaning qolgan (12.4.1) funksiyalarga bog'liq ekanini anglatadi.

12.4.3 - misol. Berilgan

$$\varphi_1(x, y, z) = (z - x - y)^{100},$$

$$\varphi_2(x, y, z) = e^{x+y+z},$$

$$\varphi_3(x, y, z) = \sin(x + y)z$$

uchta funksiyaning o'zaro bog'liq yoki bog'liqmasligini aniqlang.

Avval bu funksiyalardan tuzilgan yakobianni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} & \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x, y, z)} = \\ & = \begin{vmatrix} -100(z - x - y)^{99} & -100(z - x - y)^{99} & 100(z - x - y)^{99} \\ e^{x+y+z} & e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \\ z \cos(x + y) & z \cos(x + y) & (x + y) \cos(x + y) \end{vmatrix} = \\ & = 100(z - x - y)^{99} e^{x+y+z} \cos(x + y) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ z & z & x + y \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Endi quyidagi

$$\begin{aligned} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y, z)} &= \begin{vmatrix} -100(z - x - y)^{99} & 100(z - x - y)^{99} \\ e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \end{vmatrix} = \\ &= -200(z - x - y)^{99} e^{x+y+z} \end{aligned}$$

Yakobianni qarasak, uning $z = x + y$ tekislikdan tashqarida noldan farqli ekanini ko'ramiz.

Shunday ekan, 12.4.2 - teorema asosan, bu tekislikdan tashqarida yotgan har bir nuqtaning biror atrofida φ_3 funktsiya φ_1 va φ_2 funktsiyalarga bog'liq bo'ladi. Ya'ni, shunday uzluksiz differensiallanuvchi $F(u_1, u_2)$ funktsiya topiladiki, quyidagi atrofda

$$\sin(x + y)z = F[(z - x - y)^{100}, e^{x+y+z}]$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Umumiy holda, (12.4.1) funktsiyalar ichida o'zaro bog'liqmaslari-ning maksimal soni (12.4.3) matritsaning rangiga teng. Chunonchi, navbatdagi teorema o'rinli.

12.4.3 - teorema. Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, (12.4.1) funktsiyalar Ω sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, (12.4.3) matritsaning rangi barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ nuqtalarda $r < m$ ga teng bo'lsin. Agar biror $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)}{D(x_1, x_2, \dots, x_r)}$$

Yakobian noldan farqli bo'lsa, u holda barcha $k = r+1, r+2, \dots, m$ lar uchun $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida φ_k funktsiya $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ funktsiyalardan bog'liq bo'ladi.

Isbot bevosita 12.4.2 - teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatan, buning uchun $r + 1$ ta

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r, \varphi_k$$

funktsiyalarni olib, 12.4.2 - teoremani qo'llash yetarli.

12.4.2 - va 12.4.3 - teoremlar lokal xarakterga ega ekanini quyidagidek etamiz, ya'ni, bu teoremlar (12.4.1) funktsiyalarning (12.4.3) matritsa uchun bazis minorni tashkil qiluvchi funktsiyalarga bog'liqligini butun Ω sohasida emas, balki faqat qaralayotgan nuqtaning biror

atrofidagina o'rnatadi. Bunga sabab isbotning mukammal emasligi emas, balki masalaning mohiyatidir. Navbatdagi misolda (12.4.2) formulaning butun Ω da o'rinli bo'lishini ta'minlaydigan yagona F funksiyaning, umuman aytganda, mavjud emasligi ko'rsatilgan.

12.4.4 - misol. $\mathbb{R}^3$ da aniqlangan quyidagi uchta

$$\varphi_1(x, y, z) = (x + z) \cos y,$$

$$\varphi_2(x, y, z) = (x + z) \sin y,$$

$$\varphi_3(x, y, z) = y,$$

funksiyani qaraymiz.

Chegaralanmagan

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z > 0\}$$

sohani har bir nuqtasining biror atrofida uchinchi funksiya qolgan ikkitasiga bog'liq ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun quyidagi yakobianni hisoblaymiz:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \cos y & -(x+z) \sin y & \cos y \\ \sin y & (x+z) \cos y & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lekin navbatdagi yakobian

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \cos y & -(x+z) \sin y \\ \sin y & (x+z) \cos y \end{vmatrix} = x + z$$

Ω ning har bir nuqtasida noldan farqli.

Bundan chiqdi, 12.4.2 - teoreмага ko'ra, Ω ning har bir nuqtasi uchun shunday uzluksiz differensiallanuvchi $F(u_1, u_2)$ funksiya topiladiki, o'sha nuqtaning biror atrofida

$$\varphi_3 = F(\varphi_1, \varphi_2)$$

tenglik bajariladi.

Ammo, shunga qaramasdán, butun Ω da bu tenglikni qanoatlantiruvchi $F(u_1, u_2)$ funksiya mavjud emas. Chunki, har ikkala $\varphi_1(x, y, z)$ va $\varphi_2(x, y, z)$ funksiya, ravshanki, y bo'yicha 2π davriy funksiyaadir. Albatta, bundan chiqdi, $F(\varphi_1, \varphi_2)$ funksiya ham y bo'yicha 2π davriy bo'ladi. Lekin φ_3 funksiya esa davriy emas. Demak, yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi $F(u_1, u_2)$ funksiya mavjud bo'lmaz ekan.

Xuddi shu mulohazalar, uzunligi 2π dan katta bo'lib, Oy o'qiga parallel bo'lgan kesmani o'z ichiga oluvchi istalgan $\Omega_1 \subset \Omega$ sohada ham o'rinli bo'lishini ko'rish qiyin emas.

12.5-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi. Ekstremumning zaruriylik shartlari.

Faraz qilaylik, n ta o'zgaruvchili $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\mathbf{a}$ nuqtaning shunday atrofi topilsaki, bu atrofda olingan istalgan $\mathbf{x}$ nuqta uchun

$$f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}) \quad (12.5.1)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada **lokal maksimumga** ega deyiladi.

Bunday xossaga ega bo'lgan $\mathbf{a}$ nuqta **lokal maksimum nuqta** deb ataladi. Agarda (12.5.1) o'rniga

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \quad (12.5.2)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\mathbf{a}$ **lokal minimum nuqta** deyiladi.

Lokal maksimum nuqtalar va lokal minimum nuqtalar **lokal ekstremum** nuqtalar deb ataladi.

12.5.1 - teorema (lokal ekstremumning zaruriylik sharti). Faraz qilaylik, $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtada barcha birinchi tartibli qisman hosilalarga ega bo'lsin. Agar $\mathbf{a}$ lokal ekstremum nuqta bo'lsa, u holda

$$\nabla f(\mathbf{a}) = 0 \quad (12.5.3)$$

bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun, $\mathbf{a}$ nuqtani lokal maksimum nuqta deylik, ya'ni bu nuqtaning biror atrofida

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$$

tengsizlik bajarilsin.

Bir o'zgaruvchili

$$g(t) = f(t, a_2, a_3, \dots, a_n) \quad (12.5.4)$$

funksiyani qaraymiz.

Ravshanki, agar t nuqta a_1 ga yetarlicha yaqin bo'lsa, bu funksiya

$$g(t) \leq g(a_1) = f(\mathbf{a})$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni $t = a_1$ nuqta $g(t)$ funksiya uchun lokal maksimum nuqta bo'ladi. Shunday ekan, Ferma teoremasiga (4.3.1 - teorema) ko'ra, $g'(a_1) = 0$ tenglik bajariladi. Demak, (12.5.4) ni esga olsak,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = 0.$$

Xuddi shu usulda qolgan qisman hosilalarning nolga tengligi ko'rsatiladi. ■

Natija. Faraz qilaylik, $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $\mathbf{a}$ lokal ekstremum nuqtasi bo'lsa, bu nuqtada f funksiyaning differensial nolgacha teng:

$$df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = 0. \quad (12.5.5)$$

Bu tasdiqning o'rinli ekanligi bevosita (12.5.3) va (12.2.3) tengliklardan kelib chiqadi.

Ta'rif. Agar $\mathbf{a}$ nuqtada $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ shart bajarilsa, u holda $\mathbf{a}$ nuqta f funksiyaning **statsionar nuqtasi** deyiladi.

Ravshanki, lokal ekstremum nuqtalarni statsionar nuqtalar ichidan izlash kerak.

2. Ekstremumning yetarlilik shartlari.

12.5.2 - teorema. Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ statsionar nuqtada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar f funksiyaning ikkinchi differensial shu nuqtada musbat aniqlangan kvadratik forma bo'lsa, u holda $\mathbf{a}$ nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.

Isbot. Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli quyidagi

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{2!} + o(|\mathbf{h}|^2)$$

Taylor formulasidan foydalanamiz.

Bu formuladagi birinchi differensial, $\mathbf{a}$ nuqta statsionar bo'lgani uchun, nolga teng. Shunday ekan, Teylor formulasi

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{2!} + o(|\mathbf{h}|^2) \quad (12.5.6)$$

ko'rinishga keladi.

Shartga ko'ra, ikkinchi differensial musbat aniqlangan kvadratik forma. Demak, (12.5.5) va (12.2.13) larga asosan,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \mu |\mathbf{h}|^2 + o(|\mathbf{h}|^2)$$

baho o'rinli.

Bundan chiqdi, yetarlicha kichik $\mathbf{h}$ lar uchun

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{\mu}{2} |\mathbf{h}|^2$$

deb yozish mumkin. Bu esa $\mathbf{a}$ lokal minimum nuqta ekanini anglatadi.

■

Natija. Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ statsionar nuqtada ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar f funksiyaning ikkinchi differentsiali shu nuqtada manfiy aniqlangan kvadratik forma bo'lsa, u holda $\mathbf{a}$ nuqta f funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

12.5.3 - teorema. Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ statsionar nuqtada ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar f funksiyaning ikkinchi differentsiali shu nuqtada ishorasi o'zgaruvchi kvadratik forma bo'lsa, u holda $\mathbf{a}$ nuqta f funksiyaning lokal ekstremum nuqtasi bo'lmaydi.

Isbot. Agar ikkinchi differentsial ishorasi o'zgaruvchi kvadratik forma bo'lsa, shunday ikki $\mathbf{h}^+$ va $\mathbf{h}^-$ vektorlar topiladiki, ular uchun $|\mathbf{h}^+| = |\mathbf{h}^-| = 1$ bo'lib,

$$d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{h}^+) > 0, \quad d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{h}^-) < 0 \quad (12.5.7)$$

tengsizliklar bajariladi.

Berilgan $\mathbf{a}$ nuqtaning statsionarligini hisobga olib, Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli (12.5.6) Teylor formulasini qo'llaymiz. Bu formulaga ko'ra, ikkinchi differentsial bir jinsli kvadratik forma bo'lgani sababli, $|\mathbf{h}| = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy tayinlangan $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ vektor va yetarlicha kichik t lar uchun

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = t^2 \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{2!} + o(t^2) \quad (12.5.8)$$

munosabat o'rinli.

Shunday ekan, agar (12.5.7) dagi tengsizliklarni hisobga olsak, yetarlicha kichik t larda quyidagi ikki

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}^+) - f(\mathbf{a}) = t^2 \left[\frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}^+)}{2!} + o(1) \right] > 0 \quad (12.5.9)$$

va

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}^-) - f(\mathbf{a}) = t^2 \left[\frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}^-)}{2!} + o(1) \right] < 0 \quad (12.5.10)$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz.

Demak, $\mathbf{a}$ nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida f funksiya $\mathbf{a}$ nuqtadagi qiymatidan ham katta, ham kichik qiymatlar qabul qilar ekan. Bundan chiqdi, $\mathbf{a}$ lokal ekstremum nuqta bo'la olmaydi.

■

3. Shartli ekstremum. Lagranjning ko'paytuvchilar usuli.

1^o. Ushbu bandda biz berilgan funksiyalarning ekstremal qiymatlarini biror qo'shimcha shartlar bajarilganda topish masalasini o'rganamiz. Bunday masalalar matematika tatbiqida ko'p uchraydi. Bunda, odatda, qo'shimcha shartlar o'zgaruvchilarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini cheklash shaklida beriladi.

Masalan, uchta o'zgaruvchili $f(x, y, z)$ funksiya maksimal qiymatini, argumentlari

$$g(x, y, z) = 0$$

qo'shimcha shartni qanoatlantirganda, topish masalasini olaylik. Bu qo'shimcha shart bog'lash sharti deb ham ataladi. Bunda g uch o'zgaruvchili berilgan (odatda silliq, ya'ni yetarli marta differensiallanuvchi) funksiyadir. Bunday maksimal qiymat *shartli maksimum* deb ataladi. Bu masalani yechishning eng tabiiy usuli quyidagidan iborat:

1) $g(x, y, z) = 0$ shartdan z ni ikki x va y o'zgaruvchining funksiyasi sifatida topamiz, ya'ni shunday $z = \varphi(x, y)$ funksiyani

topamizki, $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ tenglik x va y bo'yicha ayniyatga aylansin;

2) topilgan z ning qiymatini f funksiyaga qo'yamiz; natijada u ikki o'zgaruvchining funksiyasiga aylanadi: $F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$;

3) nihoyat, $F(x, y)$ funksiyaning oddiy maksimumini topamiz.

Odatda, bunday ketma-ketlikdagi eng qiyin qadam ekstremal nuqtaning biror atrofida $g(x, y, z) = 0$ tenglama orqali aniqlanuvchi $z = \varphi(x, y)$ oshkormas funksiyani topishdan iboratdir.

J. Lagranj mana shu eng qiyin qadamni chetlab o'tish yo'lini topdi, ya'ni u izlanayotgan ekstremal qiymatni qayd etilgan oshkormas funksiyani aniqlamasdan topish usulini taklif qildi. Chunonchi, faraz qilaylik, ekstremal nuqta atrofida g funksiya gradientining hech bo'lmasa bitta komponentasi, masalan $\frac{\partial g}{\partial z}$ noldan farqli bo'lsin. U holda, bog'lash shartini qanoatlantiruvchi $z = \varphi(x, y)$ oshkormas funksiya mavjud. Endi biz (a, b) koordinatali nuqtada $F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ funksiyaning (hech qanday shartsiz) ekstremumi mavjudligining zaruriy shartidan foydalansak bo'ladi. Bu shart quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Bu tengliklarni, murakkab funksiyani differentsiallashtirish qoidasiga binoan,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) = 0 \quad (12.5.11)$$

va

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) = 0 \quad (12.5.12)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Endi $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ ayniyatni x va y bo'yicha differentsiallasak,

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (12.5.13)$$

va

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (12.5.14)$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

Agar $c = \varphi(a, b)$ deb,

$$\mathbf{s} = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) \right)$$

va

$$\mathbf{h} = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) \right)$$

belgilashlar kiritilsa, (12.5.11) va (12.5.12) tengliklarni

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{s} = \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{h} = 0$$

ko'rinishda, (12.5.13) va (12.5.14) ayniyatlarni esa,

$$\nabla g \cdot \mathbf{s} = \nabla g \cdot \mathbf{h} = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bundan chiqdi, (a, b, c) nuqtada $\nabla f(a, b, c)$ va $\nabla g(a, b, c)$ uch o'lchovli vektorlar o'zaro kollinear bo'lmagan $\mathbf{s}$ va $\mathbf{h}$ vektorlarga mos ravishda ortogonal ekan. Ya'ni, bu gradientlar $\mathbf{s}$ va $\mathbf{h}$ vektorlar bilan aniqlangan tekislikka ortogonal. Shuning uchun, bu ikki gradient o'zaro kollinear bo'ladi, ya'ni, $\nabla g(a, b, c) \neq 0$ ekanini esga olsak, shunday λ soni topiladiki, u uchun

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Lagranj funksiyasi deb ataluvchi

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \quad (12.5.15)$$

funksiyani kiritamiz.

Agar λ ni yuqoridagidek tanlasak, f funksiyaning $g = 0$ bog'lash sharti ostidagi lokal ekstremum nuqtasida (x, y, z) o'zgaruvchilar bo'yicha hisoblangan gradient uchun

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) = 0 \quad (12.5.16)$$

tenglik bajariladi.

Hosil bo'lgan (12.5.16) tenglamani, gradient komponentalariga o'tib, uchta skalyar tenglama ko'rinishida yozish mumkin. Agar bunga $g = 0$ shartni qo'shsak, biz to'rtta a, b, c va λ haqiqiy sonlarni topish uchun to'rtta skalyar tenglamaga ega bo'lamiz.

Ravshanki, bog'lash sharti bajarilganda, bevosita Lagranj funksiyasining (12.5.15) ta'rifidan

$$L(x, y, z, \lambda) - L(a, b, c, \lambda) = f(x, y, z) - f(a, b, c)$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, Lagranj funksiyasi hamda, bog'lash sharti bajarilgan holda, f funksiya ekstremunga bir xil nuqtalarda erishadi.

O'z-o'zidan ko'rinish turibdiki, keltirilgan mulohazalar o'zgaruvchilar soniga bog'liq emas; ular istalgan natural n o'lchovli funksiyalar uchun o'rinli.

12.5.1 - misol. Faraz qilaylik, asosidagi aylananing radiusi R ga va balandligi H ga teng bo'lgan to'g'ri silindr sirtining yuzi S ga teng bo'lib, bu son tayinlangan bo'lsin. R va H o'rtasida shunday munosabat topish kerakki, natijada silindr hajmi V eng katta qiymat qabul qilsin.

Demak,

$$2\pi R^2 + 2\pi RH = S$$

shart bajarilganda

$$V(R, H) = \pi R^2 H$$

funksiyaning maksimumini topish talab qilinadi.

Bu holda Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$L(R, H, \lambda) = \pi R^2 H - \lambda(2\pi R^2 + 2\pi RH - S).$$

Statsionar nuqtada navbatdagi ikki

$$\frac{\partial L}{\partial R} = 2\pi RH - \lambda(4\pi R + 2\pi H) = 0$$

va

$$\frac{\partial L}{\partial H} = \pi R^2 - \lambda 2\pi R = 0$$

shartlar bajariladi.

Ikkinchi tenglikdan

$$\lambda = \frac{R}{2}$$

ni topib, λ ning bu qiymatini birinchi tenglikka qo'yamiz:

$$RH = \frac{R}{2}(2R + H).$$

Demak,

$$H = 2R.$$

Shunday qilib, sirt yuzasi tayinlanganda, to'g'ri doiraviy silindr hajmi o'zining maksimumiga silindr balandligi asosining diametriga teng bo'lganda erishar ekan.

2^o. Xuddi yuqoridagi singari, bog'lash sharti ikkita:

$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{va} \quad g_2(x, y, z) = 0$$

bo'lganda ham $f(x, y, z)$ funksiyaning ekstremal qiymatlarini topish masalasini o'rganish mumkin.

Bu shartlar o'zaro bog'liqmas, deb faraz qilamiz. Buning uchun, masalan,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12.5.17)$$

tengsizlikning bajarilishi yetarli.

Bu holda shunday oshkormas $y = \varphi(x)$ va $z = \psi(x)$ funksiyalarni topish mumkinki, ular uchun bog'lash shartlari ayniyatga aylanadi, ya'ni

$$g_1(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0, \quad g_2(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0. \quad (12.5.18)$$

Endi biz a nuqtada bir o'zgaruvchili $F(x) = f(x, \varphi(x), \psi(x))$ funksiyaning (hech qanday shartsiz) ekstremumi mavjudligining zaruriy shartidan foydalansak bo'ladi. Bu shartga ko'ra, $x = a$ nuqtada

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial z} \psi'(x) = 0 \quad (12.5.19)$$

tenglik bajariladi.

(12.5.18) ayniyatlarni differensiallab,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial g_1}{\partial z} \psi'(x) = 0 \quad (12.5.20)$$

va

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial g_2}{\partial z} \psi'(x) = 0 \quad (12.5.21)$$

munosabatlarni olamiz.

Agar $b = \varphi(a)$ va $c = \psi(a)$ deb belgilasak, (12.5.19)-(12.5.21) tengliklar uch o'lchovli ∇f , ∇g_1 va ∇g_2 vektorlarning (a, b, c) ekstremum nuqtada noldan farqli

$$s = (1, \varphi'(a), \psi'(a))$$

vektorga ortogonal ekanini anglatadi. Shunday ekan, bu uch vektor bir tekislikda yotadi. Demak, (12.5.17) shartga ko'ra, ∇g_1 va ∇g_2 vektorlar o'zaro chiziqli bog'liqmas ekanini hisobga olsak, shunday haqiqiy λ_1 va λ_2 sonlar topiladiki, ekstremum nuqtasida

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$$

tenglik bajariladi.

Agar Lagranj funksiyasini

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

tenglik bilan aniqlasak, u holda ekstremum nuqtasida (x, y, z) o'zgaruvchilar bo'yicha olingan gradient uchun

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

tenglik bajariladi.

Endi bu uchta skalyar tengliklarga ikkita bog'lash shartini qo'shsak, beshta haqiqiy a, b, c, λ_1 va λ_2 sonlarni topish uchun beshta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, Lagranjning ko'paytuvchilar usuli, bog'lash shartlari bilan aniqlangan oshkormas funksiyalarni topmasdan turib, lokal shartli ekstremum nuqtasini aniqlashga imkon berar ekan.

3^o. Endi umumiy holni qaraymiz, ya'ni biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohasida aniqlangan f funksiyaning ekstremal qiymatlarini m ta

$$g_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (12.5.22)$$

bog'lash shartlari bo'lgan holda topish masalasini o'rganamiz.

Agar $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtaning shunday atrofi topilsaki, bu atrofda olingan va (12.5.22) bog'lash shartlarini qanoatlantiruvchi barcha $\mathbf{x}$ lar uchun

$$f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}) \quad (12.5.23)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada (12.5.22) shartlar ostida *shartli maksimumga* ega deyimiz.

Xuddi shunga o'xshab, shartli minimum aniqlanadi. Agar $\mathbf{a}$ nuqta yoki shartli maksimum nuqta yoki shartli minimum nuqta bo'lsa, u *shartli ekstremum* nuqta deb ataladi.

Odatda $m < n$ deb, ya'ni bog'lashlar soni o'zgaruvchilar sonidan kichik deb va (12.5.22) dagi bog'lash shartlar takrorlanmaydi deb faraz qilinadi. Oxirgi shart matematik tilda $g_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots, m$, funksiyalarning bog'liqligini bildiradi. Buning uchun, 12.4.1 - teoreмага ko'ra, bu funksiyalardan m ta biror x_j o'zgaruvchilar bo'yicha tuzilgan yakobian noldan farqli ekanini talab qilish yetarli. Bu holda, oshkormas funksiya haqidagi 12.3.3 - teoreмага asosan, biz ko'rsatilgan o'zgaruvchilarni qolganlarining oshkormas funksiyasi

sifatida yozishimiz mumkin. Keyingi mulohazalar xuddi yuqoridagidek olib boriladi.

Chunonchi, aytaylik, g_k funksiyalardan $x_1, x_2, \dots, x_m$ o'zgaruvchilar bo'yicha olingan yakobian noldan farqli bo'lsin:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12.5.24)$$

U holda, 12.3.3 - teorema asosan, (12.5.22) bog'lash shartlari m ta

$$x_k = \varphi_k(\mathbf{x}'), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (12.5.25)$$

oshkormas funksiyalarni aniqlaydi, bunda $\mathbf{x}' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Natijada, $f(\mathbf{x})$ funksiyani (12.5.22) shartlar ostidagi shartli ekstremumini topish masalasi

$$F(\mathbf{x}') = f(\varphi_1(\mathbf{x}'), \varphi_2(\mathbf{x}'), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}'), \mathbf{x}')$$

funksiyaning shartsiz ekstremumini topish masalasiga keladi.

Oxirgi funksiya uchun $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtadagi ekstremumining zaruriy sharti quyidagi

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n,$$

ko'rinishga ega.

Murakkab funksiyani differentsiallashtirish qoidasiga ko'ra, bu tengliklarni

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n, \quad (12.5.26)$$

deb yozish mumkin.

Agar $g_k(\mathbf{x})$ funksiyalarda birinchi m ta x_j o'zgaruvchi o'rniga ularning (12.5.25) formuladagi qiymatini qo'ysak, (12.5.22) shartlar navbatdagi

$$g_k(\varphi_1(\mathbf{x}'), \varphi_2(\mathbf{x}'), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') = 0$$

ayniyatlarga aylanadi. Bu ayniyatlarni differensiallab, yangi

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

ayniyatlarga ega bo'lamiz.

Xususan, bu tengliklar $\mathbf{a}$ nuqtada ham o'rinli:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (12.5.27)$$

Navbatdagi

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+1}}, 1, 0, 0, \dots, 0 \right), \\ \mathbf{s}_2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+2}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+2}}, 0, 1, 0, \dots, 0 \right), \\ &\dots \\ \mathbf{s}_{n-m} &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-m}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-m}}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n-m}}, 0, 0, \dots, 0, 1 \right) \end{aligned}$$

$(n-m)$ ta chiziqli bog'liqmas n o'lchovli vektorlarni kiritamiz.

U holda (12.5.26) tengliklar

$$\nabla f \cdot \mathbf{s}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-m, \quad (12.5.28)$$

ko'rinishga, va (12.5.27) tengliklar esa,

$$\nabla g_k \cdot \mathbf{s}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-m, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (12.5.29)$$

ko'rinishga keladi.

Bundan chiqdi, $\mathbf{a}$ nuqtada olingan n o'lovli $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_m$ vektorlar $\mathbb{R}^n$ fazosining $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n-m}$ vektorlar tashkil qilgan $(n-m)$ o'lovli qism fazosiga ortogonaldir. Shunday ekan, qayd qilingan gradientlar (ya'ni $m+1$ ta vektor) $\mathbb{R}^n$ fazosining bitta m o'lovli qism fazosida yotadi. (12.5.24) shartga ko'ra, $\nabla g_k, k = 1, 2, \dots, m$, vektorlar chiziqli bog'liqmas, va demak, shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topiladiki, ular uchun

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots + \lambda_m \nabla g_m \quad (12.5.30)$$

tenglik bajariladi.

Endi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ deb belgilab,

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\mathbf{x}) \quad (12.5.31)$$

Lagranj funksiyasini kiritamiz.

Ravshanki, (12.5.30) tenglik f funksiyaning (12.5.22) shartlar ostidagi lokal ekstremum nuqtasi bo'lgan $\mathbf{a}$ nuqtada

$$\nabla L(\mathbf{a}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (12.5.32)$$

tenglikning bajarilishini anglatadi.

Bu n ta skalyar tenglamaga m ta bog'lash shartini qo'shsak, $n+m$ ta tenglamaga ega bo'lamiz. Aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lumlar ham aynan $n+m$ ta haqiqiy sonlardan iborat, ya'ni lokal ekstremum nuqtasining n koordinatasi va m ta λ_k larning qiymatlari.

Shunday qilib, biz navbatdagi tasdiqni isbotladik.

12.5.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqta f funksiyaning (12.5.22) bog'lash shartlaridagi lokal ekstremum nuqtasi bo'lib, (12.5.22) shartlarga kiruvchi g_k funksiyalarning gradientlari chiziqli bog'liqmas bo'lsin. U holda, shunday haqiqiy $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, m$, sonlar topiladiki, ular uchun (12.5.31) Lagranj funksiyasi (12.5.32) shartni qanoatlantiradi.

12.5.2 - misol. Berilgan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor uchun

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

funksiyaning

$$|\mathbf{x}| = r$$

shart ostidagi ekstremum nuqtalari topilsin.

Bog'lash shartini

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - r^2 = 0$$

ko'rinishda yozib,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \lambda) &= (\mathbf{b}, \mathbf{x}) - \lambda(|\mathbf{x}|^2 - r^2) = \\ &= b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - r^2) \end{aligned}$$

Lagranj funksiya-sini kiritamiz.

U holda, 12.5.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_k} = b_k - 2\lambda x_k = 0$$

tenglamalarga ega bo'lamiz.

Bundan x_k ni λ ning funksiya-si sifatida aniqlaymiz:

$$x_k = \frac{b_k}{2\lambda}.$$

Endi λ ni bog'lash shartidan topamiz. Bu shartga ko'ra,

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_k}{2\lambda} \right)^2 = r^2.$$

Bundan chiqdi, $|\mathbf{b}|^2 = (2\lambda)^2 r^2$, yoki

$$2\lambda = \pm \frac{|\mathbf{b}|}{r}.$$

Ravshanki, agar bu tenglikning o'ng tarafida $\ll + \gg$ ishorani olsak, lokal shartli ekstremum nuqtasi

$$x_k^* = r \frac{b_k}{|\mathbf{b}|}$$

koordinatalarga va agar «-» ishora olinsa, lokal shartli ekstremum nuqtasi

$$x_k^{**} = -r \frac{b_k}{|\mathbf{b}|}$$

koordinatalarga ega bo'ladi.

Bu nuqtalardan biri shartli lokal minimum nuqtasi va ikkinchisi esa, shartli lokal maksimum nuqtasi bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Ayniqsa, (12.5.22) bog'lash shartlaridan oshkormas funksiyalarni topish murakkab bo'lgan hollarda Lagranj usuli samarali bo'lishini qayd etib o'tamiz.

Eslatma. Agar qo'shimcha $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ o'zgaruvchilarni kiritib, $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ simvoli orqali $\mathbb{R}^{n+m}$ fazosining nuqtalarini belgilasak, u holda Lagranj funksiyasini

$$L(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^m x_{n+k} g_k(\mathbf{x}) \quad (12.5.33)$$

ko'rinishda aniqlash mumkin.

Ravshanki, bunda Lagranj funksiyasining x_{n+k} qo'shimcha o'zgaruvchilar bo'yicha qisman hosilalari $g_k(\mathbf{x})$ funksiyalarga teng bo'lib, f funksiyaning (12.5.22) shartlar ostidagi shartli lokal ekstremum nuqtasida

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$$

tenglik bajariladi. Bundan chiqdi, ekstremum nuqtada (12.5.33) Lagranj funksiyasidan barcha $n+m$ ta o'zgaruvchi bo'yicha olingan gradientning nolga teng bo'lishi zarur ekan.

Shartli ekstremum topish masalasiga bunday yondashuv matematikaning turli tadqiqqlarida keng qo'llaniladi.

4. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni eng katta va eng kichik qiymatlarini topishning umumiy sxemasi.

Biror yopiq $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sohada f funksiyaning ekstremal qiymatlarini topish muammosi ikki masalaga bo'linadi: birinchi masala ek-

stremal qiymatni echiq Ω sohasida topishdan iborat bo'lib, ikkin-chi masala esa, ekstremumni soha chegarasi $\partial\Omega$ da topishdan iborat.

Birinchi masalani yechish uchun avval Ω sohasida f funksiya gradienti nolga aylanadigan statsionar nuqtalar izlanadi. so'ngra bu nuqtalarda ikkinchi differensialning ishorasi aniq kvadratik forma bo'lish yoki bo'lmasligi o'rganiladi.

Ikkinchi masala, odatda, f funksiyaning shartli ekstremumini topishga keltiriladi, bunda bog'lash sharti Ω sohasi chegarasi $\partial\Omega$ ning tenglamasidan iborat bo'ladi.

Eslatma. Keyingi bobdan boshlab n o'lchovli $\mathbb{R}^n$ fazosi nuqtalarini, yozuvni soddalashtirish maqsadida, ko'pincha qalin harflar bilan emas, balki lotin alifbosining oddiy

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

harflari bilan belgilaymiz, bunda matndan bu harf bilan sonlar emas, vektorlar belgilangani tushunarli bo'ladi.

12.6-§. Misollar

1 - misol. Agar

$$f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$$

bo'lsa, $f'_x(x, 1)$ ni toping.

Ko'rsatma. $f'_x(x, b) = \frac{d}{dx} f(x, b)$ tenglikdan, ya'ni $f(x, y)$ funksiyani x bo'yicha qisman hosilasining $y = b$ nuqtadagi qiymati bir o'zgaruvchili $f(x, b)$ funksiya hosilasiga teng ekanidan foydalaning.

2 - misol. Agar $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ bo'lsa, $f_x(0, 0)$ va $f_y(0, 0)$ qisman hosilalarni toping. Bu funksiya $(0, 0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

Ko'rsatma. Yuqoridagi misolda qo'llangan usuldan foydalanib, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ ekanini ko'rsating. Differensiallanuvchanlikni (12.1.13) ta'rifdan foydalanib tekshiring. Bunda

$$f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{xy} = \alpha(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

deb yozib olib, $\alpha(x, y) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ funksiyaning $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ da cheksiz kichik emasligiga ishonch hosil qiling.

3 - misol. Quyidagi

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{agar } (x, y) \neq (0, 0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x, y) = (0, 0) \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning f'_x , f'_y qisman hosilalari $(0, 0)$ nuqtada uzilishga ega bo'lib, bu nuqtaning istalgan atrofida chegaralanmagan ekanini isbotlang. Shunday bo'lsada, bu funksiya $(0, 0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Agar $(x, y) \neq (0, 0)$ bo'lsa, oddiy hisoblash orqali f'_x va f'_y qisman hosilalarni toping. Agarda $(x, y) = (0, 0)$ bo'lsa, $f'_x(0, 0) = 0$ va $f'_y(0, 0) = 0$ ekanini, 1 - misolda qo'llangan usuldan foydalanib, ko'rsating. So'ngra, masalan, f'_x funksiyaning $(0, 0)$ nuqtada uzilishga ega va chegaralanmagan ekaniga ishonch hosil qilish uchun, $f'_x(\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{k\pi}})$ ketma-ketlikning $k \rightarrow \infty$ dagi limitini hisoblang.

Berilgan funksiyaning $(0, 0)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini ko'rsatish uchun

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \alpha(x, y)$$

deb yozib olib, $f'_x(0, 0) = 0$ va $f'_y(0, 0) = 0$ tengliklarni hisobga olgan holda, $\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ funksiyaning mos shartlarni bajarishga tekshiring.

4 - misol. $f(x, y) = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ funksiyaning $M = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ nuqtada $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egri chiziqqa o'tkazilgan ichki normal yo'nalishi bo'yicha hosilasini hisoblang. M nuqtada f funksiya gradientini toping.

Ko'rsatma. M nuqta atrofida egri chiziq tenglamasi $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ko'rinishga ega. Qayd qilingan nuqtada egri chiziq normalining Ox o'qi bilan tashkil qilgan burchak tangensi $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{y'(\frac{a}{\sqrt{2}})}$ kabi aniqlanadi. Bundan ichki normal yo'naltiruvchi kosinuslarini topib, (12.1.31) formula yordamida talab qilingan hosilani hisoblang. Gradientni (12.1.16) formula orqali toping.

5 - misol. Quyidagi

$$f(x, y) = (2x + y)^2 - x^3 + y^2$$

funksiyaning barcha ikkinchi va uchinchi tartibli qisman hosilalarini hisoblang va

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

tenglikni tekshiring.

Ko'rsatma. Oxirgi tenglik mos qisman hosilalarni to'g'ridan-to'g'ri hisoblash orqali ko'rsatiladi.

6 - misol. Agar $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya argumentlar chiziqli ravishda $x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3$, $x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3$ va $x_3 = a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3$ kabi almashtirilsa, bu funksiyaning ixtiyoriy tartibli differensialining formasi saqlanishini ko'rsating ((12.2.9) formuladan keyingi Eslatmaga qarang).

Ko'rsatma. (12.2.9) formuladan foydalanib, ikkinchi differensial (12.2.7) formani saqlashini isbotlang. So'ngra, $d^2x_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, tengliklardan foydalanib, (12.2.9) formulani

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 f$$

ko'rinishga keltirib, matematik induksiya usuli yordamida, istalgan tartibli differensial uchun bu forma saqlanishiga ishonch hosil qiling.

7 - misol. $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ funksiyani $(x, y) = (1, -2)$ nuqta atrofida Teylor formulasiga yoying.

Ko'rsatma. Berilgan funksiyani 3-tartibdan boshlab, barcha differensiallarining nolga teng ekanini hisobga olib, (12.2.24) formuladan foydalaning.

8 - misol. Faraz qilaylik, (a, b) intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya uzluksiz va (c, d) intervalda aniqlangan $g(y)$ funksiya esa, uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'lsin. Qanday hollarda $g(y) = f(x)$ tenglama $y = g^{-1}(f(x))$ funksiyani aniqlaydi? $\mathbb{R}$ sonlar o'qida aniqlangan quyidagi $e^y = |x|$ va $e^y = -|x|$ misollarni tahlil qiling.

Ko'rsatma. §12.3 dagi mulohazalardan quyidagi natija kelib chiqadi: agar (c, d) intervalda uzluksiz va qat'iy o'suvchi $g(y)$ funksiya berilgan bo'lib, A soni g funksiya qiymatlar to'plamiga tegishli bo'lsa, $g(y) = A$ tenglama yagona $y = g^{-1}(A)$ yechimga ega. Mana shu tasdiqdan foydalaning.

9 - misol. Agar $x^2 + xy + y^2 = 3$ bo'lsa, y' , y'' va y''' hosilalarni toping.

Ko'rsatma. Avval $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ formuladan foydalanib ((12.3.16) ga qarang), y' ni toping. So'ngra, topilgan formulani x bo'yicha ikki marta differensiallang; bunda y' uchun topilgan ifodadan foydalaning.

10 - misol. Agar $a > 0$ va $m > 1$ bo'lsa, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m$ funksiyani $x_1 + x_2 + \dots + x_n = na$ bog'lash sharti ostidagi ekstremumini toping. Ekstremum nuqtada funksiya maksimum yoki minimumga erishishini aniqlang.

Ko'rsatma. (12.5.15) Lagranj funksiyasini tuzib, (12.5.16) shartdan ekstremum nuqtalarni toping. Funksiya bunday nuqtada minimum yoki maksimumga erishishini aniqlash uchun 12.5.2 - teoremani qo'llang.

13-bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyani integrallash

13.1-§. Kvadratlanuvchi shakllar

1. Kvadratlanuvchi shakllar. 7-bobda (§7.2 ga qarang) yassi shaklning kvadratlanuvchanligi va uning yuzi tushunchalari kiritilgan edi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun integral yig'indining ta'rifi aynan shu yassi shakl yuzi tushunchasiga asoslanadi. Shu sababli ushbu paragrafda, o'quvchiga qulaylik tug'dirish maqsadida, §7.2 da keltirilgan ba'zi ta'rif va tasdiqlarni takrorlab o'tamiz.

Tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri to'rtburchak regulyar to'rtburchak deyiladi. Regulyar to'rtburchak yuzi uning tomonlari uzunliklarining ko'paytmasiga teng.

Chekli sondagi regulyar to'rtburchaklar birlashmasi sifatida tasvirlash mumkin bo'lgan shaklni ko'pburchakli shakl deb ataymiz. Agar P ko'pburchakli shaklni tashkil qiluvchi chekli sondagi to'rtburchaklar o'zaro umumiy ichki nuqtaga ega bo'lmasa, u holda ko'pburchakli shaklning $|P|$ yuzasi uni tashkil qiluvchi to'rtburchaklar yuzalarini yig'indisiga teng deb aniqlanadi.

Yassi shakl deb ixtiyoriy chegaralangan $E \subset \mathbb{R}^2$ to'plamga aytiladi. Har qanday yassi shakl uchun ushbu

$$|E|_* = \sup_{P \subset E} |P|$$

tenglik orqali uning $|E|_*$ quyi yuzi aniqlanadi, bunda aniq yuqori chegara E ga ichki chizilgan barcha P ko'pburchakli shakllar bo'yicha olinadi. Agar E ga birorta ham ko'pburchakli shaklni ichki chizib bo'lmasa, biz uning quyi yuzini nolga teng deb qabul qilamiz. Aslida, agar bo'sh to'plamni ham yuzi nolga teng bo'lgan ko'pburchakli shakl deb qarasaq, bu kelishuvga hojat qolmaydi.

Shu singari E to'plamining yuqori yuzi ham aniqlanadi:

$$|E|^* = \inf_{Q \supset E} |Q|,$$

bunda aniq quyi chegara E ga tashqi chizilgan barcha Q ko'pburchakli shakllar bo'yicha olinadi.

Agar yassi shaklning quyi yuzi yuqori yuziga teng bo'lsa, bunday shakl *kvadratlanuvchi* deyiladi. Bunda

$$|E| = |E|_* = |E|^*$$

son E kvadratlanuvchi yassi shaklning *yuzi* (yoki *yuzasi*) deb ataladi.

Shakl yuzi bilan egri chiziqli uzunligini farqlash zarur bo'lgan holda, biz E to'plamining yuzini $|E|_2$ simvoli orqali va uzunlikni esa, $|E|_1$ simvoli orqali belgilaymiz.

Tomonlarini uzunliklari a va b ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi ab ga teng bo'lib, ikki o'zgaruvchili ko'phadning uzluksizligiga ko'ra, bu kattalik tomonlar uzunligiga uzluksiz bog'liqdir. Demak, istalgan regulyar P to'rtburchak uchun P ni ichida yotuvchi shunday yopiq to'g'ri to'rtburchak topish mumkinki, uning yuzi P to'rtburchakni yuzidan istalgancha kam farq qiladi. Buning uchun P to'rtburchakning tomonlarini salgina kamaytirib, hosil bo'lgan to'rtburchakning yopig'ini olish yetarli. Xuddi shunga o'xshash, tomonlari uzunligini salgina oshirib, P ni o'z ichiga oluvchi shunday to'g'ri to'rtburchak topish mumkinki, uning yuzi P ni yuzidan istalgancha kam farq qiladi.

Ravshanki, har qanday P regulyar to'g'ri to'rtburchak uchun uning barcha ichki nuqtalari P ning ichida yotuvchi ochiq to'g'ri to'rtburchakni tashkil qiladi va P ning yopilmasi esa, P ni o'z ichiga oluvchi yopiq to'g'ri to'rtburchakni tashkil qiladi; bunda bu to'rtburchaklarning yuzlari $|P|$ ga teng bo'ladi.

Shunday ekan, agar E to'plamining quyi yoki yuqori yuzalari ta'rifida aniq chegarani E to'plamni mos ravishda ichida yotuvchi yoki uni o'z ichiga oluvchi yopiq ko'pburchakli shakllar bo'yicha olinsa, E to'plamning $|E|_*$ quyi yuzi yoki $|E|^*$ yuqori yuzi qiymatlari

o'zgarmaydi. Bunga sabab shundan iboratki, istalgan ko'pburchakli shakl uchun uni ichida yotuvchi yopiq P ko'pburchakli shaklni va uni o'z ichiga oluvchi yopiq Q ko'pburchakli shaklni, $|Q| - |P|$ ayirma qiymati istalgancha kichik bo'ladigan qilib, tanlash mumkin.

Xuddi shu eslatma aniq chegaralarni E ni ichida yotuvchi barcha ochiq ko'pburchakli shakllar bo'yicha, yoki E ni o'z ichiga oluvchi barcha ochiq ko'pburchakli shakllar bo'yicha olganda ham o'rinli.

Xususan, agar $E \subset \mathbb{R}^2$ yassi shaklni yuzi istalgancha kichik bo'lgan ochiq (yoki yopiq) ko'pburchakli shakl bilan qoplash mumkin bo'lsa, u holda bu yassi shakl yuzi nolga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, agar istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday chekli sondagi ochiq (yoki yopiq) $\{P_k\}_{k=1}^n$ to'g'ri to'rtburchaklar (o'zaro umumiy ichki nuqtaga ega bo'lishi ham mumkin) topilsaki, ular uchun

$$E \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$$

munosabat o'rinli bo'lib,

$$\sum_{k=1}^n |P_k| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, E to'plam yuzi nolga teng bo'ladi.

Quyidagi xossalarning o'rinli ekanligi o'z-o'zida ko'rinib turibdi:

- 1) yassi shakl yuzi nolga teng bo'lishi uchun uni yuqori yuzining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir;
- 2) yuzi nolga teng bo'lgan yassi shaklning istalgan qisman to'plami kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi ham nolga teng bo'ladi;
- 3) yuzi nolga teng bo'lgan chekli sondagi yassi shakllarning birlashmasi ham yuzi nolga teng bo'lgan yassi shakl bo'ladi.

Yuzi nolga teng bo'lgan kvadratlanuvchi shaklga muhim misol sifatida to'g'rilanuvchi egri chiziqni keltirish mumkin. To'g'rilanuvchi egri chiziq tushunchasi ham yuqorida qayd etilgan 7-bobda keltirilgan bo'lib (§7.1 ga qarang), to'g'rilanuvchi egri chiziq uzunligi unga

ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunliklarining aniq yuqori chegarasiga teng qilib aniqlangan edi.

Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun L egri chiziqning ε -atrofi deb L chiziqdan ε dan kichik masofada yotuvchi $\Gamma_\varepsilon(L)$ nuqtalar to'plamiga aytamiz:

$$\Gamma_\varepsilon(L) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dis}(x, L) < \varepsilon\}.$$

Bunda, odatdagidek, x nuqtadan E to'plamigacha bo'lgan $\text{dis}(x, E)$ masofani biz

$$\text{dis}(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y|$$

tenglik orqali aniqlaymiz.

13.1.1 - tasdiq. Berilgan L egri chiziq to'g'rilanuvchi bo'lib, uning uzunligi l ga teng bo'lsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun L chiziq ε -atrofining yuqori yuzi

$$|\Gamma_\varepsilon(L)|^* < 16(l + \varepsilon)\varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. L egri chiziqni $A_0, A_1, \dots, A_n$ nuqtalar yordamida uzunliklari l/n ga teng bo'lgan yoylarga bo'lamiz (bunda $A_0 = A_n$ bo'lishi ham mumkin) va $Q_\varepsilon(A_k)$ orqali markazi A_k nuqtada va tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lib, uzunligi 4ε ga teng kvadratlarni belgilaymiz. Quyidagi

$$Q = \bigcup_{k=1}^n Q_\varepsilon(A_k)$$

ko'pburchakli shaklni qaraylik. Agar n ni

$$\frac{l}{n} \leq \varepsilon < \frac{l}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

shartdan tanlab olsak, qo'shni A_k nuqtalar orasidagi masofa ε dan oshmaydi va demak, $\Gamma_\varepsilon(L) \subset Q$. Shunday ekan,

$$|\Gamma_\varepsilon(L)|^* \leq |Q| \leq \sum_{k=1}^n |Q_\varepsilon(A_k)| = (4\varepsilon)^2 \cdot n.$$

Nihoyat, $\varepsilon \cdot n < l + \varepsilon$ shartga ko'ra,

$$|\Gamma_\varepsilon(L)|^* \leq 16\varepsilon(\varepsilon \cdot n) < 16\varepsilon(l + \varepsilon).$$

■

13.1.2 - tasdiq. Tekislikdagi to'g'rilanuvchi egri chiziq kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi nolga teng.

Haqiqatan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun uzunligi l ga teng bo'lgan to'g'rilanuvchi L egri chiziqning yuqori yuzi

$$|L|^* \leq |\Gamma_\varepsilon(L)|^* \leq 16(l + \varepsilon)\varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, L chiziqning yuqori yuzi nolga teng, ya'ni bu chiziq kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi nolga teng.

2. Yassi shaklning chegarasi. Eslatib o'tamiz, agar $a \in \mathbf{R}^2$ nuqtaning istalgan atrofida berilgan $E \subset \mathbf{R}^2$ to'plamga tegishli bo'lgan va tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud bo'lsa, bunday nuqta E to'plamning chegaraviy nuqtasi deyilar edi.

E yassi shaklning barcha chegaraviy nuqtalari to'plamining uning chegarasi deb ataladi va ∂E simvoli orqali belgilanadi. Ravshanki, $a \in \partial E$ bo'lishi uchun a ga yaqinlashuvchi ikki $x_n \in E$ va $y_n \notin E$ ketma-ketlikning topilishi zarur va yetarlidir. Bunda, bu ketma-ketliklardan birining barcha elementlari a nuqta bilan ustma-ust tushishi ham mumkin.

E yassi shaklning chegarasi quyidagi o'z-o'zidan tushunarli xossaga ega:

agar $a \in E$ va $b \notin E$ bo'lsa, a va b nuqtalarni tutashtiruvchi kesmada $c \in \partial E$ nuqta topiladi.

Boshqacha aytganda, agar nuqtalardan biri biror to'plamda yotsa va ikkinchisi esa, bu to'plamda yotmasa, bu nuqtalarni tutashtiruvchi kesma albatta bu to'plam chegarasini kesib o'tadi.

Haqiqatan,

$$x(t) = (1 - t)a + tb$$

deylik.

M simvoli orqali $x(t) \in E$ shartni qanoatlantiruvchi $t \in [0, 1]$ nuqtalar to'plamini belgilaylik. U holda, ravshanki, $t = 0$ nuqta bu to'plamga tegishli, lekin $t = 1$ nuqta esa, tegishli emas. Agar t_0 nuqta M to'plamining aniq yuqori chegarasi bo'lsa,

$$c = x(t_0) = (1 - t_0)a + t_0b$$

nuqta E to'plamining ∂E chegarasida yotishini ko'rsatish qiyin emas.

Yuzalar xossalarini o'rganishda yassi shaklning kvadratlanuvchi bo'lishining navbatdagi kriteriysi muhim ahamiyatga ega (7.2.2 - teorema natijasiga qarang).

13.1.3 - tasdiq. *Yassi shaklning kvadratlanuvchi bo'lishi uchun uning chegarasi yuzining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. Haqiqatan, E yassi shakl berilgan bo'lib, ikki ixtiyoriy P (ochiq) va Q (yopiq) ko'pburchakli shakllar quyidagi

$$P \subset E \subset Q$$

munosabatni qanoatlantirsin.

U holda ∂E chegara ushbu

$$\partial E \subset Q \setminus P$$

shartni qanoatlantiradi, bunda $Q \setminus P$ yopiq ko'pburchakli shakl bo'lib, u Q dan P ko'pburchakli shaklning barcha nuqtalarini chiqazib tashlashdan hosil bo'lgan. Shuning uchun,

$$|\partial E|^* = \inf_{P \subset E \subset Q} |Q \setminus P| = \inf_{P \subset E \subset Q} (|Q| - |P|) = \inf_{Q \supset E} |Q| - \sup_{P \subset E} |P|.$$

Demak,

$$|\partial E|^* = |E|^* - |E|_*.$$

Shunday qilib, chegara yuqori yuzining nolga teng bo'lishi uchun yassi shaklni yuqori yuzining shu shaklni quyi yuziga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan, ya'ni kvadratlanuvchi yassi shaklda chegara yuzi nolga tengdir va aksincha, agar yassi shakl chegarasining yuzi nolga teng bo'lsa, u kvadratlanuvchidir.

13.1.4 - tasdiq. Agar yassi shakl chegarasi to'g'rilanuvchi egri chiziq bo'lsa, u holda bunday yassi shakl kvadratlanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, bu tasdiqning to'g'riligi 13.1.2 - va 13.1.3 - tasdiqlardan kelib chiqadi.

O'z-o'zini kesmaydigan uzluksiz egri chiziqni sodda egri chiziq deb atagan edik. Agar L sodda egri chiziq $x = \varphi(t)$ tenglama bilan berilib, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ biror $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmani $\mathbb{R}^2$ tekislikka uzluksiz differensiallanuvchi akslantirish bo'lsa, bunday sodda egri chiziq silliq egri chiziq deyiladi. Bunda $L = \varphi([a, b])$.

7 - bobda har qanday silliq egri chiziqning to'g'rilanuvchi bo'lishi ko'rsatilgan edi.

Agar egri chiziqni har biri silliq bo'lgan chekli sondagi qismlarga ajratish mumkin bo'lsa, u *bo'lakli-silliq* egri chiziq deyiladi. Ravshan-ki, har qanday bo'lakli-silliq egri chiziq to'g'rilanuvchi bo'lib, natija-da uning yuzi nolga teng bo'ladi.

Natija. Agar yassi shaklning chegarasi bo'lakli-silliq egri chiziq bo'lsa, bu shakl kvadratlanuvchi bo'ladi.

Shuni qayd etish joizki, chegaraning to'g'rilanuvchi bo'lishi - bu yassi shakl kvadratlanuvchi bo'lishining faqat yetarli shartidir. Navbatdagi misol yassi shakl kvadratlanuvchi bo'lib, chegara esa to'g'rilanuvchi bo'lmazligi ham mumkinligini ko'rsatadi.

13.1.1 - misol. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmada berilgan bo'lib, shu kesmada uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari, quyidagi

$$\varphi(x) \leq \psi(x), \quad a \leq x \leq b,$$

shart bajarilsin. U holda tekislikning bu ikki funksiya grafigi orasidagi nuqtalari to'plami, ya'ni

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

kvadratlanuvchi shakl bo'ladi.

Haqiqatan, 7 - bobda ko'rsatilganidek ((7.2.16) formulaga qarang), E shakl yuzi uchun ushbu

$$|E| = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx$$

tenglik o'rinli.

E shakl chegarasi to'rtta qismdan, ya'ni φ va ψ funktsiyalar grafigi hamda bu grafiklarning boshi va oxirini tutashtiruvchi ikki vertikal kesmalardan iborat. Agar ψ uzluksiz funksiya grafigini to'g'-rilanuvchi bo'lmaydigan qilib tanlasak (7.1.2 - misolga qarang), kvadratlanuvchi E yassi shaklning chegarasi ham to'g'-rilanuvchi bo'lmaydi.

3. Kvadratlanuvchi shakllar xossalari.

13.1.3 - tasdiq yordamida navbatdagi ikki xossani osongina isbotlash mumkin.

13.1.5 - tasdiq. *Ikki kvadratlanuvchi shakl birlashmasi yana kvadratlanuvchi shakl bo'ladi.*

Isbot. Quyidagi sodda jumla o'rinli: agar E_1 va E_2 ikki kvadratlanuvchi shakl bo'lib, $E = E_1 \cup E_2$ bo'lsa, u holda quyidagi

$$\partial E \subset (\partial E_1 \cup \partial E_2)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, agar $a \in \partial E$ bo'lsa, u holda a ga yaqinlashuvchi ikki $x_n \in E$ va $y_n \notin E$ ketma-ketlik topiladi. Zarur bo'lsa qisman ketma-ketlikka o'tib, barcha x_n nuqtalarni E_1 va E_2 to'plamlardan bittasiga tegishli deb hisoblash mumkin. Bu esa a nuqtaning ko'rsatilgan to'plam chegarasiga tegishli ekanini anglatadi.

Endi 13.1.5 - tasdiqning to'g'riligi isbotlangan jumladan bevosita kelib chiqadi:

$$|\partial E| \leq |\partial E_1| + |\partial E_2| = 0.$$



13.1.6 - tasdiq. Ikki kvadratlanuvchi shakl kesishmasi yana kvadratlanuvchi shakl bo'ladi.

Isbot. Navbatdagi sodda jumla xuddi yuqoridagi jumla kabi isbotlanadi: agar E_1 va E_2 ikki kvadratlanuvchi shakl bo'lib, $E = E_1 \cap E_2$ bo'lsa, u holda

$$\partial E \subset (\partial E_1 \cup \partial E_2)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Haqiqatan, agar $a \in \partial E$ bo'lsa, a ga yaqinlashuvchi ikki $x_n \in E$ va $y_n \notin E$ ketma-ketlik topiladi. Lozim bo'lsa qisman ketma-ketlikka o'tib, barcha y_n nuqtalarni E_1 va E_2 to'plamlardan bittasiga tegishli emas deb hisoblash mumkin. Lekin barcha x_n nuqtalar bu to'plamlarning har biriga tegishli bo'lgani uchun, a nuqta ∂E_1 yoki ∂E_2 to'plamlardan biriga va demak, ularning birlashmasiga tegishli.

Isbotlangan jumladan, ravshanki, tasdiqimiz kelib chiqadi. ■

Endi kvadratlanuvchi shakl yuzining xossalarini o'rganishga o'tamiz.

1 - xossa (monotonligi). Agar E_1 va E_2 yassi shakllar kvadratlanuvchi bo'lib, $E_1 \subset E_2$ bo'lsa, $|E_1| \leq |E_2|$ tengsizlik o'rinli.

Ravshanki, bu tengsizlik yuqori va quyi yuzalar uchun o'rinli. Bundan chiqdi, xossa ham o'rinli bo'lar ekan.

Haqiqiy sonlar to'plamida arifmetik amallar distributivlik xossasiga ega bo'lgani sababli, tog'ri to'rtburchaklar yuzi va demak, ko'pburchakli shakllar yuzalari ham additivlik xossasiga ega.

2 - xossa (additivlik). Agar E_1 va E_2 kvadratlanuvchi shakllar kesishmasa, u holda

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| \quad (13.1.1)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, $E = E_1 \cup E_2$ birlashmaning kvadratlanuvchi ekani 13.1.6 - tasdiqdan kelib chiqadi. Bundan tashqari, agar P_1 va P_2 ko'pburchakli shakllar $P_1 \subset E_1$ va $P_2 \subset E_2$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda

$$|P_1| + |P_2| = |P_1 \cup P_2| \leq |E_1 \cup E_2|$$

munosabat o'rinli bo'ladi va bu munosabatda aniq yuqori chegaraga o'tsak, quyidagi

$$|E_1| + |E_2| \leq |E_1 \cup E_2| \quad (13.1.2)$$

tengsizlikni olamiz.

Xuddi shu kabi, agar Q_1 va Q_2 ko'pburchakli shakllar $E_1 \subset Q_1$ va $E_2 \subset Q_2$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda

$$|E_1 \cup E_2| \leq |Q_1 \cup (Q_2 \setminus Q_1)| = |Q_1| + |(Q_2 \setminus Q_1)| \leq |Q_1| + |Q_2|$$

munosabat o'rinli bo'ladi va bu munosabatda aniq quyi chegaraga o'tsak, ushbu

$$|E_1 \cup E_2| \leq |E_1| + |E_2| \quad (13.1.3)$$

tengsizlikni olamiz.

(13.1.2) va (13.1.3) baholarni taqqoslab, talab qilingan (13.1.1) tenglikka ega bo'lamiz.

Natija. Agar $E_1, E_2, \dots, E_n$ kvadratlanuvchi shakllar o'zaro kesishmasa, u holda

$$\left| \bigcup_{k=1}^n E_k \right| = \sum_{k=1}^n |E_k| \quad (13.1.4)$$

tenglik bajariladi.

Eslatib o'tamiz, kvadratlanuvchanlik nazariyasini qurayotganimizda to'g'ri to'rt-burchak yuzini uning tomonlari uzunliklarining ko'paytmasi sifatida aniqlashimiz asos bo'lib hizmat qilgan edi. Bunday aniqlashni biz faqat to'g'ri to'rtburchakning tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lganda qo'lladik. Lekin, xuddi shu usulda,

istalgan ikki o'zaro ortogonal $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ va $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vektorlar yordamida qurilgan to'g'ri to'rtburchak yuzini ham aniqlash mumkin.

Haqiqatan, analitik geometriya kursidan yaxshi ma'lumki, istalgan ikki $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ vektorlar yordamida qurilgan parallelogramm yuzi

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\det D(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \quad (13.1.5)$$

kabi aniqlanadi, bunda, o'ng tarafda

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (13.1.6)$$

matritsa determinantining absolyut qiymati turibdi.

Agar qayd qilingan vektorlar ortogonal bo'lsa, ya'ni ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0,$$

u holda

$$2a_1 a_2 b_1 b_2 = -(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2)$$

va, demak,

$$S^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 = (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2)$$

tenglik o'rinli.

Shunday ekan, to'g'ri to'rtburchakning yuzi bu holda ham tomonlar uzunliklari ko'paytmasi sifatida aniqlanadi, ya'ni

$$S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|. \quad (13.1.7)$$

Bundan, ortogonal akslantirishda kvadratlanuvchi shakl yuzining saqlanishi to'g'ridan to'g'ri kelib chiqadi.

Yana, bevosita to'g'ri to'rtburchak yuzining ta'rifiga ko'ra, parallel ko'chirishda ham kvadratlanuvchi shakl yuzi o'zgarmaydi. Demak, har qanday izometrik akslantirish, y'ani masofani saqlovchi

akslantirish, ortogonal akslantirish va parallel ko'chirishning superpozitsiyasi bo'lgani sababli, izometrik akslantirishda kvadraturachanlik xossasi ham, shakl yuzining qiymati ham saqlanar ekan. Shunday qilib, navbatdagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

3 - xossa (invariantlik). Faraz qilaylik, U akslantirish $\mathbb{R}^2$ tekislikni o'ziga izometrik akslantirsin, ya'ni istalgan $x \in \mathbb{R}^2$ va $y \in \mathbb{R}^2$ nuqtalar uchun

$$|Ux - Uy| = |x - y|$$

tenglik bajarilsin.

U holda istalgan kvadratlanuvchi E shakl uchun UE shakl ham kvadratlanuvchi bo'lib,

$$|UE| = |E|$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi istalgan

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad (13.1.8)$$

matritsa yordamida aniqlangan xosmas chiziqli $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ akslantirishni qaraymiz.

Bu akslantirishning xosmas ekani $\det A \neq 0$ shart bajarilishini anglatadi.

Bunda $x = (x_1, x_2)$ vektor quyidagi

$$y = Ax = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)$$

vektorga akslanadi (ko'paytma natijasida vektor-ustun vektor-satr ko'rinishida yozildi).

Demak, $\mathbf{a}_1 = (c_1, 0)$ va $\mathbf{a}_2 = (0, c_2)$ vektorlar bilan aniqlangan

$$P = \{0 \leq x_1 \leq c_1, 0 \leq x_2 \leq c_2\}$$

to'g'ri to'rtburchak

$$\mathbf{b}_1 = A\mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}c_1, \alpha_{21}c_1) \quad \text{va} \quad \mathbf{b}_2 = A\mathbf{a}_2 = (\alpha_{12}c_2, \alpha_{22}c_2)$$

vektorlar bilan aniqlangan parallelogrammga o'tadi.

(13.1.5) va (13.1.6) formulalarga ko'ra, bu parallelogrammning $S(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ yuzi

$$B = \begin{vmatrix} \alpha_{11} c_1 & \alpha_{12} c_2 \\ \alpha_{21} c_1 & \alpha_{22} c_2 \end{vmatrix}$$

matritsa determinantining absolyut qiymatiga teng.

Bu matritsani (13.1.8) matritsa bilan taqqoslasak,

$$S(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = |\det B| = |c_1 \cdot c_2 \cdot \det A| = |P| \cdot |\det A|$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, P to'g'ri to'rtburchakning va AP parallelogrammning yuzalari ushbu

$$|AP| = |P| \cdot |\det A| \quad (13.1.9)$$

munosabat yordamida bog'langan ekan.

Agar istalgan Q ko'pburchakli shakl AQ yassi shaklga akslantirilsa, bevosita (13.1.9) formuladan oxirgi shaklning kvadratlanuvchi ekani va

$$|AQ| = |Q| \cdot |\det A|$$

formulaning o'rinli ekani kelib chiqadi.

Bundan, o'z navbatida, quyidagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

13.1.7 - tasdiq. $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xosmas chiziqli akslantirish kvadratlanuvchi E shaklni kvadratlanuvchi AE shaklga o'tkazadi va bunda

$$|AE| = |E| \cdot |\det A| \quad (13.1.10)$$

tenglik bajariladi.

Navbatdagi tasdiq to'g'rilanuvchi chegarali yassi shakl o'z chegarasidan uzluksiz bog'liq ekanini ta'kidlaydi.

13.1.8 - tasdiq. Faraz qilaylik, Ω yassi shakl to'g'rilanuvchi $\partial\Omega$ chegaraga ega bo'lib, chegara tenglamasi

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), \quad t \in [a, b], \quad \varphi(a) = \varphi(b)\}.$$

ko'rinishga ega bo'lsin, bunda $\varphi(t)$ funksiya $\mathbb{R}^2$ dan qiymat qabul qiluvchi uzluksiz vektor-funksiyadir. Bundan tashqari, Ω_ε kvadratlanuvchi shakl chegarasi uzluksiz $\varphi_\varepsilon(t)$ vektor-funksiya orqali berilgan bo'lib, u uchun

$$|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [a, b], \quad (13.1.11)$$

baho o'rinli bo'lsin.

U holda, qayd qilingan shakllar yuzalari

$$||\Omega_\varepsilon| - |\Omega|| \leq 16(|\partial\Omega|_1 + \varepsilon) \cdot \varepsilon. \quad (13.1.12)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, bunda $|\partial\Omega|_1$ simvol $\partial\Omega$ egri chiziqli uzunligini anglatadi.

Isbot. 13.1.1 - tasdiqning 1 - natijasiga ko'ra, $\partial\Omega$ chegaraning to'g'rilanuvchiligidan Ω sohasining kvadratlanuvchi ekani kelib chiqadi.

$\partial\Omega$ egri chiziqli atrofni Γ_ε simvoli orqali belgilaymiz:

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dis}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}. \quad (13.1.13)$$

13.1.1 - tasdiqqa asosan, Γ_ε to'plamning yuqori chegarasi

$$|\Gamma_\varepsilon|^* \leq 16(|\partial\Omega|_1 + \varepsilon) \cdot \varepsilon \quad (13.1.14)$$

kabi baholanadi.

(13.1.11) shartga ko'ra,

$$\Omega_\varepsilon \subset \Omega \cup \Gamma_\varepsilon, \quad \Omega \subset \Omega_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon.$$

Demak,

$$|\Omega_\varepsilon| \leq |\Omega| + |\Gamma_\varepsilon|^*$$

va

$$|\Omega| \leq |\Omega_\varepsilon| + |\Gamma_\varepsilon|^*.$$

Oxirgi ikki tengsizlik va (13.1.14) bahodan talab qilingan 13.1.12) munosabat kelib chiqadi.



13.2-§. Ikki karrali Riman integralining ta'rifi

1. Riman integral yig'indilari. Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^2$ kvadratlanuvchi shakl bo'lsin. Bu shaklning $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi deb quyidagi uch shartni:

1) har bir E_k to'plam kvadratlanuvchi shakl bo'lsin;

2) E_k to'plamlar o'zaro kesishmasin;

3) E_k to'plamlar birlashmasi E shakliga teng bo'lsin;

qanoatlantiruvchi qismaniy to'plamlarining chekli sonidagi oilasiga aytamiz.

Ravshanki, bu shartlarga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^n |E_k| = |E|.$$

E_k qismaniy to'plam *diametri* deb manfiy bo'lmagan

$$d(E_k) = \sup_{x \in E_k, y \in E_k} |x - y|$$

songa aytamiz. Bu $d(E_k)$ sonlardan eng kattasini P bo'linishning $d(P)$ *diametri* deymiz.

E to'plamda aniqlangan va haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi ixtiyoriy $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tanlab,

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot |E_k| \quad (13.2.1)$$

integral yig'indini tuzamiz.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ son topilsaki,

$d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $P = \{E_k\}$ bo'linish uchun, $\xi_k \in E_k$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ravishda, quyidagi

$$|\sigma_P(f) - I| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda I soniga (13.2.1) integral yig'indilarning $d(P) \rightarrow 0$ dagi limiti deyiladi.

E to'plamda aniqlangan har qanday funksiya uchun ham integral yig'indi limitga ega bo'lavermaydi. Bunga misol keltirish qiyin emas. Lekin, aynan mana shu limit mavjud bo'lgan funktsiyalar alohida qiziqish uyg'otadi.

Ta'rif. Agar E to'plamda aniqlangan f funktsiyaning (13.2.1) integral yig'indilari $d(P) \rightarrow 0$ da biror I limitga ega bo'lsa, u holda bu funksiya E to'plamda Riman bo'yicha integrallanuvchi deyiladi.

Bu limit f funktsiyadan E bo'yicha olingan ikki karrali Riman integrali deb ataladi va

$$I = \iint_E f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

ko'rinishda belgilanadi.

Bu belgilash bilan bir qatorda zamonaviy matematik adabiyotlarda

$$I = \int_E f(x) dx$$

belgilash ham ishlatiladi. Bunda integralning ikki karrali ekani E orqali tekislikdagi kvadratlanuvchi shakl belgilanganidan kelib chiqadi.

Berilgan f funksiya integral ostidagi funksiya va E kvadratlanuvchi shakl esa, integrallash sohasi deb ataladi.

Integrallanuvchi eng sodda funksiya sifatida o'zgarmas funksiyani olish mumkin:

$$f(x) = c, \quad x \in E.$$

Haqiqatan, istalgan $P = \{E_k\}$ bo'linish uchun, $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni har qanday tanlaganda ham

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^n c \cdot |E_k| = c|E|$$

tenglik o'rinli.

Demak, integral yig'indilarning limiti mavjud, ya'ni o'zgarmas funksiya integrallanuvchi bo'lib, uning integrali

$$\int_E c \, dx = c|E|$$

ga teng.

Kvadratlanuvchi to'plamlarning xarakteristik funksiyalari, sodda bo'lishiga qaramasdan, integrallanuvchi funksiyalarga muhim misol bo'ladi.

Berilgan $M \subset \mathbb{R}^2$ to'plamning xarakteristik funksiyasi deb quyidagi

$$\omega(x, M) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in M \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \notin M \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (13.2.2)$$

tenglik bilan aniqlangan $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyaga aytamiz.

13.2.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, E kvadratlanuvchi shakl bo'lib, M esa E ning kvadratlanuvchi qisman to'plami bo'lsin. U holda $\omega(x, M)$ funksiya E da Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, ushbu

$$\int_E \omega(x, M) \, dx = |M| \quad (13.2.3)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun yopiq ko'pburchakli F shaklni va ochiq ko'pburchakli G shaklni shunday tanlaymizki, $F \subset M \subset G$ bo'lib, quyidagi

$$|F| > |M| - \varepsilon, \quad |G| < |M| + \varepsilon \quad (13.2.4)$$

shartlar bajarilsin.

Bundan tashqari, F , G va M to'plamlar chegarasi o'zaro kesishmasin deb shart qoyib, δ sonini quyidagi

$$\delta < \text{dis}\{\partial F, \partial M\}, \quad \delta < \text{dis}\{\partial M, \partial G\}$$

shartlardan tanlaymiz.

Kvadratlanuvchi E shaklning, diametri $d(P) < \delta$ bahoni qanoatlantiruvchi, istalgan $P = \{E_k\}$ bo'linishini olib, $\omega = \omega(x, M)$ xarakteristik funksiya integral yig'indilarini uch qismga bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \sigma_P(\omega) = \sum_k' \omega(\xi_k, M)|E_k| + \sum_k'' \omega(\xi_k, M)|E_k| \\ + \sum_k''' \omega(\xi_k, M)|E_k|. \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

Birinchi yig'indiga E_k to'plamlar to'laligicha berilgan M da yotadigan hadlarni kiritamiz. Bu holda $\xi_k \in M$ va $\omega(\xi_k, M) = 1$, ya'ni, har bir had $|E_k|$ ga teng. δ sonini tanlashimizga ko'ra, birinchi yig'indiga kirgan to'plamlar ko'pburchakli F shaklni to'la qoplaydi va shu sababli, birinchi yig'indi quyidan $|F|$ qiymat bilan baholanadi.

Ikkinchi yig'indiga E_k to'plamining bir qismi (bo'sh bo'lmagan) M da yotib, boshqa qismi (bo'sh bo'lmagan) M dan tashqarida yotgan hadlarni kiritamiz. δ sonini tanlashimizga ko'ra, barcha bunday E_k to'plamlar ko'pburchakli Q shakldan tashqariga chiqmaydi. Shu sababli, birinchi va ikkinchi yig'indi birgalikda yuqoridan $|G|$ kattalik bilan baholanadi.

Uchinchi yig'indiga E_k to'plamlar M to'plamdan butunlay tashqarida yotgan hadlarni kiritamiz. Ravshanki, bu yig'indiga kiruvchi har bir had nolga teng.

Shunday qilib, (13.2.5) integral yig'indi navbatdagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$|F| \leq \sigma_P(\omega) \leq |G|. \quad (13.2.6)$$

Shunday ekan, (13.2.4) va (13.2.6) dan ushbu

$$|M| - \varepsilon < \sigma_P(\omega) < |M| + \varepsilon$$

munosabat kelib chiqadi.

Bu esa integral yig'indilar limiti mavjud ekanini va demak, $\omega(x, M)$ funksiya integrallanuvchi bo'lib, (13.2.3) tenglik o'rinli bo'lishini anglatadi.



Eslatma. Biror kesmada integrallanuvchi bo'lgan bir o'zgaruvchili funksiya bilan farqli o'laroq, ikki o'zgaruvchili funksiyaning istalgan kvadratlanuvchi shakl bo'yicha integrallanuvchiligidan bu funksiyaning chegaralangan ekanini kelib chiqmaydi. Bunga eng soddami sol sifatida tekislikda yotuvchi biror kesmada aniqlangan va bu kesmada chegaralanmagan funksiya olish mumkin. Haqiqatan, kesmaning yuzi nolga teng bo'lgani sababli, u kvadratlanuvchi shakl bo'ladi. Kesmani har bir qismiy to'plamining ham yuzi nolga teng bo'lgani uchun, barcha integral yig'indilar nolga teng, ya'ni kesmada chegaralanmagan funksiya ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida integrallanuvchi bo'ladi.

Navbatdagi misolda yuzi musbat kvadratlanuvchi to'plamda aniqlangan funksiya qaraymiz.

13.2.1 - misol. Q simvol orqali

$$Q = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

ko'rinishdagi birlik kvadratni va I orqali esa, absissalar o'qidagi

$$I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 < 3, x_2 = 0\}$$

intervalni belgilab, $E = Q \cup I$ bog'langan to'plamni qaraymiz.

Bu to'plamda aniqlangan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } 0 \leq x_1 \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{x_1 - 2}{x_1 - 3}, & \text{agar } 2 < x_1 < 3 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya E da chegaralanmagan, ammo uning integral yig'indilari limitga ega bo'lib, bu limit nolga teng. Bu tasdiq E to'plamning $d(P) < 1$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan P bo'linishi uchun barcha mos integral yig'indilarining nolga tengligidan kelib chiqadi.

E'tibor bering, bu funksiya (yopiq bo'lmagan) E to'plamda uzluksizdir. Albatta, bu misolni murakkablashtirib, aniq ifoda qilish qiyin bo'lgan qandaydir kvadratlanuvchi sohada Riman ma'nosida integrallanuvchi funksiya chegaralangan bo'lishi haqida umumiy tasdiq keltirish mumkin.

Lekin, bunday tasdiqqa hojat yo'q, chunki Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'la turib, chegaralanmagan funksiyalar to'plami mazmunan yuqorida keltirilgan misoldagiga o'xshash funksiyalardangina iborat ekan. Chunonchi, quyidagi tasdiq o'rinli.

13.2.2 - tasdiq. Agar f funksiya biror kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda yuzi nolga teng bo'lgan shunday $E_0 \subset E$ to'plam topiladiki, f funksiya $E \setminus E_0$ to'plamda chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, f funksiya yuzi musbat kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni integral yig'indilar limiti mavjud bo'lib, u biror I soniga teng bo'lsin. Bundan chiqdi, $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishni shunday tanlash mumkinki, quyidagi

$$|\sigma_P(f) - I| \leq 1$$

tengsizlik $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni istalgancha tanlashda ham o'rinli bo'ladi.

Bu tengsizlik va integral yig'indilarining (13.2.1) ta'rifiga ko'ra,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot |E_k| \right| \leq |I| + 1. \quad (13.2.7)$$

Umuman aytganda, $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishdagi ba'zi E_k qismaniy to'plamlar yuzi nolga teng bo'lishi mumkin. Shu sababli integral yig'indini ikki qismga bo'lamiz:

$$\sigma_P(f) = \sum_k' f(\xi_k) \cdot |E_k| + \sum_k'' f(\xi_k) \cdot |E_k|.$$

Bunda birinchi yig'indiga $|E_k| > 0$ tengsizlikni qanoatlantirgan barcha hadlarni kiritamiz va ikkinchi yig'indiga esa, $|E_k| = 0$ shartni qanoatlantiruvchi hadlarni kiritamiz. Ikkinchi yig'indiga kiruvchi barcha E_k to'plamlar birlashmasini E_0 orqali belgilaymiz, ya'ni

$$E_0 = \bigcup_k'' E_k.$$

Ravshanki, chekli sondagi yuzi nolga teng to'plamlarning birlashmasi bo'lgani sababli, E_0 to'plam yuzi nolga teng. Shunday ekan, (13.2.7) dan

$$\left| \sum_k' f(\xi_k) \cdot |E_k| \right| \leq |I| + 1$$

tengsizlikning $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni istalgancha tanlaganda ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Bu tengsizlikka ko'ra, yuzi musbat bo'lgan har bir E_k qismini to'plamda f funksiya chegaralangan bo'ladi. Haqiqatan, faraz qilaylik, f yuzi musbat bo'lgan biror E_m to'plamda chegaralanmagan bo'lsin. Oxirgi tengsizlikni

$$\left| f(\xi_m)|E_m| + \sum_{k \neq m}' f(\xi_k) \cdot |E_k| \right| \leq |I| + 1 \quad (13.2.8)$$

ko'rinishda yozamiz.

Barcha $k \neq m$ lar uchun $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tayinlab, biz $\xi_m \in E_m$ nuqtani (13.2.8) tengsizlikni chap qismi istalgancha katta bo'ladigan qilib tanlashimiz mumkin. Bu esa oxirgi tengsizlikka zid-dir.

Demak, f funktsiya yuqoridagi birinchi yig'indiga kirgan barcha to'plamlar birlashmasida, ya'ni

$$E^* = \bigcup_k E_k$$

to'plamda chegaralangan. Bu to'plam, ravshanki, $E \setminus E_0$ bilan ustma-ust tushadi.

Bundan buyon, zaruriyat bo'lganda, biz integralanuvchanlikka tekshirilayotgan funktsiyani chegaralangan bo'lishini talab qilamiz. 13.2.2 - tasdiqqa ko'ra, funktsiya qiymatini yuzi nolga teng bo'lgan biror to'plamda o'zgartirib, bunga doimo erishish mumkin.

2. Ikki karrali Riman integralining asosiy xossalari.

13.2.1 - teorema (integralning chiziqliligi). Agar f va g funktsiyalar kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda har qanday λ va μ haqiqiy sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funktsiya ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_E [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_E f(x) dx + \mu \int_E g(x) dx \quad (13.2.9)$$

tenglik bajariladi.

Isbot

$$\sigma_P(\lambda f + \mu g) = \lambda \sigma_P(f) + \mu \sigma_P(g)$$

tenglikdan kelib chiqadi. Haqiqatan, bu tenglikda P bo'linishning $d(P)$ diametrini nolga intiltirsak, talab qilingan (13.2.9) munosabatni olamiz.

13.2.1 - lemma. Agar g funktsiya kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lib, E da $g(x) \geq 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_E g(x) dx \geq 0$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot bevosita har qanday integral yig'indi uchun

$$\sigma_P(g) \geq 0$$

tengsizlik bajarilishidan kelib chiqadi.

13.2.2 - teorema (tengsizlikni integrallash haqida). Agar f va g funksiyalar kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lib, E da $f(x) \leq g(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot, agar 13.2.1 - lemmani $g - f$ funksiyaga qo'llasak, bevosita 13.2.1 - teoremadan kelib chiqadi.

13.3-§. Darbu nazariyasi

1. Darbuning quyi va yuqori yig'indilari. Darbu nazariyasi funksiyaning kvadratlanuvchi to'plamda integrallanuvchi ekanini aniqlash masalasini samarali ravishda hal qiladi.

Berilgan $M \subset E$ to'plamining $\omega(x, M)$ xarakteristik funksiyasi (13.2.1) tenglik bilan aniqlangan bo'lsin. *Sodda funksiya* deb kvadratlanuvchi to'plamlar xarakteristik funksiyalarining

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \omega(x, E_k)$$

ko'rinishdagi chiziqli kombinatsiyasiga aytamiz.

Ravshanki, har qanday sodda funktsiya integrallanuvchi bo'lib, (13.2.3) tenglikka va 13.2.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k |E_k| \quad (13.3.1)$$

munosabat o'rinli.

Endi kvadratlanuvchi $E \subset \mathbb{R}^2$ to'plarida ixtiyoriy chegaralangan $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ funktsiya berilgan bo'lsin. Istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linish uchun

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in E_k} f(x) \quad (13.3.2)$$

belgilash kiritib, mos ravishda Darbuning quyi funktsiyasi va Darbuning yuqori funktsiyasi deb ataluvchi, quyidagi ikki sodda funktsiyani qaraymiz:

$$h(x, P) = \sum_{k=1}^n m_k \omega(x, E_k) \quad (13.3.3)$$

va

$$H(x, P) = \sum_{k=1}^n M_k \omega(x, E_k). \quad (13.3.4)$$

Albatta, istalgan P bo'linish uchun

$$h(x, P) \leq f(x) \leq H(x, P) \quad (13.3.5)$$

tengsizlik o'rinli.

Bundan istalgan ikki P_1 va P_2 bo'linishlar uchun

$$h(x, P_1) \leq H(x, P_2) \quad (13.3.6)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Xuddi bir o'zgaruvchilik holdagidek, mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilarini kiritamiz:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot |E_k|, \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot |E_k|. \quad (13.3.7)$$

Bevosita (13.3.1) dan Darbuni quyi sodda funksiyasidan olingan integral Darbuni quyi yig'indisiga va Darbuni yuqori sodda funksiya-dan olingan integral Darbuni yuqori yig'indisiga tengligi kelib chiqadi. Shunday ekan, istalgan P_1 va P_2 bo'linishlar uchun, (13.3.6) tengsizlik va 13.2.2 - teorema ko'ra,

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2) \quad (13.3.8)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

2. Darbuning quyi va yuqori integrallari. Darbuning quyi integrali deb

$$\underline{I}(f) = \sup_P s(f, P) \quad (13.3.9)$$

kattalikka va yuqori integrali deb

$$\overline{I}(f) = \inf_P S(f, P) \quad (13.3.10)$$

kattalikka aytamiz.

Bu integrallar uchun (13.3.8) dan kelib chiquvchi

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \quad (13.3.11)$$

tengsizlik ularga berilgan nomlarning to'g'ri ekanini tasdiqlaydi.

Ta'rif. Agar E to'plamda berilgan f funksiya uchun Darbuning quyi integrali Darbuning yuqori integraliga teng bo'lsa, bu funksiya E to'plamda Darbu ma'nosida integrallanuvchi deyiladi va bu umumiy qiymat f funksiyaning Darbu ma'nosidagi integrali deyiladi:

$$I_D(f) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Navbatdagi maqsadimiz Darbu ma'nosidagi integrallanuvchanlik Riman bo'yicha integrallanuvchanlik bilan ustma-ust tushishini isbotlashdan iborat. Buni uchun Darbuni quyi va yuqori yig'indilarning xossalari mukammalroq o'rganish zarur.

Agar $P^* = \{E_j^*\}_{j=1}^m$ bo'linishning har bir E_j^* qismaniy to'plami $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishning biror E_k qismaniy to'plami ichida yotsa, P^* bo'linishni P bo'linishning *maydalangani* deyviz.

13.3.1 - tasdiq. Agar P^* bo'linish P ning maydalangani bo'lsa, u holda

$$s(f, P) \leq s(f, P^*), \quad S(f, P^*) \leq S(f, P) \quad (13.3.12)$$

bo'ladi.

Isbot. Tengsizlikni yuqori yig'indilar uchun isbotlaymiz. Quyi yig'indilar uchun ham isbot shunga o'xshash bo'ladi.

P bo'linishning qismaniy to'plamlaridan biri, masalan E_k , maydalanish natijasida o'zaro kesishmaydigan ikki E'_k va E''_k kvadratlanuvchi to'plamlarga bo'lingan holni qarash yetarli. Agar f funktsiyaning ana shu qismaniy to'plamlardagi aniq yuqori chegaralarini mos ravishda M'_k va M''_k orqali belgilasak,

$$M'_k \leq M_k, \quad M''_k \leq M_k$$

bo'ladi.

Bundan, Darbu yuqori yig'indilarining mos hadlari uchun

$$M'_k |E'_k| + M''_k |E''_k| \leq M_k (|E'_k| + |E''_k|) = M_k |E_k|$$

bahoga ega bo'lamiz. Demak, P bo'linishning maydalanganiga mos keluvchi yuqori yig'indilar dastlabki yuqori yig'indilardan oshib ketmas ekan.

Ikki $P' = \{E'_j\}$ va $P'' = \{E''_j\}$ bo'linishlarning *ko'paytmasi* deb $E_{jk} = E'_j \cap E''_k$ ko'rinishdagi barcha bo'sh bo'lamagan to'plamlardan iborat bo'linishga aytamiz.

Ikki bo'linishning ko'paytmasi bu bo'linishlardan har birining maydalangani bo'lishi aniq.

13.3.1 - teorema (Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lish kriteriysi). *Chegaralangan f funksiyaning E to'plamda Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham E to'plamning shunday $P = P(\varepsilon)$ bo'linishi topilib, u uchun*

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon \quad (13.3.13)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. 1) Istalgan P bo'linish uchun bevosita yuqori va quyi yig'indilar hamda Darbu integrallari ta'rifidan quyidagi

$$s(f, P) \leq \underline{I(f)} \leq \overline{I(f)} \leq S(f, P) \quad (13.3.14)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Avval (13.3.13) shart bajarildi deylik. U holda, (13.3.14) tengsizliklarga ko'ra, $\underline{I(f)} = \overline{I(f)}$. Demak, f funksiya Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lar ekan.

2) Endi f funksiya Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin deylik. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday P' va P'' bo'linishlarni tanlaymizki, bunda ushbu

$$\underline{I(f)} - \varepsilon < s(f, P') \leq S(f, P'') < \overline{I(f)} + \varepsilon$$

tengsizliklar bajarilsin.

U holda, P bo'linish sifatida P' va P'' bo'linishlar ko'paytmasini olib, 13.3.1 - tasdiqdan foydalansak, quyidagi

$$\underline{I(f)} - \varepsilon < s(f, P) \leq S(f, P) < \overline{I(f)} + \varepsilon$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu esa (13.3.13) shartning bajarilishini anglatadi.

3. Riman integralining Darbu ma'nosidagi integral bilan ustma-ust tushishi. Endi, xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, funksiyaning Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun uning Ri-man bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli ekanini

ko'rsa-tish mumkin. Buning uchun Darbuni yuqori va quyi yig'indilarining navbatdagi xossalarini isbotlash yetarli.

Darbuning yordamchi lemmasi. Faraz qilaylik, kvadratlanuvchi E to'plamda chegaralangan f funksiya berilgan bo'lib, P^* bu to'plamning ixtiyoriy tayinlangan bo'linishi bo'lsin.

U holda, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi E to'plamining har qanday P bo'linishi uchun ushbu

$$s(f, P) > s(f, P^*) - \varepsilon, \quad S(f, P) < S(f, P^*) + \varepsilon \quad (13.3.15)$$

tengsizliklar bajariladi.

Isbot. Lemmani Darbuning yuqori yig'indilari uchun isbotlaymiz. Umumiylikni saqlagan holda, f funksiya E to'plamda manfiy bo'lmagan qiymatlar qabul qiladi, deb faraz qilishimiz mumkin. Chunki, har qanday o'zgarmas C uchun

$$S(f + C, P) = S(f, P) + C|E|$$

tenglik o'rinli va $C > 0$ o'zgarmasni tanlash hisobiga $f + C$ funksiyani musbat qilishimiz mumkin.

Berilgan P^* bo'linishning barcha qismaniy to'plamlari chegaralarining birlashmasini, ya'ni

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^m \partial E_j^* \quad (13.3.16)$$

yopiq to'plamni qaraymiz.

Har bir E_j^* to'plam kvadratlanuvchi bo'lgani sababli, uni ∂E_j^* chegarasining yuzi nolga teng. Demak, Γ ning yuzi ham nolga teng. Bundan chiqdi, agar $M = \sup_{x \in E} f(x)$ desak, Γ ni shunday ko'pburchakli ochiq Q^ε shakl bilan qoplash mumkinki, uning yuzi quyidagi

$$|Q^\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{M} \quad (13.3.17)$$

shartni qanoatlantiradi.

Har ikki Γ va ∂Q^ε chegara kompakt va o'zaro kesishmaydi, shuning uchun $\text{dis}\{\Gamma, \partial Q^\varepsilon\} > 0$. Bu kattalikni (13.3.16) chegaraviy to'plamni qoplovchi ko'pburchakli Q^ε shaklning eng kichik «yarim kengligi» deb qarash mumkin.

Endi

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{1}{2} \text{dis}\{\Gamma, \partial Q^\varepsilon\} \quad (13.3.18)$$

deb, diametri δ dan kichik istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linish uchun (13.3.15) tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Bunday bo'linish uchun Darbuning yuqori yig'indisini ikki yig'indiga ajratish mumkin:

$$S(f, P) = \sum_k' M_k |E_k| + \sum_k'' M_k |E_k|, \quad (13.3.19)$$

bunda birinchi yig'indiga E_k to'plamlar to'laligicha Q^ε ko'pburchakli shakl ichida yotgan hadlar va ikkinchi yig'indiga esa, E_k to'plamlar Q^ε dan tashqarida aqalli bitta nuqtaga ega bo'lgan hadlar kiritilgan.

1) Birinchi yig'indining har bir hadi $M|E_k|$ dan katta emas. Bundan tashqari, yig'indidagi E_k to'plamlar Q^ε ko'pburchakli shakl ichida yotadi va o'zaro kesishmaydi. Shuning uchun, (13.3.17) ga ko'ra,

$$\sum_k' M_k |E_k| \leq M \sum_k' |E_k| \leq M |Q^\varepsilon| < \varepsilon. \quad (13.3.20)$$

2) P bo'linish diametri (13.3.18) tenglik bilan aniqlangan δ sonidan kichik bo'lgani sababli, ikkinchi yig'indidagi har bir E_k to'plam Γ bilan umumiy nuqtaga ega emas va to'laligicha biror E_j^* to'plamning ichida yotadi. Haqiqatan, agar E_k to'plam $a \in E_i^*$ va $b \notin E_j^*$ nuqtalarga ega bo'lganda edi, uzunligi δ dan kichik bo'lgan $[a, b]$ kesma Γ ni kesar va demak, δ ning tanlanishiga ko'ra, E_k qisman to'plam to'laligicha ko'pburchakli Q^ε shakl ichida yotar edi va bundan chiqdi, mos had birinchi yig'indiga kirishi kerak edi.

Shunday qilib,

$$M_k \leq M_j^*$$

va demak, har bir hadning musbatligiga ko'ra,

$$\sum_k'' M_k |E_k| \leq \sum_{j=1}^m M_j^* |E_j^*| = S(f, P^*) \quad (13.3.21)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Endi (13.3.19), (13.3.20) va (13.3.21) lardan talab qilingan

$$S(f, P) < S(f, P^*) + \varepsilon$$

baho kelib chiqadi.

Quyi yig'indilar uchun isbot xuddi yuqoridagidek olib boriladi.



Darbuni quyi va yuqori yig'indilarining yuqorida o'rnatilgan xossalari ularning, bo'linish diametri nolga intilganda, limitga (bal-ki o'zaro ustma-ust tushmaydigan) ega ekanini isbotlashga imkon beradi.

Ta'rif. Faraz qilaylik, f funksiya kvadratlanuvchi E to'plamda chegaralangan bo'lsin.

Agar A biror haqiqiy son bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham, shunday $\delta > 0$ topilsaki, E to'plamining diametri $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday P bo'linishi uchun quyidagi

$$|S(f, P) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda A soni Darbu yuqori yig'indilarining $d(P) \rightarrow 0$ dagi limiti deyiladi.

Darbu quyi yig'indilari limiti ham xuddi shu singari kiritiladi. Bir o'zgaruvchilik holdagi kabi navbatdagi tasdiq Darbu nazariyasi-dagi eng asosiy tasdiqdir.

Darbuning asosiy lemmasi. Faraz qilaylik, E kvadratlanuvchi to'plam bo'lib, f shu to'plamda aniqlangan chegaralangan funktsiya bo'lsin. U holda, Darbu yuqori yig'indilarining limiti Darbuning

yuqori integraliga, Darbu quyi yig'indilarining limiti esa, Darbuning quyi integraliga teng bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni berilgan bo'lsin. Shunday $\delta > 0$ sonni topish mumkinligini ko'rsatamizki, u uchun $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday P bo'linish olganda ham quyidagi

$$\bar{I} \leq S(f, P) < \bar{I} + \varepsilon \quad (13.3.15)$$

qo'sh tengsizlik bajarilsin. Bunda, albatta, tengsizlikning faqat o'ng qismi isbot talabdir.

Yuqori integralning (13.3.10) ta'rifiga ko'ra, $P^* = \{E_j^*\}_{j=1}^m$ bo'linishni shunday tanlash mumkiinki, u uchun

$$S(f, P^*) < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (13.3.16)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Darbuning yordamchi lemmasiga ko'ra esa, ko'rsatilgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ soni topiladiki, diametri δ dan kichik har qanday $P = \{E_k\}$ bo'linish olganda ham ushbu

$$S(f, P) < S(f, P^*) + \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak, bu bo'linishlar uchun, (13.3.16) ga ko'ra, (13.3.15) tengsizlik bajariladi.

Darbuning quyi yig'indilari uchun isbot xuddi yuqoridagidek olib boriladi.

13.3.2 - teorema. Faraz qilaylik, E kvadratlanuvchi to'plam bo'lsin. E da chegaralangan funksiyaning Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun uning Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir. Bunda, agar bu integrallardan biri mavjud bo'lsa, ikkinchisi ham mavjud bo'lib, Riman integrali Darbu ma'nosidagi integralga teng bo'ladi.

Isbot. Ravshanki, kvadratlanuvchi E to'plamining har qanday P bo'linishi uchun Riman integral yig'indisi Darbuning quyi va yuqori yig'indilari bilan quyidagi

$$s(f, P) \leq \sigma_P(f, \{\xi_k\}) \leq S(f, P) \quad (13.3.23)$$

tengsizlik orqali bog'langan.

1) Agar f Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda, Darbuning asosiy lemmasiga ko'ra, yuqoridagi tengsizlikning chap va o'ng tomoni Darbu ma'nosidagi integralga intiladi. Demak, Riman integral yig'indilari ham xuddi o'sha limitga ega.

2) Endi teskarisini ko'rsatamiz. Agar funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, ξ_k nuqtalarni tanlash hisobiga, integral yig'indilarni Darbuning quyi yig'indilariga istalgancha yaqin qilib olish mumkin. U holda, Darbuning quyi yig'indilari xuddi integral yig'indilari ega bo'lgan limitga ega bo'ladi. Bundan chiqdi, Darbuning asosiy lemmasiga ko'ra, Darbuning quyi integrali Riman integraliga teng bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash, ξ_k nuqtalarni boshqacha tanlash natijasida integral yig'indilarni Darbu yuqori yig'indilariga istalgancha yaqin qilish va buning natijasida, Darbuning yuqori integrali Riman integraliga teng ekanini ko'rsatish mumkin. Demak, Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiya Darbu ma'nosida ham integrallanuvchi bo'lar ekan.

Eslatma. 13.3.2 - teoremda f funksiyaning chegaralanganligi muhimdir. Chunonchi, biror kvadratlanuvchi to'plamda chegaralangan bo'lib, ammo shu to'plamda Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiya misol keltirish mumkin (13.2.1 - misolga qarang). Ravshanki, bunday funksiya Darbu bo'yicha integrallanmaydi, chunki u uchun Darbu yig'indilarini aniqlash mumkin emas.

Bundan buyon, ushbu paragrafda biz qarayotgan funksiyalarni chegaralangan deb faraz qilamiz.

1 - natija. *Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lish kriteriysi (13.3.1 - teorema) Riman bo'yicha ham integrallanuvchi bo'lish kriteriysidir.*

2 - natija. *Agar f funksiya biror kvadratlanuvchi E to'plamda Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya istalgan kvadratlanuvchi $E_1 \subset E$ qismaniy to'plamda ham integrallanuvchi bo'ladi.*

Haqiqatan, kvadratlanuvchi E to'plamning har qanday P bo'linishi tabiiy ravishda E_1 to'plamning biror P_1 bo'linishini hosil qiladi. U holda, ravshaniki,

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) \leq S(f, P) - s(f, P)$$

tengsizlik bajariladi.

Endi, f funksiyaning E to'plamda integrallanuvchi bo'lgani sababli, bu tengsizlikning o'ng tarafini avvaldan berilgan istalgan sondan kichik qilib, Darbu kriteriysini qo'llash yetarli.

Ikki karrali Riman integralining navbatdagi xossalari to'g'ri ekani xuddi bir o'zgaruvchili funksiya uchun 6 - bobda tekshirilgandek isbotlanadi.

13.3.3 - teorema. *Kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi f funksiyaning qiymatlar to'plami $[A, B]$ kesmadan iborat bo'lsin. Agar $g : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda $g[f(x)]$ murakkab funksiya E da integrallanuvchi bo'ladi.*

Isbot xuddi bir o'zgaruvchili funksiya uchun mos tasdiq isboti singari olib boriladi.

1 - natija. *Agar f funksiya kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda istalgan $g(t)$ ko'phad uchun $g[f(x)]$ murakkab funksiya ham E to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.*

2 - natija. *Agar f va g funksiyalar kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)g(x)$ funksiya ham E to'plamda*

integrallanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, bu tasdiqning to'g'riligi quyidagi

$$fg = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

ayniyat va 13.2.1 - teoremaning 1 - natijasidan kelib chiqadi.

3 - natija. Agar f funksiya kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham E to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, agar $g(t) = |t|$ desak, bu funksiya Lipshits shartini qanoatlantiradi. Endi $|f(x)| = g[f(x)]$ deb, 3.3.3 - teoremani qo'llash yetarli.

4. Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lish kriteriysining natijasi. Funksiya integrallanuvchi bo'lishining Darbu kriteriysi bir karrali va ikki karrali integrallar uchun bir xilda o'qilishi ajoyib natijalarga olib keladi. Darbu kriteriysining bu xossasini qo'llashga misol tariqasida navbatdagi sodda tasdiq isbotini keltiramiz; bunda bir o'lchovli holda zaruriylik va ikki o'lchovli holda esa, yetarlilik shartidan foydalanamiz.

13.3.2 - tasdiq. Faraz qilaylik, f funksiya $[a, b]$ kesmada va g funksiya esa, $[c, d]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. U holda ikki o'zgaruvchili $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$ funksiya

$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. Avval har ikki f va g funksiya chegaralangan ekanini, ya'ni $|f(x)| \leq M_1$ va $|g(y)| \leq M_2$ ekanini qayd etamiz. Bundan chiqdi, umumiylikni saqlagan holda, har ikki f va g funksiyani manfiy-mas deb hisoblasak bo'ladi (zarur bo'lsa, bunga o'zgarmas qo'shish bilan erishish mumkin).

Darbu kriteriysiga ko'ra, har qanday $\varepsilon > 0$ olganda ham $[a, b]$ kesmaning shunday P_1 bo'linishi topiladiki, bunda f funksiya uchun

Darbuning $s(f, P_1)$ quyi va $S(f, P_1)$ yuqori yig'indilari

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) < \varepsilon \quad (13.3.24)$$

bahoni qanoatlantiradi.

Xuddi shu singari, $[c, d]$ kesmaning shunday P_2 bo'linishi topiladiki, bunda g funksiya uchun Darbuning $s(g, P_2)$ quyi va $S(g, P_2)$ yuqori yig'indilari

$$S(g, P_2) - s(g, P_2) < \varepsilon \quad (13.3.25)$$

bahoni qanoatlantiradi.

P_1 va P_2 bo'linishlar tabiiy ravishda Q to'g'ri to'rtburchakning $P = P_1 \times P_2$ bo'linishini hosil qiladi. Ravshanki, $\Phi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ funksiya uchun Darbuning $s(\Phi, P)$ quyi va $S(\Phi, P)$ yuqori yig'indilari mos ravishda

$$s(\Phi, P) = s(f, P_1) \cdot s(g, P_2), \quad S(\Phi, P) = S(f, P_1) \cdot S(g, P_2) \quad (13.3.26)$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Demak, (13.3.24) va (13.3.25) baholarga ko'ra,

$$\begin{aligned} S(\Phi, P) - s(\Phi, P) &= \\ &= S(f, P_1)[S(g, P_2) - s(g, P_2)] + s(g, P_2)[S(f, P_1) - s(f, P_1)] \leq \\ &\leq M_1[S(g, P_2) - s(g, P_2)] + M_2[S(f, P_1) - s(f, P_1)] \leq (M_1 + M_2)\varepsilon. \end{aligned}$$

Darbu kriteriysiga ko'ra, bundan $\Phi(x, y)$ funksiyaning Q to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.



Eslatma. Bevosita (13.3.26) munosabatlardan 13.3.2 - tasdiq shartlari bajarilganda

$$\iint_Q f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right) \quad (13.3.27)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Darbu kriteriysining yana bir tatbiqi sifatida navbatdagi foydali xossani isbotlaymiz. Bu xossa ixtiyoriy o'lchovli integrallash sohalari uchun integrallanuvchi bo'lishlikning sodda va oson tekshiriladigan yetarli shartini beradi.

Quyidagi teoremlar shartida E to'plam sifatida sonlar o'qining biror kesmasini, yoki tekislikdagi istalgan kvadratlanuvchi to'plamni olish mumkin.

13.3.4 - teorema. Berilgan f funktsiya E to'plamda chegaralangan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun E da integrallanuvchi shunday ikki $\varphi_\varepsilon(x)$ va $\psi_\varepsilon(x)$ funktsiya topilsaki, ular uchun

$$\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x), \quad x \in E, \quad (13.3.28)$$

munosabat o'rinli bo'lib, quyidagi

$$\int_E [\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)] dx < \varepsilon \quad (13.3.29)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funktsiya E da integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. Agar (13.3.24) shart bajarilsa, E to'planning istalgan P bo'linishi uchun o'z-o'zidan ko'rinib turgan, quyidagi

$$s(\varphi_\varepsilon, P) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(\psi_\varepsilon, P)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bundan

$$\underline{I(\varphi_\varepsilon)} \leq \underline{I(f)} \leq \overline{I(f)} \leq \overline{I(\psi_\varepsilon)}$$

tengsizlik va demak, $\varphi_\varepsilon(x)$ va $\psi_\varepsilon(x)$ funksiyalar integrallanuvchi bo'lgani sababli,

$$\int_E \varphi_\varepsilon(x) dx \leq \underline{I(f)} \leq \overline{I(f)} \leq \int_E \psi_\varepsilon(x) dx$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shunday ekan, (13.3.25) bahodan $\underline{I(f)} = \overline{I(f)}$ tenglikni olamiz. Bu esa f funksiyaning integrallanuvchi ekanini anglatadi.

■

Bevosita 13.3.4 - teorema yordamida navbatdagi nihoyatda muhim tasdiqni isbotlash mumkin.

13.3.5 - teorema. Faraz qilaylik, E to'plamda integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga o'sha to'plamda tekis yaqinlashsin. U holda f funksiya ham E to'plamda integrallanuvchi bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx \quad (13.3.30)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Tekis yaqinlashish ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer ko'rsatish mumkinki, $n \geq N$ bo'lganda

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in E,$$

tengsizlik bajariladi.

Bu tengsizlikni

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \quad (13.3.31)$$

deb yozish mumkin.

Demak, 13.3.4 - teoremaga ko'ra, f funksiya integrallanuvchi ekan.

Endi (13.3.31) tengsizlikni quyidagi

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

ko'rinishda yozib olib, uni integrallasak,

$$\int_E f(x) dx - \varepsilon|E| \leq \int_E f_n(x) dx \leq \int_E f(x) dx + \varepsilon|E|, \quad n \geq N,$$

munosabatni olamiz. Bu esa (13.3.30) tenglik bajarilishini anglatadi.

■

Eslatma. 13.3.5 - teorema tekis yaqinlashishda Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar sinfini saqlanishini, ya'ni limit funksiya shu sinfda qolishini ko'rsatadi.

13.4-§. Ikki karrali integral xossalari

1. Kvadratlanuvchi to'plam funksiyasi sifatida Riman integralining additivligi.

13.4.1 - teorema (integralning additivligi haqida). Faraz qilaylik, E_1 va E_2 kvadratlanuvchi shakllar uchun $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ bo'lib, $E = E_1 \cup E_2$ bo'lsin. Agar f funksiya E_1 va E_2 to'plamlarda chegaralangan va integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya E da ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx \quad (13.4.1)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. E_1 to'planing istalgan P_1 bo'linishi va E_2 to'planing istalgan P_2 bo'linishi birgalikda $E = E_1 \cup E_2$ to'planing biror P bo'linishini hosil qiladi. Bunda Darbuning mos quyi va yuqori yig'indilari uchun quyidagi

$$S(f, P) - s(f, P) = [S(f, P_1) - s(f, P_1)] + [S(f, P_2) - s(f, P_2)]$$

o'z-o'zidan ko'rinib turgan tenglik o'rinli bo'ladi.

f funksiyaning E_1 va E_2 to'plamlarda integrallanuvchi bo'lgani sababli, Darbu kriteriysiga ko'ra, yuqoridagi tenglikning o'ng tomonini oldindan berilgan ixtiyoriy sondan kichik qilish mumkin. Bundan, yana o'sha Darbu kriteriysiga ko'ra, f funksiyaning E da integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.

■

1 - eslatma. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli. Ya'ni, agar E_1 va E_2 kvadratlanuvchi shakllar bo'lib, $E = E_1 \cup E_2$ bo'lsa, E da integrallanuvchi f funksiya E_1 va E_2 larda ham integrallanuvchi bo'ladi va (13.4.1) tenglik bajariladi. Bu xossaning to'g'riligi 13.3.2 - teoremaning 2 - natijasidan kelib chiqadi.

2 - eslatma. Bir o'zgaruvchilik holdan farqli o'laroq, 13.4.1 - teorema shartlarida funksiyaning chegaralanganlik shartini tashlab yuborib bo'lmaydi. Haqiqatan, E_1 birlik ochiq kvadrat bo'lsin:

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1\},$$

E_2 esa absissalar o'qidagi birlik interval bo'lsin:

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, \quad x_2 = 0\}.$$

Shunday f funksiyani qaraymizki, u E_1 da 0 ga teng bo'lib, E_2 da esa chegaralanmagan bo'lsin (misol uchun, E_2 da

$$f(x) = \frac{1}{x_1}, \quad 0 < x_1 < 1, \quad x_2 = 0,$$

deb olamiz).

Bunda E_1 va E_2 to'plamlar kvadratlanuvchi bo'lib, $|E_1| = 1$ va $|E_2| = 0$. Ravshanki, f funksiya har bir E_1 va E_2 da integrallanuvchi bo'lsada, ammo $E = E_1 \cup E_2$ da integrallanuvchi emas, chunki mos integral yig'indilari chegaralanmagan.

2. Uzlüksiz funktsiyalarni integrallanuvchanligi.

13.4.2 - teorema. *Agar E yopiq kvadratlanuvchi shakl bo'lsa, u holda E da uzluksiz har qanday funktsiya E da integrallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. Kantor teoremasiga ko'ra, yopiq chegaralangan E to'plamda uzluksiz funktsiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi. Shunday ekan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, diametri δ dan kichik bo'lgan ixtiyoriy F to'plamda f funktsiyaning tebranishi ε dan kichik bo'ladi. Bundan chiqdi, E to'plamning diametri $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi uchun

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \cdot |E_k| < \varepsilon \sum_{k=1}^n |E_k| = \varepsilon |E|$$

munosabat o'rinli. Bundan, 13.3.1 - teorema ko'ra, f funktsiyaning integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.

■

Albatta, agar funktsiya yopiq bo'lmagan to'plamda uzluksiz bo'lsa, bu funktsiya chegaralanmagan ham bo'lishi mumkin. Ammo, agar qo'shimcha ravishda berilgan funktsiyani ixtiyoriy kvadratlanuvchi (yopiq bo'lishi shart bo'lmagan) to'plamda chegaralanganligini talab qilsak, navbatdagi teorema tasdiqlanganidek, na faqat uzluksiz funktsiya, xatto uncha katta bo'lmagan uzulish nuqtalar to'plamiga ega bo'lgan funktsiya ham, integrallanuvchi bo'lar ekan.

13.4.3 - teorema. *Faraz qilaylik, E kvadratlanuvchi shakl bo'lsin. Agar f funktsiya E da chegaralangan bo'lib, yuzi nolga teng bo'lgan uzulish nuqtalar to'planiga ega bo'lsa, u holda bu funktsiya E da integrallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. Berilgan f funktsiya E da $|f(x)| \leq M$ tengsizlikni qanoatlantirib, E ning, $|F| = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $F \subset E$ qismi to'plamidan tashqari, barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsin.

$E \setminus F$ to'plam kvadratlanuvchi bo'lib, $|E \setminus F| = |E|$ bo'lgani uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday yopiq kvadratlanuvchi $P \subset E \setminus F$ shakl topiladiki, u uchun

$$|P| > |E| - \frac{\varepsilon}{2M} \quad (13.4.2)$$

tengsizlik bajariladi.

Quyidagi

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \in P \text{ bo'lsa,} \\ -M, & \text{agar } x \notin P \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

va

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \in P \text{ bo'lsa,} \\ M, & \text{agar } x \notin P \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyalarni qaraymiz.

Ravshanki, bu ikki funksiya yopiq ko'pburchakli P shaklda uzluk-siz va, 13.4.2 - teorema ga ko'ra, P da integrallanuvchi. Demak, integralning additivligi haqidagi 13.4.1 - teorema ga asosan, bu ikki funksiya E da integrallanuvchi.

Ravshanki,

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad x \in E,$$

va (13.4.2) ga ko'ra,

$$\int_E [\psi(x) - \varphi(x)] dx = 2M(|E| - |P|) < \varepsilon$$

baho o'rinli.

Shunday ekan, f funksiyaning integrallanuvchi ekani 13.3.4 - teorema dan kelib chiqadi.



3. O'rta qiymat formulasi. Navbatdagi tasdiq bir o'zgaruvchili holdagi o'rta qiymat haqidagi umumiy formulaning ikki o'zgaruvchili ko'rinishidir.

13.4.4 - teorema. Faraz qilaylik, E kvadratlanuvchi shakl bo'lib, chegaralangan $f(x)$ va $\rho(x)$ funksiyalar E da integrallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, $\rho(x) \geq 0$ shart bajarilsin. U holda shunday μ soni topiladiki u uchun

$$\inf_{x \in E} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in E} f(x) \quad (13.4.3)$$

shart o'rinli bo'lib, quyidagi

$$\int_E f(x)\rho(x) dx = \mu \int_E \rho(x) dx \quad (13.4.4)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar

$$m = \inf_{x \in E} f(x), \quad M = \sup_{x \in E} f(x)$$

belgilashlarni kiritsak, $\rho(x)$ funksiya manfiy bo'lmagani uchun, ushbu

$$m \cdot \rho(x) \leq f(x)\rho(x) \leq M \cdot \rho(x)$$

qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bu tengsizlikni integrallab, 13.2.2 - teorema ko'ra, quyidagi

$$m \int_E \rho(x) dx \leq \int_E f(x)\rho(x) dx \leq M \int_E \rho(x) dx \quad (13.4.5)$$

munosabatni olamiz.

Agar (13.4.4) ning o'ng tomondagi integral nolga teng bo'lsa, (13.4.5) ga ko'ra, chap tomondagi integral ham nolga teng bo'lib, isbotlanayotgan tenglik istalgan μ uchun o'rinli bo'ladi.

Agar (13.4.4) ning o'ng tomondagi integral musbat bo'lsa, quyidagi

$$\mu = \frac{\int_E f(x)\rho(x) dx}{\int_E \rho(x) dx} \quad (13.4.6)$$

belgilashni kiritib, (13.4.5) ga ko'ra, ushbu

$$m \leq \mu \leq M$$

tengsizlikni olamiz. Bu esa, isbotlanayotgan (13.4.3) tengsizlikning o'zidir.

Eslatma. Agar ρ funksiya musbat yuzali E to'plamda uzluksiz va chegaralangan bo'lib, bu to'plamning har bir nuqtasida $\rho(x) > 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_E \rho(x) dx > 0$$

qat'iy tengsizlik bajarilib, natijada μ o'rta qiymat (13.4.6) tenglikdan aniqlanadi. Haqiqatan, agar Q yopiq ko'pburchakli shakl E ning ichida yotib, yuzi musbat bo'lsa, Veyershtrassning ikkinchi teoremasi-ga ko'ra, ρ funksiya biror $x_0 \in Q$ nuqtada $m(Q) > 0$ minimumga erishadi. Shunday ekan, quyidagi

$$\int_E \rho(x) dx \geq m(Q)|Q| > 0$$

baho bajariladi.

Agar integral ostidagi funksiya uzluksiz bo'lib, integrallanayotgan soha bog'langan to'plam bo'lsa, u holda o'rta qiymat haqidagi formu-la eng sodda ko'rinishga ega bo'ladi.

Eslatib o'tamiz, bog'langan to'plam deganda biz *chiziqli bog'langan* to'plamni tushunar edik, ya'ni bu shunday to'plamki, uning istalgan ikki nuqtasini, to'laligicha shu to'plamda yotuvchi, uzluksiz egri chiziqli bilan bog'lash mumkin.

Ravshanki, bog'langanlik xossasi to'plamni uzluksiz akslantirishda saqlanadi. Chunonchi, agar $\psi : E \rightarrow F$ akslantirish bog'langan E to'plamni biror F to'plamga uzluksiz va o'zaro bir qiymatli akslantirsa, F to'plam ham bog'langan bo'ladi. Bu tasdiqning to'g'riligi φ va ψ uzluksiz akslantirishlarning $\Phi(t) = \psi[\varphi(t)]$ superpozitsiyasi ham uzluksiz bo'lishidan kelib chiqadi. Ya'ni, agar biz E to'plamining istalgan ikki nuqtasini uzluksiz egri chiziqli bilan tutashtirsak, biz F to'plamining ham istalgan ikki nuqtasini uzluksiz egri chiziqli bilan tutashtirgan bo'lamiz (11.3.3 - tasdiqqa qarang).

Bog'langan to'plamda ixtiyoriy uzluksiz funksiya barcha oraliq qiymatlarni qabul qilishini ko'rsatish qiyin emas (isbot xuddi 11.2.5 - teorema isboti kabi). Bu xossa bog'langan to'plamni xarakterlovchi muhim xossadir.

13.4.5 - teorema (o'rta qiymat formulasi). *Faraz qilaylik, E bog'langan kvadratlanuvchi to'plam bo'lib, f funksiya E da uzluksiz va chegaralangan bo'lsin. U holda shunday $\xi \in E$ nuqta topiladiki, u uchun quyidagi*

$$\int_E f(x) dx = f(\xi) \cdot |E| \quad (13.4.7)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. 13.4.4 - teoreмага ko'ra, chekkalari yuqorida aniqlangan $[m, M]$ kesmada shunday μ soni topiladiki, u uchun

$$\int_E f(x) dx = \mu \cdot |E|$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak, teoremani isbotlash uchun shunday $\xi \in E$ nuqta topishimiz kerakki, bu nuqtada $f(\xi) = \mu$ bo'lsin. E'tibor bering, bunda muammo shundan iboratki, E to'plam, umuman aytganda, kompakt

bo'lmagani sababli, qaralayotgan funksiya m va M qiymatlarga bu to'plamda erishmasligi mumkin.

Albatta, agar $|E| = 0$ bo'lsa, bunday nuqta sifatida E to'plamining istalgan nuqtasini olishimiz mumkin. Shuning uchun, $|E| > 0$ deb hisoblaymiz.

Avval $m < \mu < M$ bo'lgan holni qaraylik. Bunda shunday a va b nuqtalarni ko'rsatish mumkinki, ular uchun $f(a)$ son m ga, $f(b)$ son esa M ga istalgancha yaqin bo'ladi. Xususan, quyidagi $f(a) < \mu < f(b)$ qo'sh tengsizlik o'rinlidir. Demak, f funksiya uzluksiz va E to'plam bog'langan bo'lgani sababli, shunday $\xi \in E$ nuqta topiladiki, u uchun $f(\xi) = \mu$ tenglik bajariladi. Ya'ni, bu holda (13.4.7) tenglik isbotlandi.

Endi, masalan, $\mu = M$ bo'lsin deylik. U holda yuqoridagi mulohazalarga ko'ra,

$$\int_E [M - f(x)] dx = 0.$$

Ravshanki, $M - f(x) \geq 0$. Lekin 13.4.4 - teoreмага berilgan eslatmadagi mulohazalarga ko'ra, $M - f(x) > 0$ qat'iy tengsizlik barcha nuqtalarda o'rinli bo'la olmaydi. Demak, shunday $\xi \in E$ nuqta topiladiki, unda $f(\xi) = M = \mu$ bo'ladi.

■

1 - eslatma. Agar $|E| > 0$ bo'lsa, (13.4.7) formulani

$$\frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx = f(\xi) \quad (13.4.8)$$

deb yozishimiz mumkin.

(13.4.8) ning chap tomondagi kattalikka f funksiyaning E to'plamidagi o'rta qiymati deyiladi. Shunday qilib, 13.4.5 - teorema uzluksiz funksiya biror nuqtada o'rta qiymatni qabul qilishini tasdiqlaydi.

2 - eslatma. Agar E to'plam bog'langan bo'lmasa, teorema xulosasi o'z kuchini yo'qotadi. Haqiqatan, ikki bir xil o'zaro kesishmaydigan yopiq doiralardan iborat E sohani olib, bu doiralarning

birida 0 va ikkinchisida esa, 1 qiymatni qabul qiluvchi funksiyani qaraylik. Albatta, bu holda funksiyaning o'rta qiymati $1/2$ ga teng, lekin hech qanday nuqtada funksiya bu qiymatni qabul qilmaydi.

4. Integrallash sohasi. Riman integrali ta'rifida integrallash sohasi sifatida ixtiyoriy kvadratlanuvchi shakl olinadi. Lekin bunda, yuqoridagi misollarda ko'rsatilganidek, integral yaxshi xossalari saqlab qolishi uchun, funksiyadan qo'shimcha ravishda chegaralanganlikni talab qilishga to'g'ri keladi. Agar integrallash sohasi sifatida shunday shaklni olsakki, u 11 - bobda berilgan ta'rif ma'nosidagi soha bo'lsa, bunday misollarni chetlab o'tish mumkin.

Eslatib o'tamiz, *soha* deb biz ochiq bog'langan to'plamga aytgan edik. Ochik to'plam ta'rifiga ko'ra, u o'zining chegarasi bilan umumiy nuqtaga ega emas, ya'ni istalgan Ω soha uchun $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$ munosabat o'rinli.

Agar Ω (ochik) soha bo'lsa, u holda *yopiq soha* $\bar{\Omega}$ deb

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

to'plamga aytamiz.

Ochik va yopiq soha chegaralari $\partial\bar{\Omega} \subset \partial\Omega$ munosabat bilan bog'langan ekanini ko'rsatish qiyin emas. Bu tegishlilik qat'iy ham, nuqat'iy ham bo'lishi mumkin. Masalan,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

ochik doiraning yopig'i quyidagi

$$\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

yopiq doiraga teng va bu holda ochik va yopiq doiralarning chegaralari

$$\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

aylanadan iborat.

Agar soha bir nuqtasi chiqarib tashlangan ochik doira bo'lsa, ya'ni

$$\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

bo'lsa, u holda, ravshanki, $\overline{\Omega_0}$ yana yopiq doira bo'ladi va uning chegarasi yana aylanadan iborat. Lekin bu holda Ω_0 ning chegarasi aylana va chiqarib tashlangan nuqtadan iborat:

$$\partial\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{0\}.$$

Demak, bu holda $\partial\overline{\Omega_0} \subset \partial\Omega_0$ va lekin $\partial\overline{\Omega_0} \neq \partial\Omega_0$.

Kvadratlanuvchi shakllarning eng muhim sinfi bu kvadratlanuvchi sohalardir. 13.1.4 - tasdiq natijasiga ko'ra, to'g'rilanuvchi chegaraga ega bo'lgan har qanday soha kvadratlanuvchi bo'ladi. Xususan, bo'lakli uzluksiz chegara ega bo'lgan soha kvadratlanuvchidir.

Agar ochiq soha kvadratlanuvchi bo'lsa, uning yopig'i ham kvadratlanuvchi bo'lib, ularning yuzi o'zaro teng bo'lishi yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadi (chegaraning yuzi nolga tengligini eslatib o'tamiz).

Bevosita kvadratlanuvchi shaklning ta'rifidan har qanday kvadratlanuvchi sohaning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Navbatdagi tasdiq o'rinlidir.

13.4.6 - teorema. *Faraz qilaylik, Ω soha kvadratlanuvchi bo'lsin. Agar f funksiya Ω da integrallanuvchi bo'lsa, u chegaralangandir.*

Isbot. Avval biz berilgan Ω sohasi uchun istalgan $\delta > 0$ olganda ham shunday $P = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ bo'linish mavjudligini ko'rsatamizki, u uhcun $d(P) < \delta$ bo'lib, har bir Ω_k ning yuzi musbat bo'lsin.

Buning uchun istalgan m natural son olib, tekislikni sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{i}{2^m} \leq x_1 < \frac{i+1}{2^m}, \frac{j}{2^m} \leq x_2 < \frac{j+1}{2^m} \right\}, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

kvadratlariga bo'lamiz.

Kvadratlanuvchi Ω sohamiz chegaralangan. Shunday ekan, ixtoriy tayinlangan m nomer uchun bu sohani tomoni uzunligi 2^{-m} ga teng chekli sondagi yuqoridagi $\{Q_k\}_{k=1}^n$ kvadratlar bilan qoplash mumkin. Bunda biz qoplash uchun faqat $Q_k \cap \Omega \neq \emptyset$ shartni qanoatlantirgan Q_k kvadratlarnigina olamiz.

Ravshanki, har bir tanlab olingan kvadrat Ω bilan umumiy ichki nuqtalarga ega. Shuning uchun, har bir $\Omega_k = Q_k \cap \Omega$ kvadratlanuvchi to'plam bo'sh bo'lmagan ichki nuqtalar to'plamiga ega. Demak, bunday to'plamning yuzi, har qanday bo'sh bo'lmagan ochiq to'plamning quyi yuzi qat'iy musbat bo'lgani sababli, musbatdir.

Agar f funktsiyani Ω sohada chegaralanmagan deb faraz qilsak, u holda bu funktsiya biror Ω_q to'plamda chegaralanmagan bo'ladi. Integral yig'indini ushbu

$$\sigma_P(f) = f(\xi_q)|\Omega_q| + \sum_{k \neq q} f(\xi_k) \cdot |\Omega_k|$$

ko'rinishda yozib, $k \neq q$ lar uchun barcha $\xi_k \in \Omega_k$ nuqtalarni tayinlab qo'yamiz. $\sigma_P(f)$ integral yig'indini birgina $\xi_q \in \Omega_q$ nuqtani tanlash hisobiga istalgancha katta qilish mumkinligi ravshan (albatta, agar Ω_q qismaniy to'plam yuzi nolga teng bo'lganda, biz bunga erisha olmas edik). Ammo bu f funktsiyaning integrallanuvchi ekaniga ziddir.

■

Agar Ω ochiq sohada aniqlangan funktsiya uning istalgan kompakt kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ qismaniy to'plamida integrallanuvchi bo'lsa, bu funktsiya Ω da *lokal integrallanuvchi* deyiladi. Ω da lokal integral-lanuvchi bo'lib, lekin Ω boyicha integrallanmaydigan funktsiyaga mi-sol keltirish qiyin emas. Bunday misollar, asosan, Ω chegarasi yaqini-da chegaralanmagan (demak, Ω da chegaralanmagan) funktsiyalardan iborat.

Agar funktsiya Ω da chegaralangan bo'lsa, navbatdagi tasdiqda ko'rsatilganidek, integrallanuvchanlik va lokal integrallanuvchanlik tushunchalari ustma-ust tushadi.

13.4.7 - teorema. *Kvadratlanuvchi Ω soha berilgan bo'lsin. Agar Ω da lokal integrallanuvchi funktsiya chegaralangan bo'lsa, u butun Ω sohada integrallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, Ω da lokal integrallanuvchi f funktsiya

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in \Omega,$$

shartni qanoatlantirsin.

Ω soha kvadratlanuvchi bo'lgani sababli, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday yopiq ko'pburchakli $P \subset \Omega$ shakl topiladiki, $Q = \Omega \setminus P$ to'plam yuzi

$$|Q| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

shartni qanoatlantiradi.

Endi $\omega(x, Q)$ orqali Q to'plamning xarakteristik funksiyasini belgilab, quyidagi ikki

$$\varphi_{\varepsilon}^{\pm}(x) = f(x)[1 - \omega(x, Q)] \pm M\omega(x, Q)$$

funksiyani kiritamiz.

Bu funksiyalar P da f funksiya bilan ustma-ust tushadi va demak, P da integrallanuvchi (chunki P - kompakt). Bundan tashqari, bu funksiyalar, o'zgarmas bo'lgani sababli, Q da ham integrallanuvchidir. Shunday ekan, 13.4.1 - teoreмага asosan, ular $\Omega = P \cup Q$ da integrallanuvchi bo'ladi. Ravshanki,

$$\varphi_{\varepsilon}^{-}(x) \leq f(x) \leq \varphi_{\varepsilon}^{+}(x), \quad x \in \Omega.$$

Bundan tashqari,

$$\int_{\Omega} [\varphi_{\varepsilon}^{+}(x) - \varphi_{\varepsilon}^{-}(x)] dx = 2M \int_{\Omega} \omega(x, Q) dx = 2M|Q| < \varepsilon.$$

Bundan chiqdi, 13.3.4 - teoreмага ko'ra, f funksiya Ω da integrallanuvchidir.

■

Eslatma. Faraz qilaylik, Ω soha kvadratlanuvchi bo'lib, f funksiya yopiq $\bar{\Omega}$ sohada aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. Agar f funksiya ochiq Ω sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya yopiq $\bar{\Omega}$ sohada ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_{\bar{\Omega}} f(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (13.4.9)$$

tenglik bajariladi.

Bu tasdiqning to'g'riligi 13.4.1 - teoremdan kelib chiqadi.

13.3.2 - teoremaning 2 - natijasiga ko'ra, Ω sohada integrallanuvchi har qanday f funktsiya ixtiyoriy kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ to'plamida ham integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun

$$\Phi(E) = \int_E f(x) dx \quad (13.4.10)$$

integralni, f funktsiyani tayinlab qo'yib, kvadratlanuvchi E to'plamning funksiyasi deb qarashimiz mumkin.

Berilgan Ω sohasining har bir kvadratlanuvchi qisman to'plamiga biror haqiqiy sonni mos qo'yuvchi akslantirishga to'plam funksiyasi deyiladi. To'plam funksiyasiga eng sodda misol bu kvadratlanuvchi to'plam yuzidir: $\Phi(E) = |E|$.

Faraz qilaylik, Ω da aniqlangan $\Phi(E)$ to'plam funksiyasi berilgan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $|E| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ qisman to'plam uchun $|\Phi(E)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\Phi(E)$ to'plam funksiyasi Ω da *absolyut uzluksiz* deyiladi.

Navbatdagi xossaga Riman integralining to'plam funksiyasi sifatida absolyut uzluksizligi deyiladi.

13.4.8 - teorema (integralning absolyut uzluksizligi haqida). Berilgan Ω sohasi kvadratlanuvchi bo'lsin. Agar f funktsiya Ω da integrallanuvchi bo'lsa, u holda (13.4.10) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(E)$ kattalik $E \subset \Omega$ kvadratlanuvchi to'plamlarning absolyut uzluksiz funksiyasi bo'ladi.

Isbot. 13.4.6 - teoreмага ko'ra, f funktsiya Ω da chegaralangan, ya'ni biror $M > 0$ o'zgarmas uchun $|f(x)| \leq M$, $x \in \Omega$, tengsizlik bajariladi. Bundan chiqdi, (13.4.10) tenglik va 13.2.2 - teoreмага ko'ra,

$$|\Phi(E)| \leq \int_E |f(x)| dx \leq \int_E M dx = M|E|.$$

Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon/M$ deymiz. U holda, ravshanki, $|E| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ to'plam uchun $|\Phi(E)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli. Bu esa $\Phi(E)$ ning to'plam funksiyasi sifatida absolyut uzluksiz ekanini anglatadi.

■

Shuni alohida ta'kidlash joizki, faqat E to'plam yuzini kichiklashtirish hisobiga (13.4.10) integral qiymatini istalgancha kichik qilish mumkin. Bunda E ning shakli va uning Ω ichida joylashgan o'rni ahamiyatga ega emas.

5. O'rtacha uzluksizlik. Ravshanki, integrallanuvchi funksiyaning uzluksiz bo'lishi shart emas. Shunday bo'lsada, xuddi bir o'zgaruvchilik holdagidek (10.8.3 - teorema qarang), har qanday integrallanuvchi funksiyaning o'rtacha ma'noda uzluksiz ekanini ko'rsatish mumkin. Isbot har qanday integrallanuvchi funksiyaning uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalash mumkinligi haqidagi navbatdagi teorema (10.3.1 - teoremaning ikki o'zgaruvchilik holi) asoslandi.

13.4.9 - teorema. Faraz qilaylik, f funksiya kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsin. U holda istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham $\mathbb{R}^2$ tekisligida uzluksiz bo'lgan shunday φ funksiya topiladiki, u uchun quyidagi

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon \quad (13.4.11)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. 1) Aytaylik, $h(x)$ shunday eng sodda pog'onasimon funksiya bo'lsinki, u tomoni a ga teng biror K kvadratda 1 ga va undan tashqarida nolga teng bo'lsin. Bu funksiya integrali, ravshanki, kvadrat yuziga, ya'ni a^2 ga teng. $h(x)$ funksiyaning $\varepsilon > 0$ aniqlikda $\varphi(x)$ uzluksiz funksiya bilan, masalan, quyidagicha approksimatsiyalash mumkin. Asosi K bo'lgan yetarlicha katta balandlikka ega

bo'lgan to'g'ri piramida olaylik. U holda quyi asosi K va balandligi 1 bo'lgan kesik piramida hajmi a^2 dan ε dan kamga farq qiladi. Qidirilayotgan $\varphi(x)$ uzluksiz funktsiya grafigini kesik piramida yon sirti va yuqori asosiga teng qilib olamiz (K kvadratdan tashqarida bu funktsiyani nolga teng deymiz). Bunday tanlashda, albatta,

$$\int_K |h(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan chiqdi, qayd qilingan eng sodda pog'onasimon funktsiyalarning istalgan chekli chiziqli kombinatsiyalarini uzluksiz funktsiyalar bilan o'rtacha approksimatsiyalash mumkin ekan. Haqiqatan, aytaylik, $h_j(x)$ biror $K_j \subset K$ kvadratda 1 ga teng eng sodda pog'onasimon funktsiya va

$$h(x) = \sum_{j=1}^n c_j h_j(x)$$

bo'lsin. Faraz qilaylik, $\varphi_j(x)$ uzluksiz funktsiyalar $h_j(x)$ larni ε_j aniqlikda o'rtacha approksimatsiyalasinsin:

$$\int_K |h_j(x) - \varphi_j(x)| dx < \varepsilon_j.$$

U holda, agar

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x)$$

deb, ε_j ni $\varepsilon_j |c_j| < \varepsilon/n$ shartdan tanlab olsak,

$$\int_K |h(x) - \varphi(x)| dx \leq \sum_{j=1}^n |c_j| \int_K |h_j(x) - \varphi_j(x)| dx < \sum_{j=1}^n |c_j| \varepsilon_j < \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

2) Endi biror kvadratlanuvchi E to'plamda Riman bo'yicha integrallanuvchi ixtiyoriy manfiymas f funksiya berilgan bo'lib, K esa, E ni o'z ichiga oluvchi istalgan kvadrat bo'lsin. E to'plamdan tashqariga f funksiyani nol qilib davom ettiramiz.

K kvadratni n ta kichik K_j kvadratlarga bo'lib, $h(x)$ orqali Darbuning (13.3.3) quyi funksiyasini belgilaylik. Darbu nazariyasiga ko'ra, yetarlicha kichik bo'linish olib, f funksiyani Darbu quyi funksiyalari yordamida o'rtacha approksimatsiyalash mumkin. Boshqa tarafdin, yuqoridagi mulohazalarga asosan, Darbu quyi funksiyasini uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalash mumkin. Bu ikki tasdiq teoremaning manfiy bo'linagan funksiyalar uchun to'g'riligini ko'rsatadi.

3) Agar f istalgan integrallanuvchi funksiya bo'lsa,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

deymiz, bu yerda $f_+(x) = (|f(x)| + f(x))/2$ va $f_-(x) = (|f(x)| - f(x))/2$ integrallanuvchi manfiymas funksiyalar. Agar bu funksiyalarni $\varepsilon/2$ aniqlikda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalasak, u holda $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ qidiralayotgan funksiya bo'ladi.



Eslatma. 13.4.9 - teorema isbotida keltirilgan φ funksiyani qurish usulidan bu funksiyani

$$|\varphi(x)| \leq |f(x)|, \quad x \in E, \quad (13.4.12)$$

shartni qanoatlantiruvchi qilib tanlash mumkinligi bevosita ko'rinib turibdi.

13.4.10 - teorema. Faraz qilaylik, f funksiya kvadratlanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lib, bu to'plamdan tashqarida nolga teng bo'lsin. U holda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_E |f(x+h) - f(x)| dx = 0 \quad (13.4.13)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Agar φ funktsiya $\mathbb{R}^2$ tekislikda uzluksiz bo'lib, kvadratlanuvchi E to'plamdan tashqarida nolga teng bo'lsa, u holda (13.4.13) tenglik tekis uzluksizlikdan kelib chiqadi (11.2.7 - teoreмага qarang). Haqiqatan, bu holda quyidagi

$$\int_E |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx \leq \sup_{x \in E} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \cdot |E| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (13.4.14)$$

munosabat o'rinli.

Agarda f teoremamiz shartini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funktsiya bo'lsa, 13.4.9 - teoreмага ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun (13.4.11) tengsizlikni qanoatlantiruvchi uzluksiz φ funktsiya mavjud. Bu holda, ravshanki,

$$\begin{aligned} \int_E |f(x+h) - f(x)| dx &\leq \int_E |f(x+h) - \varphi(x+h)| dx + \\ &+ \int_E |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx + \int_E |f(x) - \varphi(x)| dx \end{aligned}$$

deb yozish mumkin.

Har ikki f va φ funktsiya E dan tashqarida nolga teng bo'lgani uchun, o'ng tarafdagi birinchi integral uchinchi integraldan kichik yoki unga teng. Demak, (13.4.11) ga ko'ra,

$$\int_E |f(x+h) - f(x)| dx \leq \int_E |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx + 2\varepsilon.$$

Bu tengsizlikda $h \rightarrow 0$ deb, yuqori limitga o'tsak, (13.4.14) munosabatga ko'ra,

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_E |f(x+h) - f(x)| dx \leq 2\varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

$\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, bundan (13.4.13) munosabat kelib chiqadi.

Eslatma. Agar E ochiq yoki yopiq soha bo'lsa, u holda har ikki 13.4.9 - va 13.4.10 - teorema "o'rta kvadratik ma'noda" ham o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, bu holda 13.4.6 - teoreмага ko'ra, integrallanuvchi f funksiya chegaralangan bo'ladi, ya'ni $|f(x)| \leq M$. (13.4.12) bahoga asosan approksimatsiyalovchi funksiya ham $|\varphi(x)| \leq M$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan chiqdi,

$$|f(x) - \varphi(x)|^2 \leq 2M|f(x) - \varphi(x)|.$$

Demak,

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \leq 2M \int_E |f(x) - \varphi(x)| dx.$$

Shunday qilib, har qanday integrallanuvchi funksiyaning o'rta kvadratik ma'noda uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalash mumkin.

Navbatdagi

$$\int_E |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq 2M \int_E |f(x+h) - f(x)| dx$$

tengsizlik xuddi yuqoridagidek ko'rsatiladi.

Demak, har qanday integrallanuvchi funksiya o'rta kvadratik ma'noda ham uzluksiz bo'lar ekan.

Integrallanuvchi funksiyalarning bu xossalari muhim ahamiyatga ega bo'lib, Fur'e integrallari va qatorlari nazariyasida keng foydalani-ladi (19 - va 20 - boblarga qarang).

6. Bo'lakli-silliq chegarali sohalar. Bundan buyon integral-lash, asosan, ochiq yoki yopiq bo'lgan biror soha bo'yicha amalga oshiriladi. Avval quyidagi belgilashlarga kelishib olaylik.

S^1 simvol orqali quyidagi

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ko'rinishdagi birlik aylanani belgilaymiz.

Har qanday sodda yopiq egri chiziqli tenglamasi singari, aylana ham tenglamasini parametrik ko'rinishda berish mumkin, ya'ni

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = \sin t, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Agar birlik aylanada $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lib,

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada bo'lakli-silliqli bo'lsa, biz f funktsiyani aylanada bo'lakli-silliqli deymiz.

Agar $L \subset \mathbb{R}^2$ egri chiziqli o'zaro bir qiymatli $\varphi: S^1 \rightarrow L$ akslantirishda birlik aylananing aksi bo'lib, bu akslantirishning har bir $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ komponentalari uzluksiz bo'lakli-silliqli bo'lsa, u holda biz L ni yopiq bo'lakli-silliqli egri chiziqli deymiz.

Yopiq bo'lakli-silliqli egri chiziqliqa misol sifatida

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < a, \quad |x_2| < a\} \quad (13.4.15)$$

kvadratning ∂Q chegarasini olishimiz mumkin.

Haqiqatan, bunda φ akslantirish sifatida, masalan, quyidagi

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{sign} x_1, & \text{agar } |x_1| \geq |x_2| \text{ bo'lsa,} \\ x_1 a \sqrt{2}, & \text{agar } |x_1| < |x_2| \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

va

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{sign} x_2, & \text{agar } |x_1| \leq |x_2| \text{ bo'lsa,} \\ x_2 a \sqrt{2}, & \text{agar } |x_1| > |x_2| \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

komponentalarga ega bo'lgan akslantirishni olsak bo'ladi.

Ravshanki,

$$\Phi_k(t) = \varphi_k(\cos t, \sin t)$$

funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada bo'lakli-silliqli.

Agar Ω sohasining $\partial\Omega$ chegarasi chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan qismlardan iborat bo'lib, bu qismlarning har biri yopiq bo'lakli-silliqliq egri chiziq bo'lsa, bu sohani bo'lakli-silliqlik chegaraga ega deymiz. Bo'lakli-silliqlik chegarali sohaga misol tariqasida (13.4.15) ochiq kvadratni, yoki bu kvadratdan o'zidan kichik yopiq kvadratni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'lgan shaklni olishimiz mumkin.

Agar soha chegarasi birgina yopiq bo'lakli-silliqlik egri chiziqdan iborat bo'lsa, bunday sohaga bir bog'lamli soha deyiladi. Har qanday doira bunday sohaga misol bo'ladi.

13.5-§. Ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish

1. Ikki karrali integralni hisoblashning asosiy usuli uni ikki marta bir karrali integralni hisoblashga keltirishdan iboratdir.

13.5.1 - teorema. Berilgan f funksiya $Q = [a, b] \times [c, d]$ to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi bo'lib, har qanday $x_1 \in [a, b]$ qiymat uchun

$$I(x_1) = \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 \quad (13.5.1)$$

integral mavjud bo'lsin.

U holda $I(x_1)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, ushbu

$$\int_Q f(x) dx = \int_a^b I(x_1) dx_1 \quad (13.5.2)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar istalgan (yopiq yoki ochiq) regulyar $Q_0 \subset Q$ to'g'ri to'rtburchakning xarakteristik funksiyasini olsak, (13.5.2) tenglikning chap va o'ng tarafini to'g'ridan-to'g'ri hisoblash yordamida, bu

tenglikni o'rinli ekanini ko'rsatish mumkin. Aniqrog'i, bunda tenglikning ikki tarafi ham Q_0 ning yuziga, ya'ni $|Q_0|$ ga teng.

Bundan chiqdi, isbotlanayotgan tenglik bunday funksiyalarning istalgan chekli sondagi chiziqli kombinatsiyasi uchun ham o'rinli bo'ladi.

Endi berilgan Q to'g'ri to'rtburchakning, vertikal va gorizont tal to'g'ri chiziqlar yordamida Q_k to'g'ri to'rtburchaklarga bolish natija-sida hosil bo'lgan, P bo'linishni qaraymiz. U holda, yuqoridagi mulo-hazalarimizga ko'ra, (13.5.2) formula, P bo'linishga mos keluvchi va mos ravishda (13.3.3) hamda (13.3.4) formulalar bilan aniqlangan, Darbuning quyi $h(x, P)$ va yuqori $H(x, P)$ funksiyalari uchun o'rinli bo'ladi.

Quyidagi

$$\varphi(x_1) = \int_c^d h(x_1, x_2, P) dx_2, \quad \psi(x_1) = \int_c^d H(x_1, x_2, P) dx_2$$

belgilashlarni kiritaylik.

Ravshanki, bu funksiyalar $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, ulardan olingan integrallar mos ravishda (13.3.7) tengliklar bilan aniqlangan Darbuning quyi va yuqori yig'indilariga teng:

$$\int_a^b \varphi(x_1) dx_1 = s(f, P), \quad \int_a^b \psi(x_1) dx_1 = S(f, P). \quad (13.5.3)$$

Shartga ko'ra f funksiya integrallanuvchi bo'lgani sababli, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun yuqoridagi P bo'linishni shunday tanlash mumkin-ki, u uchun quyidagi

$$\int_a^b [\psi(x_1) - \varphi(x_1)] dx_1 = S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Endi, o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$\varphi(x_1) \leq I(x_1) \leq \psi(x_1) \quad (13.5.4)$$

tengsizlikni hisobga olsak, 13.3.4 - teoremadan $I(x_1)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. Demak, (13.5.3) va (13.5.4) ga ko'ra,

$$s(f, P) \leq \int_a^b I(x_1) dx_1 \leq S(f, P).$$

Bundan talab qilingan (13.5.2) tenglikni kelib chiqishi aniq.

1 - eslatma. Odatda (13.5.1) va (13.5.2) tengliklarni quyidagi

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (13.5.5)$$

formula ko'rinishda yozishadi. E'tibor bering, chap tarafda ikki karali integral turibdi, o'ng tarafdagi integralni esa, takroriy integral deyishadi.

2 - eslatma. Agar f funksiya 13.5.1 - teorema shartlarini qanoatlantirsa hamda har qanday $x_2 \in [c, d]$ qiymat uchun

$$J(x_2) = \int_a^b f(x_1, x_2) dx_1$$

integral mavjud bo'lsa, u holda bu teoremadan quyidagi

$$\iint_Q f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 =$$

$$= \int_c^d dx_2 \int_a^b f(x_1, x_2) dx_1$$

tengliklar kelib chiqadi.

3 - eslatma. (13.5.5) ning o'ng tarafidagi takroriy integralning mavjudligidan, chap tarafdagi ikki karrali integralning majudligi, umuman aytganda, kelib chiqmaydi. Bunga misol tariqasida quyidagi

$$Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan

$$f(x, y) = yD(x)$$

funktsiyani qaraylik, bunda $D(x)$ orqali, odatdagidek, Dirixle funksiyasini belgiladik. $f(x, y)$ funksiya Q to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi emas, ammo u uchun (13.5.5) ning o'ng tarafidagi takroriy integral mavjud hamda nolga tengligini tekshirish qiyin emas.

13.5.1 - misol. Quyidagi

$$f(x, y) = y \cos xy$$

funksiyadan

$$Q = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$$

to'g'ri to'rtburchak bo'yicha olingan integralni hisoblang.

Buning uchun (13.5.5) formuladan foydalanish yetarli:

$$\iint_Q y \cos xy \, dx dy = \int_0^1 y \, dy \int_0^\pi \cos xy \, dx = \int_0^1 \sin \pi y \, dy = \frac{2}{\pi}.$$

2. Xuddi yuqoridagiga o'xshash usulda, integrallash sohasi to'g'ri to'rtburchak bo'lmasdan, ikki funksiya grafklari orasidagi soha bo'lganda ham, ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish mumkin.

13.5.2 - teorema. Faraz qilaylik, α va β funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, Ω soha ushbu

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \quad a \leq x \leq b\}$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Agar f funksiya Ω sohada integrallanuvchi bo'lib, istalgan $x \in [a, b]$ uchun

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

integral mavjud bo'lsa, u holda $I(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \quad (13.5.6)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Avval f funksiyaning Ω sohasidan tashqariga nolga teng qilib davom ettiramiz. So'ngra, Ω sohasini o'z ichiga oluvchi biror Q regular to'g'ri to'rtburchakni olib, uning uchun 13.5.1 - teoremani qo'llasak, talab qilingan (13.5.6) tenglikka ega bo'lamiz.

■

13.5.2 - misol. Quyidagi

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - y^2}$$

funksiyadan

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$$

soha bo'yicha olingan ikki karrali integralni hisoblang.

Buning uchun (13.5.6) tenglikni qo'llash yetarli:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - y^2} dx dy &= \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} dx = \\ &= 2 \int_{-R}^R (R^2 - y^2) dy = \frac{8}{3} R^3. \end{aligned}$$

Ba'zan, integrallash sohasi murakkabroq ko'rinishga ega bo'lganda ham, integrallash sohasini soddaroq ko'rinishga ega chekli sondagi qismlarga bo'lib, integral hisoblashni yuqorida ko'rilgan holga keltirish mumkin.

13.5.3 - misol. Faraz qilaylik, Ω soha halqadan iborat bo'lib, bunda ichki doira radiusi r ga va tashqi doira radiusi esa, R ga teng bo'lsin:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Shu sohada

$$f(x) = \frac{|x|}{(x^2 + y^2)^2}$$

funktsiyadan olingan ikki karrali integralni hisoblang.

Bu sohani to'rt qismga bo'lib, integralni har bir qismda alohida hisoblaymiz. Bunda

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_r^R dy \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{|x| dx}{(x^2 + y^2)^2} = \int_r^R dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{2x dx}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= - \int_r^R \frac{1}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{R^2 - y^2}} dy = \int_r^R \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2} \right) dy = \frac{(R - r)^2}{R^2 r} \end{aligned}$$

va

$$I_2 = \int_{-r}^r dy \int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x dx}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{2} \int_{-r}^r \frac{1}{x^2+y^2} \Big|_{x=\sqrt{r^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} dy$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{R^2 r}.$$

Ravshanki, I_3 va I_4 integrallar hisoblab bo'lingan integrallarga teng va shuning uchun,

$$I = 2 \frac{(R-r)^2}{R^2 r} + 2 \frac{R^2 - r^2}{R^2 r} = \frac{4(R-r)}{Rr}.$$

3. Yuqorida biz ikki karrali integrallarni takroriy integrallarga, ya'ni ketma-ket ikkita bir karrali integralga keltirib hisoblashni misollarda ko'rdik. Ba'zan bunga teskari amalni bajarish, ya'ni bir karrali integralni ikki karrali integral ko'rinishida yozib olib, so'ngra 13.5.1 - teoremdan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

13.5.4 - misol. Faraz qilaylik, bir o'zgaruvchili $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. U holda ikki o'zgaruvchining $h(x, y) = f(x)g(y)$ funksiyasi $Q = [a, b] \times [a, b]$ kvadratda integrallanuvchi bo'ladi (13.3.2 - tasdiqqa qarang). Ravshanki,

$$\iint_Q [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy \geq 0.$$

Qavslarni ochib, 13.5.1 - teoramadan foydalansak,

$$2 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx - 2 \left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \geq 0$$

munosabatni olamiz.

Bu tengsizlikni, albatta,

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx} \quad (13.5.7)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Eslatib o'tamiz, (13.5.7) munosabat *Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi.

13.6-§. Ikki karrali integralda o'zgaruvchini almashtirish

1. Silliqlik akslantirishda soha yuzining o'zgarishi.

Ushbu bandda kvadratlanuvchi shakllar yuzining uzluksiz akslantirishdagi o'zgarish qoidalari o'rganiladi. Lekin, shuni qayd etish kerakki, uzluksiz akslantirishda yuzi nolga teng bo'lgan shakl ham yuzi musbat bo'lgan shaklga akslanishi mumkin. Mana shunday g'alati hollarni oldini olish maqsadida, biz, qo'shimcha ravishda, o'rganilayotgan akslantirishlarning uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishini talab qilamiz.

Eslatib o'tamiz, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun biror nuqtada differensiallanuvchanlik tushunchasi qaralayotgan funksiya shu nuqtaning biror atrofida aniqlangan holda kiritilgan edi. Soha ochiq to'plam bo'lgani uchun, uning barcha nuqtalari o'zining biror atrofi bilan shu sohaga kiradi. Shu sababli, har qanday sohada aniqlangan funksiya uchun uzluksiz differensiallanuvchanlik tushunchasi nimani anglatishi ravshan.

Lekin, yopiq soha holida chegaraviy nuqtalarda differensiallanuvchanlikni aniqlashda muammo paydo bo'ladi. Bunga sabab shundaki, ba'zan soha chegarasi shunchalik murakkab tuzilishga ega bo'ladi,

natijada ba'zi chegaraviy nuqtalarda hech qaysi o'zgaruvchi bo'yicha ayirmali nisbatni tuzib bo'lmaydi, chunki istalgan yo'nalish bo'yicha har qanday siljish nuqtani qaralayotgan sohadan chetga chiqarib yuboradi.

Agar funksiya tomonlari koordinatalar o'qlariga parallel bo'lgan yopiq to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan bo'lsa, masala oson hal bo'ladi. Bu holda har bir chegaraviy nuqtada har qaysi o'zgaruvchi bo'yicha aqalli bir taraffi hosilani aniqlash mumkin. Mana shu hosilani biz chegaraviy nuqtadagi hosila qiymati deb qabul qilamiz.

Shunday qilib, funksiyaning yopiq to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz differensiallanuvchi ekani quyidagini anglatadi: 1) funksiya yopiq to'g'ri to'rtburchakning barcha nuqtalarida (chegaraviy nuqtalar ham bunga kiradi) aniqlangan; 2) barcha ichki nuqtalarda differensiallanuvchi va chegaraviy nuqtalarda mos bir taraffi qisman hosilaga ega; 3) bunday aniqlangan qisman hosila yopiq sohada uzluksiz.

Ushbu paragrafdagi bizning asosiy maqsadimiz, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ silliq vektor-funksiya bilan berilgan, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kvadratlanuvchi sohani homeomorf akslantirishni o'rganishdir. Bunda $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ vektor-funksiyani silliq deganda, biz uni har bir $\varphi_j(x)$ komponentasining uzluksiz differensiallanuvchi funksiya ekanini tushunamiz.

Ma'lumki, $y = \varphi(x)$ akslantirishning Yakobi determinanti yoki *yakobiani* deb quyidagi

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \det \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

determinantga aytilar edi.

Bu formulaning chap tarafida yakobianni belgilashda ishlatilayotgan simvol yakobian (x_1, x_2) nuqtani (y_1, y_2) nuqtaga o'tkazuvchi akslantirish bilan bog'liq ekaniga urg'u beradi.

Akslantirishimizning silliqligidan x nuqtaning yetarlicha kichik atrofida uning chiziqli akslantirishdan kam farq qilishi va bundan tashqari, bunday akslantirishda uzayish koeffitsienti x nuqtadagi yakobianning absolyut qiymatiga teng ekani kelib chiqadi.

Bu mulohazalar navbatdagi tasdiqda o'z aksini topgan.

13.6.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, Q yopiq to'g'ri to'rtburchak bo'lib, Q ni $\varphi(Q)$ yassi shaklga akslantiruvchi $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ uzluksiz differensiallanuvchi homeomorfizm berilgan bo'lsin. U holda $\varphi(Q)$ shakl kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi quyidagi

$$|\varphi(Q)| = \int_Q \left| \det \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right| dx \quad (13.6.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Isbot. $\varphi(Q)$ yassi shaklning kvadratlanuvchi ekani chegarasining bo'lakli-silliqligidan (chunonchi, chegara to'rtta silliq qismdan iborat) kelib chiqadi.

Berilgan Q to'g'ri to'rtburchakning har bir tomonini m ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bunda $n = m^2$ ta (yopiq yoki yarim ochiq) qismiy Q_k to'g'ri to'rtburchaklarga ega bo'lamiz. Aytaylik, ξ_k har bir qismiy to'g'ri to'rtburchakning markazi va h uni katta tomonining uzunligi bo'lsin.

Yopiq Q to'g'ri to'rtburchakning kompaktligiga ko'ra, φ akslantirishning uzluksiz hosilalari Q da tekis uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun, Q_k to'g'ri to'rtburchakning chegarasida yotuvchi istalgan x uchun

$$\varphi(x) = \varphi(\xi_k) + (x - \xi_k) \cdot \nabla \varphi(\xi_k) + o(h) \quad (13.6.2)$$

tenglik k bo'yicha tekis ravishda bajariladi.

Ravshanki,

$$\psi_k(x) = \varphi(\xi_k) + (x - \xi_k) \cdot \nabla \varphi(\xi_k)$$

affin akslantirishidir, ya'ni bu akslantirishda to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa akslanadi. Demak, bu akslantirishda Q_k to'g'ri to'rtburchak $P_k = \psi(Q_k)$ parallelogrammga o'tadi va bunda P_k ning yuzi, 13.1.7 - tasdiqqa ko'ra,

$$|\psi(Q_k)| = \left| \det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x} \right| \cdot |Q_k| \quad (13.6.3)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bundan, agar 13.1.8 - tasdiqda $\varepsilon = o(h)$ deb olsak,

$$| |\varphi(Q_k)| - |\psi(Q_k)| | \leq 16 [|\partial P_k|_1 + o(h)] \cdot o(h)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Demak, har bir qismaniy Q_k to'g'ri to'rtburchakning perimetri va natijada, har bir qismaniy P_k parallelogrammning $|\partial P_k|_1$ perimetri ham, h ga proporsional bo'lgani sababli, ushbu

$$|\varphi(Q_k)| = |\psi(Q_k)| + o(1)h^2$$

tenglik o'rinli.

Agar (13.6.3) tenglikni hisobga olsak, oxirgi tenglikni

$$|\varphi(Q_k)| = \left| \det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x} \right| \cdot |Q_k| + o(1)h^2$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Bundan, har bir qismaniy Q_k to'g'ri to'rtburchakning yuzi h^2 ga proporsional bo'lgani uchun,

$$|\varphi(Q_k)| = \left| \det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x} \right| \cdot |Q_k| + o(1)|Q_k|$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday ekan, φ akslantirishning o'zaro bir qiymatliligiga ko'ra,

$$|\varphi(Q)| = \sum_{k=1}^n |\varphi(Q_k)| = \sum_{k=1}^n \left| \det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x} \right| \cdot |Q_k| + o(1) \sum_{k=1}^n |Q_k|.$$

Bu tenglikning o'ng tarafidagi birinchi yig'indi $\Phi(x) = \left| \det \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|$ uzluksiz funksiyaning integral yig'indisi bo'lib, ikkinchi yig'indi esa, $|Q|$ ga teng. Shuning uchun, agar $h \rightarrow 0$ desak, talab qilingan (13.6.1) tenglikni olamiz.

13.6.1 - misol. Faraz qilaylik, $0 < \lambda < 1$ bo'lib,

$$Q_\lambda = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \pi\}$$

to'g'ri to'rtburchak berilgan bo'lsin. Bundan tashqari, $y = \varphi(x)$ bu to'g'ri to'rtburchakni $\mathbb{R}^2$ tekislikka akslantirish bo'lib, uning komponentalari

$$\varphi_1(x) = ax_1 \cos x_2,$$

$$\varphi_2(x) = bx_1 \sin x_2$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Qaralayotgan to'g'ri to'rtburchakning $\varphi(Q)$ aksi quyidagi ikki

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y_1^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y_2^2}{\lambda^2 b^2} = 1$$

ellips bilan chegaralangan sohaning yuqori yarmidan iborat. Mana shu yopiq $\varphi(Q)$ sohaning yuzini topish talab qilinadi.

Buning uchun quyidagi yakobianni hisoblaymiz:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} a \cos x_2 & -ax_1 \sin x_2 \\ b \sin x_2 & bx_1 \cos x_2 \end{vmatrix} = abx_1.$$

Shunday ekan, (13.6.1) formulaga ko'ra,

$$|\varphi(Q)| = \int_Q abx_1 dx_1 dx_2 = ab \int_0^\pi dx_2 \int_\lambda^1 x_1 dx_1 = \frac{1}{2} \pi ab (1 - \lambda^2).$$

13.6.1 - tasdiq yordamida istalgan kvadratlanuvchi to'plam yuzining silliq akslantirishda qanday o'zgarishini ko'rishimiz mumkin.

13.6.1 - teorema. Faraz qilaylik, φ berilgan Ω sohani $\mathbb{R}^2$ tekislikning biror sohasiga uzluksiz differentsiallanuvchi homeomorf akslantirish bo'lsin.

U holda istalgan kompakt kvadratlanuvchi $K \subset \Omega$ to'plamning $\varphi(K)$ aksi kompakt kvadratlanuvchi to'plam bo'lib, quyidagi

$$|\varphi(K)| = \int_K \left| \det \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| dx \quad (13.6.4)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Ixtiyoriy ko'pburchakli $F \subset K$ shaklni olib, uni o'zaro kesishmaydigan $\{F_k\}_{k=1}^n$ qismaniy to'g'ri to'rtburchaklar yig'indisi ko'rinishida yozib olaylik. Berilgan φ akslantirish yordamida bu ko'pburchakli shakl qandaydir $Q = \varphi(F)$ yassi shaklga, qismaniy to'g'ri to'rtburchaklar esa, biror kvadratlanuvchi $Q_k = \varphi(F_k)$ shakllarga akslanadi. U holda, 13.6.1 - tasdiqqa ko'ra, φ akslantirishning o'zaro bir qiymatlilik va Riman integralining additivligidan foydalanib,

$$\begin{aligned} |\varphi(F)| &= \sum_{k=1}^n |\varphi(F_k)| = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{F_k} \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy = \int_F \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \end{aligned} \quad (13.6.5)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi Ω da yotuvchi va K ni o'z ichiga oluvchi istalgan ko'pburchakli yopiq G shaklni (K kompakt bo'lgani uchun buning iloji bor) olib, yuqoridagi singari mulohazalar yordamida,

$$|\varphi(G)| = \int_G \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.6.6)$$

tenglikka kelimiz.

$F \subset K \subset G$ shartdan $\varphi(F) \subset \varphi(K) \subset \varphi(G)$ munosabatni olamiz. Ravshanki, bundan $\varphi(K)$ to'plamning quyi va yuqori yuzala-ri uchun

$$|\varphi(F)| \leq |\varphi(K)|_* \leq |\varphi(K)|^* \leq |\varphi(G)|$$

baho kelib chiqadi.

Shunday ekan, (13.6.5) va (13.6.6) tengliklarni hisobga olsak,

$$\int_F \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \leq |\varphi(K)|_* \leq |\varphi(K)|^* \leq \int_G \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.6.7)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Integralning to'plam funksiyasi sifatida absolyut uzluksizligiga ko'ra (13.4.8 - teorema qarang), istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham F va G shakllarni shunday tanlash mumkinki, ular uchun

$$\int_K \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy - \varepsilon < \int_F \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy$$

va

$$\int_G \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy < \int_K \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy + \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi.

Bu tengsizliklar va (13.6.7) bahodan quyidagi

$$\int_K \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy - \varepsilon < |\varphi(K)|_* \leq |\varphi(K)|^* < \int_K \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy + \varepsilon$$

munosabatni olamiz.

Shunday ekan, $\varepsilon > 0$ sonining ixtiyoriyligiga ko'ra,

$$|\varphi(K)|_* = |\varphi(K)|^* = \int_K \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy.$$

Demak, $\varphi(K)$ to'plam kvadratlanuvchi bo'lib, talab qilingan (13.6.4) tenglik bajarilar ekan.

2. Ikki karrali integralda o'zgaruvchini almashtirish.

13.6.2 - tasdiq. Faraz qilaylik, φ berilgan Ω sohani $\mathbb{R}^2$ tekislikning biror sohasiga uzluksiz differensiallanuvchi homeomorf akslantirish bo'lsin.

Agar K to'plam Ω sohasining kompakt kvadratlanuvchi qismaniy to'plami bo'lsa, u holda $E = \varphi(K)$ da integrallanuvchi istalgan f funksiya uchun

$$\int_E f(x) dx = \int_K f[\varphi(y)] \cdot \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.6.8)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tarafdagi integral mavjuddir.

Isbot. 11.3.2 - tasdiqqa ko'ra, $E = \varphi(K)$ to'plam kompakt bo'lib, 13.6.1 - teoremdan uning kvadratlanuvchi ekani kelib chiqadi.

Quyidagi

$$\Phi(y) = \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| \quad (13.6.9)$$

funksiyani kiritib, f funksiyaning E to'plam bo'yicha integral yig'indisini hisoblaymiz.

Buning uchun K to'plamining ixtiyoriy $P = \{K_j\}_{j=1}^n$ bo'linishini qaraymiz. Bu bo'linishni φ akslantirish E to'plamining biror $P^* = \{E_j\}_{j=1}^n$ bo'linishiga o'tkazadi, bunda $E_j = \varphi(K_j)$. Ixtiyoriy ravishda $\eta_j \in K_j$ nuqtalarni tanlab, $\xi_j = \varphi(\eta_j)$ deymiz. U holda, (13.6.4) formulaga va (13.6.9) belgilashga ko'ra,

$$\sigma_{P^*}(f, \{\xi_j\}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot |E_j| = \sum_{j=1}^n f[\varphi(\eta_j)] \int_{K_j} \Phi(y) dy. \quad (13.6.10)$$

Agar

$$\alpha_j(P) = \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} \Phi(y) dy - \Phi(\eta_j)$$

belgilshni kiritsak, u holda (13.6.10) tenglikni

$$\sigma_{P^*}(f, \{\xi_j\}) = \sum_{j=1}^n f[\varphi(\eta_j)] \Phi(\eta_j) \cdot |K_j| + \sum_{j=1}^n f[\varphi(\eta_j)] \cdot |K_j| \cdot \alpha_j(P) \quad (13.6.11)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Ushbu $\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}$ matritsa elementlarining tekis uzluksizligiga ko'ra, $d(P) \rightarrow 0$ da j bo'yicha tekis ravishda, quyidagi

$$\alpha_j(P) = \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} [\Phi(y) - \Phi(\eta_j)] dy \rightarrow 0$$

munosabat bajariladi.

Ravshanki, f funktsiyaning E da integrallanuvchi ekanidan uning chegaralangani kelib chiqdi. Bundan chiqdi, (13.6.11) ning o'ng tarafidagi oxirgi had $d(P) \rightarrow 0$ da nolga intiladi. Shuning uchun,

$$\sum_{j=1}^n f[\varphi(\eta_j)] \Phi(\eta_j) \cdot |K_j| = \sigma_{P^*}(f, \{\xi_j\}) + \beta(P), \quad (13.6.12)$$

bu yerda $d(P) \rightarrow 0$ da $\beta(P) \rightarrow 0$.

Shubhasiz, agar K_j to'plamining $d(K_j)$ diametri nolga intilsa, $E_j = \varphi(K_j)$ to'plamining $d(E_j)$ diametri ham nolga intiladi. Boshqacha aytganda, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladi-ki, agar $d(K_j) < \delta$ bo'lsa, $d(E_j) < \varepsilon$ bo'ladi. Bu tasdiq φ funktsiyaning yopiq chegaralangan $\bar{\Omega}$ to'plamda tekis uzluksizligidan kelib chiqadi.

E'tibor bering, yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, (13.6.12) ning o'ng tarafida, $d(P^*) \rightarrow 0$ da f funktsiyadan E to'plam bo'yicha olingan integralga intiluvchi, integral yig'indi turibdi. Shunday ekan, (13.6.12) ga ko'ra,

$$\sum_{j=1}^n f[\varphi(\eta_j)] \Phi(\eta_j) \cdot |K_j| = \int_E f(x) dx + o(1), \quad d(P) \rightarrow 0.$$

Bundan (13.6.8) formula o'ng tarafidagi integralning mavjudligi va bu formulaning o'rinli ekani kelib chiqadi.

■

13.6.2 - teorema (ikki karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish haqida). Faraz qilaylik, uzluksiz diffrensiallanuvchi $\varphi : \Omega \rightarrow G$ akslantirish kvadratlanuvchi Ω sohani kvadratlanuvchi G sohaga homeomorf akslantirsin.

Agar (13.6.9) yakobian Ω da chegaralangan bo'lsa, u holda G da integrallanuvchi har qanday f funksiya uchun

$$\int_G f(x) dx = \int_{\Omega} f[\varphi(y)] \cdot \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.6.13)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tarafdagi integral mavjuddir.

Isbot. Avval 11.3.3 - teoremadan $G = \varphi(\Omega)$ to'plamning soha ekani hamda $\partial G = \varphi(\partial \Omega)$ tenglikning kelib chiqishini qayd etamiz. Bundan tashqari, 13.4.6 - teoreмага ko'ra, $f(x)$ funksiya G da chegaralangan va demak,

$$F(y) = f[\varphi(y)] \cdot \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| \quad (13.6.14)$$

funksiya Ω da chegaralangan. 13.6.2 - tasdiqqa asosan, oxirgi funksiya Ω ning istalgan kompakt qismaniy to'plamida integrallanuvchi va demak, 13.4.7 - teoreмага ko'ra, u butun Ω da integrallanuvchi. Endi faqat (13.6.13) tenglik bajarilishini ko'rsatish yetarli.

1) Boshida butun Ω sohasida $f(x) \geq 0$ shart bajarilsin, deb faraz qilamiz. U holda istalgan yopiq regulyar ko'pburchakli $P \subset \Omega$ shakl uchun, 13.6.2 - tasdiqqa asosan,

$$\int_P f[\varphi(y)] \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy = \int_Q f(x) dx \quad (13.6.15)$$

tenglik bajariladi, bu yerda $Q = \varphi(P)$. Demak, $Q \subset G$ bo'lgani va $f(x)$ funksiyaning manfiy emasligiga ko'ra, quyidagi

$$\int_P f[\varphi(y)] \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \leq \int_G f(x) dx$$

bahoga ega bo'lamiz.

Bu tengsizlikni quyidagi

$$\int_{\Omega} f[\varphi(y)] \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \leq \int_G f(x) dx + \int_{\Omega \setminus P} f[\varphi(y)] \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.6.16)$$

ko'rinishda yozib olaylik.

Ω soha kvadratlanuvchi bo'lgani sababli, ko'pburchakli P shakl-ni tanlash hisobiga, $\Omega \setminus P$ to'plam yuzini istalgancha kichik qilish mumkin. Shunday ekan, integralning to'plam funksiyasi sifatida absolyut uzluksizligiga ko'ra (13.4.8 - teoreмага qarang), (13.6.16) ning o'ng tarafidagi oxirgi integralni ham avvaldan berilgan har qanday musbat sondan kichik qilish mumkin. Bundan chiqdi,

$$\int_{\Omega} f[\varphi(y)] \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \leq \int_G f(x) dx. \quad (13.6.17)$$

Endi Q ixtiyoriy yopiq regulyar ko'pburchakli shakl bo'lib, G sohaning ichida yotsin va $P = \varphi^{-1}(Q)$ bo'lsin. 11.1.4 - teoreмага ko'ra, Q kompakt to'plam va shuning uchun, P ham kompakt to'plamdir (11.3.2 - tasdiqqa qarang). U holda (13.6.15) tenglik o'rinli bo'lib, f manfiy bo'lmagani uchun quyidagi

$$\int_Q f(x) dx \leq \int_{\Omega} f[\varphi(y)] \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy$$

bahoni olamiz.

Q ning ixtiyoriyligiga ko'ra, yuqoridagiga o'xshash mulohazalar yordamida ushbu

$$\int_G f(x) dx \leq \int_{\Omega} f[\varphi(y)] \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.6.18)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

(13.6.17) va (13.6.18) tengsizliklarni taqqoslab, talab qilingan (13.6.13) tenglikka kelamiz.

2) Agar f funksiya turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, uni ikki manfiy bo'lmagan integrallanuvchi funksiya ayirmasi sifatida yozib olish mumkin, ya'ni

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

bunda

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Bu funksiyalarning integrallanuvchanligi 13.3.3 - teoremaning 3 - natijasidan kelib chiqadi.

Har bir $f_{\pm}(x)$ funksiya yuqorida isbotlangan (13.6.13) formula-ni qo'llasak, teorema isboti yakunlanadi.



Eslatma. Isbotlangan teorema ko'pincha quyidagi ko'rinishda qo'llaniladi.

Faraz qilaylik, φ uzluksiz vektor-funksiya ochiq kvadratlanuvchi Ω sohani ochiq kvadratlanuvchi G sohaga homeomorf akslantirsin va Ω da bu vektor-funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, φ vektor-funksiyani va mos yakobianni Ω sohasi-ning chegarasiga shunday davom ettirish mumkin bo'lsinki, bunda davom ettirilgan funksiyalar yopiq $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sohada uzluksiz bo'lsin.

U holda G da integrallanuvchi har qanday f funksiya uchun

$$\int_{\bar{G}} f(x) dx = \int_{\bar{\Omega}} f[\varphi(y)] \cdot \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.6.19)$$

formula o'rinli.

Haqiqatan, ochiq Ω va G sohalarga 13.6.2 - teoremani qo'llash mumkin. Bu teoreмага ko'ra, (13.6.13) tenglik bajariladi. Endi,

(13.4.9) tenglikka asosan, ochiq soha bo'yicha integrallashni yopiq soha bo'yicha integrallashga almashtirib, talab qilingan (13.6.19) tenglikni olamiz.

13.6.2 - misol. Agar $\alpha \geq 0$ va

$$\overline{G} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

bo'lsa,

$$J_\alpha = \int_{\overline{G}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^\alpha dx dy$$

integral hisoblansin.

Buning uchun yopiq

$$\overline{\Omega} = \{(s, t) : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

to'g'ri to'rtburchakda $x = \varphi(s, t)$ va $y = \psi(s, t)$ komponentalarga ega bo'lgan vektor-funktsiyani qaraymiz, bunda

$$\varphi(s, t) = as \cos t, \quad \psi(s, t) = bs \sin t. \quad (13.6.20)$$

Mos yakobianni hisoblaylik:

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{vmatrix} a \cos t & -as \sin t \\ b \sin t & bs \cos t \end{vmatrix} = abs.$$

Endi (13.6.19) formulani qo'llasak,

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \int_{\overline{\Omega}} (1 - s^2 \cos^2 t - s^2 \sin^2 t)^\alpha abs ds dt = ab \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (1 - s^2)^\alpha ds = \\ &= 2\pi ab \int_0^1 (1 - s^2)^\alpha s ds = \pi ab \int_0^1 (1 - u)^\alpha du = \frac{\pi ab}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

tenglikni olamiz.

Eslatma. E'tibor bering, yuqoridagi yopiq $\bar{\Omega}$ to'g'ri to'rtburchakni yopiq $\bar{G}$ ellipsga o'tkazuvchi (13.6.20) akslantirish homeomorf ham emas va xattoki, o'zaro bir qiymatli ham emas. Haqiqatan, (13.6.20) vektor-funksiya butun

$$I_0 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s = 0, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

kesmani $x = 0$, $y = 0$ koordinatali nuqtaga akslantiradi. Lekin, shunga qaramasdan, bu akslantirish

$$\Omega = \{(s, t) : 0 < s < 1, 0 < t < 2\pi\}$$

ochiq to'g'ri to'rtburchakni, ochiq ellipsdan $P_a = [0, a]$ yarim interval chiqazib tashlangan, quyidagi

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\} \setminus P_a$$

ochiq sohaga homeomorf akslantiradi. Bu esa bizga (13.6.19) formuladan foydalanishga imkon beradi.

Yana shuni qayd etish joizki, (13.6.19) formulaning o'rinli bo'lishi uchun yakobian noldan farqli bo'lishi shart emas. Haqiqatan, qaralayotgan misolda yakobian I_0 kesmaning barcha nuqtalarida nolga teng.

3. Egri chiziqli koordinatalar.

1⁰. Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ soha o'zaro bir qiymatli ravishda $G \subset \mathbb{R}^2$ sohaga akslantirilsin. Ω soha nuqtalari koordinatalarini (ξ, η) orqali, G soha nuqtalari koordinatalarini esa, (x, y) orqali belgilaylik. Qaralayotgan akslantirish sillq bo'lib,

$$x = \varphi(\xi, \eta),$$

$$y = \psi(\xi, \eta),$$

ko'rinishga ega bo'lsin va bundan tashqari, mos yakobian noldan farqli bo'lsin:

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \equiv \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)} \neq 0.$$

Bunda Ω sohasining $\{\xi = \text{const}\}$ ko'rinishdagi koordinata to'g'ri chiziqlari, G sohada joylashgan va koordinata egri chiziqlari deb ataluvchi, qandaydir egri chiziqlarga akslanadi. Xuddi shu kabi, $\{\eta = \text{const}\}$ ko'rinishdagi to'g'ri chiziqlar ham koordinata egri chiziqlari deb ataluvchi qandaydir egri chiziqlarga akslanadi. Akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lgani sababli, G sohaning har bir nuqtasi orqali bitta birinchi ko'rinishdagi koordinata egri chizig'i va bitta ikkinchi ko'rinishdagi koordinata egri chizig'i o'tadi.

Shunday qilib, G sohaning (x, y) koordinatali har bir nuqtasi, shu nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb ataluvchi, ikkita (ξ, η) son orqali o'zaro bir qiymatli aniqlanar ekan.

2^o. (ρ, φ) qutb koordinatalari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (13.6.21)$$

tengliklar yordamida kiritiladi.

Bunda (ρ, φ) nuqta

$$\Omega = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

sohada o'zgarganda (x, y) nuqta $G = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ sohada o'zgaradi.

G sohasida $\rho = \text{const}$ koordinata chiziqlari markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylanalardan iborat bo'lsa, $\varphi = \text{const}$ ko'rinishdagi koordinata chiziqlari esa, koordinatalar boshidan chiquvchi nurlardan iborat.

(13.6.21) almashtirish yakobiani oson hisoblanadi:

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Faraz qilaylik, (ρ, φ) o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kvadratlanuvchi soha bo'lib, u (13.6.21) funksiyalar sistemasi yordamida kvadratlanuvchi $G \subset \mathbb{R}^2$ sohaga homeomorf ravishda akslansin. Agar $f(x, y)$ funksiya G sohada aniqlangan bo'lsa, u holda f bilan (13.6.21) almashtirishning kompozitsiyasi deb Ω sohasida aniqlangan $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ funksiyaga aytamiz.

Agar f funksiya G sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, 13.6.2 - teoremlarga ko'ra,

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

tenglik bajariladi.

G integrallash sohasi o'zining biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lgan hollarda qutb koordinatalar sistemasi ayniqsa samarali qo'llaniladi.

Ta'rif. Agar $A \in G$ nuqta bilan ixtiyoriy $B \in \partial G$ nuqtani tutashtiruvchi $[AB]$ kesmaning barcha ichki nuqtalari G sohada yotsa, u holda G soha A nuqtaga nisbatan **yulduzli** deyiladi.

Masalan, ixtiyoriy qavariq soha o'zining har qanday nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'ladi.

Aytaylik, G soha biror $A \in G$ nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lsin. Markazi A da bo'lgan qutb koordinatalarini kiritamiz. Bu koordinatalarda G soha chegarasini $0 \leq \varphi < 2\pi$ da aniqlangan biror $R(\varphi)$ yordamida

$$\partial G = \{(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) : \rho = R(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Odatda bu to'plamni qisqaroq qilib quyidagicha yozishadi:

$$\partial G = \{\rho = R(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \quad (13.6.22)$$

Bunda G soha

$$\Omega = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho < R(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \quad (13.6.23)$$

to'planning aksi bo'ladi.

13.6.2 - teoremadan navbatdagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi.

13.6.3 - tasdiq. Faraz qilaylik, kvadratlanuvchi $G \subset \mathbb{R}^2$ soha koordinatalar boshiga nisbatan yulduzli bo'lib, uning chegarasi (13.6.22) munosabat bilan berilgan bo'lsin. Agar $f(x, y)$ funksiya G sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ funksiya (13.6.23) tenglik bilan aniqlangan Ω sohada integrallanuvchi bo'lib,

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \quad (13.6.24)$$

tenglik bajariladi.

Agar G sohaning $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta$ koordinatalik nurlar tashkil qilgan burchak ichida yotuvchi $G_{\alpha\beta}$ qismaniy to'plamini olsak, bu soha bo'yicha olingan integralning

$$\iint_{G_{\alpha\beta}} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{R(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \quad (13.6.25)$$

ko'rinishga ega ekanini tekshirish qiyin emas.

Koordinatalar boshi G sohaning chegarasida yotganda ham (13.6.25) formula o'rinli ekanini qayd etamiz.

13.6.3 - misol. Arximed spirali o'ramasining birinchi yarmi va abssissalar o'qi orasida yotgan shakl yuzi topilsin.

Qutb koordinatalarida Arximed spirali tenglamasi quyidagi

$$\rho = a\varphi, \quad a > 0,$$

ko'rinishga ega. Demak, ushbu misolda

$$\Omega = \{(\rho, \varphi) : 0 < \rho < a\varphi, 0 < \varphi < \pi\}$$

uchburchakning aksidan iborat G shakl yuzini topish talab qilina-yapti.

Buning uchun (13.6.25) formuladan foydalanish yetarli:

$$|G| = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\pi} \frac{a^2 \varphi^2}{2} d\varphi = \frac{1}{6} \pi^3 a^2.$$

13.7-§. Uch karrali integrallar

1. Kublanuvchi sohalar.

Uch karrali integrallar ham xuddi ikki karrali integrallar kabi kiritiladi. Chunonchi, avval ma'lum bir $E \subset \mathbb{R}^3$ to'plamlar sinfi uchun hajm deb ataluvchi biror o'lchov (ikki o'lchovli holdagi yassi shakl yuzi singari) tushunchasi aniqlanadi. Bunda hajmga ega to'plam kublanuvchi deb ataladi. Bundan so'ng, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi mayda kublanuvchi qismaniy to'plamlarga bo'linib, integral yig'indi tuziladi. Agar kublanuvchi qismaniy to'plamlarni cheksiz maydalashtirilganda integral yig'indilar limiti mavjud bo'lsa, funksiyaning integrallanuvchi deb e'lon qilinadi va bu limit berilgan funksiya bilan olingan integral deyiladi.

Ixtiyoriy uch o'lchovli to'plam hajmining ta'rifi to'g'ri burchakli parallelepiped hajmining tabiiy ta'rifiga, ya'ni parallelepiped hajmi uning uch tomoni uzunliklari ko'paytmasiga teng, degan ta'rifga asoslanadi.

Regulyar yopiq parallelepiped deb biz

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2, \quad c_1 \leq z \leq c_2\} \quad (13.7.1)$$

ko'rinishdagi to'plamga aytgan edik, bunda $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lib, $a_1 < a_2, b_1 < b_2$ va $c_1 < c_2$.

Regulyar ochiq parallelepiped

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2, \quad c_1 < z < c_2\} \quad (13.7.2)$$

ko'rinishdagi to'plamdan iborat.

Ravshanki, qayd etilgan ikki parallelepiped bir xil chegaraga ega:
 $\partial G = \partial F = F \setminus G$.

(13.7.1) ko'rinishdagi yopiq F parallelepipedning ham, (13.7.2) ko'rinishdagi ochiq G parallelepipedning ham hajmini

$$|F| = |G| = (a_2 - a_1) \cdot (b_2 - b_1) \cdot (c_2 - c_1) \quad (13.7.3)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

O'z-o'zidan ko'rinish turibdiki, har qanday regulyar parallelepiped hajmi musbat sonidir.

Yopiq ko'pyoqli jism deb biz chekli sondagi regulyar parallelepipedlar birlashmasiga aytgan edik, ya'ni

$$F = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n,$$

bu yerda P_k lar regulyar yopiq parallelepipedlardir.

Ochiq ko'pyoqli G jism deb F yopiq ko'pyoqli jismdan barcha chegaraviy nuqtalarni chiqazib tashlash natijasida hosil bo'lgan to'p-lamga aytamiz:

$$G = F \setminus \partial F.$$

Nihoyat, agar biror $E \subset \mathbb{R}^3$ to'plam uchun shunday G ochiq ko'pyoqli jism topilsaki, uning uchun

$$G \subset E \subset (G \cup \partial G)$$

munosabat bajarilsa, E to'plamni *ko'pyoqli jism* deymiz. Bunda G to'plam E ko'pyoqli jismning *ichki qismi* deb ataladi.

Shunday qilib, biz ta'riflagan *ko'pyoqli jism chegarasini o'z ichiga olishi yoki olmasligi, yoki bo'lmasa chegaraning biror qisminigina o'z ichiga olishi mumkin ekan.*

Agar ikki ko'pyoqli jismning ichki qismlari umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, biz bu jismlarni *biri ikkinchisini ustiga tushmaydi* deyimiz.

Ta'rif. Agar Q ko'pyoqli jism

$$Q = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda P_k regulyar parallelepipedlar o'zaro biri ikkinchisi ustiga tushmasa, u holda bu jismning $|Q|$ hajmi deb quyidagi songa aytamiz:

$$|Q| = \sum_{k=1}^n |P_k|.$$

Bu ta'rifning korrektiligi xuddi ko'pburchakli shakl yuzi ta'rifining korrektiligi kabi ko'rsatiladi.

Quyi va yuqori yuza tushunchalari singari quyi va yuqori hajm tushunchalari kiritiladi.

Uch o'lchovli $\mathbb{R}^3$ fazosining chegaralangan B to'plami berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Berilgan B to'plamning *quyi hajmi* $|B|_*$ deb B ga ichiki chizilgan P ko'pyoqli jismlar hajmlarining aniq yuqori chegarasiga aytiladi:

$$|B|_* = \sup_{P \subset B} |P|.$$

Agar B to'plam ichida birorta ham ko'pyoqli jism yotmasa, $|B|_* = 0$ deb qabul qilinadi. Lekin, agar, shakl yuzi holidagidek, bo'sh to'plamni ham hajmi nolga teng ko'pyoqli jism deb hisoblasak, bu tushuntirish talab qilinmaydi.

Ta'rif. B to'plamning *yuqori hajmi* $|B|^*$ deb B ga tashqi chizilgan Q ko'pyoqli jismlar hajmlarining aniq quyi chegarasiga aytamiz:

$$|B|^* = \inf_{Q \supset B} |Q|.$$

Ta'rif. Agar B to'plamning quyi hajmi uning yuqori hajmiga teng bo'lsa, bu to'plam *kublanuvchi* deyiladi. Bunda

$$|B| = |B|_* = |B|^*$$

son kublanuvchi B to'plamning **hajmi** deb ataladi.

Kublanuvchi to'plam ta'rifidan bevosita navbatdagi tasdiq (ya'ni 7.3.1 - teorema) kelib chiqadi:

B to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun unga ichki va tashqi chizilgan shunday mos ravishda P va Q ko'pyoqli jismlar topilib, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi

$$|Q| - |P| < \varepsilon$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bundan, xuddi kvadratlanuvchi shakllar holidagidek, navbatdagi jumlagaga ega bo'lamiz: $E \subset \mathbb{R}^3$ to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun uni ∂E chegarasi hajmining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Uch o'lchovli to'plam hajmi ham xuddi yassi shakl yuzi singari xossalarga ega. Biz $\mathbb{R}^3$ fazosini chiziqli almashtirish bilan bog'liq bo'lgan xossanigina keltiramiz.

13.7.1 - tasdiq. $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ chiziqli almashtirish kublanuvchi E to'plamni hajmi

$$|AE| = |E| \cdot |\det A|$$

ga teng bo'lgan AE kublanuvchi to'plamga akslantiradi; bu yerda A orqali A chiziqli almashtirish matritsasi belgilangan.

2. Uch karrali Riman integralining ta'rifi.

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^3$ kublanuvchi to'plam bo'lsin. Bu to'plamning $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi deb quyidagi uch shartni:

- 1) har bir E_k to'plam kublanuvchi bo'lsin;
- 2) E_k to'plamlar o'zaro kesishmasin;
- 3) E_k to'plamlarning birlashmasi E to'plamga teng bo'lsin;

qanoatlantiruvchi qismaniy to'plamlarining chekli sondagi oilasiga aytmiz.

E_k to'plamining *diametri* deb

$$d(E_k) = \sup_{x \in E_k, y \in E_k} |x - y|$$

ko'rinishdagi musbat songa aytiladi.

$d(E_k)$ sonlarning eng kattasiga P bo'linishning $d(P)$ diametri deyimiz.

Faraz qilaylik, E da aniqlangan va haqiqiy qiymat qabul qiluvchi ixtiyoriy $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tanlab,

$$\sigma_P(f, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot |E_k|. \quad (13.7.4)$$

integral yig'indini tuzamiz.

Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, diametri $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $P = \{E_k\}$ bo'linish uchun, $\xi_k \in E_k$ nuqtalarning qanday tanlanishidan qat'iy nazar, quyidagi

$$|\sigma_P(f, \{\xi_k\}) - I| < \varepsilon$$

baho o'rinli bo'lsa, I soni (13.7.4) integral yig'indilarning $d(P) \rightarrow 0$ dagi limiti deyiladi.

Ta'rif. Agar f funksiyaning (13.7.4) integral yig'indilarining $d(P) \rightarrow 0$ da limiti mavjud bo'lsa, bu funksiya E da Riman bo'yicha integrallanuvchi deb ataladi. Bu limit f funksiyaning E bo'yicha uch karrali Riman integrali deyiladi va

$$I = \iiint_E f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

ko'rinishda belgilanadi.

Bu belgilash bilan bir qatorda matematik adabiyotlarda yana

$$I = \int_E f(x) dx$$

belgilash ham ishlatiladi, bunda integralning uch karrali ekani E to'plamning uch o'lchovli kublanuvchi jism ekanidan bilinadi.

Bunda f funktsiya *integral ostidagi funktsiya* va kublanuvchi E jism esa, *integrallash sohasi* deb ataladi.

3. Darbu nazariyasi. Uch karrali Riman integralining mavjudligini samarali aniqlash maqsadida Darbu nazariyasi quriladi.

Darbu nazariyasini qurishda avval berilgan funktsiya kublanuvchi to'plamlar xarakteristik funktsiyalarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat sodd funktsiya bo'lgan hol qaraladi. Boshqacha aytganda, agar $\omega(x, M)$ ixtiyoriy $M \subset E$ to'planning (13.2.2) tenglik bilan aniqlangan xarakteristik funktsiyasi bo'lsa, berilgan funktsiyamiz

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \omega(x, E_k)$$

ko'rinishda bo'lsin, deb faraz qilinadi. Bunday funktsiya uchun Riman integrali (13.3.1) kabi aniqlanadi.

So'ngra kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^3$ to'plamda ixtiyoriy chegaralangan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funktsiyani qaraymiz. Istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linish uchun

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in E_k} f(x)$$

belgilash kirirtib, mos ravishda Darbuning quyi funktsiyasi va Darbuning yuqori funktsiyasi deb ataluvchi, quyidagi ikki sodd funktsiyani aniqlaymiz:

$$h(x, P) = \sum_{k=1}^n m_k \omega(x, E_k)$$

va

$$H(x, P) = \sum_{k=1}^n M_k \omega(x, E_k).$$

Ravshanki, istalgan P bo'linish uchun quyidagi

$$h(x, P) \leq f(x) \leq H(x, P)$$

baho o'rinli.

Endi, xuddi ikki o'ldhovli holdagidek, mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilarini kiritamiz:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot |E_k|, \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot |E_k|.$$

Bevosita sodda funksiyalarning ta'rifidan ((13.3.1) ga qarang) Darbuning quyi funksiyasidan olingan integral Darbuning quyi yig'indisiga va Darbuning yuqori funksiyasidan olingan integral esa, Darbuning yuqori yig'indisiga tengligi kelib chiqadi.

Darbuning quyi integrali

$$\underline{I}(f) = \sup_P s(f, P)$$

kabi, yuqori integrali esa,

$$\overline{I}(f) = \inf_P S(f, P)$$

kabi aniqlanadi.

Darbuning quyi va yuqori yig'indilari xossalaridan

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$$

munosabat kelib chiqadi. Bu baho, xususan, quyi va yuqori integral-lar to'g'ri nomlanganini ko'rsatadi.

Agar

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

tenglik bajarilsa, f funksiyani Darbu ma'nosida integrallanuvchi deymiz.

Navbatdagi *Darbuning asosiy lemmasi* o'rinli:

Faraz qilaylik, kublanuvchi E to'plamda chegaralangan f funksiya berilgan bo'lsin. U holda, Darbu yuqori yig'indilarining limiti Darbuning yuqori integraliga va Darbuning quyi yig'indilarining limiti Darbuning quyi integraliga teng bo'ladi.

Bundan so'ng chegaralangan funksiyaning Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun uning Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli ekani isbotlanadi.

Bevosita Darbu nazariyasidan quyidagi Riman bo'yicha integral-lanish kriteriysi kelib chiqadi:

berilgan f funksiyaning kublanuvchi E to'plamda Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham E to'plamining shunday $\{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi topilib, quyidagi

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, E_k) |E_k| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir, bu yerda $\omega(f, E_k)$ orqali f funksiyaning E_k qismiy to'plamdagi tebranishi belgilangan.

Yuqorida keltirilgan barcha tasdiqlar isboti ikki o'zgaruvchili holdan farq qilmaydi.

4. Uch karrali integral xossalari. Uch karrali integral ham xuddi ikki karrali integral kabi xossalarga ega. Bu xossalardan eng asosiylarini navbatdagi uchta tasdiqqa keltiramiz.

13.7.2 - tasdiq (integralning chiziqliligi). Agar f va g funksiyalar kublanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, har qanday λ va μ haqiqiy sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiya ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_E [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_E f(x) dx + \mu \int_E g(x) dx \quad (13.7.5)$$

tenglik bajariladi.

13.7.3 - tasdiq (integralning additivligi haqida). Faraz qilaylik, E_1 va E_2 kublanuvchi to'plamlar bo'lib, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ bo'lsin. Bundan tashqari, f funksiya $E = E_1 \cup E_2$ to'plamda aniqlangan va chegaralangan bo'lsin.

i) Agar f funksiya E_1 va E_2 to'plamlarda integrallanuvchi bo'lsa, u E da ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx \quad (13.7.6)$$

tenglik bajariladi.

ii) Agar f funksiya E da integrallanuvchi bo'lsa, u ham E_1 da, ham E_2 da integrallanuvchi bo'lib, (13.7.6) tenglik bajariladi.

13.7.4 - tasdiq (integralning monotonligi haqida). Agar f va g funksiyalar kublanuvchi E to'plamda integrallanuvchi bo'lib, E da $f(x) \leq g(x)$ baho o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx \quad (13.7.7)$$

tengsizlik bajariladi.

Bu tasdiqlarning to'g'riligi xuddi ikki o'zgaruvchili holdagidek isbotlanadi. Bunda isbot ikki o'zgaruvchili holdagi isbotni deyarli so'zma-so'z qaytarishdan iborat bo'ladi. Bu fikrimizning tasdiqi sifatida uch karrali integrallarni kam o'lchovli takroriy integrallarga keltirish haqidagi tasdiqni isboti bilan keltiramiz.

13.7.1 - teorema. Faraz qilaylik, f funksiya $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ parallelepipedda integrallanuvchi bo'lib, $[a_3, b_3]$ kesmaning istalgan x_3 nuqtasi uchun

$$I(x_3) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \quad (13.7.8)$$

ikki karrali integral mavjud bo'lsin.

U holda $I(x_3)$ funksiya $[a_3, b_3]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_Q f(x) dx = \int_{a_3}^{b_3} I(x_3) dx_3 \quad (13.7.9)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar istalgan (yopiq yoki ochiq) regulyar $Q_0 \subset P$ parallelepipedning xarakteristik funksiyasini olsak, (13.7.9) tenglikning

chap va o'ng tarafini to'g'ridan-to'g'ri hisoblash yordamida, bu tenglikni o'rinli ekanini ko'rsatish mumkin. Aniqrog'i, tenglikning ikki tarafi ham Q_0 ning hajmiga, ya'ni $|Q_0|$ ga teng.

Bundan chiqdi, isbotlanayotgan tenglik bunday funksiyalarning istalgan chekli sondagi chiziqli kombinatsiyasi uchun ham o'rinli bo'ladi.

Endi berilgan Q parallelepipedning, koordinatalar o'qlariga perpendikulyar tekisliklar yordamida Q_k parallelepipedlarga bo'lish natijasida hosil bo'lgan, P bo'linishni qaraymiz. U holda, (13.7.9) formula P bo'linishga mos keluvchi Darbuning quyi $h(x, P)$ va yuqori $H(x, P)$ funksiyalari uchun o'rinli bo'ladi.

Quyidagi

$$\varphi(x_3) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} h(x_1, x_2, x_3, P) dx_1 dx_2,$$

$$\psi(x_3) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} H(x_1, x_2, x_3, P) dx_1 dx_2$$

belgilashlarni kiritaylik.

Ravshanki,

$$h(x, P) \leq f(x) \leq H(x, P),$$

bundan chiqdi,

$$\varphi(x_3) \leq I(x_3) \leq \psi(x_3). \quad (13.7.10)$$

Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, φ va ψ funksiyalar $[a_3, b_3]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, ulardan olingan integrallar mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilariga teng:

$$\int_{a_3}^{b_3} \varphi(x_3) dx_3 = s(f, P), \quad \int_{a_3}^{b_3} \psi(x_3) dx_3 = S(f, P). \quad (13.7.11)$$

Berilgan f funksiya integrallanuvchi bo'lgani sababli, (13.7.11) ga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham berilgan parallelepipedning

yuqorida aniqlangan shunday P bo'linishini topish mumkinki, bunda

$$\int_{a_3}^{b_3} [\psi(x_3) - \varphi(x_3)] dx_3 = S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon \quad (13.7.12)$$

baho o'rinli bo'ladi.

U holda, 13.3.4 - teoremadan $I(x_3)$ funksiyaning $[a_3, b_3]$ kesmada integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. Shunday ekan, (13.7.10) tengsizlikni integrallab, (13.7.11) ga ko'ra, quyidagi

$$s(f, P) \leq \int_{a_3}^{b_3} I(x_3) dx_3 \leq S(f, P)$$

qo'sh tengsizlikni olamiz.

Bundan, Darbuning quyi $\underline{I(f)}$ va yuqori $\overline{I(f)}$ integrallari ta'rifini hisobga olib,

$$s(f, P) \leq \underline{I(f)} \leq \int_{a_3}^{b_3} I(x_3) dx_3 \leq \overline{I(f)} \leq S(f, P)$$

bahoga ega bo'lamiz.

(13.7.12) bahoga asosan, bu tengsizliklarni chekki hadlari bir-biridan ε dan kichik songa farq qiladi. Bundan chiqdi, ε ixtiyoriyligiga ko'ra,

$$\underline{I(f)} = \int_{a_3}^{b_3} I(x_3) dx_3 = \overline{I(f)}.$$

Demak, talab qilingan (13.7.9) tenglik bajarilar ekan.

1 - eslatma. (13.7.8) va (13.7.9) tengliklar, odatda, quyidagi

$$\iiint_Q f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \iint_P f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \quad (13.7.13)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

2 - eslatma. 13.5.1 - va 13.7.1 - teoremlarni birgalikda qo'llasak,

$$\iiint_Q f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (13.7.14)$$

tenglikni olamiz.

Integrallash sohasi parallelepipeddan murakkabroq ko'rinishga ega bo'lganda ham uch karrali integralni takroriy integrallarga keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^3$ kublanuvchi to'plam bo'lib, Oz o'qiga proektsiyasi $[a, b]$ kesmadan iborat bo'lsin, bu yerda $a < b$. Bundan tashqari, $S(t)$ berilgan E to'plamini $z = t$ ($a \leq t \leq b$) tekislik bilan kesimining Oxy tekislikka proektsiyasi bo'lib, ya'ni

$$S(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, t) \in E\} \quad (13.7.15)$$

bo'lib, $[a, b]$ kesmadan olingan har bir t uchun $S(t)$ to'plam kvadratlanuvchi bo'lsin.

13.7.2 - teorema. Faraz qilaylik, f funktsiya E to'plamda integrallanuvchi bo'lib, istalgan $z \in [a, b]$ uchun

$$I(z) = \int_{S(z)} f(x, y, z) dx dy \quad (13.7.16)$$

integral mavjud bo'lsin.

U holda $I(z)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi va quyidagi

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} f(x, y, z) dx dy \quad (13.7.17)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. P simvoli bilan quyidagi

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

to'g'ri to'rtburchakni belgilab, uni shunday tanlaylikki, E to'plam $Q = P \times [a, b]$ parallelepipedning ichida yotsin.

Bunda, ravshanki, har bir $z \in [a, b]$ uchun $S(z) \subset P$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Berilgan f funksiyani butun Q parallelepipedga, E dan tashqari-da nolga teng qilib, davom ettiramiz va davom ettirilgan funksiyani yana f bilan belgilaymiz. Bunday aniqlangan f funksiya E da teorema shartiga ko'ra integrallanuvchi va uning $Q \setminus E$ to'ldiruvchisida esa, nolga teng bo'lgani uchun integrallanuvchi bo'ladi. Bundan chiqdi, integralning additivligiga ko'ra (13.7.4.i - tasdiqqa qarang), f funksiya Q da integrallanuvchi bo'lib,

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \quad (13.7.18)$$

tenglik bajariladi.

Xuddi yuqoridagidek mulohazalar yordamida har bir tayinlangan $z \in [a, b]$ uchun $f(x, y, z)$ funksiya (x, y) o'zgaruvchilar bo'yicha na faqat $S(z)$ to'plamda, balki P to'g'ri to'rtburchakda ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\iint_P f(x, y, z) dx dy = \iint_{S(z)} f(x, y, z) dx dy \quad (13.7.19)$$

tenglikning bajarilishini ko'rsatish mumkin.

Endi (13.7.18) va (13.7.19) integrallar qiymatlarini (13.7.13) formulaga qo'ysak, talab qilingan (13.7.17) tenglikni olamiz.

■

Eslatma. (13.7.17) tenglikdan Kavalieri prinsipi kelib chiqadi: agar E_1 va E_2 kublanuvchi jismlarning $S_1(z)$ va $S_2(z)$ kesimlari yuzi bir xil bo'lsa, ya'ni $|S_1(z)| = |S_2(z)|$ bo'lsa, u holda bu jismlar hajmi ham teng bo'ladi: $|E_1| = |E_2|$.

13.7.1 - misol. Agar $R > 0$ va $h > R$ bo'lsa, uch karrali

$$I_R(h) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} \quad (13.7.20)$$

integral hisoblansin.

Agar

$$S(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}, \quad -R \leq z \leq R,$$

desak, 13.7.2 - teoreмага ko'ra,

$$I_R(h) = \int_{-R}^R dz \iint_{S(z)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}.$$

Ichki integralni hisoblash uchun (13.6.21) qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. Natijada

$$\begin{aligned} \iint_{S(z)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} &= 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{R^2 - z^2}} = 2\pi \left(\sqrt{R^2 - 2zh + h^2} - h + z \right) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$I_R(h) = 2\pi \int_{-1}^1 \left(\sqrt{R^2 - 2zh + h^2} - h + z \right) dz =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3h} (R^2 - 2zh + h^2)^{3/2} - hz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=-R}^{z=R} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{1}{h}.$$

Eslatma. Butun dunyo tortishish qonuniga ko'ra, (13.7.20) integral radiusi R ga va zichligi 1 ga teng bo'lgan shar hosil qilgan gravitatsiya maydonining potensialiga teng. Bunda potensial shar markazidan h ga teng uzoqlikda yotgan nuqtada hisoblanayapti. Yuqorida keltirilgan hisoblashlar ko'rsatishicha, bu potensial, berilgan shar massasiga teng massali moddiy nuqta hosil qilgan, gravitatsiya potensialiga teng bo'lar ekan.

5. Uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.

Faraz qilaylik, kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ soha va bu sohada $x = \varphi(y)$ silliq vektor-funksiya bilan aniqlangan homeomorf akslantirish berilgan bo'lsin. Odatdagidek, agar har bir $\varphi_j(y)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, biz $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ vektor-funksiyani silliq deymiz.

Eslatib o'tamiz, $x = \varphi(y)$ vektor-funksiyaning Yakobi determinanti yoki *yakobiani* deb quyidagi

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \quad (13.7.21)$$

determinantga aytgan edik.

Bu formulaning chap tomonida yakobianning belgilashda ishlatilayotgan simvol yakobianni (y_1, y_2, y_3) nuqtani (x_1, x_2, x_3) nuqtaga o'tkazuvchi akslantirish bilan bog'liq ekaniga urg'u berayapti.

Akslantirish silliq bo'lgani uchun, u y nuqtaning yetarlicha kichik atrofida chiziqli akslantirishdan kam farq qiladi va bundan tashqari, bunday akslantirishda uzayish koeffitsienti y nuqtadagi yakobian absolyut qiymatiga teng bo'ladi. Bunga mos ravishda kublanuvchi sohaning hajmi va demak, bu soha bo'yicha olingan integral ham o'zgaradi.

Navbatdagi tasdiq ikki karrali integrallar uchun isbotlangan 13.6.2 - teoremaning uch o'lchovli holidir.

13.7.3 - teorema (uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish haqida). Faraz qilaylik, uzluksiz diffrensiallanuvchi $\varphi: \Omega \rightarrow G$ akslantirish kublanuvchi Ω sohani kublanuvchi G sohaga homeomorf o'tkazsin.

Agar (13.7.21) yakobian Ω da chegaralangan bo'lsa, u holda G da integrallanuvchi har qanday f funksiya uchun

$$\int_G f(x) dx = \int_{\Omega} f[\varphi(y)] \cdot \left| \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right| dy \quad (13.7.22)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tomondagi integral mavjuddir.

Isbot 13.7.1 - tasdiqqa asoslangan bo'lib, xuddi 13.6.2 - teorema isboti singari olib boriladi.

6. Egri chiziqli koordinatalar.

1⁰. Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ soha o'zaro bir qiymatli ravishda $G \subset \mathbb{R}^3$ sohaga akslantirilsin. Ω soha nuqtalari koordinatalarini (ξ, η, ζ) orqali, G soha nuqtalari kordinatalarini esa, (x, y, z) orqali belgilaylik. Bu akslantirish silliq bo'lib,

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

$$y = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

$$z = \chi(\xi, \eta, \zeta)$$

ko'rinishga ega bo'lsin va bundan tashqari, mos yakobian noldan farqli bo'lsin:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \equiv \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \neq 0.$$

Bunda Ω sohasining $\{\xi = \text{const}\}$ ko'rinishdagi koordinata tekisliklari, G sohada joylashgan va koordinata sirtlari deb ataluvchi, qandaydir to'plamlarga akslanadi. Xuddi shu kabi, $\{\eta = \text{const}\}$ va $\{\zeta = \text{const}\}$ ko'rinishdagi tekisliklar ham, koordinata sirtlari deb ataluvchi, qandaydir to'plamlarga akslanadi. Akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lgani tufayli, G sohasining har bir nuqtasi orqali bittadan birinchi, bittadan ikkinchi hamda bittadan uchinchi ko'rinishdagi koordinata sirtlari o'tadi.

Shunday qilib, G sohasining (x, y, z) koordinatali har bir nuqtasi, shu nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb ataluvchi, uchta (ξ, η, ζ) son orqali o'zaro bir qiymatli aniqlanar ekan.

2⁰. Markazi Dekart koordinatalari boshida bo'lgan, (r, θ, φ) sferik koordinatalarni kiritamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (13.7.23)$$

deb belgilaylik.

Bunda r o'zgaruvchi $0 \leq r < \infty$ yarim to'g'ri chiziqda o'zgaradi, (θ, φ) burchak o'zgaruvchilarining o'zgarish sohasi esa,

$$\Sigma^2 = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad (13.7.24)$$

to'g'ri to'rtburchakdan iborat.

Agar $c > 0$ bo'lsa, $\{r = c\}$ koordinata sirti radiusi c bo'lgan sferadan iborat bo'lib, $c = 0$ bo'lganda bu sirt nuqtaga aylanadi.

$\{\theta = c\}$ koordinata sirti $0 < c < \pi$ bo'lganda doiraviy to'g'ri konusning sirti bilan, $c = 0$ bo'lganda z o'qining musbat nuri bilan

va $c = \pi$ bo'lganda esa, z o'qining manfiy nuri bilan ustma-ust tushadi.

Nihoyat, $\{\varphi = c\}$ koordinata sirti $0 \leq c < 2\pi$ shartni qanoatlantiruvchi barcha c larda chegarasi Oz o'qi bo'lgan yarim tekislikdan iborat.

(13.7.23) almashtirishning Yakobi matritsasi

$$A = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

ko'rinishga ega.

Shunday ekan, (13.7.23) almashtirishning yakobiani uchun quyidagi

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \det A = r^2 \sin \theta \quad (13.7.25)$$

tenglik o'rinli.

Sferik koordinatalar sistemasi Ω integrallash sohasi o'zining biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lgan hollarda ayniqsa samarali qo'llaniladi.

Eslatib o'tamiz, agar $A \in \Omega$ nuqta bilan ixtiyoriy $B \in \partial\Omega$ nuqtani tutashitiruvchi $[AB]$ kesmaning barcha ichki nuqtalari Ω sohada yotsa, Ω sohani A nuqtaga nisbatan **yulduzli** degan edik.

Masalan, ixtiyoriy qavariq soha o'zining har qanday nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'ladi.

Aytaylik, G soha o'zining biror nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lsin. Markazi shu nuqtada bo'lgan sferik koordinatalarini kiritamiz. Bu koordinatalarda G sohaning chegarasini $(\theta, \varphi) \in \Sigma^2$ da aniqlangan biror $R(\theta, \varphi)$ funksiya yordamida ushbu

$$\partial G = \{(x, y, z) : r = R(\theta, \varphi), (\theta, \varphi) \in \Sigma^2\} \quad (13.7.26)$$

ko'rinishda yozish murakin.

Faraz qilaylik, (r, θ, φ) sferik o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to'plam bo'lib, bu to'plam (13.7.23) funksiyalar sistemasi yordamida $G \subset \mathbb{R}^n$ sohaga homeomorf akslantirilsin. Agar $f(x, y, z)$ funksiya G sohada aniqlangan bo'lsa, f funksiya va (13.7.23) almash-tirishning kompozitsiyasi Ω da aniqlangan funksiya bo'ladi. Biz bu funksiyani $f(r, \theta, \varphi)$ simvoli orqali belgilaymiz.

Ravshanki, agar $R(\theta, \varphi)$ funksiya uzluksiz bo'lsa,

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < R(\theta, \varphi), (\theta, \varphi) \in \Sigma^2\}, \quad (13.7.27)$$

soha (r, θ, φ) o'zgaruvchilar fazosida kublanuvchi bo'ladi.

(13.7.25) va 13.7.3 - teoremadan navbatdagi tasdiq kelib chiqadi.

13.7.5 - tasdiq. Faraz qilaylik, (13.7.27) soha (13.7.23) funksi-yalar sistemasi yordamida (13.7.26) ko'rinishdagi chegaraga ega kub-lanuvchi $G \subset \mathbb{R}^n$ sohaga akslansin. Agar $f(x, y, z)$ funksiya G so-hada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(r, \theta, \varphi)$ funksiya Ω sohada integral-lanuvchi bo'lib,

$$\int_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R(\theta, \varphi)} f(r, \theta, \varphi) r^2 dr \quad (13.7.27)$$

tenglik bajariladi.

Eslatma. Agar G_0 berilgan G sohasining quyidagi

$$\Phi = \{\alpha_1 < \varphi < \alpha_2, \quad \beta_1 < \theta < \beta_2\}$$

fazoviy burchak ichidagi qismi bo'lsa, u holda

$$\int_{G_0} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\varphi \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \theta d\theta \int_0^{R(\theta, \varphi)} f(r, \theta, \varphi) r^2 dr \quad (13.7.28)$$

tenglik o'rinli.

13.7.2 - misol. Ushbu

$$B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

shar hajmi topilsin.

Ravshanki, bu sharning $\{0 < \varphi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2\}$ ko'rinishdagi birinchi oktantada joylashgan qismining hajmini topish yetarli. U holda, (13.7.28) formulaga ko'ra,

$$|B_R| = 8 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3^o. Ko'pincha uch o'lchovli matematik masalalarni yechishda silindrik koordinatalar sistemasidan foydalaniladi. Bu shunday koordinatalar sistemasiki, bunda (x, y, z) Dekart koordinatalarining birinchi ikkitasini, ya'ni (x, y) ni (ρ, φ) qutb koordinatalariga o'zgartirib, z koordinatasini esa, o'zgartirib qoldiramiz. (ρ, φ, z) silindrik koordinatalar sistemasiga o'tish formulasi, odatda, quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z. \end{cases} \quad (13.7.29)$$

Bunda ρ o'zgaruvchi $0 \leq \rho < \infty$ yarim to'g'ri chiziqda, φ burchak o'zgaruvchisi $0 \leq \varphi < 2\pi$ yarim intervalda va nihoyat z o'zgaruvchi $\mathbb{R}$ sonlar o'qida o'zgaradi.

$\{\rho = c\}$ koordinata sirti $c > 0$ bo'lganda, o'qi Oz koordinatalar o'qidan iborat, to'g'ri doiraviy silindr sirti bilan, $c = 0$ bo'lganda esa, Oz o'qining o'zi bilan ustma-ust tushadi.

$\{\varphi = c\}$ koordinata sirti $0 \leq c < 2\pi$ shartni qanoatlantiruvchi barcha c larda, chegarasi Oz o'qidan iborat, yarim tekislik bilan, $\{z = c\}$ koordinata sirti esa, Oz o'qiga ortogonal tekislik bilan ustma-ust tushadi.

(13.7.29) almashtirishning Yakobi matritsasi

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'lib, uning determinanti, ya'ni (13.7.29) almashtirishning yakobiani oson hisoblanadi:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \det J = \rho. \quad (13.7.30)$$

13.7.3 - misol. Agar G soha

$$G = \{(x, y, z) : 0 \leq \rho < R, -h/2 < z < h/2\}$$

silindrdan iborat bo'lsa,

$$I = \int_G (x^2 + z^2) dx dy dz \quad (13.7.31)$$

integral hisoblansin.

Silindrik koordinatalar sistemasiga o'tib,

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R (\rho^2 \cos^2 \varphi + z^2) \rho d\rho = I_1 + I_2$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Oson hisoblashlar yordamida

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R \rho^3 d\rho = \pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4}$$

va

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_0^R \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{R^2}{2}$$

tengliklarni olamiz.

Demak,

$$I = \pi R^2 h \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right).$$

Eslatma. (13.7.31) integral zichligi 1 ga teng bo'lgan bir jinsli silindrning Oy o'qiga nisbatan inersiya momentiga teng. E'tibor bering, Oy o'qi silindr massasi markazidan uning simmetriya o'qiga perpendikulyar bo'lib o'tadi. Ravshanki, bunday silindr massasi uning hajmiga teng, ya'ni

$$m = \pi R^2 h.$$

Bundan chiqdi, 13.7.3 - misolda topilgan inersiya momentini quyidagicha

$$I = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

13.8-§. n o'zgaruvchili funksiyalarni integrallash

1. n o'lchovli hajm ta'rifi.

$n > 3$ bo'lganda n o'zgaruvchili funksiya ham xuddi ikki va uch o'lchovli funksiya singari integrallanadi. Chunonchi, avval $\mathbb{R}^n$ fazosining istalgan to'plami uchun munosib ravishda o'lchov tushunchasini kiritib, uni n o'lchovli hajm deb nomlanadi va hajmga ega

to'plamni kublanuvchi deb ataladi. So'ngra qaralayotgan funksiyaning aniqlanish sohasini mayda kublanuvchi qismaniy sohalarga bo'lib, integral yig'indi tuziladi. Agar kublanuvchi qismaniy sohalarni cheksiz maydalashtirilganda integral yig'indilarining limiti mavjud bo'lsa, u holda funksiya integrallanuvchi deb e'lon qilinadi va bu limit berilgan funksiya dan olingan integral deb ataladi.

n o'lchovli hajm ta'rifi uch o'lchovli to'g'riburchakli parallelepiped hajmining tabiiy ta'rifiga, ya'ni parallelepiped tomonlarining uzunliklarini a, b, c desak, $V = abc$ formulaga asoslangan.

n o'lchovli regulyar parallelepiped deb

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$$

ko'rinishda aniqlangan $P \subset \mathbb{R}^n$ to'plamga aytamiz, bu yerda a_j va b_j haqiqiy sonlar $a_j < b_j$ shartni qanoatlantiradi. P parallelepipedning hajmi

$$|P| = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

formula bilan aniqlanadi.

Chekli sondagi P_k regulyar parallelepipedlarning birlashmasini, ya'ni

$$F = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_m$$

to'plamni ko'pyoqli jism deb ataymiz. Bunda, regulyar parallelepipedlarning istalgan ikkitasi faqat umumiy chegarasi bo'ylab kesishadi deb hisoblab, ko'pyoqli jism hajmi $|F|$ deb

$$|F| = \sum_{k=1}^m |P_k| = |P_1| + |P_2| + \dots + |P_m|$$

musbat songa aytamiz.

Bunday aniqlangan hajm ko'pyoqli jismi regulyar parallelepipedlarga qanday bo'linishiga bog'liq emasligini ko'rish qiyin emas. Bo'sh to'plamni ham hajmi nolga teng bo'lgan ko'pyoqli jism deb hisoblashga kelishib olamiz.

Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ fazosining chegaralangan E to'plami berilgan bo'lsin.

E to'plamining n o'lchovli quyi hajmi $|E|_*$ deb E da joylashgan P ko'pyoqli jismlar hajmining aniq yuqori chegarasiga aytamiz, ya'ni

$$|E|_* = \sup_{P \subset E} |P|.$$

E to'plamining n o'lchovli yuqori hajmi $|E|^*$ deb E ni o'z ichiga oluvchi Q ko'pyoqli jismlar hajmining aniq quyi chegarsiga aytamiz, ya'ni

$$|E|^* = \inf_{Q \supset E} |Q|.$$

Agar E to'plamning quyi hajmi yuqori hajmi bilan ustma-ust tushsa, bu to'plamni **kublanuvchi** deyimiz. Bunda

$$|B| = |B|_* = |B|^*$$

songa kublanuvchi E to'plamning **hajmi** deyiladi.

Bevosita kublanuvchi to'plam ta'rifidan navbatdagi tasdiq kelib chiqadi:

$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday E da joylashgan ko'pyoqli P jism va E ni o'z ichiga oluvchi ko'pyoqli Q jism topilib, ular uchun

$$|Q| - |P| < \varepsilon$$

bahoning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Xuddi ikki va uch o'zgaruvchili holdagidek, bundan quyidagi tasdiq kelib chiqadi: $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun uning ∂E chegarasi hajmining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

n o'lchovli to'plam hajmi ham xuddi uch o'lchovli hajm kabi xossalarga ega. Biz $\mathbb{R}^n$ fazosini chiziqli almashtirish bilan bog'liq xossanigina keltiramiz.

13.8.1 - tasdiq. $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ chiziqli almashtirish kublanuvchi E to'plamni, n o'lchovli hajmi

$$|AE| = |E| \cdot |\det A|$$

bo'lgan, kublanuvchi AE to'plamga akslantiradi; bu yerda A simvol bilan A chiziqli almashtirishning matritsasi belgilangan.

2. n o'lchovli Riman integralining ta'rif.

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^3$ kublanuvchi to'plam bo'lsin. Bu to'plamning $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi deb quyidagi uch shartni:

1) har bir E_k to'plam kublanuvchi bo'lsin;

2) E_k to'plamlar o'zaro kesishmasin;

3) E_k to'plamlarning birlashmasi E to'plam bilan ustma-ust tushsin;
qanoatlantiruvchi qisman to'plamlarning chekli sondagi oilasiga ayta-miz.

E_k to'plamining *diametri* deb

$$d(E_k) = \sup_{x \in E_k, y \in E_k} |x - y|$$

ko'rinishdagi musbat songa aytiladi.

$d(E_k)$ sonlarning eng kattasiga P bo'linishning $d(P)$ *diametri* dey-miz.

Faraz qilaylik, E da aniqlangan va haqiqiy qiymat qabul qiluvchi ixtiyoriy $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tanlab, quyidagi

$$\sigma_P(f, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot |E_k|. \quad (13.8.1)$$

integral yig'indini tuzamiz.

Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, diametri $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $P = \{E_k\}$ bo'linish uchun, $\xi_k \in E_k$ nuqtalarning qanday tanlanishidan qat'iy nazar, biror I soni bilan

$$|\sigma_P(f, \{\xi_k\}) - I| < \varepsilon$$

baho o'rinli bo'lsa, u holda I soni (13.8.1) integral yig'indilarning $d(P) \rightarrow 0$ dagi limiti deyiladi.

Ta'rif. Agar f funktsiyani (13.8.1) integral yig'indilarining $d(P) \rightarrow 0$ da limiti mavjud bo'lsa, u holda bu funktsiya E da Riman bo'yicha integrallanuvchi deb ataladi

Bu limit f funktsiyaning E bo'yicha n karrali Riman integrali deyiladi va

$$I = \int_E f(x) dx.$$

ko'rinishda belgilanadi.

f funktsiya integral ostidagi funktsiya va kublanuvchi E jism esa, integrallash sohasi deb ataladi.

n karrali integralning mavjudlik masalasi Darbu nazariyasi yordamida yechiladi. Bu nazariya xuddi ikki yoki uch o'lchovli integral-lar holidagidek quriladi.

3. n karrali Riman integrali xossalari.

Yuqorida kiritilgan n karrali Riman integrali xuddi ikki va uch karrali integrallar singari xossalarga ega. Chunonchi, u integral ostidagi funktsiyaga chiziqli bog'liq va integrallanish sohasining additiv funktsiyasidir.

13.8.2 - tasdiq (integralning chiziqliligi). Agar f va g funktsiyalar kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, har qanday haqiqiy λ va μ sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funktsiya ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_E [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_E f(x) dx + \mu \int_E g(x) dx \quad (13.8.2)$$

tenglik bajariladi.

13.8.3 - tasdiq (integralning additivligi haqida). Faraz qilaylik, $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ va $E_2 \subset \mathbb{R}^n$ kublanuvchi to'plamlar bo'lib, $E_1 \cap$

$E_2 = \emptyset$ bo'lsin. Bundan tashqari, f funksiya $E = E_1 \cup E_2$ to'plamda aniqlangan va chegaralangan bo'lsin.

i) Agar f funksiya E_1 va E_2 to'plamlarda integrallanuvchi bo'lsa, u E da ham integrallanuvchi bo'lib, ushbu

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx \quad (13.8.3)$$

tenglik bajariladi.

ii) Agar f funksiya E da integrallanuvchi bo'lsa, u ham E_1 da, ham E_2 da integrallanuvchi bo'lib, (13.8.3) tenglik bajariladi.

13.8.4 - tasdiq (integralning monotonligi haqida). Agar f va g funksiyalar kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, E da $f(x) \leq g(x)$ baho o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx \quad (13.8.4)$$

tengsizlik bajariladi.

Bu tasdiqlarning to'g'riligi xuddi ikki va uch o'zgaruvchili holdagidek isbotlanadi.

n karrali integralni kamroq karrali integrallar yordamida hisoblash navbatdagi tasdiq yordamida amalga oshiriladi.

Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uchun $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ deymiz va $x = (\tilde{x}, x_n)$ deb belgilaymiz. Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ kublanuvchi to'plam bo'lib, uning Ox_n o'qiga proeksiyasi $[a, b]$ kesmadan iborat bo'lsin, bunda, albatta, $a < b$.

Istalgan $t \in [a, b]$ uchun

$$S(t) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : (\tilde{x}, t) \in E\}$$

deb belgilaymiz.

$[a, b]$ kesmadan olingan har bir t da $S(t)$ to'plam $(n-1)$ o'lchovli kublanuvchi to'plam bo'lsin, deb faraz qilamiz.

13.8.5 - tasdiq. Faraz qilaylik, f funktsiya E to'plamda integral-lanuvchi bo'lib, har bir $t \in [a, b]$ uchun

$$I(t) = \int_{S(t)} f(\tilde{x}, t) d\tilde{x}$$

integral mavjud bo'lsin.

U holda $I(t)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_E f(x) dx = \int_a^b dt \int_{S(t)} f(\tilde{x}, t) d\tilde{x}$$

tenglik bajariladi.

4. n karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.

Faraz qilaylik, kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soha va bu sohada $x = \varphi(y)$ silliq vektor-funktsiya bilan aniqlangan $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorf akslantirish berilgan bo'lsin. Odatdagidek, agar har bir $\varphi_j(y)$ funktsiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, biz $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ vektor-funktsiyani silliq deymiz.

Eslatib o'tamiz, $x = \varphi(y)$ vektor-funktsiyaning Yakobi determinanti yoki *yakobiani* deb quyidagi

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (13.8.5)$$

bo'lsin deymiz.

Bu almashtirishda r ning o'zgarish sohasi $0 < r < \infty$ yarim to'g'ri chiziqdan va θ burchak o'zgaruvchilarining o'zgarish sohasi

$$\Sigma^{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_k \leq \pi, k = 2, 3, \dots, n-1\} \quad (13.8.8)$$

to'plamdan iborat.

Endi $\theta_n = r$ deb, (13.8.7) almashtirish yakobianini, ya'ni $\left\| \frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} \right\|$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, matritsa determinantini hisoblaymiz.

Agar (13.8.7) tengliklarni differensiallasak, $1 \leq j \leq k \leq n-1$ lar uchun

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = r \cos \theta_{j-1} \sin \theta_j \cdots \cos \theta_k \cdots \sin \theta_{n-1}$$

munosabatlar o'rinli ekanini ko'ramiz.

Demak, Yakobi matritsasining bosh diagonal va undan yuqorida to oxirgi ustungacha yotgan elementlarini

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = x_j \operatorname{ctg} \theta_k, \quad 1 \leq j \leq k \leq n-1,$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar (13.8.7) tengliklarni $k = (j-1)$ -o'zgaruvchi bo'yicha differensiallasak,

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_{j-1}} = -r \sin \theta_{j-1} \sin \theta_j \cdots \sin \theta_{n-1}, \quad 2 \leq j \leq n,$$

tengliklarga kelamiz.

Bundan chiqdi, bosh diagonal tagidagi yon diagonal elementlari

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_{j-1}} = -x_j \operatorname{tg} \theta_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq n,$$

ko'rinishga ega.

Ravshanki, Yakobi matritsasining $k < j-1$ bo'lgandagi (yani qayd qilingan yon diagonal tagidagi) barcha elementlari nolga teng, ya'ni

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = 0, \quad 1 \leq k < j-1.$$

Demak, Yakobi matritsasining birinchi $n-1$ ta ustun elementlari

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = \begin{cases} 0, & \text{agar } k < j-1 \text{ bo'lsa,} \\ -x_j \operatorname{tg} \theta_{j-1}, & \text{agar } k = j-1 \text{ bo'lsa,} \\ x_j \operatorname{ctg} \theta_k, & \text{agar } k > j-1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lar ekan.

Nihoyat, belgilashimizga ko'ra, oxirgi ustun elementlari uchun (ya'ni $k = n$ bo'lganda)

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_n} \equiv \frac{\partial x_j}{\partial r} = \frac{x_j}{r}$$

tengliklar o'rinni.

Shunday qilib, (13.8.7) almashtirishning Yakobi matritsasi uchun quyidagi

$$\left\| \frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} \right\| = \left\| \begin{array}{cccccc} x_1 \operatorname{ctg} \theta_1 & x_1 \operatorname{ctg} \theta_2 & \dots & x_1 \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_1/r \\ -x_2 \operatorname{tg} \theta_1 & x_2 \operatorname{ctg} \theta_2 & \dots & x_2 \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_2/r \\ 0 & -x_3 \operatorname{tg} \theta_2 & \dots & x_3 \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_3/r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_{n-1}/r \\ 0 & 0 & \dots & -x_n \operatorname{tg} \theta_{n-1} & x_n/r \end{array} \right\| \quad (13.8.9)$$

tenglikni olamiz.

Endi (13.8.9) matritsaning determinantini hisoblaymiz. Buning uchun yordamchi $(n \times n)$ lik, elementlari

$$a_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{agar } k < j-1 \text{ bo'lsa,} \\ -\operatorname{tg}^2 \theta_{j-1}, & \text{agar } k = j-1 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } k > j-1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lgan,

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -\operatorname{tg}^2 \theta_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -\operatorname{tg}^2 \theta_2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\operatorname{tg}^2 \theta_{n-1} & 1 \end{vmatrix} \quad (13.8.10)$$

matritsani kiritamiz.

13.8.1 - lemma. *Quyidagi tenglik o'rinli:*

$$\det A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos^2 \theta_k}. \quad (13.8.11)$$

Isbot. (13.8.10) matritsa determinantini hisoblash uchun uni oxirgi satr bo'yicha yoyamiz. Ravshanki, bunda oxirgi satr va oxirgi ikki ustundan birini o'chirish bilan hosil bo'lgan ikki matritsa ustina-ust tushib, A_{n-1} matritsaga teng bo'ladi. Bundan chiqdi, mos algebratik to'ldiruvchilar faqat ishora bilan farq qiladi. Natijada

$$\begin{aligned} \det A_n &= -(-\operatorname{tg}^2 \theta_{n-1}) \cdot \det A_{n-1} + 1 \cdot \det A_{n-1} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta_{n-1}} \cdot \det A_{n-1} \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan, induksiya bo'yicha, talab qilingan (13.8.11) tenglikni olamiz.

■

13.8.1 - teorema. (13.8.7) almashtirishning $J(r, \theta)$ yakobiani quyidagi

$$J(r, \theta) = \frac{\partial x}{\partial(r, \theta)} = r^{n-1} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-1} \quad (13.8.12)$$

ko'rinishga ega.

Isbot. Agar $\theta_n = r$ desak, yuqorida (13.8.7) almashtirish yakobi-
ani (13.8.9) matritsadan iborat ekanini ko'rdik. Bu matritsaning j -
satridan x_j ko'paytuvchini va $k < n$ bo'lganda k -ustundan $\text{ctg } \theta_k$
ko'paytuvchini so'ngra oxirgi ustundan $\frac{1}{r}$ ko'paytuvchini matritsa-
dan tashqariga chiqarsak, biz (13.8.10) matritsaga kelishimizni tek-
shirish qiyin emas.

Demak, (13.8.9) va (13.8.10) matritsalarining determinantlari
ushbu

$$J(r, \theta) = (x_1 x_2 \cdots x_n) \cdot (\text{ctg } \theta_1 \text{ctg } \theta_2 \cdots \text{ctg } \theta_{n-1}) \cdot \frac{1}{r} \cdot \det A_n$$

munosabat bilan bog'langan ekan.

Bundan, 13.8.7 - lemmaga ko'ra,

$$J(r, \theta) = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{r \cdot (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-1}) \cdot (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1})} \quad (13.8.13)$$

tenglikni olamiz.

Agar

$$\Phi(\theta) = \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \cdots \sin^{n-2} \theta_{n-1} \quad (13.8.14)$$

desak, (13.8.7) ga ko'ra,

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdots x_n &= \\ &= r^n \cdot (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-1}) \cdot (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1}) \cdot \Phi(\theta) \end{aligned} \quad (13.8.15)$$

tenglik bajarilishini tekshirish qiyin emas.

Endi (13.8.15) ni (13.8.13) kasrning suratiga qo'ysak,

$$J(r, \theta) = r^{n-1} \Phi(\theta)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik, (13.8.14) ni hisobga olsak, talab
qilingan (13.8.12) tenglik bilan ustma-ust tushadi.

Ω integrallash sohasi o'zining biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lgan hollarda sferik koordinatalar sistemasi ayniqsa samarali qo'llaniladi.

Haqiqatan, markazi ana shu nuqtada bo'lgan sferik koordinatalar sistemasini kiritaylik. U holda Ω soha chegarasini barcha $\theta \in \Sigma^{n-1}$ nuqtalarda aniqlangan biror $R(\theta)$ funktsiya yordamida quyidagi

$$\partial\Omega = \{(r, \theta) : r = R(\theta), \theta \in \Sigma^{n-1}\} \quad (13.8.16)$$

ko'riinishda yozish mumkin.

Faraz qilaylik, (13.8.7) funktsiyalar sistemasi (r, θ) sferik o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi bo'lgan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $E \subset \mathbb{R}^n$ sohaga homeomorf akslantirsin. Agar $f(x)$ funktsiya E da aniqlangan bo'lsa, u holda f va (13.8.7) akslantirish kompozitsiyasi Ω da aniqlangan funktsiya bo'ladi. Biz bu funktsiyani $f(r, \theta)$ simvol bilan belgilay-miz.

13.8.1 - teorema va 13.8.6 - tasdiq yordamida biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lgan sohalar bo'yicha integralni hisoblash uchun quyidagi qulay formulaga ega bo'lamiz.

Natija. Faraz qilaylik, chegarasi (13.8.16) munosabat bilan aniqlangan, kublanuvchi Ω soha (13.8.7) funktsiyalar sistemasi orqali kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^n$ sohaga homeomorf akslantirilsin. Agar $f(x)$ funktsiya E sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(r, \theta)$ funktsiya Ω sohada integrallanuvchi bo'lib, quyidagi

$$\int_E f(x) dx = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \cdots \int_0^{\pi} \Phi(\theta) d\theta_{n-1} \int_0^{R(\theta)} f(r, \theta) r^{n-1} dr \quad (13.8.17)$$

tenglik bajariladi.

13.8.1 - misol To'rt o'lchovli

$$B_4(R) = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| \leq R\}.$$

shar hajmi topilsin.

Buning uchun (13.8.17) formulada $f(x) \equiv 1$ deyish yetarli:

$$\begin{aligned} |B_4(R)| &= \int_{B_4(R)} dx = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \int_0^R r^3 dr = \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi^2 R^4}{2}. \end{aligned}$$

1 - eslatma. Agar $\Sigma_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (13.8.8) tenglik bilan aniqlangan to'plam bo'lsa,

$$\omega_n = \int_{\Sigma^{n-1}} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \quad (13.8.18)$$

belgilashni kiritib (bu kattalik 17 - bobda hisoblangan; (17.3.11) formulaga qarang), n o'lchovli

$$B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$$

shar hajmi uning radiusi bilan qanday bog'langanini aniqlaymiz.

(13.8.17) ga ko'ra,

$$\begin{aligned} |B_n(R)| &= \int_{B_n(R)} dx = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \int_0^R r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

Bundan, (13.8.18) belgilashga ko'ra, talab qilingan

$$|B_n(R)| = \frac{\omega_n}{n} R^n \quad (13.8.19)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

2 - eslatma. (13.8.19) formulaga asosan, shar hajmining radiusiga bog'liqligi o'zgaruvchilar soni oshgan sari sezilarliroq bo'lar ekan. Masalan, shar radiusi ikki marta oshganda uch o'lchovli shar hajmi 8 marta oshsa, 10 o'lchovli shar hajmi esa, 1000 martadan ko'p oshar ekan.

Umuman, $(1 + \epsilon)$ radiusga ega bo'lgan n o'lchovli shar hajmi radiusi birga teng bo'lgan shar hajmidan $(1 + \epsilon)^n$ marta katta, ya'ni istalgancha kichik $\epsilon > 0$ uchun n ning oshishi bilan hajm istalgancha katta bo'lishi mumkin. Bundan chiqdi, ko'p o'lchovli sharning asosiy massasi uning chegarasi atrofida to'plangan bo'lar ekan.

Xulosa. Ushbu bobda o'rganilgan to'plamlarni o'lchash sxemasi birinchi marta Fransuz matematigi K. Jordan tomonidan taklif qilingan. Shuning uchun bu o'lchov Jordan o'lchovi deyiladi. Shunday qilib, yassi kvadratlanuvchi shaklning Jordan o'lchovi uning yuzidan, n o'lchovli kublanuvchi jismning Jordan o'lchovi esa, jismning n o'lchovli hajmidan iborat bo'lar ekan.

13.9-§. Misollar

1 - misol. Agar $D = [0, 1] \times [0, 1]$ kvadrat bo'lsa, $\int_D xy \, dx \, dy$ integralni integral yig'indilari yordamida hisoblang. Xuddi shu integralni avval (13.5.5) formulani, so'ngra Nyuton-Leybnits formulasini qo'llab ham hisoblang.

Ko'rsatma. D sohaning bo'linishi sifatida tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lib, uzunligi $\frac{1}{k}$ ga teng bo'lgan kvadratchalarni va ξ_j sifatida esa, kvadratchalarning o'ng cho'qqilarini oling. Natijada

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^4} \sum_{i=1}^k i \sum_{j=1}^k j$$

tenglikni hosil qilib, limitni hisoblang.

2 - misol. Agar $D = [1, 2] \times [1, 3]$ to'g'ri to'rtburchak bo'lsa, D ning $x = 1 + \frac{i}{k}$, $y = 1 + \frac{2j}{k}$, ($i, j = \overline{0, k}$), bo'linishini olib, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D$, funksiyadan D soha bo'yicha olingan integral uchun Darbuning quyi va yuqori yig'indilarini tuzing. Bu yig'indilarning $k \rightarrow \infty$ dagi limitini hisoblang.

Ko'rsatma. D sohaning qayd etilgan bo'linishini $P = \{P_{i,j}\}$ deb belgilaylik, bunda $P_{i,j}$ tomonlari uzunligi $\frac{1}{k}$ va $\frac{2}{k}$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardir. Ravshanki, $|P_{i,j}| = \frac{2}{k^2}$ va $P_{i,j}$ da

$$f_{\min} = f\left(1 + \frac{i}{k}, 1 + \frac{2j}{k}\right), \quad f_{\max} = f\left(1 + \frac{i+1}{k}, 1 + \frac{2(j+1)}{k}\right).$$

Endi Darbu yig'indilarini tuzish va limitni hisoblash oddiy arifmetik amallar orqali amalga oshiriladi.

3 - misol. Agar $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 10\}$ bo'lsa, o'rta qiymat formulasidan foydalanib,

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

integralni 0,1 aniqlikda baholang.

Ko'rsatma. Maxrajdagi funksiyani $f(x, y)$ desak, ravshanki, $100 \leq f(x, y) \leq 102$. Endi 13.4.5 - teoremani qo'llash yetarli.

4 - misol. Agar D uchlari $O(0, 0)$, $A(2, 1)$ va $B(-2, 1)$ bo'lgan uchburchak bo'lsa,

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

integralni takroriy integrallarga keltiring.

Ko'rsatma. Integrallash sohasini ikki qismga bo'ling: $D = D_1 \cup D_2$, bu yerda

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, -\frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$$

va

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}.$$

Endi integralning additivlik xossasini e'tiborga olib, (13.3.6) formuladan foydalaning.

5 - misol. Quyidagi

$$\int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy$$

takroriy integralda integrallash sohasini aniqlang va integrallash tartibini o'zgartiring.

Ko'rsatma. Integrallash sohasini chizmada aniqlang. So'ngra, x argument 0 dan 1 gacha o'zgartganda y argument 0 dan 2 gacha o'zgarishini hisobga olib, integralni avval y bo'yicha, keyin x bo'yicha takroriy integral ko'rinishida yozing.

6 - misol. Agar D sohaning ∂D chegarasi $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ ($x > 0$, $y > 0$) tenglamalar bilan berilgan bo'lib, $f(t)$, $t > 0$, uzluksiz funksiya bo'lsa, $I = \iint_D f(xy) dx dy$ integralda o'zgaruvchilarni almashtirib, bir karrali integralga keltiring.

Ko'rsatma. Integralda $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ deb, o'zgaruvchilarni almashtiramiz. Ravshanki, bunda D soha $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$ to'g'ri to'rtburchakka diffeomorf akslanadi. Endi (13.6.8) formuladan foydalanish kifoya.

7 - misol. Agar $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$ bo'lsa, $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ integralni hisoblang.

Ko'rsatma. Agar integralda ρ, φ qutb koordinatalariga o'tsak, D sohaning ∂D chegarasi uchun $\rho^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = 1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Demak,

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Endi (13.6.24) formuladan foydalanib, hosil bo'lgan bir karrali integralni hisoblang.

8 - misol. Agar $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$ bo'lsa,

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

integralni hisoblang.

Ko'rsatma. Agar sferik koordinatalarga o'tsak,

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \cos \theta,$$

munosabatga ega bo'lamiz. Endi (13.7.27) formulani qo'llab, hosil bo'lgan bir karrali integralni hisoblang.

9 - misol. Agar $f(t)$, $t \geq 0$, uzluksiz funksiya bo'lsa, quyidagi

$$I(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^n$$

formulani isbotlang.

Ko'rsatma. Avval $n = 2$ deylik. U holda, ravshanki,

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d \left(\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^2. \end{aligned}$$

Endi umumiy holda matematik induksiya usulini qo'llash kifoya.

10 - misol. Agar $D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq t, 0 \leq x_j \leq x_{j-1}, j = \overline{2, n}, t > 0\}$ bo'lib, $f(\mathbf{x})$ funktsiya D sohada uzluksiz bo'lsa,

$$I(t) = \int_0^t dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(\mathbf{x}) dx_n = \int_0^t dx_n \int_{x_n}^t dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^t f(\mathbf{x}) dx_1$$

tenglikni isbotlang.

Ko'rsatma. Integrallash sohasini $D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_n \leq t, x_{j+1} \leq x_j \leq t, j = \overline{n-1, 1}\}$ ko'rinishda yozib, 13.5.2 - teoremadan foydalanish kifoya.

14-bob. Karrali xosmas integrallar

14.1-§. $\mathbb{R}^n$ fazosi bo'yicha integrallash

1. Xosmas integral ta'rifi. Amaliyotda muhim bo'lgan masalalarni yechish uchun integralni chegaralangan soha bo'yicha hisoblashni bilish yetarli. Ammo nazariy izlanishlarda chegaralanmagan soha, xususan, butun fazo bo'yicha ham integrallashga to'g'ri keladi. Qizg'i shundaki, bunda olingan natijalar ko'pincha amaliy masalalarni yechishda ham foydali bo'ladi.

Avval $\mathbb{R}^n$ fazosida funksiyani integrallash masalasini ko'rib chiqaylik. Ushbu paragrafda biz, bunga ba'zan alohida urg'u bermasdan, f funksiyani $\mathbb{R}^n$ fazosida aniqlangan va istalgan kublanuvchi ($n = 2$ bo'lganda kvadratlanuvchi) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada integrallanuvchi deb faraz qilamiz. Bunday funksiyalarni $\mathbb{R}^n$ da *lokal integrallanuvchi* deb ham ataymiz.

Bir o'zgaruvchilik holda, $\mathbb{R}$ to'g'ri chiziq bo'yicha integrallash masalasini yechishda, avval istalgan $[a, b]$ kesma bo'yicha integrallanib, so'ngra $a \rightarrow -\infty$ va $b \rightarrow +\infty$ deb, limitga o'tilgan edi. Boshqacha aytganda, $[a_k, b_k] \subset [a_{k+1}, b_{k+1}]$ va $\lim_{k \rightarrow \infty} [a_k, b_k] = \mathbb{R}$ xossalarga ega bo'lgan $[a_k, b_k]$ kesmalar ketma-ketligiga o'tilgan edi. Agar bunda hosil bo'lgan integrallar ketma-ketligi limitga ega bo'lsa, ana shu limit $\mathbb{R}$ to'g'ri chiziq bo'yicha olingan xosmas integral deb atalgandi.

Ko'p o'zgaruvchilik holda ham xuddi shu yo'lni tutishimiz mumkin. Tabiiyki, bunda

$$I(\Omega_k) = \int_{\Omega_k} f(x) dx \quad (14.1.1)$$

integrallar ketma-ketligini qarab, Ω_k sifatida kengayib borib, limiti $\mathbb{R}^n$ fazosini batamom to'ldiruvchi (biz *qamrab oluvchi* degan jumlani ishlatamiz) kublanuvchi sohalar ketma-ketligini olish kerak. Ammo, bir o'lchovli holdan farqli o'laroq, ko'p o'lchovli fazo fazoni qamrab oluvchi to'plamlar ketma-ketligiga ancha boy. Masalan, ikki o'lchovli holda tekislikni qamrab oluvchi to'plamlar ketma-ketligi sifatida markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi cheksizga intiluvchi doiralar ketma-ketligini olish mumkin. Xuddi shu singari, markazi koordinatalar boshida bo'lib, tomonlari uzunligi cheksizga intiluvchi kvadratlar ketma-ketligini ham olsa bo'ladi. Lekin, agar faqat shun-day ketma-ketliklar bilan cheklanib qolsak, biz bir qator muammolar-ga duch kelamiz. Masalan, shunday funksiya tuzish mumkinki, u uchun bu limitlardan biri mavjud bo'lib, ikkinchisi esa mavjud bo'l-maydi. Yoki bo'lmasa, shunday funksiya ko'rsatish mumkinki, u uchun bu limitlarning har ikkalasi mavjud bo'lsada, ular o'zaro farq qiladi.

Masalan, agar $\{\Omega_k\}$ lar $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi kengayuvchi kvadratlar ketma-ketligi bo'lsa, quyidagi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_k} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

limit mavjud bo'ladi. Lekin, agar $\{\Omega_k\}$ lar $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi kengayuvchi doiralar ketma-ketligi bo'lsa, u holda yuqoridagi limit mavjud bo'lmaydi (14.3.5 - misolga qarang).

Bunday hollarni istisno qilish uchun, (14.1.1) ketma-ketliklar limitining $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi har qanday $\{\Omega_k\}$ to'plamlar ketma-ketligi uchun mavjudligini talab qilish yetarlidir.

Xosmas integralning klassik ta'rifida $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi to'plamlar sifatida kublanuvchi (ikki o'lchovli holda - kvadratlanuvchi)

sohalar, ya'ni bog'langan ochiq to'plamlar olinadi. Biz ham shu yo'lni tutamiz.

Ta'rif. Faraz qilaylik, $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ sohalarining $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ ketma-ketligi quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:

1) har bir Ω_k soha Ω_{k+1} sohada yotsin, ya'ni:

$$\Omega_k \subset \Omega_{k+1}; \quad (14.1.2)$$

2) barcha Ω_k sohalarining birlashmasi $\mathbb{R}^n$ fazosini batamom to'ldirsin, ya'ni:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \mathbb{R}^n. \quad (14.1.3)$$

U holda bunday ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oladi deyimiz.

Masalan, R_k radiusli bir-birini ichiga joylashgan sharlar ketma-ketligi, R_k sonlar ketma-ketligi o'sib borib, cheksizlikka intilganda, $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oladi.

1 - eslatma. Agar $\{\Omega_j\}$ sohalar ketma-ketligi $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab olsa, u holda istalgan $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt to'plam uchun shunday N nomer topiladiki, $j \geq N$ bo'lganda

$$K \subset \Omega_j$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, agar bunday bo'lmasa, shunday $x_j \in K$ nuqtalar ketma-ketligi topilar ediki, u uchun

$$x_j \notin \Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

bo'lar edi.

Bu nuqtalar ketma-ketligidan, K to'plamning kompaktligiga ko'ra, biror $x_0 \in K$ nuqtaga yaqinlashuvchi qismaniy x_{j_k} ketma-ketlik ajratish mumkin. (14.1.3) shartga asosan esa, shunday Ω_m soha topiladiki, x_0 nuqta o'zining biror atrofi bilan Ω_m sohada yotadi.

U holda, biror nomerdan boshlab x_{j_k} ketma-ketlikning barcha nuqtalari ham Ω_m da yotadi, demak, (14.1.2) ga binoan, bu nuqtalar $j_k \geq m$ bo'lganda Ω_{j_k} sohada yotadi. Bu esa x_j ketma-ketlikning tanlanishiga ziddir.

Ta'rif. Agar f lokal integrallanuvchi funksiya bo'lib, $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oluvchi har qanday kublanuvchi $\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx \quad (14.1.4)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda quyidagi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad (14.1.5)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Bunda f funksiyaga $\mathbb{R}^n$ fazo bo'yicha (xosmas ma'noda) integrallanuvchi deymiz.

Agar (14.1.4) limit mavjud bo'lmasa, (14.1.5) integralni uzoqlashadi deymiz.

2 - eslatma. Bu ta'rifda har bir Ω_k soha kublanuvchi va demak, chegaralangan. Bundan chiqdi, bunday sohada olingan integral oddiy aniq (xos) integral bo'ladi.

3 - eslatma. Agar f funksiya $\mathbb{R}^n$ bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda (14.1.5) limit qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalarining tanlanishiga bog'liq emas.

Haqiqatan, agar bunday bo'lmasa, $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi shunday ikki $\{\Omega'_k\}$ va $\{\Omega''_k\}$ sohalar ketma-ketligi topilar ediki, ularga mos (14.1.4) integrallar limiti o'zaro teng bo'lmas edi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\Omega'_k) = \alpha \neq \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} I(\Omega''_k).$$

Lekin, 1 - eslatmaga ko'ra, $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalar ketma-ketligini shunday tuzish mumkinki, bunda $\{\Omega_{2k-1}\}$ elementlar $\{\Omega'_m\}$ ketma-ketlikning biror qisman ketma-ketligi, $\{\Omega_{2k}\}$ lar esa,

$\{\Omega_m''\}$ ketma-ketlikning biror qisman ketma-ketligi bo'ladi. Ravshan-ki, bunday $\{\Omega_k\}$ lar uchun mos (14.1.4) sonli ketma-ketlik ikki xil limitga ega:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\Omega_{2k-1}) = \alpha, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I(\Omega_{2k}) = \beta.$$

Bundan chiqdi, $\{I(\Omega_k)\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lmay ekan. Bu esa xosmas integralning yaqinlashish ta'rifiga ziddir.

Shunday qilib, agar (14.1.4) limit $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi *ixtiyoriy* sohalar ketma-ketligi uchun mavjud bo'lsa, u holda bu limit sohalar ketma-ketligining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi. Bu limit f funksiyadan $\mathbb{R}^n$ fazo bo'yicha olingan *xosmas integral* deyiladi va ushbu

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx \quad (14.1.6)$$

ko'rinishda belgilanadi.

E'tibor bering, xosmas integral deb (14.1.5) simvolga ham, (14.1.6) limitga (bu limit mavjud bo'lganda) teng songa ham aytilar ekan.

14.1.1 - teorema. *Agar f va g funksiyalardan $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integrallar mavjud bo'lsa, u holda istalgan haqiqiy λ va μ sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiyadan olingan xosmas integral ham mavjud bo'lib, quyidagi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx + \mu \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$$

tenglik bajariladi.

Isbot xos integrallarning integral ostidagi funksiyaga chiziqli bog'liqligi hamda limitga o'tish amalining chiziqliligidan oson kelib chiqadi.

2. Manfiymas funksiyadan olingan xosmas integral. Agar ta'rifga qat'iy amal qilsak, (14.1.5) xosmas integralni yaqinlashishi-ni isbotlash uchun (14.1.4) limitning *barcha* qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$

ketma-ketliklar uchun mavjudligini ko'rsatish kerak. Ammo manfiy mas funksiyalar uchun xosmas integralning yaqinlashishi ancha oson tekshiriladi.

14.1.2 - teorema. Agar $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi f funksiya manfiy mas bo'lib,

$$I(\Omega_k) = \int_{\Omega_k} f(x) dx$$

sonli ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalarini aqalli bitta tanlashda chegaralangan bo'lsa, u holda (14.1.5) integral yaqinlashadi.

Isbot. Faraz qilaylik, $I(\Omega_k)$ sonli ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi biror ketma-ketlik uchun chegaralangan bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, Ω_k sohalar kengayadi va teorema shartiga ko'ra, f funksiya manfiy mas. Shunday ekan, $I(\Omega_k)$ ketma-ketlik o'suvchi va demak, chekli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\Omega_k) = I$$

limit mavjud. Bundan tashqari, istalgan k nomer uchun

$$I(\Omega_k) \leq I \quad (14.1.7)$$

tengsizlik o'rinli.

Endi $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi boshqa bir $\{\Omega'_j\}$ ketma-ketlik olaylik. Yuqorida qayd qilinganidek, istalgan j nomer uchun shunday k nomer topiladiki, $\Omega'_j \subset \Omega_k$ bo'ladi va integral ostidagi funksiya manfiy mas bo'lgani uchun, $I(\Omega'_j) \leq I(\Omega_k)$. Demak, (14.1.7) ga ko'ra, istalgan j nomer uchun

$$I(\Omega'_j) \leq I$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan chiqdi, o'suvchi $\{I(\Omega'_j)\}$ sonli ketma-ketlik ham chegaralangan va demak, u yaqinlashadi.

Shunday qilib, (14.1.4) limit istalgan qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik uchun mavjud. Bu esa (14.1.5) xosmas integralning yaqinlashishini anglatadi.



Natija. Faraz qilaylik, f va g funksiyalar $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi bo'lib,

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

shartni qanoatlantirsin.

Agar g funksiyadan $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integral yaqinlashsa, u holda f funksiyadan olingan xosmas integral ham yaqinlashadi.

Haqiqatan,

$$\int_{\Omega_k} f(x) dx \leq \int_{\Omega_k} g(x) dx$$

tengsizliklarga ko'ra, agar o'ng tarafdagi integrallar ketma-ketligi yaqinlashsa, u holda chap tarafdagi integrallar ketma-ketligi chegaralangan bo'ladi va demak, 14.1.2 - teorema asosan, yaqinlashadi.

14.1.1 - misol. $p \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida

$$I_p = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1 + |x|^p} \quad (14.1.8)$$

integral yaqinlashishini aniqlang.

Quyidagi

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}$$

sharlar ($n = 2$ da doiralar) ketma-ketligini qaraylik.

Ravshanki, Ω_k ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oladi. (14.1.1) integral-larni hisoblash uchun sferik koordinatalar sistemasiga o'tib, (13.8.17) va (13.8.18) formulalardan foydalanamiz:

$$I_p(\Omega_k) = \int_{\Omega_k} \frac{dx}{1 + |x|^p} = \omega_n \int_0^k \frac{r^{n-1} dr}{1 + r^p}.$$

Agar $p > n$ bo'lsa, oxirgi bir karrali integral k bo'yicha chegaralangan. Shunday ekan, 14.1.2 - teorema ko'ra, (14.1.8) integral $p > n$ da yaqinlashadi va $p \leq n$ da uzoqlashadi.

3. Taqqoslash alomatlari. Yuqorida o'rnatilgan manfiy mas funksiyalardan olingan xosmas integrallar xossalari yordamida xosmas integrallar yaqinlashishining, taqqoslash alomatlari deb ataluvchi, yetarli shartlarini aniqlash mumkin.

14.1.3 - teorema (taqqoslashning umumiy alomati). Faraz qilaylik, f va g funksiyalar $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi bo'lib, quyidagi

$$|f(x)| \leq g(x)$$

shartni qanoatlantirsin.

Agar g funksiyadan $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integral yaqinlashsa, u holda f dan olingan xosmas integral ham yaqinlashadi.

Isbot. Ikki

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \quad (14.1.9)$$

manfiy mas funksiyalarni kiritaylik.

Ravshanki, bu funksiyalar lokal integrallanuvchi bo'lib,

$$0 \leq f_{\pm}(x) \leq |f(x)| \leq g(x)$$

tengsizliklar bajariladi.

14.1.2 - teoremaning natijasiga ko'ra, har ikki $f_{\pm}$ funksiya $\mathbb{R}^n$ da xosmas ma'noda integrallanuvchi, demak, 14.1.1 - teorema ko'ra, $f = f_+ - f_-$ funksiya ham integrallanuvchi bo'ladi.

■

14.1.4 - teorema (taqqoslashning xususiy alomati). Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi bo'lsin.

1) Agar

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^p}, \quad p > n,$$

shart bajarilsa, (14.1.5) xosmas integral yaqinlashadi.

2) Agar

$$f(x) \geq \frac{C}{1 + |x|^p}, \quad p \leq n,$$

shart bajarilsa, (14.1.5) xosmas integral uzoglashadi.

Isbot 14.1.3 - teorema va 14.1.1 - misoldan kelib chiqadi.

n karrali xosmas integralga muhim misollardan biri quyidagi

$$P_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (14.1.10)$$

integraldir.

Taqqoslashning xususiy alomatidan bu integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Shuni aytish kerakki, bir o'zgaruvchili holda

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (14.1.11)$$

integralni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash oson emas, chunki integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi elementar funksiya bo'lmaydi.

Biz (14.1.10) integralni hisoblashni $n = 2$ holdan boshlaymiz.

14.1.2 - misol. Ikki karrali quyidagi

$$P_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy \quad (14.1.12)$$

xosmas integralni hisoblang.

$\mathbb{R}^2$ tekislikni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < k^2\}$$

doiralarni olamiz.

Qutb koordinatalariga o'tib,

$$\begin{aligned} P_2(D_k) &= \int_{D_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k e^{-r^2} r dr = \\ &= -2\pi \cdot \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=k} = \pi (1 - e^{-k^2}) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$P_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} P_2(D_k) = \pi,$$

ya'ni

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi.$$

14.1.3 - misol. Bir o'lchovli (14.1.11) integralni hisoblang.

Avval ikki karrali (14.1.12) integralni, $\mathbb{R}^2$ tekislikni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$Q_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |x| < k, |y| < k\}$$

kvadratlarni olib, hisoblaymiz.

Ravshanki,

$$\begin{aligned} P_2(Q_k) &= \int_{Q_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ &= \int_{-k}^k e^{-x^2} dx \int_{-k}^k e^{-y^2} dy = \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Endi $k \rightarrow \infty$ deb limitga o'tsak,

$$P_2 = P_1^2$$

teglikni olamiz.

Demak,

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

14.1.4 - misol. n karrali (14.1.10) xosmas integralni hisoblang. $\mathbb{R}^n$ fazoni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$Q_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < k, j = 1, 2, \dots, n\}$$

kublarni olamiz.

U holda

$$\begin{aligned} P_n(Q_k) &= \int_{Q_k} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-k}^k e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-k}^k e^{-x_2^2} dx_2 \dots \int_{-k}^k e^{-x_n^2} dx_n = \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^n. \end{aligned}$$

Endi $k \rightarrow \infty$ deb limitga o'tsak,

$$P_n = P_1^n = \sqrt{\pi}^n$$

tenglikka kelamiz.

Demak,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \pi^{n/2}. \quad (14.1.13)$$

4. Xosmas integrallarning absolyut yaqinlashishi. Bir o'zgaruvchilik holdagiga o'xshash karrali xosmas integrallar uchun ham absolyut yaqinlashish tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif. Agar quyidagi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \quad (14.1.14)$$

integral yaqinlashsa, (14.1.5) xosmas integral **absolyut** yaqinlashadi deyiladi.

Bevosita 14.1.3 - teoremadan lokal integrallanuvchi funksiyadan olingan absolyut yaqinlashuvchi xosmas integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Shartli yaqinlashuvchi xosmas karrali integral tushunchasini ham, odatdagidek, yaqinlashuvchi, lekin absolyut yaqinlashmaydigan xosmas integral deb kiritsa bo'lar edi. Lekin bunday integral mavjud emas. Bunga sabab $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini tanlash imkoniyatining kengligidadir. Chunonchi, biz shunday qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini tuzishimiz mumkinki, bunda tuzilgan sohalarining katta qismi berilgan f funksiyaning musbat bo'lgan to'plami bilan ustma-ust tushadi. Bunday to'plamda $f(x) = |f(x)|$ tenglik bajarilib, f dan olingan integralning yaqinlashishi $|f|$ dan olingan integralning ham yaqinlashishini ta'minlaydi. Navbatdagi teorema bu mulohazalarimizni asosli ekanini ko'rsatadi.

14.1.5 - teorema. *Yaqinlashuvchi xosmas karrali integral absolyut yaqinlashadi.*

Isbot. (14.1.5) integral yaqinlashsin deb faraz qilib, (14.1.14) integralning ham yaqinlashishini isbotlaymiz. Haqiqatan, agar bunday bo'lmasa, (14.1.9) funksiyalarning biridan, masalan, $f_+(x)$ dan olingan xosmas integral uzoqlashadi.

$\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligi sifatida radiusi monoton ravishda $+\infty$ ga intiluvchi

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_k\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

sharlar ketma-ketligini olamiz.

Xosmas integral yaqinlashishining ta'rifidan (14.1.6) limitning mavjudligi kelib chiqadi. Boshqa tarafdin, f_+ dan olingan xosmas integralni uzoqlashadi deb faraz qilganimiz uchun, 14.1.2 - teoreмага ko'ra,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f_+(x) dx = +\infty.$$

L_k orqali

$$L_k = \{x \in \mathbb{R}^n : R_k \leq |x| < R_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ko'rinishdagi shar qatlamini ($n = 2$ da doiraviy halqani) belgilaymiz va o'suvchi $\{R_k\}$ ketma-ketlikni quyidagi

$$\int_{L_k} f_+(x) dx > k \quad (14.1.15)$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olamiz.

Endi quyidagicha yo'l tutish mumkin edi. Ya'ni, P_k orqali L_k qatlamning f funksiya musbat bo'lgan nuqtalari to'plamini belgilab, bu to'plam ochiq, bog'langan va kublanuvchi bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda $\tilde{\Omega}_k = \Omega_k \cup P_k$ sohalar ketma-ketligi ham qamrab oluvchi bo'lib, kublanuvchi to'plamlardan iborat bo'ladi. Shunday ekan, f funksiyadan $\tilde{\Omega}_k$ sohalar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi ham yaqinlashadi. Bundan chiqdi, $\tilde{\Omega}_k \setminus \Omega_k = P_k$ sohalar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi ham yaqinlashishi kerak. Lekin bu (14.1.15) ga zid, chunki $x \in P_k$ uchun $f_+(x) = f(x)$ tenglik bajariladi va demak,

$$\int_{P_k} f(x) dx = \int_{P_k} f_+(x) dx = \int_{L_k} f_+(x) dx > k.$$

Ammo bu mulohazalarning kamchiligi shundaki, $f_+(x) > 0$ shart o'rinli bo'lgan P_k to'plam ochiq, bog'langan va kublanuvchi bo'lmashligi mumkin. Shu sababli, teoremani isbotlash uchun qo'shimcha mulohazalar yuritish zarur.

L_k shar qatlamini bog'langan kublanuvchi to'plamlardan iborat bo'lgan shunday $\{E_j\}_{j=1}^m$ bo'linishini olamizki, bunda (14.1.15) ning chap tarafidagi integral uchun Darbuning quyi yig'indisi shu integral-dan 1 sonidan kamga farq qilsin (bo'linish diametrini yetarlicha kichik qilib tanlab, bunga doim erishish mumkin). U holda,

$m_j(f_+) = \inf_{x \in E_j} f_+(x)$ desak, (14.1.15) dan

$$\sum_{j=1}^N m_j(f_+) |E_j| > k - 1 \quad (14.1.16)$$

baho kelib chiqadi.

Ushbu

$$F_k = \bigcup_j' E_j$$

to'plamni qaraylik, bu yerdagi shtrix yig'indining $m_j(f_+) > 0$ baho bajarilgan to'plamlar bo'yicha olinayotganini bildiradi. Ravshanki, bu to'plam kublanuvchi va unda f_+ funksiya qat'iy musbat. Bundan chiqdi, barcha $x \in F_k$ lar uchun

$$f_+(x) = f(x)$$

tenglik o'rinni.

Ma'lumki, Darbuning quyi yig'indisi integraldan oshib ketmaydi. Demak, (14.1.16) ga ko'ra,

$$\int_{F_k} f(x) dx \geq \sum_j' m_j(f_+) |E_j| \geq \sum_{j=1}^N m_j(f_+) |E_j| > k - 1. \quad (14.1.17)$$

Hajmi nolga teng bo'lgan ∂F_k chegarani chiqarib tashlab, F_k to'plamni ochiq qilib olishimiz mumkin. Hosil bo'lgan to'plamga uni Ω_k shar bilan tutashtiruvchi radial ravishda joylashgan yetarlicha tor ko'pyoqlilarni qo'shib, shunday kublanuvchi $H_k \subset L_k$ to'plamni olamizki, bunda $\Omega_k \cup H_k$ to'plam ochiq va bog'langan bo'ladi. Tutash-tiruvchi ko'pyoqlilarda f funksiya manfiy bo'lib, (14.1.17) tengsizlik buzilishi mumkin. Lekin bu ko'pyoqlilarni shunchalik tor qilib tan-lash mumkinki, natijada

$$\int_{H_k} f(x) dx > k - 2 \quad (14.1.18)$$

tengsizlik bajariladi.

Endi quyidagi

$$\Omega'_k = \Omega_k \cup H_k$$

kengayuvchi sohalar ketma-ketligini qaraylik.

Ravshanki, har ikki $\{\Omega_k\}$ va $\{\Omega'_k\}$ ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oladi. Demak, f funksiya dan olingan xosmas integralning yaqinlashishiga ko'ra,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_k} f(x) dx$$

limitlar mavjud va o'zaro teng.

Ammo bu, (14.1.18) ga ko'ra o'rinli bo'lgan quyidagi

$$\int_{\Omega'_k} f(x) dx - \int_{\Omega_k} f(x) dx = \int_{H_k} f(x) dx > k - 2$$

tengsizlikka ziddir.

Hosil bo'lgan ziddiyat absolyut yaqinlashmaydigan integralning umuman yaqinlashmasligini isbotlaydi.

■

14.1.5 - misol. Ushbu

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy \quad (14.1.19)$$

ikki karrali xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Qamrab oluvchi ketma-ketlik elementlari sifatida

$$\Omega_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R_k^2\}$$

doiralarni olamiz.

Qutb koordinatalariga o'tsak,

$$\int_{\Omega_k} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy = 2\pi \int_0^{R_k} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} \rho d\rho = \pi \int_0^{R_k^2} \frac{\sin t}{t} dt$$

tenglikka kelamiz.

Oxirgi bir o'lchovli integralning limiti mavjud bo'lib, u $\pi/2$ ga teng. Demak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy = \frac{\pi^2}{2}. \quad (14.1.20)$$

Shunday qilib, kengayuvchi doiralar ketma-ketligiga mos kelgan integrallar limiti $\pi^2/2$ ga teng ekan. Shu faktga asoslanib, (14.1.19) integralni yaqinlashadi deya olamizmi? Yo'q, chunki ta'rifga ko'ra, qayd qilingan limit qamrab oluvchi ketma-ketliklarni ixtiyoriy tanlashda ham mavjud bo'lishi kerak.

(14.1.19) integralning yaqinlashish masalasini hal qilish uchun barcha qamrab oluvchi ketma-ketliklarda yaqinlashishni tekshirish o'rniga, 14.1.5 - va 14.1.2 - teoremlardan foydalanamiz. Buning uchun integral ostidagi funksiya modulidan olingan integralni aqalli bitta qamrab oluvchi ketma-ketlik uchun tekshirish yetarli.

Haqiqatan, Ω_k sifatida yana yuqoridagi doiralar ketma-ketligini olsak,

$$\int_{\Omega_k} \frac{|\sin(x^2 + y^2)|}{x^2 + y^2} dx dy = 2\pi \int_0^{R_k} \frac{|\sin \rho^2|}{\rho^2} \rho d\rho = \pi \int_0^{R_k^2} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

tenglikka kelamiz.

Ma'lumki, oxirgi bir o'lchovli integral $R_k \rightarrow \infty$ da $+\infty$ ga intiladi va demak, (14.1.19) integral absolyut yaqinlashmaydi. Bundan chiq-di, u umuman yaqinlashmas ekan.

5. Karrali xosmas integrallar bilan karrali sonli qatorlar yaqinlashishi orasidagi bog'liqlik. Bir o'zgaruvchilik holda sonli qator yaqinlashishining Koshi-Makloren alomati mos birinchi tur xosmas integral yaqinlashishiga asoslangan edi (9.2.5 - teoreмага qarang). Xuddi shu singari yaqinlashish alomati karrali sonli qatorlar uchun ham o'rinli.

Faraz qilaylik, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ kvadratda aniqlangan ikki o'zgaruvchili $f(x, y)$ funksiya har bir argumenti bo'yicha monoton kamaysin:

$$f(x + \xi, y + \eta) \leq f(x, y), \quad (x, y) \in Q, \quad \xi \geq 0, \eta \geq 0. \quad (14.1.21)$$

Bu funksiya lokal integrallanuvchi bo'lgani uchun biz quyidagi

$$I = \iint_Q f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy \quad (14.1.22)$$

birinchi tur xosmas integralni qarashimiz mumkin.

Bu integral bilan birga ushbu

$$S = \sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty f(k, m) \quad (14.1.23)$$

ikki karrali qatorni olaylik.

E'tibor berib, bir o'zgaruvchilik holdan farqli o'laroq, (14.1.23) qator yaqinlashishi jamlanishning qaysi nomerdan boshlab amalga oshirilishiga bog'liq. Masalan, (14.1.23) qator uzoqlashsada,

$$S = \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty f(k, m) \quad (14.1.24)$$

qator yaqinlashishi mumkin. Misol sifatida koordinata o'qlarida birga va o'qlardan tashqarida nolga teng f funksiyaning olish kifoya.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

14.1.6 - teorema. Faraz qilaylik, Q kvadratda aniqlangan manfiy f funksiya (14.1.21) monotonlik shartini qanoatlantirsin.

1) Agar (14.1.22) integral yaqinlashsa, (14.1.24) sonli qator ham yaqinlashadi.

2) Agar (14.1.22) integral uzoqlashsa, (14.1.23) sonli qator ham uzoqlashadi.

3) Yaqinlashuv o'rinli bo'lgan holda navbatdagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(k, m) \leq \iint_Q f(x, y) dx dy \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(k, m) \quad (14.1.25)$$

tengsizliklar bajariladi.

Isbot. Butun koordinatali har qanday $(k, m) \in Q$ nuqta uchun navbatdagi

$$Q(k, m) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k \leq x < k+1, m \leq y < m+1\}$$

birlik kvadratni qaraymiz.

Ravshanki, bunday kvadratlar o'zaro kesishmaydi va ularning birlashmasi butun Q kvadratni qoplaydi:

$$\bigcup_{k, m=0}^{\infty} Q(k, m) = Q. \quad (14.1.26)$$

(14.1.21) monotonlik shartiga ko'ra, $Q(k, m)$ kvadratning har bir nuqtasida

$$f(k+1, m+1) \leq f(x, y) \leq f(k, m), \quad (x, y) \in Q(k, m),$$

tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizliklarni $Q(k, m)$ kvadrat bo'yicha integrallab, kvadrat yuzi 1 ga tengligini hisobga olsak, quyidagi

$$f(k+1, m+1) \leq \iint_{Q(k, m)} f(x, y) dx dy \leq f(k, m)$$

munosabatga kelamiz.

Bu tengsizliklarni barcha $k \geq 0$ va $m \geq 0$ lar bo'yicha yig'ib, (14.1.26) ni hisobga olsak, teorema tasdig'iga va talab qilingan (14.1.25) munosabatga ega bo'lamiz.

Eslatma. Odatda, (14.1.22) xosmas integral yaqinlashishi biror $R > 0$ radiusli shardan tashqarida, ya'ni $x^2 + y^2 \geq R^2$ da tekshiriladi.

14.1.6 - misol. Ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{\alpha/2}} \quad (14.1.27)$$

ikki karrali qator $\alpha > 0$ ning qaysi qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Agar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}, & x^2 + y^2 \geq 1, \\ 1, & x^2 + y^2 < 1, \end{cases}$$

desak, shubhasiz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(k, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{\alpha/2}} \quad (14.1.28)$$

tenglik bajariladi.

Bundan tashqari, agar $\zeta(\alpha)$ Riman dzeta-funksiyasi bo'lsa ((9.6.17) formulaga qarang), ravshanki,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(k, m) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{\alpha/2}} = \\ &= 1 + 2\zeta(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{\alpha/2}}. \end{aligned} \quad (14.1.29)$$

f funksiyadan Q kvadratning birlik doiradan tashqaridagi qismi bo'yicha olingan integralni baholaymiz. Buning uchun qutb koordinatlariga o'tsak,

$$\iint_{x^2 + y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\rho d\rho}{\rho^{\alpha}}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu integral $\alpha > 2$ da yaqinlashadi, demak, 14.1.6 - teorema ko'ra, (14.1.27) qator $\alpha > 2$ da yaqinlashadi.

Agarda $\alpha \leq 2$ bo'lsa, integral uzoqlashadi va shuning uchun (14.1.29) qator uzoqlashadi. Bundan (14.1.27) qatorning $\alpha \leq 2$ da uzoqlashishi kelib chiqadi. Xususan, navbatdagi qator uzoqlashadi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + m^2} = +\infty.$$

Xuddi ikki karrali qator singari aniqlanadigan n karrali qatorlar uchun ham yuqoridagi natija o'rinli.

Butun $k_j \geq 1$ koordinatali $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ vektorni kiritaylik. Agar a_k haqiqiy sonlar bo'lsa,

$$S = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} a_k \quad (14.1.30)$$

formal yig'indini n karrali sonli qator deyviz. Ikki karrali qatorlar holidagidek, (14.1.30) qator yaqinlashishiga turli ta'riflar berish mumkin. Masalan, bu qatorni takroriy qator deb qarash mumkin, ya'ni avval bir indeks bo'yicha 1 dan ∞ gacha yig'ib chiqamiz, so'ngra boshqa indeks bo'yicha va h.kazo.

Ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishda quyidagi

$$S_m = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} a_k$$

to'g'ri to'rtburchakli qisman yig'indilarni qarashga to'g'ri keladi, bu yerda $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ butun musbat koordinatali vektor. Agar

$$\lim_{\min\{m_j\} \rightarrow \infty} S_m = S$$

bo'lsa, (14.1.30) qator S soniga to'g'ri to'rtburchaklar bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Differensial operatorlarning spektral nazariyasida quyidagi

$$S_R = \sum_{|k| < R} a_k$$

doiraviy (yoki *sferik*) qisman yig'indilar muhim rol o'ynaydi, bu yerda R musbat son bo'lib, yig'indi esa indeks

$$|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2} < R$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha a_k hadlar bo'yicha olinadi.

Umumiy holda (14.1.30) qator yaqinlashishi qisman yig'indi ko'rinishini tanlashga bog'liq. Ammo, agar qatorning barcha hadlari manfiymas bo'lsa, qator yaqinlashishi bu tanlovga bog'liq emas (9.3.3 - teoreмага qarang). Bu holda 14.1.6 - teoreмага o'xshash tasdiq o'rinni.

14.1.7 - teorema. Faraz qilaylik, manfiymas $f(x)$ funksiya

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}$$

sohada aniqlangan bo'lib, bu sohada quyidagi

$$f(x + \xi) \leq f(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_j \geq 0, \quad (14.1.31)$$

monotonlik shartini qanoatlantirsin.

U holda ushbu

$$\sum_{k_j \geq 1} f(k) \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq \sum_{k_j \geq 0} f(k) \quad (14.1.32)$$

qo'sh tengsizlik bajarilib, agar tengsizlik biror qismi chekli bo'lsa, undan chapdagi qismi ham chekli bo'ladi.

Isbot xuddi 14.1.6 - teorema isboti kabi.

14.1.7 - misol. Ushbu

$$S_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0} \frac{1}{|k|^\alpha} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2)^{\alpha/2}} \quad (14.1.33)$$

qator $\alpha > 0$ ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Xuddi 14.1.6 - misoldagidek mulohaza yuritib, (14.1.33) qatorning $\alpha > n$ da yaqinlashib, $\alpha \leq n$ da esa, uzoqlashishini ko'ramiz.

14.2-§. Ixtiyoriy soha bo'yicha xosmas integrallar

1. Xosmas ma'noda integrallash muammosiga berilgan funksiya qaralayotgan sohada chegaralanmagan bo'lgan holda ham duch kelamiz. Odatda bunday funksiyalar sohaning istalgan kompakt qismida chegaralangan bo'ladi. Boshqacha aytganda, funksiya chegaralanmagan qiymatlarni faqat chegara atrofida qabul qiladi.

Bundan buyon bu bobda biz, bunga alohida urg'u bermasdan, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada berilgan funksiya Ω ning istalgan kompakt kublanuvchi ($n = 2$ bo'lganda kvadratlanuvchi) qismaniy to'plamida integrallanuvchi deb faraz qilamiz, ya'ni istalgan kompakt kublanuvchi $E \subset \Omega$ to'plam uchun quyidagi

$$I(E) = \int_E f(x) dx \quad (14.2.1)$$

integralni mavjud deb hisoblaymiz.

Bunday funksiyalarni biz Ω da *lokal integrallanuvchi* deyimiz. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{(R - |x|)^\alpha}$$

funksiya istalgan $\alpha > 0$ uchun

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$$

sharda lokal integrallanuvchi.

Boshqa bir misol sifatida shardan markazi chiqarib tashlangan

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < R\} \quad (14.2.2)$$

sohada (ya'ni, bir nuqtasi "o'yib olingan" sharda) lokal integrallanuvchi

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\beta}, \quad \beta > 0;$$

funksiyani olish mumkin.

Ω sohada lokal integrallanuvchi f funksiyadan Ω bo'yicha olingan xosmas integral, xuddi $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integral kabi, Ω ni qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalar ketma-ketligi yordamida aniqlanadi. Bu holda, butun $\mathbb{R}^n$ fazosidan farqli o'laroq, qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini faqat monoton qilib olish (ya'ni (14.1.2) shartni qanoatlantiruvchi qilib olish) yetarli emas. Chunki, agar Ω soha kublanuvchi bo'lsa, u holda bunday ketma-ketlik elementi Ω bilan, yoki uning f funksiya oddiy ma'noda integrallanuvchi bo'lmagan qismi bilan ustma-ust tushishi mumkin.

Bunday holni chetlab o'tish maqsadida, ketma-ketlik elementlarini Ω ichida yotuvchi biror kompaktning qismi qilib olish yetarli. Masalan, qamrab oluvchi ketma-ketlikning Ω_k elementlarini ularning $\overline{\Omega_k}$ yopig'i Ω da yotadigan qilib olish mumkin. U holda, f funksiya lokal integrallanuvchi bo'lgani sababli, Ω_k sohalar bo'yicha f dan olingan integrallar mavjud bo'ladi.

Ω sohani qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini quyidagi umum qabul qilingan ko'rinishda kiritamiz.

Ta'rif. Faraz qilaylik, $\Omega_k \subset \Omega$ sohalarining $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ ketma-ketligi quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:

1) Ω_k sohaning $\overline{\Omega_k} = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$ yopig'i Ω_{k+1} sohada yotsin, ya'ni:

$$\overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}; \quad (14.2.3)$$

2) barcha Ω_k sohalarining birlashmasi Ω soha bilan ustma-ust tushsin, ya'ni:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega. \quad (14.2.4)$$

U holda bunday ketma-ketlik Ω sohani qamrab oladi deyimiz.

Masalan, markazi biror nuqtada bo'lgan konsentrik (ya'ni biri ikkinchisi ichida yotgan) sharlar ketma-ketligini olaylik. Agar ular

ning R_k radiuslari qat'iy o'sib, R soniga intilsa, bu ketma-ketlik markazi o'sha nuqtada va radiusi R ga teng bo'lgan sharni qamrab oladi.

Boshqa bir misol sifatida bir nuqtasi o'yib olingan (14.2.2) sharni qamrab oluvchi

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |x| < R\}$$

ketma-ketlikni olishimiz mumkin.

1 - eslatma. Agar $\{\Omega_m\}$ sohalar ketma-ketligi Ω sohasini qamrab olsa, u holda istalgan $K \subset \Omega$ kompakt to'plam uchun biror N nomerdan boshlab

$$K \subset \Omega_m, \quad m \geq N,$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu tasdiq xuddi $\mathbb{R}^n$ fazo holidagidek isbotlanadi (§14.1 ning 1 - bandiga qarang).

Ta'rif. Agar f funksiya Ω sohada lokal integrallanuvchi bo'lib, bu sohani qamrab oluvchi har qanday kublanuvchi $\{\Omega_k\}$ sohalar ketma-ketligi uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx \quad (14.2.5)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda f funksiya Ω soha bo'yicha olingan quyidagi

$$\int_{\Omega} f(x) dx \quad (14.2.6)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Bunda f funksiyaning Ω soha bo'yicha integrallanuvchi (xosmas ma'noda) deymiz.

2 - eslatma. Agar f funksiya Ω soha bo'yicha xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsa, u holda yuqoridagi limit qamrab oluvchi

$\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik tanlanishiga bog'liq emasligini ko'rsatish qiyin emas. Bu tasdiq xuddi $\mathbb{R}^n$ fazosi bo'yicha xosmas integrallar holidagidek isbotlanadi.

Agar (14.2.6) xosmas integral yaqinlashsa, (14.2.5) limit f funksiyadan Ω soha bo'yicha olingan xosmas integral deyiladi va quyidagi

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx \quad (14.2.7)$$

ko'rinishda belgilanadi.

14.2.1 - teorema. Agar f va g funksiyalardan Ω soha bo'yicha olingan xosmas integrallar yaqinlashsa, u holda istalgan haqiqiy λ va μ sonlari uchun $\lambda f + \mu g$ funksiyadan olingan xosmas integral mavjud va navbatdagi

$$\int_{\Omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\Omega} f(x) dx + \mu \int_{\Omega} g(x) dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot aniq integral va limitga o'tish amalining chiziqliligidan kelib chiqadi.

2. Butun fazo bo'yicha integral holidagidek, navbatdagi shart manfiymas funksiyadan istalgan soha bo'yicha olingan xosmas integralning yaqinlashishini ta'minlaydi.

14.2.2 - teorema. Agar f funksiya manfiymas bo'lib,

$$I(\Omega_k) = \int_{\Omega_k} f(x) dx$$

sonli ketma-ketlik Ω sohani qamrab oluvchi aqalli bitta $\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik uchun chegaralangan bo'lsa, u holda (14.2.6) integral yaqinlashadi.

Isbot butun fazo bo'yicha integral holidagidek olib boriladi.

14.2.1 - misol. Agar

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$$

bo'lsa,

$$A(\alpha) = \int_{\Omega} \frac{dx}{(R - |x|)^{\alpha}}$$

integralni α ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Ω ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < R - \frac{1}{k} \right\}$$

sharlarni olamiz.

Agar sferik koordinatalarga o'tsak,

$$\int_{\Omega_k} \frac{dx}{(R - |x|)^{\alpha}} = \omega_n \int_0^{R-1/k} \frac{r^{n-1}}{(R - r)^{\alpha}}$$

tenglikni olamiz.

Oxirgi bir o'lchovli integral $k \rightarrow \infty$ da $\alpha < 1$ lar uchungina yaqinlashadi. Demak, $A(\alpha)$ integral $\alpha < 1$ da yaqinlashadi va $\alpha \geq 1$ da uzoqlashadi.

14.2.2 - misol. Agar

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < R\}$$

bo'lsa,

$$B(\beta) = \int_{\Omega} \frac{dx}{|x|^{\beta}}$$

integralni β ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Ω ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |x| < R \right\}$$

shar qatlamlarini olamiz.

Sferik koordinatalariga o'tsak, $\beta < n$ lar uchun

$$\int_{\Omega_k} \frac{dx}{|x|^\beta} = \omega_n \int_{1/k}^R \frac{r^{n-1}}{r^\beta} = \frac{\omega_n}{n-\beta} \left[R^{n-\beta} - \left(\frac{1}{k} \right)^{n-\beta} \right]$$

tengliklarni olamiz.

Demak, $\beta < n$ da $B(\beta)$ integral yaqinlashadi va u

$$B(\beta) = \frac{\omega_n}{n-\beta} R^{n-\beta}$$

ga teng.

Agar $\beta \geq n$ bo'lsa, $B(\beta)$ uzoqlashadi.

14.2.3 - misol. Agar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ixtiyoriy kublanuvchi soha bo'lib, a uning biror tayinlangan nuqtasi bo'lsa,

$$I(\beta) = \int_{\Omega} \frac{dx}{|x-a|^\beta}$$

integralni β ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Biz $I(\beta)$ ni berilgan Ω sohadan a nuqtani o'yib olingan $\Omega(a) = \Omega \setminus \{a\}$ soha bo'yicha xosmas integral deb qarashimiz mumkin. $\Omega(a)$ ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : |x-a| > \frac{1}{k} \right\}$$

sohalar ketma-ketligini olamiz.

Endi N nomerni shunday tanlaymizki, radiusi $\frac{1}{N}$ ga teng va markazi $a \in \Omega$ nuqtada bo'lgan shar to'raligicha Ω da yotsin. U holda $k > N$ lar uchun

$$\int_{\Omega_k} \frac{dx}{|x-a|^\beta} = \int_{\Omega_N} \frac{dx}{|x-a|^\beta} + \int_{\Omega_k \setminus \Omega_N} \frac{dx}{|x-a|^\beta}$$

deb yozishimiz mumkin.

O'ng tomondagi birinchi integral ostidagi funksiya chegaralangan va bu integral k ga bog'liq emas, ikkinchi integral esa, parallel ko'chirish yordamida 14.2.2 - misolda qaralgan integralga keladi. Demak, $\beta < n$ bo'lsa, $I(\beta)$ integral yaqinlashadi va $\beta \geq n$ da $I(\beta)$ integral uzoqlashadi.

3 - eslatma. Bundan buyon, biror $a \in \Omega$ nuqtada yakkalangan maxsuslikka ega bo'lgan funksiya Ω soha bo'yicha olingan integral deganda, aynan 14.2.3 - misoldagi integralni, ya'ni $\Omega \setminus \{a\}$ soha bo'yicha olingan xosmas integralni tushunamiz.

3. Taqqoslash alomatlari. Xosmas integrallar yaqinlashishining, taqqoslash alomatlari deb ataluvchi, yetarli shartlarini keltiramiz. Isbot xuddi butun fazo bo'yicha integral holidagidek olib boriladi.

14.2.3 - teorema (taqqoslashning umumiy xosmas alomati). Faraz qilaylik, f va g funksiyalar Ω da lokal integrallanuvchi bo'lib,

$$|f(x)| \leq g(x)$$

shart bajarilsin.

Agar Ω bo'yicha g funksiya olingan xosmas integral yaqinlashsa, u holda f funksiya olingan xosmas integral ham yaqinlashadi.

Isbot 14.1.3 - teorema isbotiga o'xshash.

14.2.4 - teorema (taqqoslashning xususiy xosmas alomati). Faraz qilaylik, a kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohasining ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, f funksiya $\Omega \setminus \{a\}$ da lokal integrallanuvchi bo'lsin.

1) Agar $x \neq a$ lar uchun

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x-a|^\beta}, \quad \beta < n,$$

shart bajarilsa, u holda (14.2.6) xosmas integral yaqinlashadi.

2) Agar $x \neq a$ lar uchun

$$f(x) \geq \frac{C}{|x-a|^\beta}, \quad \beta \geq n,$$

shart bajarilsa, (14.2.6) xosmas integral uzoqlashadi.

Isbot 14.2.3 - teorema va 14.2.3 - misoldan kelib chiqadi.

14.2.4 - misol. Ushbu

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{|x|^q}$$

integralni yaqinlashishga tekshiring.

Biz bu integralni $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soha, ya'ni butun fazodan koordinatalar boshi chiqarib tashlangan soha bo'yicha xosmas integral deb qarashimiz mumkin. Quyidagi

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |x| < k \right\}$$

sohalar ketma-ketligini kiritamiz.

Ravshanki, bu ketma-ketlik Ω sohasini qamrab oladi. Sferik koordinatalarga o'tsak,

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega_k} \frac{dx}{|x|^q} = \int_{1/k}^k r^{n-1-q} dr = \begin{cases} \frac{k^{n-q} - k^{q-n}}{n-q}, & q \neq n, \\ 2 \ln k, & q = n, \end{cases}$$

munosabatni olamiz.

Shubhasiz, ixtiyoriy $q \in \mathbb{R}$ qiymatlarda bu integrallar ketma-ketligi $k \rightarrow \infty$ da cheksizga intiladi. Demak, ixtiyoriy $q \in \mathbb{R}$ lar uchun qaralayotgan xosmas integral uzoqlashar ekan.

4. Agar

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

xosmas integral yaqinlashsa, (14.2.6) integral *absolyut* yaqinlashadi deyiladi.

Istalgan Ω soha uchun 14.1.5 - teorema o'xshash tasdiq o'rinli, chunki, *lokal integrallanuvchi funksiyadan olingan integral faqat va faqat absolyut yaqinlashganda yaqinlashadi*. Isbot xuddi yuqoridagi sxema bo'yicha olib boriladi, lekin bunda Ω sohaning ixtiyoriy shaklda bo'lishi mumkinligi bilan bog'liq bo'lgan qo'shimcha qiyinchiliklar tug'uladi.

14.2.5 - misol. Agar

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < R\}$$

bo'lsa,

$$I = \int_{\Omega} \frac{x_1}{|x|^3} dx \quad (14.2.8)$$

integralni yaqinlashishga tekshiring.

Ω_0 ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{k} < |x| < R \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

halqalarni olamiz.

Qutb koordinatalariga o'tib, burchaklar bo'yicha integrallagandan so'ng,

$$\int_{\Omega_k} \frac{x_1}{|x|^3} dx = \int_{1/k}^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^3} d\varphi = 0$$

tenglikni olamiz.

Demak, kengayuvchi halqalar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi nolga intilar ekan. Ammo bu berilgan integral yaqinlashishini anglatmaydi, chunki buning uchun, Ω_0 sohasini qamrab oluvchi *istal-gan* ketma-ketlik olganda ham, unga mos integrallar ketma-ketligi yaqinlashishini isbotlashimiz kerak.

14.2.4 - teoremda keltirilgan taqqoslash alomatlari bu misol uchun ish bermaydi, chunki integral ostidagi funksiyaning yuqoridan aniq bahosi

$$\left| \frac{x_1}{|x|^3} \right| \leq \frac{1}{|x|^2}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu baho integral *yaqinlashishini* ta'minlamaydi. Boshqa tarafdin, $x_1 = 0$ koordinatalar o'qida integral ostidagi funksiya nolga teng. Shunday ekan, biz bu funksiyaning quyidan biror musbat funksiya bilan baholab, integralni *uzoqlashishini* ham ko'rsata olmaymiz.

Shuning uchun biz, ikki karrali integral yaqinlashishi uning absolut yaqinlashishiga teng kuchli ekanidan foydalanib, 14.2.2 - teoremani qo'llaymiz.

Ravshanki, yuqoridagi kengayuvchi halqalar ketma-ketligi uchun

$$\int_{\Omega_k} \frac{|x_1|}{|x|^3} dx = \int_{1/k}^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho |\cos \varphi|}{\rho^3} d\varphi \geq \int_{1/k}^R \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi \ln(Rk)$$

baho o'rinli bo'lib, bunday integrallar ketma-ketligi chegaralanmagan va demak, (14.2.8) integral uzoqlashadi.

14.2.6 - misol. Agar

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < R\}$$

bo'lsa, quyidagi

$$I_j = \int_{\Omega_0} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} dx, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (14.2.9)$$

n karrali integrallarni yaqinlashishga tekshiring.

Sferik koordinatalarga o'tib, Ω ni qamrab oluvchi

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |x| < R \right\}$$

shar qatlamlari ketma-ketligi uchun

$$\int_{\Omega_k} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} dx = 0$$

tenglik bajarilishini tekshirish qiyin emas.

Endi, xuddi avvalgi misoldagidek, (14.2.9) integral absolyut yaqinlashmasligini va bundan chiqdi, uzoqlashishini ko'rsatish oson.

14.2.7 - misol. Agar a kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohaning ixtiyoriy tayinlangan nuqtasi bo'lsa, quyidagi

$$I_j = \int_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (14.2.10)$$

integrallarni yaqinlashishga tekshiring.

Faraz qilaylik, ε_k kamayib nolga intiluvchi biror ketma-ketlik bo'lsin. Qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligi elementlari sifatida

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |x - a| > \varepsilon_k\}$$

sohalarini olamiz.

N nomerni shunday tanlab olamizki, radiusi ε_N ga teng bo'lib, markazi $a \in \Omega$ nuqtada bo'lgan shar to'ladigicha Ω da yotsin. U holda $k > N$ lar uchun

$$\int_{\Omega_k} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx = \int_{\Omega_N} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx + \int_{\Omega_k \setminus \Omega_N} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx$$

tenglikni olamiz.

O'ng tarafdagi birinchi integral ostidagi funksiya chegaralangan va bu integral k ga bog'liq emas. Ikkinchi integral, parallel ko'chirish yordamida, 14.2.6 - misolda qaralgan integralga keladi va demak, u nolga teng. Shunday qilib,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx = \int_{\Omega_N} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx.$$

Lekin shunga qaramasdan, xuddi 14.2.6 - misoldagi kabi, (14.2.10) integrallar absolyut yaqinlashmaydi va shu sababli uzoqlashadi.

14.3-§. Karrali xosmas integralning bosh qiymati

1. Yuqorida aniqlangan xosmas karrali integrallar tabiiy masalalarni yechishda foydalaniladigan ko'p zarur xossalarga ega. Amino shunga qaramasdan, ba'zi muhim hollarda yuqoridagi ta'rifga ko'ra yaqinlashuvchi integralga ega bo'lgan funksiyalar sinfi ancha torlik qiladi. Integrallanuvchi funksiyalar sinfini kengaytirish uchun, tabiiy-ki, integralning yaqinlashish ta'rifidagi shartlarni kuchsizlantirish zarur. Bunday ta'riflar bir qancha, lekin tatbiqda eng ko'p uchraydigan ta'riflardan biri integralning Koshi ma'nosidagi yaqinlashishi ta'rifidir.

Ta'rif. Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ixtiyoriy kublanuvchi soha bo'lib, a bu sohaning biror nuqtasi bo'lsin.

Bundan tashqari, f funksiya ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x - a| > \varepsilon\}$ sohada integrallanuvchi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx$$

limit mavjud bo'lsa, $a \in \Omega$ nuqtada marsuslikka ega bo'lgan

$$\int_{\Omega} f(x) dx \quad (14.3.1)$$

integralni Koshi ma'nosida yaqinlashadi deyimiz.

Bu limit (14.3.1) xosmas integralning bosh qiymati deyilib,

$$V.p. \int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} f(x) dx \quad (14.3.2)$$

ko'rinishda belgilanadi.

14.3.1 - misol. Faraz qilaylik, a biror kublanuvchi Ω sohaning istalgan nuqtasi bo'lib,

$$f_j(x) = \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

bo'lsin. $f_j(x)$ funksiyadan olingan integralni Koshi ma'nosida yaqinlashishga tekshiring.

Aytaylik, radiusi R ga teng va markazi a nuqtada bo'lgan shar to'raligicha Ω sohasida yotsin. U holda istalgan musbat $\varepsilon < R$ uchun

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx = \int_{\Omega_R} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx + \int_{\Omega_{\varepsilon} \setminus \Omega_R} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx$$

deb yozish mumkin.

O'ng tarafdagi birinchi integral xos bo'lib, u ε ga bog'liqmas, ikkinchi integral esa, 14.2.6 - va 14.2.7 - misollarga ko'ra, nolga teng. Bundan chiqdi, integralning bosh qiymati mavjud va u

$$V.p. \int_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx = \int_{\Omega_R} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx$$

ga teng. Bunda o'ng tarafdagi integral xosdir.

1 - eslatma. 14.2.7 - misolga ko'ra, yuqoridagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashmaydi.

2 - eslatma. Oddiy («regulyar») yaqinlashuvchi xosmas integrallardan farqli o'laroq, bosh qiymat ma'nosidagi integrallar *singulyar* integrallar deb ham ataladi.

2*. 14.3.1 - misoldagiga o'xshash integrallar gravitatsiya nazariyasi va elektromagnetizmda muhim o'rin tutadi. Masalan, $n = 3$ da bunga o'xshash integrallar o'zgarmas μ zichlikli Ω jism hosil qilgan tortishish maydoni potensialining hosilasini hisoblashda hosil bo'ladi. $\mu(x)$ zichlik o'zgarmas bo'lmagan hollarda integral Koshi ma'nosida yaqinlashmasligi mumkin, ammo agar $\mu(x)$ funksiya biror silliqlikka ega bo'lsa, navbatdagi misolda ko'rsatilganidek, qaralayotgan integral Koshi ma'nosida yaqinlashadi.

Agar $0 < \alpha \leq 1$ berilgan son bo'lib, shunday $M > 0$ soni topilsaki, istalgan $x \in \Omega$ va $y \in \Omega$ nuqtalar uchun

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq M|x - y|^\alpha \quad (14.3.3)$$

tengsizlik bajarilsa, Ω sohasida aniqlangan $\mu(x)$ funksiya α ko'rsatkich bilan Holder shartini qanoatlantiradi deyimiz.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, Holder sharti, odatda, Lipshits sharti deyiladi.

14.3.2 - misol. Agar $\mu(x)$ funksiya Ω sohasida aniqlangan bo'lib, (14.3.3) Holder shartini qanoatlantirsa, $a \in \Omega$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lgan

$$I(a) = \int_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} \mu(x) dx \quad (14.3.4)$$

integralni Koshi bo'yicha yaqinlashishini ko'rsating.

Quyidagi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} \mu(x) dx =$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} [\mu(x) - \mu(a)] dx + \mu(a) \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} dx$$

ayniyatni qaraymiz.

14.3.1 - misolga ko'ra, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ larda oxirgi integral ε ga bog'liq emas. Bu integralni $\lambda_j(a)$ simvoli bilan belgilab, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ larda

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} \mu(x) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} [\mu(x) - \mu(a)] dx + \lambda_j(a) \mu(a)$$

tenglikni yozishimiz mumkin.

O'ng tarafdagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashishi ni ko'rish qiyin emas. Haqiqatan, (14.3.3) Holder shartiga binoan, integral ostidagi funksiya uchun

$$\left| \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} [\mu(x) - \mu(a)] \right| \leq \frac{|x - a|}{|x - a|^{n+1}} \cdot M |x - a|^\alpha = \frac{M}{|x - a|^{n-\alpha}}$$

baho o'rinni. Shunday ekan, xosmas integral yaqinlashishi taqqoslashning xususiy alomatidan kelib chiqadi (14.2.4 - teorema qarang).

Demak, (14.3.4) integral Koshi ma'nosida yaqinlashib, uning bosh qiymati

$$\text{V.p.} \int_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} \mu(x) dx = \int_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}} [\mu(x) - \mu(a)] dx + \lambda_j(a) \mu(a)$$

ga teng.

Ahamiyat bering, o'ng tarafdagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashadi.

3. Xuddi yuqoridagidek, butun fazo bo'yicha integralning Koshi ma'nosida yaqinlashish tushunchasi kiritiladi.

Ta'rif. Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbb{R}^n$ da aniqlangan va lokal integrallanuvchi bo'lsin. Agar

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{|x| < R} f(x) dx$$

limit mavjud bo'lsa,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad (14.3.5)$$

integralni Koshi ma'nosida yaqinlashadi deyimiz.

Bu limit (14.3.5) xosmas integralning bosh qiymati deyiladi va

$$V.p. \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{|x| < R} f(x) dx \quad (14.3.6)$$

kabi belgilanadi.

14.3.3 - misol. Ikki karrali

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy \quad (14.3.7)$$

xosmas integralning bosh qiymati topilsin.

Qutb koordinatalarga o'tsak,

$$\int_{x^2+y^2 < R^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy = 2\pi \int_0^R \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} \rho d\rho = \pi \int_0^{R^2} \frac{\sin t}{t} dt$$

tenglikni olamiz.

Oxirgi bir o'lchovli integralning $R \rightarrow +\infty$ dagi limiti mavjud va $\pi/2$ ga teng. Shunday ekan,

$$V.p. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy = \frac{\pi^2}{2}.$$

3 - eslatma. (14.3.7) ko'rinishdagi integrallar to'liq optikasida muhim o'rin tutadi. 14.1.5 - misolga ko'ra, bu xosmas integral oddiy ma'noda uzoqlashadi va shuning uchun u ma'noga ega emas. Lekin Koshi ma'nosida yaqinlashish unga yangi bir ma'no berib, undan analiy hisob-kitoblarda foydalanishga imkon beradi.

4 - eslatma. 14.3.2 - misoldagiga o'xshash, (14.3.7) integralni shunday o'zgartirish mumkinki, natijada hosil bo'lgan integral oddiy ma'noda yaqinlashadi. Buning uchun

$$u(\rho) = \frac{1}{\rho^2}, \quad v(\rho) = 1 - \cos \rho^2$$

deb, bo'laklab integrallash kifoya.

U holda

$$du(\rho) = -\frac{2}{\rho^3}, \quad dv(\rho) = 2\rho \sin \rho^2$$

va demak,

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 < R^2} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy &= 2\pi \int_0^R \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} \rho d\rho = \\ &= \pi \frac{1 - \cos \rho^2}{\rho^2} \Big|_{\rho \rightarrow 0}^{\rho=R} + 2\pi \int_0^R \frac{1 - \cos \rho^2}{\rho^4} \rho d\rho = \\ &= \pi \frac{1 - \cos R^2}{R^2} + \int_{x^2+y^2 < R^2} \frac{1 - \cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} dx dy. \end{aligned}$$

Bundan chiqdi,

$$V.p. \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1 - \cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} dx dy,$$

bunda o'ng tarafdagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashadi.

4*. Endi umumiyroq ko'rinishga ega bo'lgan

$$I(g) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \sin(x^2 + y^2) dx dy \quad (14.3.8)$$

xosmas integralni qaraymiz.

14.3.4 - misol. Agar

$$G(\rho) = \int_0^{2\pi} g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi \quad (14.3.9)$$

funksiya $\rho \rightarrow +\infty$ da monoton kamayib, nolga intilsa, (14.3.8) xosmas integralning Koshi ma'nosida yaqinlashishini ko'rsating.

Qutb koordinatalariga o'tib, quyidagi

$$\begin{aligned} & \int_{x^2+y^2 < R^2} g(x, y) \sin(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^R \sin \rho^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^R G(\rho) \sin \rho^2 \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{R^2} G(\sqrt{t}) \sin t dt \end{aligned}$$

tenglikni olamiz.

$G(\sqrt{t})$ funksiya $t \rightarrow +\infty$ da monoton ravishda nolga intilgani uchun, oxirgi integral, Dirixle-Abel alomatiga ko'ra, $R \rightarrow +\infty$ da limitga ega.

Bundan chiqdi,

$$V.p. \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \sin(x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty G(\sqrt{t}) \sin t dt. \quad (14.3.10)$$

5 - eslatma. Umuman aytganda, (14.3.10) tenglikni o'ng tarafidagi xosmas integral shartli yaqinalshadi. Agar (14.3.9) tenglik bilan aniqlangan $G(\rho)$ funksiya differentsiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi yetarlicha tez nolga intilsa, u holda bu integralni bo'laklab integrallab, absolyut yaqinalshuvchi integralga keltirish mumkin.

5*. Ba'zi hollarda kengayuvchi sharlar o'rniga $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oluvchi boshqa tayinlangan ketma-ketliklar olinadi. Masalan, ikki o'zgaruvchili holda kengayuvchi konsentrik

$$D(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\} \quad (14.3.11)$$

doiralar o'rniga ba'zan, tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan, quyidagi

$$Q(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R, |y| < R\} \quad (14.3.12)$$

ko'rinishdagi kengayuvchi kvadratlar olinadi.

Lekin bunda shuni hisobga olish kerakki, bunday kengayuvchi sohalar bo'yicha integrallarining limiti mavjud bo'lgan funksiyalar sinfi Koshi bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar sinfidan farq qiladi.

14.3.5 - misol. Quyidagi

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

xosmas integralni qaraylik.

Integral ostidagi funksiyaning har bir x va y o'zgaruvchi bo'yicha juft ekanini hisobga olib,

$$Q_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R, |y| < R\}$$

kvadrat bo'yicha qismaniy integralni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} I(Q_R) &= \int_{Q_R} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dx dy = \\ &= 2 \int_{-R}^R \sin x^2 dx \int_{-R}^R \cos y^2 dy = 8 \left(\int_0^R \sin x^2 dx \right) \cdot \left(\int_0^R \cos y^2 dy \right). \end{aligned}$$

O'ng tarafdagi har bir integral Dirixle-Abel alomatiga ko'ra (6.6.4 - misolga qarang), $R \rightarrow +\infty$ da chekli limitga ega bo'lib, 17 - bobda ko'rsatilganidek ((17.2.34) va (17.2.35) formulalarga qarang), bu limit $\sqrt{\pi/8}$ ga teng, ya'ni

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos y^2 dy = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Demak, kvadratlar bo'yicha integrallar ketma-ketligi limitga ega va

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I(Q_R) = \pi.$$

Ammo, kengayuvchi doiralalar bo'yicha limitning mavjud emasligini ko'rsatish qiyin emas, ya'ni qaralayotgan funksiya Koshi ma'nosida integrallanuvchi bo'lmaydi. Haqiqatan, qutb koordinatalariga o'tib,

$$\int_{x^2+y^2 < R^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 2\pi \int_0^R \sin r^2 r dr = \pi(1 - \cos R^2)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ravshanki, $R \rightarrow +\infty$ da o'ng taraf limitga ega emas.

Navbatdagi misol yuqoridagi tasdiqling teskarisi ham o'rinli ekanini, ya'ni kengayuvchi doiralalar bo'yicha integrallarning yaqinlashishidan kengayuvchi kvadratlar bo'yicha integrallarning yaqinlashishi kelib chiqmasligini ko'rsatadi.

14.3.6 - misol. $g(x, y)$ funksiyaning qutb koordinatalarida

$$g(r, \varphi) = r^4 \cos 4\varphi$$

ko'rinishda aniqlaylik.

Bu funksiya $R > 0$ radiusli doirada olingan integral nolga teng:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_0^R r^5 dr \int_0^{2\pi} \cos 4\varphi d\varphi = 0.$$

Demak, integral Koshi ma'nosida yaqinlashadi va u nolga teng.
Lekin $g(r, \varphi)$ funksiyani

$$g(r, \varphi) = r^4(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - 6r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = x^4 + y^4 - 6x^2 y^2$$

ko'rinishda ham yozishimiz mumkin. Shunday ekan, bu funksiya
 $\{|x| \leq R, |y| \leq R\}$ kvadrat bo'yicha integral uchun

$$\int_{-R}^R \int_{-R}^R (x^4 + y^4 - 6x^2 y^2) dx dy = \frac{4R^6}{5} + \frac{4R^6}{5} - 6 \frac{2R^3}{3} \cdot \frac{2R^3}{3} = -\frac{16}{15} R^6$$

tenglik o'rinli.

Demak, kvadratlar bo'yicha integrallar $R \rightarrow +\infty$ da $-\infty$ ga intiladi, ya'ni qaralayotgan funksiya Koshi ma'nosida kvadratlar bo'yicha integrallanuvchi emas.

6 - eslatma. Yuqorida shartli yaqinlashuvchi karrali integrallarning mavjud emasligi qayd qilingan edi. Shunday bo'lsada, Koshi bo'yicha yaqinlashuvchi karrali xosmas integrallar, aslida, xuddi bir o'lchovli holdagi shartli yaqinlashuvchi integrallar rolini o'ynaydi. Koshi bo'yicha yaqinlashish xosmas ma'noda integrallanuvchi funksiyalar sinfini va demak, mos ravishda, karrali xosmas integrallar yordamida yechiladigan masalalar sinfini sezilarli darajada kengaytirishga imkon beradi.

14.4-§. Misollar

1 - misol. Quyidagi

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + |x|)^p (1 + |y|)^q}$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. 14.1.2 - teoremdan foydalanib, $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini shunday tanlangki, natijada o'rganilayotgan integral yaqinlashish masalasi bir karrali integral yaqinlashishini o'rganishga kelsin.

2 - misol. Quyidagi

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-3x^2-3y^2-2xy-2x+2y-2} dx dy$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Agar $\xi = x - y + 1$ va $\eta = x + y$ almashtirish bajarsak, integral

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\xi^2-2\eta^2-1} d\xi d\eta = e^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\xi^2-2\eta^2} d\xi d\eta$$

ko'rinishga keladi.

Endi $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi ketma-ketlik elementlari sifatida $E_k = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, |\xi| < k, |\eta| < k\}$ to'plamlarni olish yetarli.

3 - misol. Agar $E = \mathbb{R} \times [0, 1]$ bo'lib, E sohada integrallanuvchi φ funksiya uchun $0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, quyidagi

$$I = \iint_E \frac{\varphi(x, y) dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p}$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Ravshanki, I integral quyidagi

$$I_1 = \iint_E \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} = \iint_E f(x, y) dx dy$$

integral bilan bir vaqtda yoki yaqinlashadi, yoki uzoqlashadi. Endi

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{agar } (x, y) \in E \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

deb belgilasak, I_1 integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy$$

ko'rinishga keladi. Bu integralni, § 14.1 natijalaridan foydalanib, yaqinlashishga tekshirish qiyin emas.

4 - misol. Agar $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$ bo'lsa, quyidagi

$$I = \iint_E e^{-(x+y)} dx dy$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Avval

$$F(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{agar } (x, y) \in E \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

deb belgilab, I integralni § 14.1 da o'rganilgan

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy$$

xosmas integral ko'rinishiga keltiring. Endi integral ostidagi funktsiyaning manfiymas ekanini hisobga olib, integralni 14.1.2 - teorema yordamida yaqinlashishga tekshiring.

5 - misol. Agar $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ bo'lib, E sohada integrallanuvchi φ funksiya uchun $0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, quyidagi

$$I = \iiint_E \frac{\varphi(x, y, z) dx dy dz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p}$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. Integral yaqinlashishiga φ funksiya ta'sir qilmasligiga ishonch hosil qilib, I integral yaqinlashishini 14.2.1 - misoldagi singari o'rganing.

6 - misol. Agar $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ bo'lsa, quyidagi

$$I = \iint_E \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

xosmas integralni hisoblang.

Ko'rsatma. Qutb koordinatalar sistemasiga o'ting. Integral $-\frac{\pi}{2}$ ga teng.

7 - misol. Ushbu

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^p(1+m)^q}$$

ikki karrali qator p va q larning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Ko'rsatma. Agar $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ desak, 14.1.6 - teoreмага ko'ra, S qator

$$\iint_Q \frac{dx dy}{(1+|x|)^p(1+|y|)^q}$$

xosmas integral yaqinlashganda yaqinlashadi. Bu integralni yaqinlashishga tekshirish uchun 1 - misoldan foydalaning.

8 - misol. Ushbu

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-k^2-m^2}$$

ikki karrali qatorni yuqoridan baholang.

Ko'rsatma. 14.1.6 - teorema va 14.1.2 - misoldan foydalaning.

9 - misol. Agar

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x| > \frac{1}{2} \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya berilgan bo'lsa,

$$f(x, y) = \psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) - \psi(x)$$

funksiya uchun kengayuvchi doiralar va kengayuvchi kvadratlar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi limiti farq qilishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Kengayuvchi doiralar bo'yicha integrallar limitini hisoblashda, $\psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$ funksiya $\psi(x)$ dan tekislikni koordinatalar boshi atrofida $\pi/4$ burchakka burish natijasida hosil bo'lgani sababli, bu ikki funksiya dan markazi koordinatalar boshida bo'lgan har qan-day doira bo'yicha olingan integrallar o'zaro teng ekanini hisobga oling.

Kengayuvchi kvadratlar bo'yicha integrallar limitini hisoblashda esa, $\psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$ funksiya dan istalgan kvadrat bo'yicha olingan integral diagonal va undan 1 birlik yuqoridan o'tgan parallel to'g'ri chiziq orasidagi yo'lakchani yuziga teng ekanidan foydalaning.

10 - misol. Yuqoridagi misol belgilashlarida

$$g(x, y) = \sqrt{2} \cdot \psi(x) - \psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$$

funksiya uchun kengayuvchi doiralar va kengayuvchi kvadratlar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi limiti farq qilishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Kengayuvchi kvadratlar bo'yicha integrallar limiti yuqoridagi misolda keltirilgan xossalarga tayanib hisoblanadi.

Kengayuvchi doiralar bo'yicha integrallar limitini hisoblashda esa, $g(x, y)$ funksiya ni quyidagi

$$g(x, y) = (\sqrt{2} - 1) \cdot \psi(x) + \left[\psi(x) - \psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

ko'rinishda yozib olib, yuqorida keltirilgan misoldagi mulohazalardan foydalaning.

15-bob. Egri chiziqli integrallar

15.1-§. Birinchi tur egri chiziqli integrallar

1. Ta'rif. Ma'lumki, f funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan integralni, shu kesma bilan ustma-ust tushuvchi va chiziqli zichligi f funksiyaga teng bo'lgan, o'zakni massasi deb hisoblash mumkin. Endi bordiyu kesma bukilib, biror egri chiziqqa aylangan bo'lsa, u holda bunday bukilgan o'zak massasini qanday topish mumkin?

Buning uchun xuddi kesma bo'yicha olingan aniq integral holdagidek ish tutamiz. Chunonchi, bu egri chiziqni qisman yoylarga bo'larmiz va har bir bo'lakni taxminan bir jinsli deb faraz qilib, barcha bo'laklar massasini yig'ib chiqamiz. Aynan mana shu hosil bo'lgan kattalik bukilgan o'zakning taxminiy massasi bo'lib, uning qiymati egri chiziqli integral tasavvurini beradi.

Shunday qilib, $A \in \mathbb{R}^2$ va $B \in \mathbb{R}^2$ nuqtalarni tutashtiradigan sodda (ya'ni o'zini o'zi kesmaydigan) to'g'rilanuvchi $L \subset \mathbb{R}^2$ yasasi egri chiziq berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqni $M_1, M_2, \dots, M_{m-1}$ nuqtalar yordamida m ta ΔL_k yoylarga bo'lamiz. So'ngra $M_0 = A$ va $M_m = B$ deb, hosil bo'lgan bo'linishni T harfi bilan belgilaymiz. Har bir ΔL_k yoy M_{k-1} va M_k nuqtalarni tutashtirsin va

$$L = \bigcup_{k=1}^m \Delta L_k,$$

$$|L| = \sum_{k=1}^m |\Delta L_k|$$

tengliklar bajarilsin deb faraz qilamiz. Bu yerda yoyning absolyut qiymati uning uzunligini anglatadi. T bo'linishning diametri deb

$$d(T) = \max_k |\Delta L_k|$$

songa aytamiz.

Faraz qilaylik, L da aniqlangan biror $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya (masalan, $f(x)$ funksiya $x = (x_1, x_2) \in L$ nuqtadagi chiziqli zichlik bo'lishi mumkin) berilgan bo'lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqtalarni tanlab,

$$\sigma_T(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot |\Delta L_k| \quad (15.1.1)$$

integral yig'indini tuzamiz.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d(T) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday T bo'linish uchun, $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqtalarni tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ravishda biror I soni topilib, quyidagi

$$|\sigma_T(f) - I| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda I soniga (15.1.1) integral yig'indilarining $d(T) \rightarrow 0$ dagi limiti deyiladi.

Integral yig'indilarining limiti f funksiya L egri chiziq bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral deyiladi va

$$\int_L f dl = \int_{AB} f(x) dl(x) \quad (15.1.2)$$

ko'rinishda belgilanadi.

2. Parametrik ko'rinishda berilgan

$$L = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad a \leq t \leq b\} \quad (15.1.3)$$

egri chiziqni qaraymiz.

Eslatib o'tamiz, agar $\Phi(t)$ vektor-funksiyaning har ikki φ va ψ komponentasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, L egri chiziq silliq deyiladi.

Agar $\Phi'(\tau) = 0$ bo'lsa, (15.1.3) parametrik ko'rinishda berilgan L egri chiziqning $\xi = \Phi(\tau)$ nuqtasi *maxsus* deyiladi. Bundan buyon biz egri chiziqni faqat shunday parametrlashtirishni qaraymizki, bunda egri chizig'imiz maxsus nuqtaga ega bo'lmasin.

Biz dastlab tabiiy parametrlashtirishni qaraymiz. Chunonchi, agar $L(x)$ berilgan L egri chiziqning A nuqtasidan x nuqtasigacha bo'lgan qismi bo'lsa, $|L(x)| = l$ deb belgilaylik. U holda L egri chiziqning quyidagi

$$x = \Phi^*(l) = (\varphi^*(l), \psi^*(l)) \quad (15.1.4)$$

ko'rinishda berilishi *tabiiy parametrlash* deyiladi.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

15.1.1 - teorema. Faraz qilaylik, L tabiiy parametrlashtirilgan sodda to'g'rilanuvchi yassi egri chiziq bo'lib, f shu egri chiziqda berilgan funksiya bo'lsin. U holda

$$\int_L f(x) dl = \int_0^{|L|} f[\varphi^*(l)\psi^*(l)] dl \quad (15.1.5)$$

tenglik o'rinli bo'lib, agar bu integrallardan biri mavjud bo'lsa, ikkinchisi ham mavjud bo'ladi.

Isbot. Agar $l_0 = 0$, $l_m = |L|$ deb, $[0, |L|]$ kesmaning

$$l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_m$$

nuqtalari tashkil qilgan ixtiyoriy P bo'linishini qarasak, bunga mos ravishda L egri chiziqning $x_k = \Phi^*(l_k)$ kabi aniqlangan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ nuqtalari biror T bo'linishni aniqlaydi. Aksincha, L egri chiziqning har qanday bo'linishiga $[0, |L|]$ kesmaning biror bo'linishi mos keladi. Bevosita tabiiy parametrlashtirishning ta'rifidan

$$\Delta l_k \equiv l_k - l_{k-1} = |\Delta L_k|$$

tenglik kelib chiqadi.

Agar ixtiyoriy ravishda $\lambda_k \in [l_{k-1}, l_k]$ nuqtani tanlasak, bu nuqtaga $\xi_k = \Phi^*(\lambda_k) = (\varphi^*(\lambda_k), \psi^*(\lambda_k))$ ko'rinishda aniqlangan $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqta mos keladi va bu moslik o'zaro bir qiymatli bo'ladi.

Demak,

$$\sum_{k=1}^m f(\xi_k) \cdot |\Delta L_k| = \sum_{k=1}^m f(\varphi^*(\lambda_k), \psi^*(\lambda_k)) \Delta l_k \quad (15.1.6)$$

tenglik o'rinli.

Ahamiyat bering, bu tenglikning chap tarafida (15.1.5) ning chap tarafidagi egri chiziqli integralga mos keluvchi integral yig'indi va o'ng tarafida esa, (15.1.5) ning o'ng tarafidagi aniq integralga mos keluvchi integral yig'indi turibdi. Shunday ekan, agar bir integral yig'indining limiti mavjud bo'lsa, ikkinchi integral yig'indining ham limiti mavjud bo'lib, bu limitlar o'zaro teng bo'ladi.



3. Endi umumiy parametrlashtirish holiga o'tamiz, ya'ni (15.1.3) formulada t , yoy uzunligi bilan ustina-ust tushishi shart bo'lmagan, ixtiyoriy parametr bo'lsin.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

15.1.2 - teorema. Faraz qilaylik, L (15.1.3) formula bilan berilgan va maxsus nuqtaga ega bo'lmagan egri chiziq bo'lsin. Agar f funksiya L da uzluksiz bo'lsa, u holda f dan L egri chiziq bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral mavjud bo'lib, u uchun

$$\int_L f(x) dl = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (15.1.7)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. Ravshanki, (15.1.3) parametrlashtirish (15.1.4) tabiiy parametrlashtirish bilan quyidagicha bog'langan: agar

$$x = \Phi^*(l) = \Phi(t)$$

bo'lsa, u holda yuqorida aniqlangan $L(x)$ uchun

$$|L(x)| = l = \int_a^t \sqrt{[\varphi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2} ds \quad (15.1.8)$$

munosabat o'rinli.

Endi (15.1.5) ning o'ng tarafidagi integralda

$$l(t) = \int_a^t \sqrt{[\varphi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2} ds \quad (15.1.9)$$

almashtirish bajarsak, integralda o'zgaruvchi almashtirish qoidasiga ko'ra, (15.1.7) formulaga ega bo'lamiz.

■

Eslatma. L egri chiziqli yopiq bo'lganda ham, ya'ni $\Phi(a) = \Phi(b)$ bo'lganda ham (15.1.7) formula o'rinli bo'lib qolaveradi.

15.1.1 - misol. Agar $a > 0$ bo'lsa, quyidagi

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$$

egri chiziqli bo'yicha ushbu

$$I = \int_L |y|^{1/3} dl$$

birinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin.

Bu egri chiziqli astroida deb ataladi. Uning parametrik ko'rinishi quyidagicha

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

yoziyadi.

Shuning uchun

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = 9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)$$

bo'lib, ildiz olsak,

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} = 3a |\cos t \sin t| = \frac{3a}{2} |\sin 2t|$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan tashqari, integral ostidagi funksiya (x, y) o'zgaruvchilarining har biri bo'yicha juft bo'lgani uchun,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} |\psi(t)|^{1/3} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} |\psi(t)|^{1/3} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

deb yozish mumkin.

Demak,

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\pi/2} a^{1/3} |\sin t| \cdot \frac{3a}{2} |\sin 2t| dt = 6a^{4/3} \int_0^{\pi/2} \sin t \sin 2t dt = \\ &= 3a^{4/3} \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin 3t \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = 4a^{4/3}. \end{aligned}$$

4. Fazoviy egri chiziqlar uchun ham birinchi tur egri chiziqli integral xuddi yuqoridagidek kiritiladi. Chunonchi, $A \in \mathbb{R}^3$ va $B \in \mathbb{R}^3$ nuqtalarni tutashtiruvchi sodda (ya'ni o'zini o'zi kesmaydigan) to'g'riylanuvchi $L \subset \mathbb{R}^3$ egri chiziqni qaraylik. Berilgan egri chiziqni $M_1, M_2, \dots, M_{m-1}$ nuqtalar yordamida m ta ΔL_k yoyga bo'lamiz. $M_0 = A$ va $M_m = B$ deb, hosil bo'lgan bo'linishni T bilan belgilaymiz. Har bir ΔL_k yoy M_{k-1} va M_k nuqtalarni tutashtirsin va

$$L = \bigcup_{k=1}^m \Delta L_k,$$

$$|L| = \sum_{k=1}^m |\Delta L_k|$$

tengliklar bajarilsin deb faraz qilamiz. Bu yerda yoyning absolyut qiymati uning uzunligini anglatadi. T bo'linishning diametri deb

$$d(T) = \max_k |\Delta L_k|$$

songa aytamiz.

Ixtiyoriy $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun istalgan ravishda $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqtalarni tanlab, quyidagi

$$\sigma_T(f) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \cdot |\Delta L_k| \quad (15.1.10)$$

integral yig'indini tuzamiz.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d(T) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday T bo'linish uchun, $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqtalarni tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ravishda biror I soni topilib, quyidagi

$$|\sigma_T(f) - I| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda I soniga (15.1.10) integral yig'indilari-ning $d(T) \rightarrow 0$ dagi limiti deyiladi.

Integral yig'indilari limiti f funksiyadan L fazoviy egri chiziq bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral deyiladi va

$$\int_L f(x) dl = \int_{AB} f(x) dl(x)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Faraz qilaylik, L fazoviy egri chiziq parametrik ko'rinishda, ya'ni

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad a \leq t \leq b\} \quad (15.1.11)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Eslatib o'tamiz, agar $\Phi(t)$ vektor-funksiyaning uchchala φ , ψ va χ komponentasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, L egri chiziq silliq deyiladi.

Agar $\Phi'(\tau) = 0$ bo'lsa, $\xi = \Phi(\tau)$ nuqta parametrik ko'rinishda berilgan (15.1.11) silliq egri chiziqning *maxsus* nuqtasi deyiladi. Xuddi yuqoridagidek, biz o'rganilayotgan parametrik ko'rinishdagi fazoviy silliq egri chiziqni maxsus nuqtaga ega emas deb hisoblaymiz.

5. Yassi egri chiziq holidagidek, fazoviy egri chiziq tabiiy parametrlashtirilganda, ya'ni parametr sifatida yoy uzunligi l olinib, egri chiziq

$$x = \Phi^*(l) = (\varphi^*(l), \psi^*(l), \chi^*(l)),$$

ko'rinishda berilganda, egri chiziqli integral $[0, |L|]$ kesma bo'yicha olingan oddiy aniq integral orqali osongina ifodalanadi.

15.1.3 - teorema. Faraz qilaylik, L tabiiy parametrlashtirilgan soddaga to'g'riylanuvchi egri chiziq bo'lib, f shu egri chiziqli aniqlangan funksiya bo'lsin. U holda

$$\int_L f(x) dl = \int_0^{|L|} f[\varphi^*(l), \psi^*(l), \chi^*(l)] dl \quad (15.1.12)$$

tenglik o'rinli bo'lib, agar bu integrallardan biri mavjud bo'lsa, ikkinchisi ham mavjud bo'ladi.

Isbot xuddi 15.1.1 - teorema isbotidek.

Umumiy ko'rinishdagi parametrlashda 15.1.2 - teorema singari tasdiq o'rinli.

15.1.4 - teorema. Faraz qilaylik, L (15.1.11) formula bilan berilgan maxsus nuqtasiz silliq egri chiziq bo'lsin. Agar f funksiya L bo'ylab uzluksiz bo'lsa, u holda f funksiya L bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral mavjud bo'lib, u uchun

$$\int_L f(x) dl = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt \quad (15.1.13)$$

tenglik o'rinli.

Isbot 15.1.2 - teorema isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

15.1.2 - misol. Burama egri chiziqlarning bir o'rami bo'lmish

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = R \cos t, y = R \sin t, z = ht, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

fazoviy egri chiziq bo'yicha olingan quyidagi

$$I = \int_L z \, dl$$

birinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin.

Ravshanki,

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 = R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + h^2 = R^2 + h^2.$$

Demak, (15.1.14) formulaga ko'ra,

$$I = \int_0^{2\pi} ht \sqrt{R^2 + h^2} \, dt = 2\pi^2 h \sqrt{R^2 + h^2}.$$

15.2-§. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar

1. Egri chiziqli integrallarning yana boshqa xili L egri chiziq bo'yicha harakatdagi nuqtaga ta'sir qiluvchi $\mathbf{F}$ kuch bajarayotgan mexanik ish ta'rif bilan bog'liqdir. Avval $\mathbf{F}$ kuchni o'zgarmas deylik. Agar harakat to'g'ri chiziq bo'yicha ro'y berayotgan bo'lib, boshlan-g'ich va oxirgi nuqtalarni tutashtiruvchi vektorni $\mathbf{s}$ deb belgilasak, u holda A ish

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

skalyar ko'paytmaga teng bo'ladi.

Endi, faraz qilaylik, o'zgaruvchi $F(x, y, z)$ kuch ta'sirida qaralayotgan nuqta $L = AB$ egri chiziq bo'ylab A nuqtadan B nuqttagacha harakatlansin. Bu kuch bajargan ishini topish maqsadida, odatdagidek $M_0 = A$ va $M_m = B$ deb, L egri chiziqni $M_0, M_1, M_2, \dots, M_m$ nuqtalar yordamida ΔL_k qismaniy yoylarga bo'lamiz. Hosil bo'lgan $T = \{M_0, M_1, \dots, M_m\}$ bo'linish diametrini shunchalik kichik qilib tanlaylikki, bunda qismaniy yoylarni taxminan kesma deb va F kuchni esa, bu yoylarda o'zgarmas deb hisoblash mumkin bo'lsin.

Fazoning M_{k-1} va M_k nuqtalarini tutashtiruvchi vektorni Δl_k orqali belgilaylik, ya'ni

$$\Delta l_k = M_k - M_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

F kuchning M_{k-1} nuqtadan M_k nuqttagacha bajargan ishini taxminan

$$F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta l_k \quad (15.2.1)$$

skalyar ko'paytmaga teng deyish mumkin, bunda (ξ_k, η_k, ζ_k) nuqta ΔL_k qismaniy yoyniing istalgan nuqtasidir. Bundan chiqdi, A dan to B gacha bajarilgan to'la ish taxminan quyidagi

$$\sigma_T(F) = \sum_{k=1}^m F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta l_k \quad (15.2.2)$$

integral yig'indiga teng.

Agar $d(T) \rightarrow 0$ da (15.2.2) integral yig'indilar limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limit F vektor-funksiyadan AB egri chiziq bo'yicha olingan *ikkinchi tur egri chiziqli integral* deyiladi va

$$\int_{AB} F dl = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T(F) \quad (15.2.3)$$

kabi belgilanadi.

Birinchii tur egri chiziqli integralning ikkinchi tur egri chiziqli integraldan asosiy farqi shundaki, ikkinchi tur integral integrallanayotgan egri chiziqda o'rnatilgan yo'nalishga bog'liqdir. Boshqacha

aytganda, birinchi tur integral uchun

$$\int_{AB} f(x) dl = \int_{BA} f(x) dl$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ikkinchi tur integral uchun esa,

$$\int_{AB} \mathbf{F} dl = - \int_{BA} \mathbf{F} dl$$

tenglik o'rinli.

Bu tengliklarning fizik ma'nosi tushunarli: bukilgan o'zakning massasini o'lchash bu o'zakning yo'nalishiga bog'liq emas, ammo biror masofada bajarilgan ishni hisoblashda harakat yo'nalishiga qarab quvvat ortishi yoki kamayishi mumkin.

Navbatdagi bandda biz birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni bog'lovchi matematik munosabatlarni o'rnatamiz. Bunda biz $\mathbb{R}^3$ fazosi nuqtalari koordinatalarini (x, y, z) ko'rinishda belgilaymiz.

2. Faraz qilaylik, kuch vektori quyidagi

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

komponentalarga va $\Delta \mathbf{l}_k$ vektor esa,

$$\Delta \mathbf{l}_k = (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)$$

komponentalarga ega bo'lsin.

Bunda (15.2.1) skalyar ko'paytma

$$\mathbf{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta \mathbf{l}_k =$$

$$= P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k$$

ko'rinishda yoziladi.

Shunday ekan, (15.2.2) integral yig'indini, har bir komponentaga mos keluvchi, uchta integral yig'indiga ajratish mumkin:

$$\sigma_T(F) = \sigma_T^{(1)}(P) + \sigma_T^{(2)}(Q) + \sigma_T^{(3)}(R),$$

bu yerda

$$\sigma_T^{(1)}(P) = \sum_{k=1}^m P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k, \quad (15.2.4)$$

$$\sigma_T^{(2)}(Q) = \sum_{k=1}^m Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k, \quad (15.2.5)$$

$$\sigma_T^{(3)}(R) = \sum_{k=1}^m R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k \quad (15.2.6)$$

deb belgilangan.

Biz har bir (15.2.4)-(15.2.6) integral yig'indini T bo'linishning $d(T)$ dimetri nolga intilganda limitga ega bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu limitlar ham ikkinchi tur egri chiziqli integral deb ataladi va quyidagi

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T^{(1)}(P) = \int_{AB} P(x, y, z) dx, \quad (15.2.7)$$

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T^{(2)}(Q) = \int_{AB} Q(x, y, z) dy, \quad (15.2.8)$$

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma_T^{(3)}(R) = \int_{AB} R(x, y, z) dz \quad (15.2.9)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, (15.2.3) ikkinchi tur egri chiziqli integralni koordinatalar bo'yicha

$$\int_{AB} \mathbf{F}(x, y, z) dl = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (15.2.10)$$

deb yozishimiz mumkin.

E'tibor bering, xuddi birinchi tur egri chiziqli integral singari, (15.2.3) ikkinchi tur egri chiziqli integral, va demak (15.2.10) yig'indi ham, Dekart koordinata sistemasini parallel ko'chirish va burishda o'z qiymatini saqlaydi. Bu bevosita egri chiziqli integral ta'rifidan kelib chiqadi. Lekin, shunga qaramasdan, har bir (15.2.7)-(15.2.9) ko'rinishdagi ikkinchi tur egri chiziqli integral, ravshanki, koordinata sistemasini tanlanishiga bog'liqdir.

Agar L egri chiziq biror koordinata o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotsa, u holda bu o'qqa mos (15.2.7)-(15.2.9) ko'rinishdagi egri chiziqli integral nolga aylanadi. Masalan, agar L egri chiziq Oxy tekislikda yotsa, u holda barcha k larda $\Delta z_k = 0$ bo'lgani sababli, (15.2.6) integral yig'indida hamina hadlar nolga teng. Shuning uchun, integral yig'indilarining limiti ham, ya'ni (15.2.9) integral ham nolga teng.

3. Berilgan $A \in \mathbb{R}^3$ va $B \in \mathbb{R}^3$ nuqtalarni tutashtiruvchi uzluksiz sodda (ya'ni o'zini o'zi kesmaydigan) $L \subset \mathbb{R}^3$ fazoviy egri chiziqni qaraylik. Bu egri chiziqni $L = AB$ deb ham belgilaymiz. Faraz qilaylik, bu egri chiziq

$$M = \Phi^*(l) = (\varphi^*(l), \psi^*(l), \chi^*(l)), \quad 0 \leq l \leq |L|,$$

ko'rinishda tabiiy parametrlashtirilgan bo'lib, l parametr yoyning A nuqtadan boshlab o'lchalgan uzunligi bo'lsin. Agar nuqta bu egri chiziq bo'ylab harakatlanayotganda l parametr o'ssa, u holda nuqtani A dan B ga qarab harakatlanayapti deb hisoblaymiz. Bunda $L = AB$ egri chiziqda yo'nalish o'rnatilgan (yoki egri chiziq orientirlangan) deymiz. Ravshanki, xuddi shu egri chiziqni yoy uzunligini B nuqtadan boshlab o'lchab, teskari yo'nalishda ham orientirlash mumkin. Boshqacha aytganda, AB va BA egri chiziqlar o'zaro qarama-qarshi yo'nalishlarda orientirlangan.

$L = AB$ silliq egri chiziqning, chetki B nuqtasidan farqli, har qanday M nuqtasida quyidagi ko'rinishda aniqlangan τ («tau» deb o'qiladi) urinma vektorni kiritish mumkin. Aytaylik, M nuqtani L egri chiziq bo'ylab B ga qarab siljitish natijasida u biror $M' \in L$

nuqtaga o'tsin. M nuqtadan M' nuqtaga yo'naltirilgan birlik vektorni qaraymiz. Ravshanki, bu vektor

$$e = \frac{MM'}{|MM'|}$$

ko'rinishga ega.

Agar M' nuqta M ga intilganda e birlik vektor biror τ vektorga intilsa, ana shu limit vektorni L egri chiziqqa M nuqtada o'tkazilgan *urinma* deb ataymiz.

Bunday ta'rifdan ko'rinish turibdiki, *urinnma* vektor egri chiziqning shakli va unda o'rnatilgan yo'nalish orqali aniqlanib, egri chiziqning qanday parametrlashtirilganiga bog'liq emas.

4. Aytaylik, L silliq egri chiziqning, undagi yo'nalishni saqlovchi va

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad (15.2.11)$$

ko'rinishga ega bo'lgan, ixtiyoriy parametrlashtirishi berilgan bo'lsin. Bu degani, t parametr oshgan sari A nuqta bilan $\Phi(t)$ nuqtani tutashtiruvchi yoy uzunligi ham oshib borsin.

Eslatib o'tamiz, biz parametrik ko'rinishda berilgan va maxsus nuqtaga ega bo'lmagan silliq egri chiziqlarni qaraymiz, ya'ni butun $[a, b]$ kesmada $\Phi'(t) \neq 0$ deb faraz qilamiz.

Agar silliq egri chiziq maxsus nuqtaga ega bo'lmasa, u holda $[a, b]$ kesmada

$$|\Phi'(t)|^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 > 0, \quad a \leq t \leq b,$$

tengsizlik bajariladi.

$[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $|\Phi'(t)|$ funksiya, Veyershttrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra, shu kesmada o'zining M maksimal va m minimal qiymatlariga erishadi. Ravshanki, $M \geq m > 0$ bo'lib, quyidagi

$$m \leq |\Phi'(t)| \leq M, \quad a \leq t \leq b, \quad (15.2.12)$$

tengsizlik o'rinli.

5. Faraz qilaylik, $\Phi(t)$ vektor-funksiya (15.2.11) tenglik bilan aniqlangan bo'lsin. t argumentga yetarlicha kichik $h > 0$ musbat orttirma berib, $\Phi(t)$ nuqtadan $\Phi(t+h)$ nuqtaga yo'nalgan $e(h)$ birlik vektorni qaraylik. Ravshanki, bu vektor

$$e(h) = \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{|\Phi(t+h) - \Phi(t)|} \quad (15.2.13)$$

ko'rinishga ega.

Mana shu $e(h)$ birlik vektorning $h \rightarrow 0 + 0$ da τ vektorga, ya'ni biz AB egri chiziqlarning M nuqtadagi *urinmasi* deb atagan vektorga, intilishini ko'rsatamiz.

Buning uchun (15.2.13) munosabatni

$$e(h) = \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} \cdot \frac{h}{|\Phi(t+h) - \Phi(t)|} \quad (15.2.14)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Farazimizga ko'ra AB egri chiziq silliq bo'lgani uchun, (15.2.14) ning o'ng tarafidagi birinchi kasr $\Phi(t)$ vektor-funksiya hosilasiga intiladi, ya'ni

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \Phi'(t).$$

Demak,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} \right| = |\Phi'(t)|.$$

Bundan chiqdi, *urinma* vektori mavjud va u

$$\tau(t) = \frac{\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} \quad (15.2.15)$$

ko'rinishga ega ekan.

L egri chiziq maxsus nuqtaga ega bo'lmagani uchun, (15.2.12) dan maxrajning noldan qat'iy katta ekani kelib chiqadi.

6*. Yuqorida qayd qilinganidek, L egri chiziqqa urinma vektorining ta'rifidan uning egri chiziq shakli va unda o'rnatilgan yo'nalishga bog'liqligi va shu bilan birga, egri chiziqni qanday parametrlashtirilganiga bog'liqmasligi kelib chiqadi. Bu tasdiqni bevosita (15.2.15) formuladan ham keltirib chiqarish mumkin. Haqiqatan, aytaylik, o'sha L egri chiziq yo'nalishni saqlovchi boshqa ko'rinishda, ya'ni

$$\Phi_1(s) = (\varphi_1(s), \psi_1(s), \chi_1(s)), \quad a_1 \leq s \leq b_1,$$

ko'rinishda ham parametrlashtirilgan bo'lsin. L egri chiziq sodda (ya'ni o'zini o'zi kesmaydigan) bo'lib, maxsus nuqtaga ega bo'lmagani uchun, shunday silliq $g: [a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$ funksiya topiladiki, qayd qilingan ikki parametrlashtirish o'zaro

$$\Phi(t) = \Phi_1[g(t)], \quad a \leq t \leq b,$$

kabi bog'langan bo'ladi. Yo'nalishning saqlanishi va maxsus nuqtaning yo'qligidan $g'(t) > 0$, $t \in [a, b]$, tengsizlik kelib chiqadi. Shunday ekan, murakkab funksiyaning differensiallashi qoidasiga ko'ra,

$$\Phi'(t) = \Phi'_1(s) \cdot g'(t), \quad |\Phi'(t)| = |\Phi'_1(s)| \cdot g'(t)$$

tengliklarga ega bo'larniz.

Demak,

$$\tau(t) = \frac{\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} = \frac{\Phi'_1(s)}{|\Phi'_1(s)|} = \tau_1(s),$$

ya'ni yangi parametrlashtirish bilan aniqlangan τ_1 urinma vektor τ bilan, ya'ni dastlabki urinma vektor bilan ustma-ust tushar ekan.

7. (15.2.11) belgilashni hisobga olib, (15.2.15) tenglikni quyidagi

$$\tau(t) = \frac{(\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}} \quad (15.2.16)$$

koordinatalar ko'rinishida yozish mumkin.

Bevosita bu tenglikka ko'ra, $[0, \pi]$ kesmada o'zaro bir qiymatli aniqlangan shunday uchta α, β, γ son topiladiki, ular uchun

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}}, \quad (15.2.17)$$

$$\cos \beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}}, \quad (15.2.18)$$

$$\cos \gamma = \frac{\chi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}}, \quad (15.2.19)$$

tengliklar va

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

munosabat bajariladi.

(15.2.17)-(15.2.19) dagi kattaliklar τ urinma vektorning *yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi va odatda,

$$\tau = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Urinma vektor egri chiziq shakli va unda o'rnatilgan yo'nalish orqali aniqlanib, egri chiziqning qanday parametrlashtirilganiga bog'liq bo'lmagani uchun, yo'naltiruvchi kosinuslar, odatda, parametrning emas, balki M nuqtaning, aniqrog'i bu nuqtani (x, y, z) koordina-talarining funksiyasi deb hisoblanadi. Shuning uchun yuqoridagi tenglik batafsilroq

$$\tau(x, y, z) = (\cos \alpha(x, y, z), \cos \beta(x, y, z), \cos \gamma(x, y, z))$$

kabi yoziladi.

8. Parametrik ko'rinishda berilgan

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), a \leq t \leq b\} \quad (15.2.20)$$

egri chiziqni qaraymiz.

Eslatib o'tamiz, agar φ , ψ va χ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluk-siz differentsiallanuvchi bo'lsa, L egri chiziq silliq deb atalar edi. Biz L silliq egri chiziqni maxsus nuqtaga ega emas deb, ya'ni $\Phi = (\varphi, \psi, \chi)$ akslantirishning $\Phi'(t)$ hosilasi $[a, b]$ kesmaning birorta ham nuqtasida nolga aylanmaydi deb faraz qilamiz. Bunday akslantirishlar quyidagi muhim xossaga ega.

15.2.1 - lemma. Faraz qilaylik, L (15.2.20) formula bilan berilgan silliq egri chiziq bo'lib, maxsus nuqtaga ega bo'lmasin. $[a, b]$ kesmaning istalgan P bo'linishini olib, L egri chiziqning Φ akslantirish yordamida aniqlangan mos bo'linishini T bilan belgilaymiz. Agar m va M orqali $|\Phi(t)|$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi mos ravishda minimumi va maksimumini belgilasak, u holda bu bo'linishlarning $d(P)$ va $d(T)$ diametrlari quyidagi

$$m \cdot d(P) \leq d(T) \leq M \cdot d(P)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. $[a, b]$ kesmaning istalgan

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

bo'linishi berilgan bo'lsin. $M_k = \Phi(t_k)$ deb, L egri chiziqning $M_0, M_1, \dots, M_m$ nuqtalari tashkil qilgan T bo'linishini qaraymiz.

Uzunligi $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ga teng bo'lgan $[t_{k-1}, t_k]$ qismaniy kesmani Φ akslantirish $\Delta L_k = M_{k-1} M_k$ qismaniy yoyga otkazadi. Bu yoyning uzunligi

$$|\Delta L_k| = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi'(t)| dt$$

ga teng.

Endi (15.2.12) tengsizlikni qo'llasak,

$$m \cdot \Delta t_k \leq |\Delta L_k| \leq M \cdot \Delta t_k$$

bahoga ega bo'lamiz.

Demak, istalgan k nomer uchun

$$m \cdot \Delta t_k \leq |\Delta L_k| \leq M \cdot d(P)$$

va

$$m \cdot \Delta t_k \leq d(T) \leq M \cdot d(P)$$

tengsizliklar o'rinli.

Ravshanki, bevosita oxirgi bahodan lemmaning tasdig'i kelib chiqadi.

Navbatdagi tasdiq ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni hisoblashni kesma bo'yicha olingan oddiy aniq integralni hisoblashga olib keladi.

15.2.1 - teorema. Faraz qilaylik, L (15.2.20) formula bilan berilgan silliq egri chiziq bo'lib, maxsus nuqtaga ega bo'lmasin. Agar f funksiya L egri chiziq bo'ylab uzluksiz bo'lsa, bu funksiya L bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar mavjud bo'lib, quyidagi

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cdot \varphi'(t) dt, \quad (15.2.21)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dy = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cdot \psi'(t) dt \quad (15.2.22)$$

va

$$\int_{AB} f(x, y, z) dz = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cdot \chi'(t) dt \quad (15.2.23)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. (15.2.21) tenglikning to'g'ri ekanini ko'rsatamiz. (15.2.8) ta'rifga ko'ra, (15.2.21) ning chap tarafidagi integral (15.2.5) ko'rinishdagi integral yig'indilarning limitiga teng, ya'ni

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k. \quad (15.2.24)$$

Orientirlangan $L = AB$ egri chiziqning istalgan $M_0, M_1, \dots, M_m$ nuqtalari tashkil qilgan T bo'linishi berilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesmaning bu bo'linishga mos kelgan, ya'ni $\Phi(t_k) = M_k$ tenglik orqali aniqlanuvchi nuqtalar tashkil qilgan

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

bo'linishini qaraymiz. Ravshanki,

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt.$$

Agar biror $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta L_k$ nuqtani tanlasak, $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \Phi(\tau_k)$ tenglik unga $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ nuqtani mos qo'yadi.

Shunday ekan, (15.2.24) ning o'ng tarafidagi integral yig'indini

$$\sigma_P^{(1)}(f) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^m f(\Phi(\tau_k)) \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar (15.2.21) tenglikning o'ng tarafidagi integralni I simvoli orqali belgilasak, bu integralning additivligiga asosan,

$$\sigma_P^{(1)}(f) - I = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\Phi(\tau_k)) - f(\Phi(t))] \cdot \varphi'(t) dt$$

tenglikni olamiz.

15.2.1 - lemnaga ko'ra, agar L egri chiziqni T bo'linishining $d(T)$ diametri yetarlicha kichik bo'lsa, u holda $[a, b]$ kesmaning mos P bo'linishining $d(P)$ diametri ham yetarlicha kichik bo'ladi.

Shartga ko'ra, $f(\Phi(t))$ funksiya $[a, b]$ kesmada tekis uzluksiz. Shunday ekan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $[a, b]$ kesma bo'linishining diametrini shunchalik kichik qilsih mumkinki, har bir $[t_{k-1}, t_k]$ qis-miy kesmada

$$|f(\Phi(\tau_k)) - f(\Phi(t))| < \varepsilon, \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k], \quad t \in [t_{k-1}, t_k],$$

baho bajariladi.

Demak, T bo'linish diametri yetarlicha kichik bo'lganda,

$$\begin{aligned} \left| \sigma_P^{(1)}(f) - I \right| &\leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varepsilon |\varphi'(t)| dt \leq \varepsilon \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi'(t)| dt = \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^m |\Delta L_k| = \varepsilon |L| \end{aligned}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bu baho (15.2.24) integral yig'indilarining limiti I ga teng ekani-ni, ya'ni talab qilingan (15.2.21) tenglikning bajarilishini angla-tadi.



15.2.1 - misol. Parametrning o'sish yo'nalishi bo'yicha quyida-gi

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = R \cos t, y = R \sin t, z = ht, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

fazoviy egri chiziq bo'ylab olingan

$$I = \int_L y dx + x dy + z dz$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Buning uchun (15.2.21)-(15.2.23) formulalarni qo'llash yetarli:

$$I = \int_0^{2\pi} (R \sin t \cdot R \sin t + R \cos t \cdot R \cos t + ht \cdot h) dt = 2\pi (R^2 + \pi h^2).$$

9. Navbatdagi teorema ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni birinchi tur egri chiziqli integrallar orqali ifodalashga imkon beradi.

15.2.2 - teorema. Faraz qilaylik, L (15.2.20) formula bilan berilgan silliq egri chiziq bo'lib, maxsus nuqtaga ega bo'lmasin. L egri chiziqqa (x, y, z) nuqtada o'tkazilgan urinma vektorni

$$\tau(x, y, z) = (\cos \alpha(x, y, z), \cos \beta(x, y, z), \cos \gamma(x, y, z))$$

deb belgilaymiz.

Agar f funksiya L bo'ylab uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya L egri chiziq bo'ylab olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar birinchi tur egri chiziqli integral bilan quyidagi

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx = \int_L f(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z) dl, \quad (15.2.25)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dy = \int_L f(x, y, z) \cos \beta(x, y, z) dl, \quad (15.2.26)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dz = \int_L f(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) dl \quad (15.2.27)$$

tengliklar yordamida bog'langan.

Isbot. (15.2.25) formulaning o'ng tarafidagi birinchi tur egri chiziqli integralni (15.1.13) formula yordamida parametr bo'yicha olingan aniq integralga keltiramiz:

$$\int_L f(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z) dl =$$

$$= \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cos \alpha \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

Oxirgi integralda $\cos \alpha$ ni uning (15.2.17) formuladagi qiymati, ya'ni

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}}$$

bilan almashtiramiz.

Natijada

$$\int_L f(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z) dl = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan va yuqorida isbotlangan (15.2.21) formuladan talab qilingan (15.2.25) tenglik kelib chiqadi.

(15.2.26) va (15.2.27) tengliklar ham xuddi shunga o'xshab isbotlanadi.

■

1 - eslatma. Isbotlangan teoreмага ko'ra, (15.2.10) tenglikni quyidagi

$$\begin{aligned} & \int_{AB} F(x, y, z) dl = \\ & = \int_{AB} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dl \end{aligned} \quad (15.2.28)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu formulani ko'pincha vektor ko'rinishda, ya'ni

$$\int_{AB} F(x, y, z) dl = \int_{AB} F \cdot \tau dl \quad (15.2.29)$$

deb yozishadi.

E'tibor bering, (15.2.29) ning chapida ikkinchi tur egri chiziqli integral va o'ng tomonida esa, birinchi tur egri chiziqli integral turibdi. Birinchi tur egri chiziqli integral egri chiziqda o'rnatilgan yo'nalishga bog'liq emas, ammo yo'nalish teskarisiga o'zgartirilganda τ urinma vektor $-\tau$ ga o'zgaradi va shuning uchun, ikkala integralning ishorasi o'zgarib, tenglik o'z kuchida qoladi:

$$\int_{BA} \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{l} = \int_{BA} \mathbf{F} \cdot \tau d\mathbf{l}.$$

2 - eslatma. Agar $d\mathbf{l}$ vektor AB egri chiziqlarning τ urinma vektori va $d\mathbf{l}$ skalyar differensial bilan quyidagi

$$d\mathbf{l} = \tau d\mathbf{l}$$

ko'rinishda bog'langan deb kelishib olsak, formal ravishda (15.2.29) tenglikning to'g'riligi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi.

10. Fazoviy egri chiziq bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integralni qanday aniqlagan bo'lsak, xuddi shu usulda bunday integralni tekislik-dagi egri chiziq bo'yicha ham aniqlashimiz mumkin. Ammo bunga o'rin yo'q, chunki har qanday yassi egri chiziqni fazoviy egri chiziq deb ham qarashimiz mumkin.

Haqiqatan, egri chiziqlarning (15.2.20) tenglamasida oxirgi komponenta aynan nol bo'lsin deylik, ya'ni $\chi(t) \equiv 0$ deb faraz qilaylik. Bu talab egri chiziqlarning tekislikda, aniqrog'i, Oxy tekisligida yotishini anglatadi. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning ta'rifiga ko'ra, bu holda $\mathbf{F}$ vektor-funksiyaning oxirgi $R(x, y, z)$ komponentasi integral qiymatiga ta'sir qilmaydi va shuning uchun, $R(x, y, z) \equiv 0$ deb hisoblash mumkin. Natijada z ga bog'liqlik yo'qoladi va biz tekislik-dagi egri chiziq bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integralga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, L yassi egri chiziq parametrik ko'rinishda

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b\} \quad (15.2.30)$$

kabi berilgan bo'lsin.

Bu egri chiziqni

$$\tilde{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = 0, a \leq t \leq b\}$$

ko'rinishda berilgan fazoviy egri chiziq deb ham qarash mumkin. L egri chiziqli berilgan $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ vektor-funksiyani esa, $\tilde{L}$ egri chiziqli berilgan $\tilde{\mathbf{F}} = (P, Q, 0)$ vektor-funksiya deb hisoblashimiz mumkin.

Shunday ekan, $\mathbf{F}$ vektor-funksiyadan L yassi egri chiziq bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integralni biz

$$\int_L \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{\tilde{L}} \tilde{\mathbf{F}} d\mathbf{l}$$

tenglik orqali aniqlaymiz.

Yassi egri chiziq bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integral koordinatalarda

$$\int_L \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (15.2.31)$$

ko'rinishda yoziladi.

(15.2.16) formulaga ko'ra, L egri chiziqqa o'tkazilgan urinma vektor shu egri chiziq bilan bitta tekislikda yotadi va koordinatalarda

$$\tau(t) = \frac{(\varphi'(t), \psi'(t))}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}} \quad (15.2.32)$$

ko'rinishga ega.

Ravshanki, har qanday $t \in [a, b]$ son olganda ham $-\pi < \alpha \leq \pi$ shartni qanoatlantiruvchi shunday yagona α soni topiladiki, u uchun

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}}$$

tengliklar bajariladi.

Bunda, agar $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ desak, L egri chiziqqa (x, y) nuqtada o'tkazilgan urinma vektor Ox o'q bilan α burchak tashkil qiladi deyiladi va

$$\tau(x, y) = (\cos \alpha(x, y), \sin \alpha(x, y)) \quad (15.2.33)$$

deb yoziladi.

Shunday qilib, yassi egri chiziq holida urinma vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari o'rniga urinma vektor bilan abssissa o'qi tashkil qilgan burchak tushunchasi ishlatilar ekan.

15.2.2 - misol. Parametrik ko'rinishda berilgan

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

aylanaga o'tkazilgan urinma vektorni toping.

Quyidagi

$$\varphi(t) = R \cos t, \quad \psi(t) = R \sin t$$

belgilashlarni kiritaylik.

U holda (15.2.32) formulaga ko'ra, urinma vektor uchun quyidagi

$$\tau(t) = \frac{(-R \sin t, R \cos t)}{\sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}} = (-\sin t, \cos t)$$

tenglikni olamiz.

Agar $\sin t = y/R$ va $\cos t = x/R$ tengliklarni hisobga olsak, o'ng tomondan parametrni yo'qotib,

$$\tau = \frac{(-y, x)}{R^2}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu vektor abssisa o'qi bilan shunday α burchak tashkil qiladiki, u uchun

$$\cos \alpha = -\frac{y}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{x}{R}$$

tengliklar bajariladi.

11*. Agar $L \in \mathbb{R}^2$ silliq egri chiziqning $M_0 = (x_0, y_0) = \Phi(t_0)$ nuqtasi maxsus bo'lmasa, ya'ni $\Phi'(t_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda L egri chiziqni shu nuqtaning yetarlicha kichik atrofida yotgan qismi biror uzluksiz differensiallanuvchi funksiya grafigi bilan ustma-ust tushadi.

Haqiqatan, masalan $\varphi'(t_0) \neq 0$ deb faraz qilsak, $x_0 = \varphi(t_0)$ nuqtaning biror atrofida $t = \varphi^{-1}(x)$ teskari funksiya aniqlangan bo'ladi. Natijada, agar $f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ desak, egri chiziqli tenglamasi $M_0 = (x_0, y_0)$ nuqtaning biror U atrofida

$$y = f(x)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Qulaylik uchun M_0 nuqtaning ko'rsatilgan U atrofida lokal koordinatalarga o'tamiz. Bu koordinatalarni shunday tanlash mumkinki, bunda urinma tenglamasi nihoyatda sodda ko'rinishga ega bo'ladi. Bunday koordinatalarni kiritish uchun bizga muhim bir tushuncha, ya'ni yassi egri chiziqqa o'tkazilgan normal tushunchasi kerak.

$L \subset \mathbb{R}^2$ silliq yassi egri chiziqqa istalgan $M \in L$ nuqtasida o'tkazilgan *normal* deb $\tau(M)$ urinma vektorga ortogonal birlik vektorga aytamiz. Ravshanki, agar $\mathbf{n}$ normal bo'lsa, $(-\mathbf{n})$ vektor ham normal bo'ladi va yassi egri chiziqning qaralayotgan nuqtasidan boshqa normal o'tmaydi.

15.2.3 - misol. Faraz qilaylik,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$$

aylana quyidagi

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu aylanaga o'tkazilgan normal topilsin.

15.2.2 - misolga ko'ra, (x, y) nuqtadagi urinma vektor

$$\tau = \frac{(-y, x)}{R^2}$$

ko'rinishga ega.

Ravshanki, $\mathbf{n} = \frac{(x, y)}{R^2}$ vektor urinma vektorga (x, y) nuqtada ortogoal bo'lib, uzunligi 1 ga teng, ya'ni bu vektor normaldir. Yana boshqa normal vektor $-\mathbf{n} = \frac{(-x, -y)}{R^2}$ ga teng.

Markazi $M_0 = (x_0, y_0)$ nuqtada bo'lib, abssissa o'qi τ urinma vektor bo'ylab va ordinata o'qi $\mathbf{n}$ normal bo'ylab yo'nalgan to'g'ri burchakli $\{M_0\tau\mathbf{n}\}$ lokal koordinatalar sistemasini kiritamiz. M nuqtaning yangi (ξ, η) kordinatalari eski (x, y) koordinatalari bilan quyidagicha

$$\xi = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha,$$

$$\eta = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha$$

bog'langan.

E'tibor bering, bu yerda α shunday burchakki, u uchun $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$.

Yangi koordinatalardan eski koordinatalarga o'tish formulasi

$$x = x_0 + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha,$$

$$y = y_0 + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$$

ko'rinishga ega.

M_0 nuqtaning yuqorida ko'rsatilgan U atrofi yangi koordinatalarda koordinata boshining biror V atrofiga o'tadi. Ana shu V atrofda (ξ, η) o'zgaruvchilarning

$$F(\xi, \eta) = y(\xi, \eta) - f[x(\xi, \eta)] =$$

$$= y_0 + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha - f[x_0 + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha]$$

funksiyasini qaraymiz.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \cos \alpha + f'(x) \sin \alpha.$$

Shuning uchun $(\xi, \eta) = (0, 0)$ nuqtada

$$\frac{\partial F(0, 0)}{\partial \eta} = \cos \alpha + f'(x_0) \sin \alpha = \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \neq 0$$

shart bajariladi.

Demak, koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrofida $F(\xi, \eta) = 0$ tenglama η ga nisbatan yechiladi. Bu degani, L egri chiziqli tenglamasi bu atrofda

$$\eta = g(\xi), \quad (\xi, \eta) \in L, \quad (15.2.34)$$

kabi beriladi; bu yerda g funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, u $F(\xi, g(\xi)) = 0$ tenglama orqali oshkormas ko'rinishda berilgan. Bu funksiya hosilasi

$$g'(\xi) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{\partial F}{\partial \eta}} = - \frac{\sin \alpha - f'(x) \cos \alpha}{\cos \alpha + f'(x) \sin \alpha}$$

ga teng.

Agar $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ tenglikni e'tiborga olsak,

$$g'(0) = - \frac{\sin \alpha - f'(x_0) \cos \alpha}{\cos \alpha + f'(x_0) \sin \alpha} = - \frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha} = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak, g funksiya koordinatalar boshida

$$g(0) = g'(0) = 0 \quad (15.2.35)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Ravshanki, egri chiziqlarning qaralayotgan qismi g funksiyaning lokal koordinatalardagi grafigi bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, har qanday maxsus nuqtasiz silliq egri chiziqni lokal ravishda (15.2.35) shartni qanoatlantiruvchi (15.2.34) tenglama orqali berish mumkin.

E'tibor bering, lokal koordinatalarda M_0 nuqtadagi urinma vektor va normal mos ravishda

$$\tau = (1, 0), \quad n = (0, 1)$$

kabi aniqlanadi.

3 - eslatma. Urinma vektor va normalni biz faqat maxsus nuqtasiz silliq egri chiziqlar uchun aniqladik. Kesмага homeomorf bo'lgan har qanday uzluksiz egri chiziq uchun ham urinma vektor va normalni aniqlab bo'lmaydi. Agar L egri chiziq bo'lakli-silliq bo'lsa, u holda urinma va normal faqat chiziq silliq bo'lgan nuqtalardagina kiritiladi. Egri chiziqlarning ikki silliq qismini ulangan nuqtalarda (bunday nuqtalar chekli sonda bo'ladi) normal va urinma aniqlanmagan.

12. Yassi egri chiziq bo'ylab ikkinchi tur egri chiziqli integrallar uchun 15.2.1 - va 15.2.2 - teoremlar o'rinli. Biz ularni navbatdagi ikki tasdiq ko'rinishida keltiramiz.

15.2.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, L (15.2.30) formula bilan berilgan silliq egri chiziq bo'lib, maxsus nuqtaga ega bo'lmasin. Agar f funksiya L bo'ylab uzluksiz bo'lsa, u holda f dan L egri chiziq bo'ylab olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar mavjud bo'lib,

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \varphi'(t) dt, \quad (15.2.36)$$

$$\int_L f(x, y) dy = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \psi'(t) dt \quad (15.2.37)$$

tengliklar bajariladi.

15.2.2 - tasdiq. Faraz qilaylik, L (15.2.30) formula bilan berilgan silliq egri chiziq bo'lib, maxsus nuqtaga ega bo'lmasin. L egri chiziqqa (x, y) nuqtada o'tkazilgan urinma vektorni

$$\tau(x, y) = (\cos \alpha(x, y), \cos \beta(x, y))$$

deb belgilaymiz.

Agar f funksiya L bo'ylab uzluksiz bo'lsa, u holda f funksiya L egri chiziq bo'ylab olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar birinchi tur egri chiziqli integral bilan quyidagi

$$\int_L f(x, y) dx = \int_L f(x, y) \cos \alpha(x, y) dl, \quad (15.2.38)$$

$$\int_L f(x, y) dy = \int_L f(x, y) \sin \alpha(x, y) dl \quad (15.2.39)$$

tengliklar yordamida bog'langan.

Bu tasdiqlarni to'g'riligi bevosita 15.2.1 - va 15.2.2 - teoremlardan kelib chiqadi.

E'tibor bering, agar L egri chiziq ordinatalar o'qiga parallel kesmadan iborat bo'lsa, u holda bu kesmaning har bir nuqtasida $\alpha = \pi/2$ yoki $\alpha = -\pi/2$ bo'ladi. Demak, $\cos \alpha = 0$ bo'lib, har qanday f funksiya uchun (15.2.38) egri chiziqli integral nolga teng. Shunga o'xshash, agar L absissalar o'qiga parallel kesmadan iborat bo'lsa, u holda (15.2.39) egri chiziqli integral nolga teng.

4 - eslatma. Yuqorida keltirilgan barcha tasdiqlar bo'lakli-silliq egri chiziq uchun ham, ya'ni chekli sondagi silliq qismlarga ajratish mumkin bo'lgan egri chiziq uchun ham, o'rinli. Bunday egri chiziq bo'yicha egri chiziqli integral barcha silliq qismlar bo'yicha olingan egri chiziqli integrallar yig'indisi sifatida aniqlanadi.

13. Amaliy masalalarni yechishda yopiq yassi egri chiziq bo'yicha olingan, ya'ni egri chiziqning (15.2.30) parametrilashtirishi $\Phi(a) =$

$\Phi(b)$ shartni qanoatlantirgan holdagi ikkinchi tur egri chiziqli integrallar muhim rol o'ynaydi.

Agar L egri chiziq birlik aylananing homeomorf aksi bo'lsa, u Jordan egri chizig'i deyiladi.

Ravshanki, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ aylana $\mathbb{R}^2$ tekislikni ikki qismga bo'ladi: birinchisi quyidagi

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \quad (15.2.40)$$

chegarlangan soha bo'lib, ikkinchisi esa, ushbu

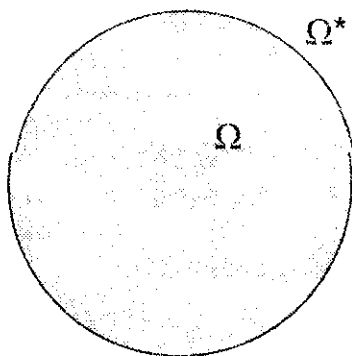
$$\Omega^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \quad (15.2.41)$$

chegaralanmagan sohadir.

Boshqacha aytganda,

$$\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega \cup \Omega^* \quad (15.2.42)$$

bo'lib, bunda Ω va Ω^* lar yuqoridagi bog'lamli ochiq o'zaro kesishmaydigan to'plamlardir (15.1 - rasim).



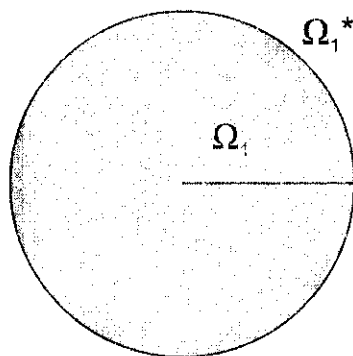
15.1-rasim

Jordanning klassik teoremasiga ko'ra, aylananing homeomorf aksi ham aynan shu xossaga ega. Chunonchi, har qanday L Jordan egri chizig'i tekislikni ikki Ω va Ω^* ochiq bog'lamli to'plamlarga bo'ladi; bulardan biri chegarlangan bo'lib, ikkinchisi esa, chegaralanmagan to'plamlardir. Bu to'plamlar o'zaro kesishmaydi va

(15.2.42) shartni qanoatlantiradi. Bundan tashqari, L egri chiziq Ω to'plamni ham va Ω^* to'plamni ham chegarasidir, ya'ni

$$L = \partial\Omega = \partial\Omega^*. \quad (15.2.43)$$

E'tibor bering, har qanday ochiq bog'lamli to'plam chegarasining Jordan egri chizig'i bo'lishi shart emas. Haqiqatan, agar (15.2.40) ochiq birlik doiradan abssissalar o'qining $[0, 1]$ yarim intervalini chiqarib tashlasak, hosil bo'lgan Ω_1 to'plam bog'lamli, ochiq va chegaralangan bo'ladi. Uning $\partial\Omega_1$ chegarasi birlik aylana va chiqarib tashlangan $[0, 1]$ yarim interval birlashmasidan iborat (15.2 - rasm).



15.2-rasm

Bu chegaraning Jordan egri chizig'i emasligi aniq. Bundan tashqari, $\Omega_1^* = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_1$ desak,

$$\partial\Omega_1 \neq \partial\Omega_1^*$$

munosabat o'rinli.

Shuni aytish kerakki, Jordan teoremasining mazmuni yaqqol ko'rinib turgan bo'lsa ham, uning isboti texnik jixatdan ancha murakkab va katta hajmga ega. Shu sababli biz isbotni bu yerda keltirmaymiz.

Bundan buyon, *kontur* deganda biz bo'lakli-silliq Jordan egri chizig'ini tushunamiz. Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, har qanday L Jordan egri chizig'i biror chegaralangan Ω sohaning chegarasidan

iborat bo'lib, L egri chiziqni istalgan nuqtasining har qanday atrofi-da Ω ga tegishli nuqtalar ham, $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ ga tegishli nuqtalar ham mavjud.

Biror $L = \partial\Omega$ kontur bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integralni aniqlash uchun bu konturda qanday tartibda yo'nalish o'rnatishni kelishib olishimiz kerak.

Ravshanki, har qanday konturda ikki o'zaro qarama-qarshi yo'nalish tanlash mumkin va bunga mos ravishda, egri chiziqning har bir nuqtasida urinma vektor sifatida o'zaro qarama-qarshi yo'nalgan ikki vektordan birini tanlash mumkin. Biz maxsus bir yo'nalish tanlash usulini ko'rsatib, bu yo'nalishni musbat va unga teskari yo'nalishni esa, manfiy yo'nalish deb ataymiz. Albatta, musbat yo'nalishni tanlash tekislikda berilgan Dekart koordinatalar sistemasining qanday orientirlanganiga bog'liq.

Avval $L = \partial\Omega$ silliq konturda istalgan bir yo'nalish tanlangan deb faraz qilamiz. Aytaylik, M bu konturning biror nuqtasi bo'lib, τ egri chiziqda tanlangan yo'nalishga mos keluvchi M nuqtadagi urinma vektor va n esa, M nuqtadagi ikki normaldan biri bo'lsin.

Ushbu paragrafning 11* - bandida keltirilgan mulohazalarga asoslanib, navbatdagi tasdiqni isbotlash qiyin emas:

agar $L = \partial\Omega$ silliq egri chiziqning M nuqtasi maxsus bo'lmasa, u holda shunday $\varepsilon > 0$ topiladiki, u uchun M nuqtadan chiquvchi εn yo'naltirilgan kesma butunlay (boshlang'ich M nuqta bundan istisno) yoki Ω sohasining ichida, yoki uning tashqarisida, ya'ni $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ da yotadi.

Birinchi holda normal Ω sohasining ichiga yo'nalgan va ikkinchi holda esa, normal Ω sohasining tashqarisiga yo'nalgan deyiladi.

Ω sohasining ichiga yo'nalgan noqmal *ichki* va qarama-qarshi tomonga yo'nalgan normal esa, *tashqi* noqmal deyiladi.

E'tibor bering, biz ichki normalni butunlay Ω sohasining ichida yotadi deb ayta olmaymiz. Haqiqatan, agar bu soha yetarlicha kichik bo'lsa, u holda ichki normalning birlik vektori albatta Ω dan chiqib ketishini 15.2.3 - misolda ko'rgan edik.

Berilgan konturning musbat yo'nalishini qaralayotgan tekislikdagi $\{Oxy\}$ Dekart koordinatalar sistemasiga bog'lab aniqlaymiz. Bu-

ning uchun markazi M nuqtada bo'lib, absissalar o'qi τ urinma vektor bo'ylab va ordinatalar o'qi esa, n ichki normal vektori bo'ylab yo'nalgan yangi $\{M\tau n\}$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini kiritamiz.

Agar $\{M\tau n\}$ koordinatalar sistemasini $\{Oxy\}$ Dekart koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish yordamida hosil qilish mumkin bo'lsa, u holda L da tanlangan yo'nalishni **musbat** deyimiz.

Konturning qarama-qarshi yo'nalishini *manfiy* deyimiz.

Masalan, agar tekislikdagi Dekart koordinatalar sistemi o'ng taraffi bo'lsa, u holda konturning musbat yo'nalishiga mos $\{M\tau n\}$ koordinatalar sistemi ham o'ng taraffi bo'lishi kerak.

5 - eslatma. Hayolan absissalar o'qi bo'ylab musbat yo'nalishda harakat qilayapmiz deylik. Agar bunda ordinatalar o'qi chapga yo'nalgan bo'lsa, tekislikdagi bunday Dekart koordinatalar sistemasini o'ng taraffi deyimiz. Bunday atamalashga asosanib, L konturning musbat yo'nalishini quyidagicha ta'riflashimiz mumkin:

Agar L kontur bo'ylab berilgan yo'nalishda harakatlenganda ichki normal chap tarafga yo'nalgan bo'lsa, bu yo'nalish konturning musbat yo'nalishi deyiladi.

Boshqacha aytganda, musbat yo'nalishda soha chegarasini aylanib chiqilayotganda soha chap tarafda qolishi kerak.

6 - eslatma. Musbat yo'nalish faqat yopiq kontur uchun, ya'ni bo'lakli-silliqli Jordan egri chizig'i uchun kiritiladi. Yopiq bo'lmagan egri chiziq uchun unda aniqlanishi mumkin bo'lgan ikki yo'nalish ham teng kuchlidir va bunday egri chiziqlarda musbat yo'nalish hamda ichki yoki tashqi normal kabi tushunchalar kiritilmaydi.

15.2.4 - misol. Markazi koordinatalar boshida va radiusi birga teng bo'lgan

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

doira berilgan bo'lsin. Bu doiraning chegarasidan iborat birlik aylanada musbat yo'nalishni aniqlang.

Agar aylana

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (15.2.44)$$

parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, chegaraning qanday yo'nalishda aylanib chiqilishini aniqlaymiz.

Agar $\mathbf{r} = (x, y)$ vektor $\partial\Omega$ chegaraga tegishli bo'lsa, uning komponentalari $x^2 + y^2 = 1$ shartni qanoatlantiradi. 15.2.2 - misolga ko'ra, (x, y) nuqtadagi urinma vektor

$$\boldsymbol{\tau} = (-y, x)$$

ga teng.

Ravshanki, $\mathbf{r} = (x, y)$ vektor (x, y) nuqtadagi urinmaga ortogonal bo'lib, uning uzunligi 1 ga teng. Demak, bu vektor normaldir. Boshqa normal $-\mathbf{r} = (-x, -y)$ ga teng.

Ichki normal $\mathbf{n} = -\mathbf{r}$ vektordan iborat, chunki u (x, y) nuqtadan doira markaziga yo'nalgan. Unga qarama-qarshi bo'lgan $(-\mathbf{n}) = \mathbf{r}$ vektor tashqi normaldir.

E'tibor bering, $\{M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\}$ koordinatalar sistemasi o'ng taraflidir, chunki u xuddi dastlabki $\{Oxy\}$ Dekart koordinatalar sistemasi singari orientirlangan. Haqiqatan, masalan, $(x, y) = (0, -1)$ nuqtada urinma vektori $\boldsymbol{\tau} = (1, 0)$ komponentalarga ega bo'lib, ichki normal vektori esa, $\mathbf{n} = (0, 1)$ komponentalarga ega, ya'ni urinma absissalar o'qi bilan va ichki normal esa, ordinatalar o'qi bilan bir xilda yo'nalgan.

Shunday qilib, (15.2.44) parametrlash birlik aylanada musbat yo'nalishni beradi.

7 - eslatma. (15.2.44) parametrlashda parametrlarning oshib borishi natijasida nuqtaning birlik aylana bo'ylab harakati soat miliga qarama-qarshi yo'nalishdagi harakat deyiladi. Shunday qilib, soat miliga qarama-qarshi yo'nalishdagi harakat birlik aylanada musbat yo'nalishni aniqlaydi.

8 - eslatma. Birlik aylana

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

tenglamalar bilan ham parametrlanishi mumkin.

Bu parametrlash birlik aylanada manfiy yo'nalishni aniqlaydi. Bunda nuqtaning parametr oshgandagi harakati soat mili bo'yicha bo'ladi.

Bundan buyon, yassi kontur bo'yicha egri chiziqli integralni qarayotganda, biz integrallash musbat yo'nalishda olib borilayapti deb hisoblaymiz. Ba'zan, yopiq L kontur bo'yicha integrallanayotganiga urg'u berish maqsadida, egri chiziqli integral uchun quyidagi

$$I = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

belgilashdan foydalaniladi.

15.2.5 - misol. Ushbu

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

ellips bo'yicha soat miliga teskari yo'nalishda quyidagi

$$I = \oint_L (x - y) dx + (x + y) dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ellipsni

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametrik ko'rinishda yozib olamiz.

Ravshanki, bu parametrlash ellipsning musbat yo'nalishiga mos keladi.

Yuqoridagi integralni hisoblash uchun (15.2.36) va (15.2.37) tengliklarini qo'llash yetarli:

$$I = \int_0^{2\pi} (a \cos t - b \sin t)(-a \sin t) dt + \int_0^{2\pi} (a \cos t + b \sin t)b \cos t dt = 2\pi ab.$$

15.3-§. Grin formulasi

Grin formulasi biror funksiya hosilasidan ikki o'ldhovli Ω sohasi bo'yicha olingan ikki karrali integralni bu sohaning $\partial\Omega$ chegarasi bo'yicha funksiyaning o'zidan olingan egri chiziqli integral bilan bog'laydi. Nyuton-Leybnits formulasi bir o'ldhovli integral uchun qanday rolni o'ynasa, bu formula ham matematik tahlilda xuddi shu rolni o'ynaydi.

Biz quyida $\partial\Omega$ chegarani musbat yo'nalish o'rnatilgan yopiq bo'lakli-silliqli egri chiziqli deb faraz qilamiz. Bu degani egri chiziqli shunday parametrlashtirishni anglatadiki, bunda parametr oshib borib, nuqta $\partial\Omega$ kontur bo'yicha harakatlenganda, Ω soha chap tarafdagi qoladi.

1. Biror $[a, b]$ kesmada ikki $y_1(x)$ va $y_2(x)$ uzluksiz bo'lakli-silliqli funksiyalar berilgan bo'lsin. Ushbu

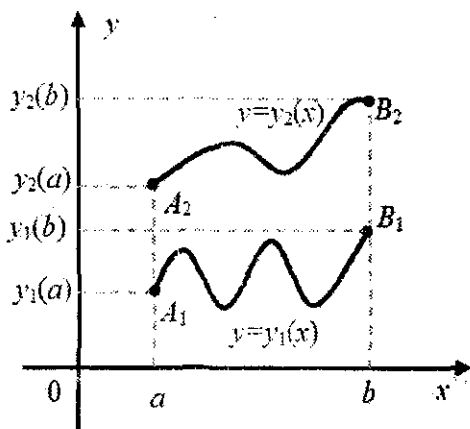
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y < y_2(x), \quad a < x < b\} \quad (15.3.1)$$

ko'rinishda berilgan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohani qaraymiz.

Bu soha chegarsiga tegishli 4 ta nuqtani

$$A_1 = (a, y_1(a)), \quad A_2 = (a, y_2(a)), \quad B_1 = (b, y_1(b)), \quad B_2 = (b, y_2(b)) \quad (15.3.2)$$

kabi belgilaymiz (15.3 - rasmi).



15.3-rasm

Musbat yo'nalish bo'yicha chegarani quyidagicha aylanib chiqish mumkin: A_1 nuqtadan boshlab $y = y_1(x)$ egri chiziq bo'ylab x ning o'sish yo'nalishida B_1 nuqttagacha harakatlanamiz, so'ngra B_1 nuqtadan B_2 nuqttagacha $x = b$ to'g'ri chiziqlarning vertikal kesmasi bo'ylab, keyin $y = y_2(x)$ egri chiziq bo'ylab x ning kamayish yo'nali-shida to A_2 nuqttagacha va nihoyat, $x = a$ to'g'ri chiziqlarning vertikal kesmasi bo'ylab A_2 nuqtadan to boshlang'ich A_1 nuqttagacha harakatlanamiz (15.3 - rasm).

Chegarani aylanish yo'nalishi haqidagi kelishuvimizni simvolik ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\oint_{\partial\Omega} = \int_{A_1B_1} + \int_{B_1B_2} + \int_{B_2A_2} + \int_{A_2A_1}. \quad (15.3.3)$$

Biz bitta yoki ikkala vertikal kesmani nuqtaga aylanish holini istisno qilmaymiz. Shu sababli har qanday qavariq sohani (15.3.1) ko'rinishda yozish mumkin.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

15.3.1 - teorema. Faraz qilaylik, $P(x, y)$ funksiya va uning $\frac{\partial P}{\partial y}$ qismiy hosilasi (15.3.1) ko'rinishdagi $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohada

uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx \quad (15.3.4)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tarafdagi integral Ω sohasining chegarasi bo'yicha, ya'ni yopiq egri chiziqli bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.

Isbot. Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra,

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)).$$

Bu tenglikni x bo'yicha $[a, b]$ kesmada integrallasak,

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx$$

tenglikka ega bo'larniz.

Chap tarafdagi takroriy integral, 12.5.2 - teoremaga ko'ra, Ω sohasi bo'yicha olingan ikki karrali integralga teng. O'ng tarafdagi integrallar esa, ikkinchi tur egri chiziqli integrallar bilan ustina-ust tushadi. Shuning uchun bu tenglikni

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_{A_2 B_2} P(x, y) dx - \int_{A_1 B_1} P(x, y) dx \quad (15.3.5)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Boshqa tarafdin, (15.3.4) ning o'ng tarafdagi egri chiziqli integralni, (15.3.3) ga ko'ra,

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx = \left(\int_{A_1 B_1} + \int_{B_1 B_2} + \int_{B_2 A_2} + \int_{A_2 A_1} \right) P(x, y) dx \quad (15.3.6)$$

deb yozsa bo'ladi.

Endi bu tenglikning o'ng tarafidagi 4 ta integralga ahamiyat beraylik. Ravshanki, B_1B_2 va A_2A_1 vertikal kesmalar bo'yicha olingan ikkinchi va to'rtinchi integrallar nolga teng. Shunday ekan, uchinchi integralda integrallash yo'nalishini qarama-qarshi tarafga o'zgartirsak,

$$\int_{\partial\Omega} P(x, y) dx = \int_{A_1B_1} P(x, y) dx - \int_{A_2B_2} P(x, y) dx$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikni (15.3.5) bilan taqqoslasak, talab qilingan (15.3.4) tenglikka kelamiz.



Natija. Agar 15.3.1 - teorema shartlari bajarilsa,

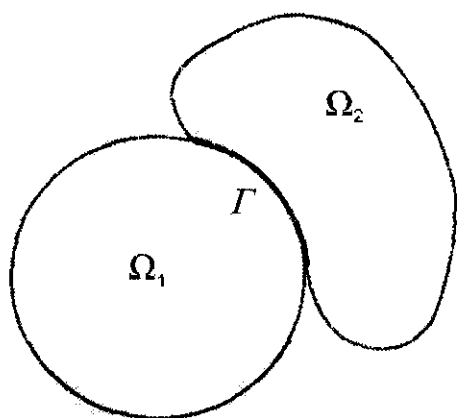
$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} P(x, y) \cos \alpha(x, y) dl, \quad (15.3.7)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu tenglikning o'ng tarafi birinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.

1 - eslatma. Isbotlangan (15.3.4) formula chekli sondagi (15.3.1) ko'rinishga ega bo'lgan sohalar birlashmasi uchun ham o'rinli. Haqiqatan, aytaylik,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$$

bo'lsin, bunda $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ - bo'lakli-silliqliq egri chiziqli va $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ (15.4 - rasm).



15.4-rasm

Har bir Ω_1 va Ω_2 soha uchun (15.3.4) tenglikni yozamiz:

$$\iint_{\Omega_k} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial \Omega_k} P(x, y) dx, \quad k = 1, 2.$$

Bu tengliklarni qo'shib, ikki karrali integralning additivligiga ko'ra,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial \Omega_1} P(x, y) dx - \int_{\partial \Omega_2} P(x, y) dx$$

tenglikni olamiz.

Endi

$$\int_{\partial \Omega} P(x, y) dx = \int_{\partial \Omega_1} P(x, y) dx + \int_{\partial \Omega_2} P(x, y) dx$$

ekanini qayd etish yetarli.

Aslida o'ng tarafdagi yig'indi $\partial \Omega$ «tashqi» chegara va $\Gamma = \partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$ ichki egri chiziq bo'yicha olingan integraldan iborat bo'lib, bunda Γ bo'yicha ikki marta o'zaro qarama-qarshi yo'nalishlar bo'yi-cha

integrallanadi. Shuning uchun, Γ bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integral nolga teng bo'lib, faqat $\partial\Omega$ bo'yicha integral qoladi.

2 - eslatma. (15.3.1) da $y_1(x) \equiv 0$ bo'lsin deylik. (15.3.4) formulani $P(x, y) = y$ funksiyaga qo'llaymiz. U holda $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ bo'lib, (15.3.4) formulaning chap tarafidagi integral Ω sohaning $|\Omega|$ yuziga teng. Demak,

$$|\Omega| = - \oint_{\partial\Omega} y \, dx.$$

Bu egri chiziqli integralni, (15.3.6) dagi kabi, 4 ta integral yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. Bu integrallardan faqat uchinchisining noldan farqli ekanini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun

$$|\Omega| = - \int_{B_2 A_2} y \, dx.$$

Bu yerda minus ishora paydo bo'lishiga sabab shundaki, kelishuvimizga ko'ra, chegarani musbat yo'nalishda aylanayotganda, B_2 nuqtadan A_2 nuqttagacha yoy bo'yicha harakat x o'zgaruvchining kamayishi bilan amalga oshadi va shuning uchun integral manfiy qiymatga ega bo'ladi. Yo'nalish o'zgarganda egri chiziqli integral ishorasi o'zgargani uchun, oxirgi tenglikni quyidagi

$$|\Omega| = \int_{A_2 B_2} y \, dx = \int_a^b y_2(x) \, dx$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Bu formula $y_2(x)$ funksiya grafigi ostidagi egri chiziqli trapetsiya yuzining klassik formulasi bilan ustma-ust tushadi.

2. Endi biror $[c, d]$ kesmada ikki $x_1(y)$ va $x_2(y)$ uzluksiz bo'laklillsilliq funksiyalar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1(y) < x < x_2(y), \quad c < y < d\} \quad (15.3.8)$$

ko'rinishda berilgan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohani qaraymiz. Bu bandda ham biz $\partial\Omega$ chegara deganda musbat yo'nalish o'rnatilgan bo'lakli-silliqli egri chiziqni tushunamiz, ya'ni parametrning qiymati oshib borganda nuqta egri chiziq bo'ylab shunday harakat qiladiki, bunda Ω soha chap tarafda qoladi.

15.3.2 - teorema. Faraz qilaylik, $Q(x, y)$ funksiya va uning $\frac{\partial Q}{\partial x}$ qismiy hosilasi (15.3.8) ko'rinishdagi $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy \quad (15.3.9)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tarafdagi integral Ω sohasining chegarasi bo'yicha, ya'ni yopiq egri chiziq bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.

Isbot. Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra,

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx = Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y).$$

Hosil bo'lgan tenglikni y bo'yicha $[c, d]$ kesmada integrallasak,

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx = \int_c^d Q(x_2(y), y) dy - \int_c^d Q(x_1(y), y) dy$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan, xuddi 15.3.1 - teorema isbotidagidek,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{C_2 D_2} Q(x_2(y), y) dy + \int_{D_1 C_1} Q(x_1(y), y) dy$$

tenglikni olamiz, bu yerda

$$C_1 = (x_1(c), c), \quad C_2 = (x_2(c), c), \quad D_1 = (x_1(d), d), \quad D_2 = (x_2(d), d)$$

deb belgilangan. Endi gorizontal C_1C_2 va D_2D_1 kesmalar bo'yicha ikkita nolga teng bo'lgan integrallarni qo'shsak, talab qilingan (15.3.9) tenglikka ega bo'lamiz.



Natija. Agar 15.3.2 - teorema shartlari bajarilsa, quyidagi

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} Q(x, y) \sin \alpha(x, y) dl \quad (15.3.10)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu tenglikning o'ng tarafi birinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.

3 - eslatma. Isbotlangan (15.3.9) formula chekli sondagi (15.3.8) ko'rinishga ega bo'lgan sohalarning birlashmasi uchun ham o'rinli.

4 - eslatma. (15.3.8) da $x_1(y) \equiv 0$ deylik. (15.3.9) formulani $Q(x, y) = x$ funksiyaga qo'llaymiz. U holda $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ bo'lib, (15.3.9) formulaning chap tarafidagi integral Ω sohasining $|\Omega|$ yuziga teng. Demak,

$$|\Omega| = \int_{\partial\Omega} x dy = \int_{C_2D_2} x dy.$$

Oxirgi ikkinchi tur egri chiziqli integralda y ning o'sish yo'nali-shida integrallanayapti. Shuning uchun

$$|\Omega| = \int_c^d x_2(y) dy$$

bo'lib, bu formula $x_2(y)$ funksiya grafigi va ordinatalar o'qi orasidagi egri chiziqli trapetsiya yuzining klassik formulasi bilan ustma-ust tushadi.

3. Faraz qilaylik, Ω sohani chekli sondagi (15.3.1) ko'rinishga ega sohalarning yoki chekli sondagi (15.3.8) ko'rinishga ega sohalarning

birlashmasi sifatida yozish mumkin bo'lsin. Bunday sohani lo'nda qilib regulyar deb ataymiz. Regulyar soha chegarasini L orqali belgilab, uni *regulyar kontur* deymiz.

Ma'lumki, regulyar sohada har ikki 15.3.1 - va 15.3.2 - teorema o'rinli. Bu tasdiqlarni birlashtirib, Grin formulasi deb ataluvchi, navbatdagi tasdiqni olamiz.

15.3.3 - teorema (Grin formulasi). Faraz qilaylik, Ω regulyar soha bo'lib, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar yopiq $\bar{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda quyidagi

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy \quad (15.3.11)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. to'g'ridan-to'g'ri yoki, zarur bo'lsa, avval Ω sohani (15.3.1) va (15.3.8) ko'rinishdagi qismaniy sohalarga bo'lib, so'ngra, mos ravishda, 15.3.1 - va 15.3.2 - teoremlarni qo'llashdan iborat.

Grin formulasi juda ko'p tatbiqlarga ega. Masalan, kontur bo'yi-cha integral yordamida soha yuzini topish mumkin. Haqiqatan, faraz qilaylik, P va Q funksiyalar uchun

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad (15.3.12)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda (15.3.11) formulaning chap tomoni-dagi integral Ω sohasining yuziga teng.

15.3.1 - misol. Quyidagi

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$$

astroida bilan chegaralangan Ω sohaning yuzini toping.

Agar $P(x, y) = -y/2$, $Q(x, y) = x/2$ desak, (15.3.12) tenglik o'rinli bo'ladi va Grin formulasiga ko'ra,

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -y dx + x dy.$$

Astroidaning

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ko'rinishdagi parametrik tenglamasi musbat yo'nalishni beradi. Shuning uchun

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-y(t) x'(t) + x(t) y'(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t + a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t] dt = \frac{3\pi}{8} a^2. \end{aligned}$$

Grin formulasidan yana egri chiziqli integral hisoblashni ikki karali integral hisoblashga keltirishda foydalanish mumkin.

15.3.2 - misol. Agar

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$$

aylana bo'lsa, Grin formulasi yordamida

$$I = \int_L x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy.$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

$P = x^2 y^3$, $Q = -x^3 y^2$ deylik. U holda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 y^2$$

bo'lib, Grin formulasiga ko'ra,

$$I = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = -6 \iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy .$$

Oxirgi Ω doira bo'yicha integral, qutb koordinatalariga o'tib, oson hisoblanadi:

$$\begin{aligned} I &= -6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho d\rho = \\ &= -\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{\pi R^6}{4} . \end{aligned}$$

15.4-§. Egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liqmaslik sharti

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada aniqlangan $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalarni qaraymiz. Agar Ω sohada differensiallanuvchi shunday $U(x, y)$ funksiya topilsaki, uning birinchi differensiali uchun

$$dU(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (15.4.1)$$

tenglik bajarilsa, u holda

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (15.4.2)$$

ifodani Ω sohada *to'la differensial* deymiz.

Ravshanki, bunda

$$P(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \quad (15.4.3)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Ko'pincha $U(x, y)$ funksiyani $F = (P(x, y), Q(x, y))$ kuchning potentsiali deb atashadi.

Masalan,

$$x^2 dx + y^2 dy$$

ifoda to'la differensialdir, chunki $U(x, y) = (x^3 + y^3)/3$ funksiya differensial shu ifodaga teng.

Lekin, agar

$$y^2 dx + x^2 dy$$

ifodani qarasak, quyida isbotlanadigan 15.4.2 - teoremdan uning to'la differensial emasligi, ya'ni differensial bu ko'rinishga ega bo'lgan $U(x, y)$ funksiyaning mavjud emasligi kelib chiqadi.

Qanday shartlarda (15.4.2) ifodaning to'la differensial bo'lishlik masalasi, ya'ni biror $U(x, y)$ funksiya bilan (15.4.1) tenglikning bajarilishi, nihoyatda muhim ahamiyatga ega. Bu masalaning yechimlaridan biri navbatdagi teoremda keltirilgan.

15.4.1 - teorema. Faraz qilaylik, P va Q funksiyalar $\Omega \in \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda (15.4.2) ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun har qanday ikki $A \in \Omega$ va $B \in \Omega$ nuqtalar olganda ham Ω da yotuvchi hamda A va B nuqtalarni tutashtiruvchi bo'lakli-silliqliq egri chiziqli bo'yicha olingan

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (15.4.4)$$

egri chiziqli integralning integrallash yo'lini tanlashga bog'liq bo'lmashligi zarur va yetarlidir.

Isbot. 1) Faraz qilaylik, (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'lsin, ya'ni (15.4.1) shartni qanoatlantiruvchi $U(x, y)$ funksiya mavjud bo'lsin.

Bundan tashqari, A va B nuqtalarni tutashtiruvchi bo'lakli-silliqliq egri chiziqli $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ parametrik tenglama orqali berilgan

bo'lib, $\Phi(a) = A$, $\Phi(b) = B$ bo'lsin. U holda, 15.2.1 - tasdiqqa ko'ra.

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_a^b \left\{ P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Boshqa tarafdin, murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan

$$\begin{aligned} \frac{dU[\varphi(t), \psi(t)]}{dt} &= \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \psi'(t) = \\ &= P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) \end{aligned}$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday ekan, Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra,

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \frac{dU[\varphi(t), \psi(t)]}{dt} dt = U(B) - U(A).$$

Demak, integral faqat $U(x, y)$ potensialning A va B nuqtalardagi qiymatiga bog'liq bo'lib, integrallanayotgan AB egri chiziqning tanlanishiga bog'liq bo'lmay ekan.

2) Endi (15.4.4) egri chiziqli integral integrallanayotgan egri chiziqning tanlanishiga bog'liq emas deb faraz qilaylik.

Ixtiyoriy $A = (a_1, a_2) \in \Omega$ nuqtani tayinlaylik. Aytaylik, $B = (x_0, y_0) \in \Omega$ bo'lib, AB bu ikki A va B nuqtani tutashtiruvchi va Ω sohada yotuvchi silliq egri chiziq bo'lsin (eslatib o'tamiz, soha deb ochiq bog'lamli to'plamga aytgan edik). Quyidagi

$$U(x_0, y_0) = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (15.4.5)$$

belgilashni kiritamiz.

Farazimizga ko'ra, bunday aniqlangan funksiya qiymati faqat (x_0, y_0) nuqtaga bog'liq bo'lib, A va B nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqning tanlanishiqa bog'liq emas. Biz mana shu shart ostida (15.4.3) tenglik bajarilishini ko'rsatishimiz kerak.

Ravshanki, ixtiyoriy yetarlicha kichik h uchun $B_h = (x_0 + h, y_0)$ nuqta ham Ω sohada yotadi. $[BB_h]$ simvol orqali B va B_h nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani belgilaylik.

U holda, farazimizga ko'ra,

$$U(x_0 + h, y_0) = \int_{AB} P dx + Q dy + \int_{[BB_h]} P dx + Q dy. \quad (15.4.6)$$

Bu tenglikning o'ng tarafidagi birinchi integral, (15.4.5) ga asosan, $U(x_0, y_0)$ ga teng. $[BB_h]$ kesma x o'qiga parallel bo'lgani uchun, ikkinchi integralda dy ko'paytuvchi qatnashgan hadni tashlab yuborish mumkin. Natijada

$$U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) = \int_{[BB_h]} P(x, y) dx$$

tenglikka ega bo'lamiz.

$P(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtada uzluksizligiga ko'ra esa,

$$\int_{[BB_h]} P(x, y) dx = P(x_0, y_0) \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0,$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) = P(x_0, y_0) \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Bu esa,

$$\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} = P(x_0, y_0)$$

tenglikning o'rinli ekanini, ya'ni (15.4.3) dagi birinchi tenglik bajarilishini anglatadi.

Xuddi shunga o'xshab, (15.4.3) dagi ikkinchi tenglik ham isbotlanadi. ■

Natija. Faraz qilaylik, P va Q funksiyalar $\bar{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin. Agar (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'lsa, u holda istalgan regular yopiq $L \subset \Omega$ kontur uchun

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (15.4.7)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, istalgan ikki $A \in L$ va $B \in L$ nuqtani tanlab, L konturni ikki $(AB)'$ va $(BA)''$ yoyga bo'lamiz. U holda, integral A va B nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlarning tanlanishiga bog'liq emasligini hisobga olsak, talab qilingan natijani olamiz:

$$\begin{aligned} & \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & \int_{(AB)'} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{(BA)''} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & = \int_{(AB)'} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{(AB)''} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \end{aligned}$$

2. Agar P va Q funksiyalarni faqat uzluksiz emas, balki uzluksiz $\frac{\partial P}{\partial y}$ va $\frac{\partial Q}{\partial x}$ hosilalarga ham ega deb faraz qilsak, u holda (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'lishi uchun oson tekshiriladigan shartni keltirish mumkin. Bu tasdiqlarning isboti ixtiyoriy soha uchun ancha murakkab bo'lgani sababli, biz maxsus sohalar sinfini (lekin ancha keng bo'lgan) qarash bilan cheklanamiz.

Eslatib o'tamiz, agar berilgan $A \in \Omega$ nuqta bilan ixtiyoriy $B \in \partial\Omega$ nuqtani tutashtiruvchi kesmaning barcha ichki nuqtalari Ω sohada yotsa, bunday sohani A nuqtaga nisbatan yulduzli degan edik.

Masalan, har qanday qavariq soha o'zining ixtiyoriy nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'ladi.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

15.4.2 - teorema. Faraz qilaylik, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar bi-ror A nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lgan yopiq regulyar $\bar{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin.

(15.4.2) ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun Ω sohada

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \quad (15.4.8)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. 1) Faraz qilaylik, (15.4.2) ifoda biror $U(x, y)$ funksiyaning to'la differensiali bo'lsin, ya'ni U funksiya differensiali (15.4.1) ko'rinishga ega bo'lsin. U holda (15.4.3) tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklardan birinchisini y bo'yicha, ikkinchisini esa, x bo'yicha differensiallab, quyidagi

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (15.4.9)$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Teorema shartiga ko'ra, bu tengliklarning chap taraflari uzluksiz. Bundan chiqdi, tengliklarni o'ng taraflari ham uzluksiz bo'lib, aralash hosilalarning tengligi haqidagi teoremaga ko'ra, ular o'zaro teng bo'ladi, ya'ni (15.4.8) tenglik bajariladi.

E'tibor bering, teoremaning bu qismini isbotlashda biz Ω sohani yulduzli ekanidan foydalanmadik.

2) Endi (15.4.8) munosabat bajarilsin deb faraz qilaylik. U holda har qanday regulyar $G \subset \Omega$ sohani chegarasidan iborat regulyar L kontur uchun, Grin formulasiga ko'ra,

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (15.4.10)$$

tenglik o'rinli.

Berilgan A nuqta bilan ixtiyoriy (x_0, y_0) koordinataga ega bo'lgan B nuqtani tutashtiruvchi kesmani $[AB]$ orqali belgilab,

$$U(x_0, y_0) = \int_{[AB]} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (15.4.11)$$

funksiyani qaraymiz.

Agar $B_h = (x_0 + h, y_0)$ desak, Ω sohaning ochiqqligiga ko'ra, yetarlicha kichik h uchun BB_h kesma butunlayicha Ω da yotadi. Ravshanki, ABB_h uchburchak tomonlari regulyar konturni tashkil qiladi va shuning uchun, (15.4.10) tenglikka asosan,

$$\int_{[AB]} P dx + Q dy + \int_{[BB_h]} P dx + Q dy + \int_{[B_h A]} P dx + Q dy = 0 \quad (15.4.12)$$

munosabat o'rinli.

U funksiyaning (15.4.1) ta'rifiga ko'ra

$$\int_{[B_h A]} P dx + Q dy = - \int_{[AB_h]} P dx + Q dy = - U(x_0 + h, y_0)$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun, (15.4.12) dan

$$U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) = \int_{[BB_h]} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

munosabat kelib chiqadi.

Bundan, xuddi 15.4.1 - teorema isbotidagi singari,

$$U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) = P(x_0, y_0) \cdot h + o(h)$$

tenglikni olamiz.

Demak, (15.4.3) tengliklardan birinchisi bajarilar ekan.

Xuddi shu singari, (15.4.3) tengliklardan ikkinchisi ham isbotlanadi. Bundan chiqdi, (15.4.2) ifoda (15.4.11) tenglik bilan aniqlangan funksiyaning to'la differensial bo'lar ekan. ■

Natija. Faraz qilaylik, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar biror A nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lgan yopiq regulyar $\bar{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin.

Agar Ω sohada yotuvchi istalgan L aylana uchun

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (15.4.13)$$

tenglik bajarilsa, u holda (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'ladi.

Haqiqatan, (15.4.13) dan (15.4.8) tenglik kelib chiqishini ko'rsatamiz.

Buning uchun (15.4.8) tenglik biror nuqtada bajarilmasin deb faraz qilaylik. U holda, qaralayotgan qisimiy hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun, biror K doirada

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} > 0$$

tengsizlik bajariladi deyish mumkin.

Lekin, (15.4.13) farazimiz va Grin formulasiga ko'ra,

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial K} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Hosil bo'lgan qarama-qarshilik (15.4.8) tenglikning bajarilishini anglatadi. Demak, 15.4.2 - teoremaga ko'ra, (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'lar ekan.

■

Eslatma. Agar (15.3.13) tenglik istalgan L aylana uchun bajarilsa, u holda, 15.4.1 - teoremaga ko'ra, bu tenglik har qanday regulyar L kontur uchun ham bajariladi.

15.4.2 - teoremadan (15.4.8) shartning (15.4.2) ifoda biror $U(x, y)$ funksiya differensial bo'lishi uchun kriteriy ekanligi kelib chiqadi. Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, (15.4.8) shart bajarilganda har qanday $A \in \Omega$ va $B \in \Omega$ nuqtalar uchun

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = U(B) - U(A) \quad (15.4.14)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bunda AB sifatida A va B nuqtalarni tutashtiruvchi istalgan bo'lakli-silliq egri chiziqli olishimiz mumkin. E'tibor bering, U potensial o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida topiladi.

(15.4.14) tenglik $U(x, y)$ potensialni topish masalasini mos ikkinchi tur egri chiziqli integral hisoblashga keltiradi. Ammo ba'zi hollarda U potensial nisbatan oson topilib, bunda (15.4.14) tenglikdan, aksincha, egri chiziqli integralni hisoblash uchun foydalaniladi.

15.4.1 - misol. Agar AB bo'lakli-silliq egri chiziqli koordinatalar boshi $A = (0, 0)$ va $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtani tutashtirsa, u holda ushbu

$$I = \int_{AB} e^y (\cos x dx + \sin x dy) \quad (15.4.15)$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin.

Quyidagi

$$P(x, y) = e^y \cos x, \quad Q(x, y) = e^y \sin x$$

belgilashlarni kiritaylik.

Bunda (15.4.8) shartlarning bajarilishi aniq. Agar

$$U(x, y) = e^y \sin x$$

desak, ravshanki, bu funksiya uchun

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^y \cos x = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^y \sin x = Q(x, y)$$

munosabatlar o'rinli.

Demak, (15.4.15) integral ostidagi ifoda U funksiya differensial bo'lib, (15.4.14) formulaga ko'ra,

$$\int_{AB} e^y (\cos x dx + \sin x dy) = U(B) - U(A) = e^{1/2} \sin \pi/2 - 0 = \sqrt{e}.$$

3*. 15.4.2 - teorema va uning natijasi biror nuqtaga nisbatan yulduzli sohalaridan ko'ra ancha umumiyoq sohalar uchun ham o'rinli. Bu hulosaga quyida keltirilgan mulohazalarga asoslanib kelish mumkin.

Biror $A \in \Omega$ nuqtani tayinlab, uni ixtiyoriy $B \in \Omega$ nuqta bilan to'g'riylanuvchi $(AB)'$ egri chiziqli yordamida tutashtiramiz (Ω soha bog'lanli bo'lgani uchun buni amalga oshirish mumkin). So'ngra, xuddi shunday boshqa $(AB)''$ egri chiziqli olib, yo'nalishni qarama-qarshisiga o'zgartirsak, biz biror $D \subset \Omega$ sohani chegaralovchi $L = (AB)' \cup (BA)''$ konturga ega bo'lamiz. Agar (15.4.8) shart bajarilsa,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy \quad (15.4.16)$$

Grin formulasidan (15.4.16) dagi ikki karrali integralning nolga tengligi kelib chiqadi. Shuning uchun, $L = (AB)' \cup (BA)''$ kontur bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integral ham nolga teng va demak,

$$\int_{(AB)'} P dx + Q dy = \int_{(AB)''} P dx + Q dy$$

tenglik o'rinli.

Bundan chiqdi, egri chiziqli integral integrallash egri chizig'ini tanlashga bog'liq emas va demak, integral ostidagi ifoda to'la differensial bo'ladi.

Ammo bu mulohazalarni mukammal deb bo'lmaydi. Muammo shundaki, L egri chiziqli kontur bo'lmashligi, ya'ni biror D sohani chegaralovchi yopiq egri chiziqli bo'lmashligi mumkin. Xatto kontur bo'lgan taqdirda ham, u D sohasining to'la chegarasi bo'lmashligi

mumkin va shu sababli, bu holda (15.4.16) Grin formulasini qo'llab bo'lmaydi.

Mana shu qiyinchiliklarni chetlab o'tish maqsadida, 15.4.2 - teoremda biz Ω sohani yulduzli, deb faraz qildik; bunda A va B nuqtalarni tutashtiruvchi standart chiziq sifatida $[AB]$ kesmani olish mumkin.

Umumiy holda, agar nomatematik tilda aytadigan bo'lsak, Ω sohada «bo'shliqlar» yo'q deb faraz qilishimiz zarur. Bunday sohalarni aniq ta'rifini berish uchun ba'zi yangi tushunchalarni kiritishga to'g'ri keladi.

Ω sohada yotuvchi va $\Phi : [a, b] \rightarrow \Omega$ akslantirish yordamida berilgan L egri chiziqni qaraylik. Faraz qilaylik, α parametr ga bog'liq va $(t, \alpha) \in [a, b] \times [0, 1]$ da uzluksiz bo'lgan shunday $\Phi_\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$ akslantirish mavjud bo'lsinki, Ω sohadan olingan biror M nuqta uchun

$$\Phi_0(t) \equiv \Phi(t), \quad \Phi_1(t) \equiv M, \quad a \leq t \leq b,$$

ayniyatlar bajarilsin.

Agar bunday shartni qanoatlantiruvchi Φ_α akslantirish topilsa, u holda L egri chiziq Ω sohada uzluksiz ravishda M nuqtaga tortib kelinadi deyimiz.

Eslatib o'tamiz, agar L yopiq egri chiziq birlik aylananing homeomorfizmi bo'lsa, uni Jordan egri chizig'i deb atagan edik.

Ta'rif. Agar bog'lamli Ω sohada yotuvchi istalgan Jordan egri chizig'ini Ω sohada uzluksiz ravishda bir nuqtaga tortib kelish mumkin bo'lsa, u holda bunday sohani **bir bog'lamli** deyimiz.

Masalan, biror nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lgan har qanday soha bir bog'lamli bo'ladi.

Haqiqatan, umumiylikni saqlagan holda, Ω sohani koordinatalar boshiga nisbatan yulduzli deyishimiz mumkin. Aytaylik, $L \subset \Omega$ Jordan egri chizig'i $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ akslantirish yordamida berilgan bo'lsin. Bu degani, $(x, y) \in L$ bo'lishi uchun

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b,$$

tengliklar bajarilib, $\Phi(a) = \Phi(b)$ bo'lishi kerak.

$\Phi_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ akslantirishni $\Phi_\alpha(t) = (1 - \alpha)\Phi(t)$ ko'rinishda aniqlaylik. Bu akslantirishning $0 \leq \alpha < 1$ dagi aksi

$$x = (1 - \alpha)\varphi(t), \quad y = (1 - \alpha)\psi(t), \quad a \leq t \leq b,$$

kabi aniqlangan L_α egri chiziqli bo'lib, $L_0 = L$ va $\alpha = 1$ da L_1 to'plam nuqtadan, ya'ni koordinata boshidan iborat bo'ladi.

Ω soha koordinata boshiga nisbatan yulduzli bo'lgani sababli, barcha $0 \leq \alpha \leq 1$ larda $L_\alpha \subset \Omega$ bo'ladi.

Ravshanki, Φ_α akslantirishlar oilasi L egri chiziqni uzluksiz ravishda nuqtaga, ya'ni koordinatalar boshiga tortib keladi.

Bir bog'lamli bo'lmagan sohaga

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < \sqrt{x^2 + y^2} < b\}$$

ko'rinishda aniqlangan halqa misol bo'la oladi.

Agar radiusi R , $a < R < b$, bo'lib, markazi koordinatalar boshida bo'lgan L aylanani olsak, uni Ω sohadan chiqmasdan turib nuqtaga uzluksiz ravishda tortib kelish mumkin emas.

Navbatdagi tasdiqni biz isbotsiz keltiramiz:

Faraz qilaylik, Ω ixtiyoriy bir bog'lamli soha bo'lsin. Agar P, Q , $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar Ω sohaning yopig'ida uzluksiz bo'lib,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

tenglik bajarilsa, u holda istalgan yopiq bo'lakli-silliqli $L \subset \Omega$ kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral uchun

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

tenglik bajarilib, integral ostidagi ifoda to'la differensialdan iborat bo'ladi.

Bu tasdiqning isboti, bo'lakli-silliqlik egri chiziqlar murakkab ko'rinishga ega bo'lgani sababli, ancha texnik qiyinchiliklarni yechishni talab qiladi.

Bir bog'lamlilik talabining muhimligi navbatdagi misolda ko'rinadi.

15.4.2 - misol. Faraz qilaylik, $0 < a < b$ bo'lib, Ω soha

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < \sqrt{x^2 + y^2} < b\}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin.

Agar

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

desak, ravshanki,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

tengliklar bajariladi. Ammo, $a < R < b$ bo'lganda ixtiyoriy $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$ aylana uchun

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-R \sin \varphi d(R \cos \varphi)}{R^2} + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R \cos \varphi d(R \sin \varphi)}{R^2} = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 2\pi, \end{aligned}$$

ya'ni $L \subset \Omega$ yopiq kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral nolga teng emas.

4. Fazoviy egri chiziq bo'yicha olingan umumiy ikkinchi tur egri chiziqli integralning, ya'ni

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (15.4.17)$$

integralning integrallanayotgan egri chiziq tanlanishiga bog'liqmaslik masalasi ham xuddi yuqoridagidek hal qilinadi.

Agar shunday differensiallanuvchi $U(x, y, z)$ funksiya topilsaki, u uchun

$$dU = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (15.4.18)$$

bo'lsa, integral ostidagi ifoda to'la differensial bo'ladi.

Ravshanki, bunda

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x, y, z) \quad (15.4.19)$$

munosabatlar o'rinni.

15.4.1 - teoremaning fozoviy analogi navbatdagi ko'rinishga ega.

15.4.3 - teorema. Agar P, Q va R funksiyalar $\Omega \in \mathbb{R}^3$ sohada uzluksiz bo'lsa, u holda (15.4.17) integral ostidagi ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun ixtiyoriy $A \in \Omega$ va $B \in \Omega$ nuqtalarni olganda ham bu nuqtalarni tutashtiruvchi va Ω da yotuvchi bo'laklissilliqlik egri chiziq bo'yicha olingan (15.4.17) egri chiziqli integralning egri chiziqni tanlanishiga bog'liq bo'lmashligi zarur va yetarlidir.

Isbot 15.4.1 - teorema isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

Aslida 15.4.2 - teoremaning ham uch o'lchovli analogi o'rinni. Ammo mos tasdiqni keltirish va isbotlash uchun bizga qo'shimcha tushunchalar zarur bo'ladi. Biz bu tushunchalarni keyingi boblarda keltiramiz.

15.5-§. Misollar

1 - misol. Agar C uchlari $O(0,0)$, $A(1,0)$ va $B(0,1)$ bo'lgan

uchburchak bo'lsa, quyidagi

$$\int_C (x+y)^2 ds$$

birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ko'rsatma. Uchburchakning OA va OB tomonlari bo'yicha olingan egri chiziqli integrallar aniq integralga keladi. AB tomon bo'yicha integralni hisoblashda integral ostidagi funksiya 1 ga tengligini hisobga oling.

2 - misol. Tekislikdagi

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

egri chiziq bo'yicha quyidagi

$$\int_C (x^2 + y^2) ds$$

birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ko'rsatma. 15.1.2 - teorema yordamida aniq integralga keltir-
ing.

3 - misol. Fazoviy

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

egri chiziq bo'yicha quyidagi

$$\int_C (\sqrt{x^2 + y^2} + z) ds$$

birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ko'rsatma. 15.1.4 - teorema yordamida aniq integralga keltir-
ing.

4 - misol. Agar C quyidagi

$$y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

parabola bo'lsa, x ning o'sish yo'nalishi bo'yicha olingan

$$\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2x^2y) dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ko'rsatma. Parametrni x deb olib, 15.2.1 - teoremani qo'llang.

5 - misol. Agar to'g'ri chiziqning $A(0, \pi)$ va $B(\pi, 0)$ nuqtalar orasidagi kesmasini AB deb belgilansa, quyidagi

$$\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ko'rsatma. AB kesma tenglamasi

$$x + y = \pi, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

ko'rinishga ega. Endi x ni parametr deb, 15.2.1 - tasdiqdan foydalaning.

6 - misol. Fazoviy

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = t^2, z = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

egri chiziq bo'ylab parametrning o'sish yo'nalishi bo'yicha olingan

$$\int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ko'rsatma. 15.2.1 - teorema yordamida aniq integralga keltirib.

7 - misol. Agar

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$$

aylana bo'lsa, Grin formulasini qo'llab, quyidagi

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ko'rsatma. $P(x, y) = -x^2 y$ va $Q(x, y) = xy^2$ deb, (15.3.11) Grin formulasini qo'llang. Hosil bo'lgan doira boyicha integralni hisoblash uchun qutb koordinatalar sistemasiga o'ting.

8 - misol. Quyidagi

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

ellips bilan chegaralangan Ω sohaning yuzini toping.

Ko'rsatma. Agar $P(x, y) = -y/2$, $Q(x, y) = x/2$ desak, (15.3.12) tenglik o'rinli bo'ladi va Grin formulasiga ko'ra,

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

Hosil bo'lgan ikkinchi tur egri chiziqli integralni 15.2.1 - tasdiq yordamida aniq integralga keltirib hisoblang.

9 - misol. Agar AB bo'lakli-silliq yassi egri chiziq $A = (0, 1)$ va $B = (2, 3)$ nuqtalarni tutashtirsa, u holda quyidagi

$$\int_{AB} (x + y) dx + (x - y) dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral ostidagi funksiya to'la differensial ekaniga ishonch hosil qilib, uni hisoblang.

Ko'rsatma. $P(x, y) = x + y$ va $Q(x, y) = x - y$ deb, (15.4.3) shartni tekshiring. Agar bu shartni qanoatlantiruvchi $U(x, y)$ funktsiya topilsa, integralni (15.4.14) formula yordamida hisoblang.

10 - misol. Agar AB bo'lakli-silliqli fazoviy egri chiziqli $A = (1, 2, 3)$ va $B = (6, 1, 1)$ nuqtalarni tutashtirsa, u holda quyidagi

$$\int_{AB} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral ostidagi funktsiya to'la differensial ekaniga ishonch hosil qilib, uni hisoblang.

Ko'rsatma. $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$ va $R(x, y, z) = xy$ deb, (15.4.19) shartni tekshiring. Agar bu shartni qanoatlantiruvchi $U(x, y, z)$ funktsiya topilsa, integralni

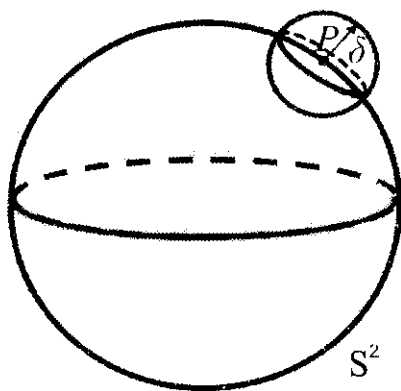
$$\int_{AB} P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz = U(B) - U(A)$$

formula yordamida hisoblang (bu formula xuddi (15.4.14) singari isbotlanadi).

16-bob. Sirt bo'yicha integrallar

16.1-§. Sirt yuzi

1. Sirtga klassik misol sifatida S^2 sferani, ya'ni uch o'lchovli shar sirtini olishimiz mumkin. Biror S^2 sferani istalgan P nuqtasining δ -atrofini, aniqrog'i, markazi P nuqtada va radiusi δ ga teng uch o'lchovli sharni qaraylik. Ravshanki, yetarlicha kichik δ lar uchun bu sharning S^2 sfera bilan kesishmasi sferaga P nuqtada urinuvchi va radiusi δ ga teng doira bilan deyarli ustma-ust tushadi (16.1-rasin qarang). Boshqacha aytganda, sferani istalgan nuqtasining shu sferada yotuvchi kichik atrofi kichik radiusli yassi doira ko'rinishida bo'ladi. Aynan shu lokal xossa uch o'lchovli fazodagi ikki o'lchovli sirtning umumiy ta'rifi asosida yotadi.



16.1-rasm

Eslatib o'tamiz, agar $\mathbb{R}^3$ fazosining ikki qismaniy to'plamlari uchun ulardan birini ikkinchisiga o'zaro bir qilymatli va o'zaro uzluksiz akslantirish mavjud bo'lsa, bunday to'plamlar homeomorf deb ataladi.

Biror $S \subset \mathbb{R}^3$ to'plam berilgan bo'lsin. Istalgan $P \in S$ nuqta uchun $U(P)$ orqali bu nuqtaning ixtiyoriy atrofini, ya'ni P nuqtani o'z ichiga oluvchi $\mathbb{R}^3$ dagi ochiq to'plamni belgilab,

$$V(P) = U(P) \cap S \quad (16.1.1)$$

ko'rinishdagi to'plamni qaraymiz. Qizig'i shundaki, agar S sirt bo'lsa, $U(P)$ atrofni doimo shunday tanlash mumkin, natijada $V(P)$ to'plam doiraga homeomorf bo'ladi. Bu sirtning har bir nuqtasini xarakterlovchi xossadir.

Ta'rif. Agar $S \subset \mathbb{R}^3$ bog'langan to'plamning har bir nuqtasi uchun shunday atrof topilsaki, bu atrofning S bilan kesishmasi biror doiraga homeomorf bo'lsa, u holda bunday S to'plamga *sirt* deb ataladi.

$V(P)$ to'plamni P nuqtaning S da yotuvchi biror «atrofi» deb qarash mumkin. Bundan buyon (16.1.1) ko'rinishdagi to'plamni P nuqtaning S sirtga nisbatan atrofi, yoki qisqa qilib, P ning S dagi atrofi deb ataymiz.

16.1.1 - misol. Biror ikki o'lchovli sohada uzluksiz funksiyaning grafigi sirtidan iborat ekanini ko'rsatamiz.

Eslatib o'tamiz, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada aniqlangan $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyaning grafigi deb

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\} \quad (16.1.2)$$

to'plamga aytgan edik.

$S = \Gamma(f)$ to'plam sirt ta'rifidagi barcha shartlarni qanoatlantirishini tekshiramiz. Faraz qilaylik, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ grafikning istalgan nuqtasi bo'lsin, ya'ni $(x_0, y_0) \in \Omega$ bo'lib, $f(x_0, y_0) = z_0$ tenglik bajarilsin. Ω tekislikning ochiq qismaniy to'plami bo'lgani sababli, shunday

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$$

doira topiladiki, uning $\overline{D} = D \cup \partial D$ yopig'i butunligicha Ω da yotadi.

f funksiya Ω da uzluksiz bo'lgani uchun, u $\overline{D}$ da chegaralangan. Shunday ekan, bu funksiya $\overline{D}$ da qabul qiladigan barcha qiymatlari biror $(a, b) \subset \mathbb{R}$ interval ichida yotadi. P_0 nuqtaning, balandligi $b - a$ va ko'ndalang kesimi D dan iborat bo'lgan, quyidagi

$$U(P_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < z < b, (x, y) \in D\}$$

ochiq silindr ko'rinishidagi atrofni qaraymiz. Bu silindrning $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya grafigi bilan kesishmasi (16.1.1) ko'rinishdagi $V(P_0)$ to'plamdan iborat. Ravshanki, $V(P_0)$ to'plam $D \subset \mathbb{R}^2$ doiraga homeomorf va bunda homeomorfizm D doiraning har bir (x, y) nuqtasiga $\Gamma(f)$ grafikning $(x, y, f(x, y))$ nuqtasini mos qo'yuvchi akslantirishdan iborat.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra, $S = \Gamma(f)$ to'plam sirt ekan.

1 - eslatma. Yuqorida keltirilgan ta'rifga ko'ra, sirtning barcha nuqtalari «ichki» nuqtadir, ya'ni sirt «chegaraviy» nuqtaga ega emas. Aslida sirt uchun chegaraviy nuqta tushunchasiga aniqlik kiri-tish zarur. Masalan, S^2 sferani istalgan nuqtasining ixtiyoriy atrofida $\mathbb{R}^3$ fazosining bu sferaga tegishli bo'lmagan nuqtasi topiladi. Shunday ekan, sferaning har bir nuqtasi §11.1 da keltirilgan ta'rif ma'nosida chegaraviy nuqtadir.

Sirt chegarasiga mantiqan to'g'ri ta'rif berish uchun limit nuqta va yopilma tushunchalaridan foydalanamiz. Eslatib o'tamiz, ixtiyoriy $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning yopilmasi deb, E ga uning barcha limit nuqtalarini qo'shish natijasida hosil bo'lgan $\overline{E}$ to'plamga aytgan edik (§11.1 ga qarang).

Faraz qilaylik, S ixtiyoriy sirt va $\overline{S}$ uning yopilmasi bo'lsin. S sirtning chekkasi deb $\Gamma(S) = \overline{S} \setminus S$ to'plamga aytamiz.

Masalan, agar S sirt ochiq doiradan iborat bo'lsa, uning chekkasi aylana bo'ladi.

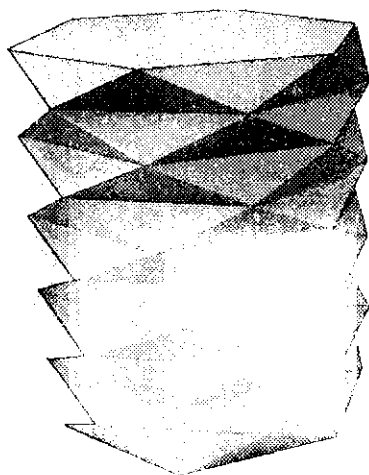
Har qanday sirt ham chekkaga ega bo'lavermaydi, ya'ni ba'zi sirtlarining chekkalari bo'sh to'plamdan iborat. Masalan, S^2 sfera chekkasiz sirt, ya'ni $\Gamma(S^2) = \emptyset$. Umuman, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sohaning chegarasidan iborat har qanday $\partial\Omega$ sirt chekkasiz sirt, ya'ni $\Gamma(\partial\Omega) = \emptyset$. Bunday sirtlar *yopiq* deyiladi.

2 - eslatma. Sirt ta'rifida (16.1.1) tenglik bilan aniqlangan $V(P)$ to'plamning biror ochiq D doiraga homeomorf bo'lishi talab qilingan edi. Ravshanki, doirani unga homeomorf bo'lgan istalgan boshqa to'plam bilan almashtirish mumkin. Masalan, $V(P)$ to'plamning biror ochiq Q kvadratga homeomorf bo'lish sharti ta'rifdagi talabga teng kuchlidir.

Ushbu paragrafning asosiy maqsadi sirt yuzi tushunchasini kiritishdan iboratdir.

Eslatib o'tamiz, uch o'lchovli jisim hajmini aniqlash uchun biz jisimni ichki chizilgan ko'pyoqlilar bilan approssimatsiyalab, hajm sifatida bu ko'pyoqlilar hajmlarining aniq yuqori chegarasini olgan edik. Xuddi shu kabi, egri chiziq uzunligini unga ichki chizilgan sinq chiziqlar uzunliklarining aniq yuqori chegarasi sifatida aniqlagan edik.

Afsuski, sirt yuzini yuqoridagi usulda aniqlab bo'lmaz ekan. Nemis matematigi H. Shvars (Hermann Schwarz) silindr ichiga garmon cholg'u asbobini eslatuvchi ko'pyoqlikni (Shvars «etigi» deb atashadi, 16.2 -rasm) chizib, bu ko'pyoqlik sirti yuzini istalgancha katta qilish mumkinligini ko'rsatdi. Bundan chiqdi, silindrik sirt yuzini ichki chizilgan ko'pyoqliklar yuzi yordamida aniqlab bo'lmaz ekan.



16.2-rasm

Ixtiyoriy sirt yuzi ta'rif asosida quyidagi prinsip yotadi. Sirt kichik qismlarga bo'linadi va har bir qism urinma tekislikka proeksiyalanadi. Proeksiyalar yuzi yig'ilib, bu yig'indining limiti sirt yuzi deb qabul qilinadi.

Bunday ta'rifni to'g'ri ekanini asoslash uchun, avval, urinma tekislik tushunchasini kiritish zarur, so'ngra har bir nuqtaning yetarlicha kichik atrofini mana shu nuqtada sirtga urinuvchi tekislikka ortogonal proeksiyalash mumkinligiga ishonch hosil qilish kerak va nihoyat, sirtlarning yetarlicha katta sinfi uchun proeksiyalar yuzlari yig'indisining limitga ega ekanini isbotlash zarur. Aynan mana shu ishlarni ushbu paragrafda amalga oshiramiz.

2. E'tibor bering, sirt ta'rif lokal xarakterga ega. Sodda qilib aytganda, bu ta'rifda sirtning har bir nuqtasi uchun, uni o'z ichiga oluvchi, sirtning yetarlicha kichik qismini doiraga o'xshash to'plan bo'lishi talab qilinadi.

Yuqoridagi misolda ko'rganimizdek, uzluksiz funksiya grafigidan iborat sirt butunligicha tekislikdagi biror sohaga homeomorfdir. Albatta, har qanday sirt ham bunday xossaga ega bo'lavermaydi. Masalan, sfera hech qanday $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohaga homeomorf emas.

Bizning navbatdagi maqsadimiz tekislikdagi biror sohaga homeomorf bo'lgan eng sodda sirtlarni o'rganishdir.

Ta'rif. *Biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohaga homeomorf bo'lgan S sirtini sodda sirt deyimiz.*

Odatda, Ω soha nuqtalari $(u, v) \in \Omega$ simvol orqali belgilanadi, bunda u va v kattaliklar parametr deb ataladi. Shunday qilib, $S \subset \mathbb{R}^3$ sodda sirt biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohaning

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega, \quad (16.1.3)$$

akslantirish bilan berilgan homeomorfizmidan iborat ekan.

Bu tenglikda $\mathbf{r}$ radius-vektor komponentalari parametrlarning biror funksiyalaridan iborat, ya'ni

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v). \quad (16.1.4)$$

Bunda S sirt (16.1.3) akslantirish bilan parametrik ravishda berilgan deyiladi.

Agar (16.1.3) akslantirish silliq bo'lsa, ya'ni uning (16.1.4) komponentalari uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda bunday sirt *silliq* deyiladi.

Biz ikki o'zgaruvchili silliq funksiya grafigi tashkil qilgan sirt-ni o'rganishdan boshlaymiz. 16.1.1 - misolda ko'rsatilganidek, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiya grafigi sodda sirt-dan iborat. Bu sirt tenglamasini formal ravishda (16.1.3) va (16.1.4) kabi quyidagicha yozish mumkin:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

Biz $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyaning uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilamiz. U holda bu funksiyaning (16.1.2) grafigi silliq sodda sirt bo'ladi.

Eslatib o'tamiz, grafikning $(a, b, c) \in \Gamma(f)$ (bu yerda $c = f(a, b)$) nuqtasida urinuvchi tekislik deb, biz tenglamasi

$$z = c + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot (y - b)$$

ko'rinishga ega bo'lgan tekislikka aytgan edik.

Biz $(a, b, c) \in \Gamma(f)$ nuqtani o'z ichiga oluvchi, f funksiya grafigining biror yetarlicha kichik qismini urinma tekislikka ortogonal proeksiyalash mumkinligini ko'rsatamiz. Quyida keltirilgan mulohazalar 15-bobni 2-paragrafining 11-bo'limida keltirilgan mulohazalarga o'xshash.

16.1.1* - tasdiq. Faraz qilaylik, $z = f(x, y)$ funksiya $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda bu funksiya grafigining istalgan P nuqtasi uchun markazi $O' = P$ nuqtada bo'lgan shunday $\{O'\xi\eta\zeta\}$ Dekart koordinatalar sistemasini kiritish mumkin-ki, bunda quyidagi shartlar bajariladi:

i) $O'\xi\eta$ koordinatalar tekisligi grafikning P nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik bilan ustma-ust tushadi;

ii) $z = f(x, y)$ funksiya tenglamasini P nuqtaning biror atrofida

$$\zeta = g(\xi, \eta)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda g - koordinatalar boshining atrofida uzluksiz differensiallanuvchi funksiya;

iii) quyidagi

$$g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial \xi}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial \eta}(0, 0) = 0 \quad (16.1.5)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot. i) Aytaylik, $P = (a, b, c)$ berilgan f funksiya grafigining ixtiyoriy nuqtasi, ya'ni $f(a, b) = c$ bo'lsin. Applikata o'qi bo'ylab parallel ko'chirish, burish va so'ngra cho'zish yordamida markazi $O' = (a, b, c)$ nuqtada bo'lgan shunday yangi $\{O'\xi\eta\zeta\}$ koordinatalar sistemasini kiritamizki, bunda $O'\zeta$ o'q urinma tekislikka perpendikulyar bo'lib,

$$\zeta = (z - c) - \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot (x - a) - \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot (y - b)$$

tenglik bajarilsin.

U holda urinma tekislik tenglamasi $\zeta = 0$ ko'rinishga keladi. Eski o'zgaruvchilar yangi o'zgaruvchilar bilan quyidagicha

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \psi(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \chi(\xi, \eta, \zeta),$$

bog'lanadi, bunda φ, ψ, χ - biror chiziqli funksiyalardir.

Xususan,

$$\zeta = [\chi(\xi, \eta, \zeta) - c] - \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot [\varphi(\xi, \eta, \zeta) - a] - \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot [\psi(\xi, \eta, \zeta) - b] \quad (16.1.6)$$

ayniyat o'rinli bo'ladi.

Bundan tashqari, ravshanki, o'zgaruvchilarni bunday almashtirishda $\varphi(0, 0, 0) = a$, $\psi(0, 0, 0) = b$, $\chi(0, 0, 0) = c$ tengliklar bajariladi.

ii) Koordinatalar boshining biror atrofida

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \chi(\xi, \eta, \zeta) - f[\varphi(\xi, \eta, \zeta), \psi(\xi, \eta, \zeta)] \quad (16.1.7)$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki,

$$F(0, 0, 0) = \chi(0, 0, 0) - f[\varphi(0, 0, 0), \psi(0, 0, 0)] = c - f(a, b) = 0.$$

(16.1.7) funksiyaning ζ o'zgaruvchi bo'yicha hosilasini hisoblaylik. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}. \quad (16.1.8)$$

Boshqa tarafdin, (16.1.6) ayniyatni differensiallasak,

$$1 = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \quad (16.1.9)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar f funksiya qismaniy hosilalarining uzluksizligini hisobga olib, (16.1.8) va (16.1.9) tengliklarni taqqoslasak, biz (a, b, c) nuqtaning yetarlicha kichik atrofida (16.1.8) ning chap tarafi 1 sonidan kam farq qilishini ko'ramiz. Shuning uchun, qayd etilgan atrofda

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} > 0$$

shart o'rinli.

Shunday ekan, oshkormas funksiya haqidagi teorema (12.3.2 - teorema qarang) ko'ra, koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrofida aniqlangan shunday $\zeta = g(\xi, \eta)$ funksiya topiladiki, u uchun

$$F(\xi, \eta, g(\xi, \eta)) = 0$$

tenglik bajariladi.

Ahamiyat bering, (16.1.7) tenglikka ko'ra, $\zeta = g(\xi, \eta)$ funksiya grafigi f funksiya grafigining qaralayotgan qismi bilan ustma-ust tushadi.

iii) Oshkormas ko'rinishda berilgan $\zeta = g(\xi, \eta)$ funksiyaning bevosita (16.1.7) ta'rifidan $g(0, 0) = 0$ tenglik kelib chiqadi. Endi, agar (16.1.7) tenglikni oshkormas funksiya hosilasini hisoblash qoida-siga ko'ra ((12.3.17) formulaga qarang) differensiallasak,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial \zeta}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial \zeta}} \cdot \left[\frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] \quad (16.1.10)$$

tenglikni olamiz.

Boshqa tarafdin, (16.1.6) ayniyatni ξ o'zgaruvchi bo'yicha (boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb hisoblab) differensiallasak,

$$0 = \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu tenglikni (16.1.10) tenglik bilan taqqoslab, urinish nuqtasida

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0$$

shart bajarilishini ko'ramiz.

Quyidagi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$$

tenglik ham xuddi yuqoridagidek ko'rsatiladi.

iv) Zaruriyat bo'lsa, $O'\zeta$ o'qi bo'ylab masshtabni o'zgartirib, $\{Oxyz\}$ Dekart koordinatalar sistemasidan yangi $\{O'\xi\eta\zeta\}$ koordinatalar sistemasiga o'tishni izometrik qilish mumkin. Bunda, xuddi avvalgidek, koordinatalar boshining atrofida funksiya grafigi urinma tekislikda aniqlangan funksiya grafigi bilan ustma-ust tushaveradi.

Natija. Faraz qilaylik, $z = f(x, y)$ funksiya $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\Gamma(f)$ grafikni istalgan P nuqtasining $\Gamma(f)$ da shunday atrofi topiladiki, bu atrof P nuqtada $\Gamma(f)$ ga urinuvchi tekislikka ortogonal proeksiyalanadi.

Haqiqatan, ortogonal proeksiya 16.1.1* - tasdiqdagi $\zeta = g(\xi, \eta)$ funksiya bilan beriladi.

3. Ravshanki, har qanday sirt ham sodda bo'lavermaydi. Misol sifatida sferani olishimiz mumkin:

$$S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Boshqa misol sifatida

$$x = (a + b \cos v) \cos u,$$

$$y = (a + b \cos v) \sin u,$$

$$z = b \sin v,$$

komponentali $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor bilan berilgan T_{ab} torni olsak bo'ladi, bunda $a > b > 0$ bo'lib, (u, v) parametrlar

$$-\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi$$

kvadratda o'zgaradi.

Shuni aytish kerakki, zamonaviy matematik adabiyotlarda T_{ab} tor ba'zan $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ kvadrat bilan almashtiriladi. Bunda, torda berilgan f funksiyaning $\mathbb{T}^2$ kvadratda berilgan va quyidagi

$$f(u, -\pi) = f(u, \pi), \quad f(-\pi, v) = f(\pi, v)$$

davriylik shartini qanoatlantiradi, deb hisoblanadi.

Ochiq sohada berilgan ikki o'zgaruvchili istalgan uzluksiz funksiya grafigining sodda sirt bo'lishi yuqorida qayd etilgan edi. Ammo bu tasdiqning teskarisi o'rinli emas. Masalan, sferadan bir nuqtani olib tashlasak, hosil bo'lgan to'plam sodda sirt bo'ladi, lekin u hech qanday ikki o'zgaruvchili funksiyaning grafigi bo'la olmaydi.

16.1.2 - misol. Diametri Oz o'qining $[0, 1]$ kesmasi bo'lgan S sferani, ya'ni

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

sferani qaraylik.

S^* simvol orqali S dan «shimoliy qutbni» olib tashlash natijasi-da hosil bo'lgan to'planini belgilab, ya'ni

$$S^* = S \setminus \{N\}, \quad N = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$$

deb, S^* ning sodda sirt ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun, 11.3-paragrafning 3-bandi natijalariga ko'ra, S^* ning $\mathbb{R}^2$ tekisligiga homeomorf ekanini ko'rsatish yetarli.

Faraz qilaylik, $M = (x, y, 0)$ nuqta $z = 0$ tekisligining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Bu nuqtani S sferaning $N = (0, 0, 1)$ nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesma S sferani biror P nuqtada kesadi. Biz bu nuqta-ni M ga mos qo'yamiz. Shunday qilib,

$$P = \Phi(M)$$

tenglik bilan $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^*$ akslantirish aniqlandi. Aynan shu akslantirish izlanayotgan homeomorfizm bo'ladi.

Haqiqatan, $\mathbb{R}^3$ da (ρ, ϕ, z) silindrik koordinatalarni kiritaylik. Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki, agar

$$r = \frac{\rho}{\rho^2 + 1}, \quad \psi = \phi, \quad z = \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1}$$

desak, Φ akslantirish har bir $M = (\rho, \phi, 0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaga (r, ψ, z) koordinatalarga ega bo'lgan $P \in S^*$ nuqtani mos qo'yadi.

Bundan Φ ning $\mathbb{R}^2$ ni S^* ga homeomorf akslantirish ekani bevosita kelib chiqadi.

Eslatma. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, bir nuqtasi olib tashlangan sfera silliq sodda sirt bo'ladi.

4. Bundan buyon biz S sodda sirtni aniqlovchi $\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiyani silliq, ya'ni Ω sohasida uzluksiz differensiallanuvchi, deb faraz qilamiz.

Agar $v = \text{const}$ deb tayinlasak, $\mathbf{r}(u, v)$ funksiya u o'zgarganda S da yotuvchi biror egri chiziqni aniqlaydi. Bu egri chiziqni koordinata egri chizig'i deyishimiz mumkin. 15.2- paragrafda ko'rsatilganidek,

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad (16.1.11)$$

vektor (birlik bo'lishi shart emas) bu egri chiziqqa urinma bo'ladi.

Xuddi shu kabi,

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (16.1.12)$$

vektor S da yotuvchi boshqa $u = \text{const}$ koordinata egri chizig'iga urinma bo'ladi.

Ravshanki, S sirtning har bir nuqtasidan ikki koordinata egri chiziqlaridan bittadan o'tadi.

Agar $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlar $(u_0, v_0) \in \Omega$ nuqtada nolga aylanmasa va o'zaro kollinear bo'lmasa, u holda $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko'paytma ham shu nuqtada noldan farqli bo'lib, har bir $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorga ortogonal bo'ladi.

Agar, bordiyu, qayd etilgan vektor ko'paytma biror nuqtada nolga teng bo'lsa, u holda bu nuqtani (16.1.3) radius-vektor bilan parametrlangan sirtning *maxsus nuqtasi* deymiz. Bundan buyon, buni alohida qayd qilmasdan, biz faqat maxsus nuqtasiz sirtlarni qaraymiz.

Aytaylik, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ homeomorfizm bo'lib, $\mathbf{r} = \Phi(u, v)$ tenglama S sodda silliq sirtni aniqlasin. S da yotuvchi va $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy L silliq egri chiziqni qaraymiz. Bu chiziq Ω sohada yotuvchi $\Lambda = \Phi^{-1}(L)$ egri chiziqqa homeomorf.

Faraz qilaylik, Λ egri chiziqli parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\Lambda = \{(u, v) \in \Omega : u = \alpha(t), v = \beta(t), a \leq t \leq b\}.$$

U holda $L \subset S$ egri chiziqni ham Φ homeomorfizm yordamida parametrik ko'rinishda yozishimiz mumkin, ya'ni

$$\mathbf{r} = \Phi(\alpha(t), \beta(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Agar $(u_0, v_0) = (\alpha(t_0), \beta(t_0))$ desak, 15.2-paragraf natijalariga ko'ra, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ vektor L egri chiziqqa $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ nuqtada urinadi va murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \alpha'(t_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \beta'(t_0) = \alpha'(t_0) \mathbf{r}_u + \beta'(t_0) \mathbf{r}_v.$$

Bundan chiqdi, P nuqtada L egri chiziqqa o'tkazilgan urinma $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

Boshqacha aytganda, S sirtga yotuvchi egri chiziqlarga P nuqtada o'tkazilgan barcha urinmalar bitta tekislikda, aniqrog'i, kollinear bo'lmagan $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlardan o'tuvchi tekislikda yotar ekan.

Ta'rif. Faraz qilaylik, maxsus nuqtasiz silliq S sirtning ixtiyoriy P nuqtasi berilgan bo'lsin. S da yotuvchi va P nuqtadan o'tuvchi barcha silliq egri chiziqlarga shu nuqtada o'tkazilgan urinmalar yotuvchi tekislikni urinma tekislik deymiz.

S sirtning P nuqtasidagi urinma tekislikni $T(P)$ orqali belgilaymiz.

5. Agar S sirtning $P = \mathbf{r}(u, v)$ nuqtasi maxsus bo'lnasa,

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} \quad (16.1.13)$$

ko'rinishdagi vektorni aniqlash mumkin.

Vektor ko'paytmaning xossasiga ko'ra, bu vektor $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlarga ortogonaldir va demak, u $T(P)$ urinma tekislikka ham ortogonal bo'ladi. (16.1.13) vektor S sirtga $\mathbf{r}(u, v)$ nuqtada o'tkazilgan birlik normal vektor, yoki qisqa qilib, S sirtga normal deyiladi.

Qarama-qarshi yo'nalgan $\bar{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$ vektor ham normal vektor deyiladi.

Ravshanki, $[0, \pi]$ kesmada bir qiymatli aniqlangan shunday α, β va γ sonlar mavjudki, ular uchun

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

bo'lib,

$$|\mathbf{n}|^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

tenglik bajariladi.

Qayd etilgan kosinuslar normalning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

6. Endi $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko'paytmani batafsilroq o'rganamiz. Ma'lumki, bu vektor ko'paytmani quyidagi

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \quad (16.1.14)$$

determinant ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ lar mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarining yo'naltiruvchi birlik vektorlaridir.

Determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib,

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (16.1.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

O'ng tarafdagi ikkinchi tartibli har bir determinant

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega,$$

akslantirishga mos yakobianlardan birini beradi. Ya'ni

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \mathbf{k}. \quad (16.1.16)$$

Ravshanki, bu tenglikni

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = (y_u z_v - y_v z_u) \mathbf{i} + (z_u x_v - z_v x_u) \mathbf{j} + (x_u y_v - x_v y_u) \mathbf{k}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Quyidagi

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \quad (16.1.17)$$

belgilashlarni kiritaylik.

Silliqlik sirtning ta'rifiga ko'ra, $A(u, v)$, $B(u, v)$, $C(u, v)$ funksiyalar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz bo'ladi.

(16.1.17) belgilashdan foydalanib,

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$$

deb yozishimiz mumkin.

U holda, ravshanki,

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (16.1.18)$$

Demak, normal vektor uchun

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (16.1.19)$$

formulaga ega bo'lamiz.

16.1.3 - misol. Faraz qilaylik, S sirt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyaning grafigi bo'lsin. Agar $u = x$ va $v = y$ desak, bu sirtning $\mathbf{r} = (x, y, z)$ radius-vektor bilan berish mumkin, bu yerda $z = f(x, y)$. Bunda, (16.1.17) ta'rifga ko'ra,

$$A = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad C = 1,$$

demak, (16.1.18) ga asosan,

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \quad (16.1.20)$$

Bu holda (16.1.13) normal vektori, (16.1.19) ga ko'ra, quyidagi

$$\cos \alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \quad (16.1.21)$$

komponentalarga ega.

Shuni aytish kerakki, qaralayotgan sirt uchun normal vektorining Oz o'qiga proeksiyasi musbat. Odatda, bunday hollarda normal «yuqoriga yo'nalgan» deyiladi.

7. Eslatib o'tamiz, agar S sirtning $P = \mathbf{r}(u, v)$ nuqtasi-da $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = 0$ shart bajarilsa, bu nuqtani maxsus degan edik. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, P nuqtaning maxsus bo'lmashligi uchun (16.1.17) determinantlardan aqalli bittasining bu nuqtada noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli. Bu, o'z navbatida, quyidagi matritsa-ning rangi ikkiga tengligini anglatadi:

$$\text{rang} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 2. \quad (16.1.22)$$

Agar S sirtning $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ nuqtasi maxsus bo'lmasa, u holda bu nuqtaning biror atrofini koordinata tekisliklaridan biriga bir qiymatli proeksiyalash mumkin.

Haqiqatan, faraz qilaylik, (16.1.22) shart bajarilsin. U holda (16.1.17) determinantlardan biri, masalan, C , $(u_0, v_0) \in \Omega$ nuqtada noldan farqli bo'ladi:

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (16.1.23)$$

Uzluksizlikka ko'ra, bu determinant (u_0, v_0) nuqtaning biror atrofida ham noldan farqli. Bundan chiqdi, oshkormas funksiya haqidagi teorema (12.3.4 - teorema qarang) ko'ra, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida teskari $(u(x, y), v(x, y))$ akslantirish mavjud. Bu

aks-lantirishning komponentalarini $z = z(u, v)$ funksiyaga qo'ysak, P nuqta atrofida S sirtning

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$$

ko'rinishdagi tenglamasiga ega bo'lamiz.

Bu esa talab qilingan tasdiq, ya'ni S sirtni qaralayotgan qismi (x, y) o'zgaruvchilarning biror uzluksiz funksiyasi grafigidan iborat ekanini va bundan chiqdi, Oxy koordinatalar tekisligiga bir qiymatli proeksiyalanishini anglatadi.

16.1.2 - tasdiq. Faraz qilaylik, S maxsus nuqtasiz sodda silliq sirt bo'lsin. U holda har qanday $P \in S$ nuqta uchun $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanuvchi (16.1.1) ko'rinishdagi $V(P)$ atrof mavjud.

Isbot. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, har qanday $P \in S$ nuqta S da shunday atrofga egaki, bu atrof koordinata tekisliklaridan biriga bir qiymatli proeksiyalanadi. Bu degani, P nuqtaning mana shu atrofni biror ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiya grafigi ko'rinishida tasvirlash mumkin. Shunday ekan, 16.1.1 - tasdiqning natijasiga ko'ra, P nuqtaning S da shunday atrofi topiladiki, u $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanadi.



Eslatma. Urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanuvchi atrofning kattaligi, umuman aytganda, nuqtadan nuqtaga o'zgaradi va istalgancha kichik bo'lishi ham mumkin. Ammo tekis silliq deb ataluvchi akslantirishlar uchun bunday atroflar o'lchovini quyidan barcha nuqtalar uchun bitta musbat son bilan chegaralash mumkin. Eslatib o'tamiz, ixtiyoriy $V \subset \mathbb{R}^3$ to'planing diametri deb, biz

$$d(V) = \sup_{x \in V, y \in V} |x - y|$$

songa aytgan edik.

Agar S sirt tenglamasi bo'lgan (16.1.3) akslantirishning komponentalari Ω sohada tekis uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, bunday akslantirishni *tekis silliq* deymiz. 11.2.7 - teoreмага ko'ra, akslantirish tekis silliq bo'lishining yetarli sharti uning barcha qisman hosilalarini $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohada uzluksiz bo'lishidan iborat.

Tekis silliq akslantirishlar uchun shunday $\delta > 0$ son ko'rsatish mumkinki, istalgan $P \in S$ nuqta olganda ham uning S dagi, diametri δ dan kichik, har qanday atrofni urinma tekislikka bir qiymatli proeksiyalash mumkin.

Bundan buyon biz, bunga alohida urg'u bermasdan, sodda silliq sirtini aniqlovchi akslantirish hosilalarini tekis uzluksiz, deb faraz qilamiz.

8. Endi biz sodda sirt yuziga ta'rif bera oladigan holatga keldik.

S sodda silliq sirtini bo'lakli-silliq egri chiziqlar yordamida yetarlicha kichik S_k qismlarga bo'lib, har bir qismda ixtiyoriy ravishda $\xi_k \in S_k$ nuqtani tanlaymiz va bu nuqtada $T(\xi_k)$ urinma tekislikni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan $P = \{S_k\}$ bo'linish diametri deb

$$d(P) = \max_k \text{diam } S_k$$

songa aytamiz.

16.1.2 - tasdiqqa ko'ra, yetarlicha kichik $d(P)$ diametr uchun har bir S_k qismini $T(\xi_k)$ urinma tekislikka ortogonal ravishda proeksiyalash mumkin. Hosil bo'lgan proeksiya bo'lakli-silliq chegarali yassi shakldan iborat va shuning uchun, u kvadratlanuvchidir. Bu proeksiya yuzini σ_k orqali belgilab,

$$\Sigma(P) = \sum_k \sigma_k \quad (16.1.24)$$

yig'indini qaraymiz.

Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, S sirtining $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $P = \{S_k\}$ bo'linishini olib, $\xi_k \in S_k$ nuqtalarni istalgancha tanlaganda ham, biror I soni bilan

$$|\Sigma(P) - I| < \varepsilon$$

baho bajarilsa, u holda bunday I soniga (16.1.24) yig'indining diametr nolga intilgandagi limiti deymiz.

Ta'rif. S silliq sodda sirtning yuzi deb quyidagi

$$\sigma(S) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_k \sigma_k \quad (16.1.25)$$

limitga aytiladi.

Eslatib o'tamiz, $|S|$ simvolni biz S to'plamning Jordan o'lchovi uchun ishlatgan edik. Bundan buyon biz bu simvol bilan, agar bunda biror tushunmovchilik hosil bo'lmasa, S sirtning yuzini ham belgilaymiz, ya'ni

$$|S| = \sigma(S).$$

Bizning endigi maqsadimiz har qanday silliq sodda sirt yuzaga ega ekanini isbotlash va bu yuzani hisoblash usulini ko'rsatishdan iborat.

(16.1.3) formula bilan berilgan sirt yuzini hisoblashda $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko'paytmaning absolyut qiymati asosiy rolni o'ynaydi. Chunki, navbatdagi tasdiq o'rinli.

16.1.1 - teorema. Faraz qilaylik, Ω kvadratlanuvchi soha bo'lsin. $\mathbf{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ silliq akslantirish bilan berilgan har qanday S sodda sirt yuzi uchun

$$|S| = \iint_{\Omega} \|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\| \, du \, dv \quad (16.1.26)$$

tenglik o'rinli.

Navbatdagi band bu teorema isbotiga bag'ishlandi.

9. Faraz qilaylik, S (16.1.3) formula bilan berilgan ixtiyoriy sodda silliq sirt bo'lsin. Avval biz $\|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\|$ kattalik koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burishga nisbatan invariant (ya'ni, o'z qiymatini o'zgartirmas) ekanini ko'rsatamiz.

16.1.1 - lemma. Faraz qilaylik, $\mathbf{a}$ biror tayinlangan vektor bo'lib,

$$\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{a}$$

bo'lsin. U holda

$$[\tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v] = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v].$$

Isbot quyidagi

$$\tilde{\mathbf{r}}_u \equiv \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \equiv \mathbf{r}_u, \quad \tilde{\mathbf{r}}_v = \mathbf{r}_v$$

o'z-o'zidan ko'rinib turgan tengliklardan kelib chiqadi.

16.1.2 - lemma. Faraz qilaylik, Q ortogonal matritsa bo'lib,

$$\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = Q\mathbf{r}(u, v)$$

bo'lsin. U holda

$$|[\tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v]| = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|.$$

Isbot. Q matritsa elementlari o'zgarmas sonlar bo'lgani uchun

$$\tilde{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial Q\mathbf{r}}{\partial u} = Q \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = Q\mathbf{r}_u, \quad \tilde{\mathbf{r}}_v = Q\mathbf{r}_v,$$

tengliklar o'rinli.

Endi $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ vektorlarning $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ vektor va $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ skalyar ko'paytmalarini bog'lovchi

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \equiv |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$$

ayniyatdan foydalansak, Q matritsa ortogonal bo'lgani uchun,

$$\begin{aligned} |[\tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v]|^2 &\equiv |\tilde{\mathbf{r}}_u|^2 \cdot |\tilde{\mathbf{r}}_v|^2 - (\tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v)^2 = \\ &= |Q\mathbf{r}_u|^2 \cdot |Q\mathbf{r}_v|^2 - (Q\mathbf{r}_u, Q\mathbf{r}_v)^2 = \\ &= |\mathbf{r}_u|^2 \cdot |\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 \equiv |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2 \end{aligned}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Eslatib o'tamiz, (16.1.3) formula yordamida S sirtini aniqlovchi $\mathbf{r}(u, v)$ vektor komponentalarini $(u, v) \in \Omega$ parametrlarning silliq funksiyalari, deb faraz qilgan edik.

16.1.3 - lemma. *Faraz qilaylik, P berilgan S sirtning shunday nuqtasi bo'lsinki, bunda $T(P)$ urinma tekislik Oxy koordinatalar tekisligiga parallel bo'lsin. U holda yetarlicha kichik $\delta > 0$ lar uchun P nuqtaning S dagi, diametri δ dan kichik, istalgan atrofida*

$$||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v|| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| + o(1) \quad (16.1.27)$$

tenglik o'rinli, bu yerda $\delta \rightarrow 0$ da barcha $P \in S$ nuqtalar bo'yicha tekis ravishda $o(1) \rightarrow 0$.

Isbot. P nuqtaning yetarlicha kichik atrofida sirt tenglamasini $z = z(x, y)$ ko'rinishda yozish mumkin; bunda P nuqtada

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

tengliklar o'riqli bo'ladi.

Demak, bu nuqtada

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Shunday ekan, (16.1.15) ga ko'ra, bu nuqtada

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \mathbf{k} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \mathbf{k}$$

deb yozishimiz mumkin.

Bundan chiqdi, P nuqtada

$$||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v|| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|.$$

Yakobian $(u, v) \in \Omega$ o'zgaruvchilarga uzluksiz bog'liq bo'lgani uchun, P nuqtaning δ -atrofida (16.1.27) tenglik bajariladi. 16.1.2 - tasdiqning eslatmasiga ko'ra esa, bu tenglik barcha $P \in S$ nuqtalar bo'yicha tekis bajariladi. ■

Navbatdagi lemmada S ni (16.1.3) formula bilan berilgan silliq sirt deb, $\delta > 0$ son esa shunday tanlanganki, bunda $P \in S$ nuqtaning diametri δ dan kichik bo'lgan istalgan $V \subset S$ atrofi $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanadi (16.1.2 - tasdiqqa qarang), deb faraz qilamiz. P nuqtaning V atrofini qayd etilgan proeksiyasi yuzini $\sigma_P(V)$ simvol bilan belgilaymiz. Bundan tashqari, W bilan Ω ning (16.1.3) akslantirish yordamida V ga akslantiriluvchi qisman sohasini belgilaymiz.

16.1.4 - lemma. *Istalgan $P \in S$ nuqta va uning S dagi, diametri δ dan kichik hamda bo'lakli-silliq chegarali, ixtiyoriy V atrofi uchun*

$$\iint_W ||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v|| \, du \, dv = \sigma_P(V) + o(1)|W| \quad (16.1.28)$$

tenglik o'rinli, bu yerda $\delta \rightarrow 0$ da $o(1) \rightarrow 0$.

Isbot. 1) Avval P nuqtada $T(P)$ urinma tekislik Oxy koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushadi deb faraz qilamiz. Bu holda 16.1.3 - lemmani qo'llashimiz mumkin. Bu lemmaga ko'ra, (16.1.27) baho tekis ravishda bajariladi. (16.1.27) tenglikni W soha bo'yicha integrallasak,

$$\iint_W ||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v|| \, du \, dv = \iint_W \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, du \, dv + o(1) \iint_W \, du \, dv \quad (16.1.29)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

E'tibor bering, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ akslantirish W ni $V \subset S$ to'plamning Oxy koordinatalar tekisligidagi proeksiyasiga, ya'ni

$T(P)$ urinma tekislikka o'tkazadi. Shunday ekan, 13.6.1 - teoreмага ko'ra, (16.1.29) ning o'ng tarafidagi yakobiandan olingan integral bu proeksiyaning $\sigma_P(V)$ yuziga teng. Ravshanki, (16.1.29) ning o'ng tarafidagi oxirgi integral $|W|$ ga teng. Demak, (16.1.29) tenglik (16.1.28) tenglik bilan ustma-ust tushadi.

2) Endi, faraz qilaylik, P nuqta S sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parallel ko'chirish va burish yordamida shunday yangi $\{O'XYZ\}$ koordinatalar sistemasiga o'taylikki, bunda $T(P)$ urinma tekislik $O'XY$ koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushsin. S sirtni aniqlovchi radius-vektorni $\tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ simvol orqali belgilab, isbotning birinchi qismini qo'llaymiz. Agar Jordan o'lchovining parallel ko'chirish va burishga nisbatan invariantligini e'tiborga olsak,

$$\iint_W ||\tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v|| \, du \, dv = \sigma_P(V) + o(1)|W| \quad (16.1.30)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ravshanki, 16.1.1 - va 16.1.2 - lemmalarga asosan,

$$||\tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v|| = ||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v||.$$

Shunday ekan, (16.1.30) dan talab qilingan (16.1.28) tenglik kelib chiqadi.



16.1.1 - teorema isboti. Faraz qilaylik, Ω kvadratlanuvchi soha bo'lib, S silliq $\mathbf{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ akslantirish yordamida berilgan sodd sirt bo'lsin.

Ixtiyoriy yetarlicha kichik $\delta > 0$ olib, S sirtni bo'lakli-silliq egri chiziqlar yordamida diametri δ dan kichik S_k qismlarga bo'lamiz. Bu bo'linish berilgan Ω sohasining, kvadratlanuvchi Ω_k qismlardan iborat, mos bo'linishini hosil qiladi; bunda $\mathbf{r}(\Omega_k) = S_k$.

Har bir S_k da ixtiyoriy ravishda $\xi_k \in S_k$ nuqtani tanlab, bu nuqtada $T(\xi_k)$ urinma tekislikni o'tkazamiz. 16.1.4 - lemnaga ko'ra,

S_k ni $T(\xi_k)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyasining σ_k yuzi

$$\sigma_k = \iint_{\Omega_k} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv + o(1) |\Omega_k|$$

munosabatni qanoatlantiradi.

Agar bu tengliklarni yig'sak, quyidagi

$$\sum_k \sigma_k = \iint_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv + o(1) |\Omega|$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan, $d(P) \rightarrow 0$ deb limitga o'tib, sirt yuzining (16.1.25) ta'rifini e'tiborga olsak, talab qilingan (16.1.26) tenglikka ega bo'lamiz.

■

10. 16.1.1 - teorema tadbig'iga misollar keltiramiz.

16.1.4 - misol. Quyidagi

$$z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

tenglama bilan berilgan S sirtning yuzini toping.

S sirt ikki o'zgaruvchili funksiyaning grafigi bo'lgani uchun, biz (16.1.20) formuladan foydalanishimiz mumkin. Demak,

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + y^2 + x^2.$$

Shunday ekan, (16.2.26) formulaga ko'ra,

$$|S| = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy.$$

Ikki karrali integralni qutb koordinatalariga o'tib hisoblasak,

$$|S| = 2\pi \int_0^R \sqrt{1+\rho^2} \rho \, d\rho = \frac{2\pi}{3} \left[(1+R^2)^{3/2} - 1 \right]$$

tenglikni olamiz.

E'tibor bering, (16.1.26) formula bu formuladagi integral xosmas bo'lganda ham o'rinni.

16.1.5 - misol. Yarim sferaning, ya'ni

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

tenglama bilan berilgan S sirt yuzini toping.

(16.1.20) formuladagi ifoda

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

ko'rinishga ega.

Agar (16.1.26) formulada qutb koordinatalar sistemasiga o'tsak,

$$|S| = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{R \, dx \, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= 2\pi R \int_0^R \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = 2\pi R^2$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(16.1.26) formulani S sirt sodda bo'lmasada, lekin chekli sondagi sodda sirtlar yig'indisidan iborat bo'lsa ham qo'llash mumkin.

16.1.6 - misol. Faraz qilaylik, $a > b > 0$ bo'lib, (u, v) o'zgaruvchilar $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ kvadratga tegishli bo'lsin:

$$-\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi.$$

Quyidagi

$$x = (a + b \cos v) \cos u,$$

$$y = (a + b \cos v) \sin u,$$

$$z = b \sin v,$$

komponentalarga ega $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor bilan berilgan sirt, ya'ni tor yuzini toping.

$R(v) = a + b \cos v$ deb belgilab, (16.1.17) va (16.1.18) formulalarni qo'llaymiz. Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$A = \begin{vmatrix} R(v) \cos u & 0 \\ -b \sin v \sin u & b \cos v \end{vmatrix} = R(v)b \cos u \cos v,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -R(v) \sin u \\ b \cos v & -b \sin v \cos u \end{vmatrix} = R(v)b \sin u \cos v$$

va

$$C = \begin{vmatrix} -R(v) \sin u & R(v) \cos u \\ -b \sin v \cos u & -b \sin v \sin u \end{vmatrix} = R(v)b \sin v.$$

Bundan

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = bR(v).$$

Demak,

$$|S| = \iint_{T^2} b(a + b \cos v) du dv = 2\pi b \int_{-\pi}^{\pi} (a + b \cos v) dv = 4\pi^2 ab.$$

16.2-§. Sirtning birinchi kvadratik formasi

1. Faraz qilaylik, Ω ikki o'lchovli soha bo'lib, S sodda sirt $\mathbf{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ silliq akslantirish bilan aniqlangan bo'lsin.

Eslatib o'tamiz, radius-vektor

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lib, har bir x, y va z komponenta ikki $(u, v) \in \Omega$ o'zgaruvchining silliq funksiyasidan iborat.

$\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiyaning birinchi differensialini qaraylik:

$$d\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv. \quad (16.2.1)$$

$d\mathbf{r}$ o'rniga $d\mathbf{r}$ deb belgilash umum qabul qilingan bo'lib, bu belgilash differensialning vektor qiymatli funksiya ekaniga urg'u be-radi.

Birinchi differensial du va dv erksiz o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo'lgani sababli, u *chiziqli forma* deb ham ataladi.

Birinchi differensialning skalyar kvadrati, ya'ni quyidagi

$$d\mathbf{r}^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v du dv + \mathbf{r}_v^2 dv^2 \quad (16.2.2)$$

ifoda kvadratik formadan iborat bo'lib, u S sirtning *birinchi kvadratik formasi* deb ataladi.

Odatda, bu formaning koeffitsiyentlari

$$E(u, v) = \mathbf{r}_u^2, \quad F(u, v) = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G(u, v) = \mathbf{r}_v^2 \quad (16.2.3)$$

ko'rinishda belgilanadi. Bu belgilashlardan foydalanib, birinchi kvadratik formani quyidagi

$$d\mathbf{r}^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 \quad (16.2.4)$$

standart ko'rinishda yozish mumkin.

Agar sirt sodda silliq maxsus nuqtasiz bo'lsa, bevosita (16.2.2) dan birinchi kvadratik formaning qat'iy musbat aniqlangan forma ekani kelib chiqadi.

16.2.1 - misol. Birinchi misol sifatida eng sodda sirtni, ya'ni

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < x < b, c < y < d, z = 0\}$$

to'g'ri to'rtburchakni qaraylik.

Bu to'g'ri to'rtburchakni radius-vektor bilan quyidagi

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 0) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

parametrik ko'rinishda formal aniqlash mumkin, bu yerda $(u, v) \in Q$. Shunday ekan,

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, 0) \quad \text{va} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, 0).$$

Demak,

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = 1.$$

Shunday qilib, to'g'ri to'rtburchak holida kvadratik forma

$$d\mathbf{r}^2 = du^2 + dv^2$$

ko'rinishda bo'lar ekan.

16.2.2 - misol. Faraz qilaylik, S markazi koordinatalar boshida va radiusi R ga teng bo'lgan sfera bo'lib, u $u = \theta$, $v = \varphi$ sferik koordinatalar yordamida

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

parametrik ravishda berilgan bo'lsin.

Ravshanki, bu vektor-funksiyaning hosilalari

$$\mathbf{r}_\theta = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta)$$

va

$$\mathbf{r}_\varphi = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

kabi hisoblanadi.

Shuning uchun,

$$E = \mathbf{r}_\theta^2 = R^2, \quad F = (\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi) = 0, \quad G = \mathbf{r}_\varphi^2 = R^2 \sin^2 \theta.$$

Demak, sfera uchun birinchi kvadratik forma

$$d\mathbf{r}^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

ko'rinishga ega.

Eslatma. Sferik koordinatalar parametrlarning o'zgarish sohasi bo'lgan quyidagi

$$Q = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

ochiq to'g'ri to'rtburchakni sferadan, geografik tilda aytadigan bo'l-sak, $M_0 = \{(x, y, z) \in S : y = 0, x \geq 0\}$ meridiaanni chiqazib tashlash natijasida hosil bo'lgan sohaga homeomorf akslantiradi.

16.2.3 - misol. S sirt sifatida

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

parametrik ravishda berilgan $\{z = x^2 - y^2\}$ hiperbolik paraboloidni («egarni») olaylik.

Ravshanki, bunda

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, 2u)$$

va

$$\mathbf{r}_v = (0, 1, -2v).$$

Shuning uchun,

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1 + 4u^2, \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = -4uv, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = 1 + 4v^2.$$

Demak, hiperbolik paraboloid uchun birinchi kvadratik forma

$$d\mathbf{r}^2 = (1 + 4u^2)du^2 - 8uv du dv + (1 + 4v^2)dv^2$$

ko'rinishga ega.

16.2.4 - misol. $u = \varphi$, $v = z$ silindrik koordinatalar yordamida

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$$

parametrik ravishda berilgan to'g'ri doiraviy silindrni qaraylik, bu yerda $0 \leq \varphi < 2\pi$ va $0 < z < h$.

Ravshanki, bunda

$$\mathbf{r}_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)$$

va

$$\mathbf{r}_z = (0, 0, 1).$$

Shuning uchun,

$$E = \mathbf{r}_\varphi^2 = R^2, \quad F = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_z) = 0, \quad G = \mathbf{r}_z^2 = 1.$$

Demak, silindr uchun birinchi kvadratik forma quyidagi

$$d\mathbf{r}^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2$$

ko'rinishga ega.

Eslatma. Agar parametr sifatida $u = R\varphi$, $v = z$ larni olib, radius-vektorni

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(R \cos \frac{u}{R}, R \sin \frac{u}{R}, v \right)$$

deb aniqlasak,

$$\mathbf{r}_u = \left(-\sin \frac{u}{R}, \cos \frac{u}{R}, 0 \right) \quad \text{va} \quad \mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$$

bo'ladi.

Demak, ushbu holda silindr uchun birinchi kvadratik forma quyidagi

$$d\mathbf{r}^2 = du^2 + dv^2$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, parametrlarni bunday tanlashda silindrning birinchi kvadratik for-masi to'g'ri to'rtburchakning birinchi kvadratik formasi bilan ustma-ust tushar ekan.

2. Birinchi kvadratik formaning muhimligi shundaki, u yordamida biz sirtning asosiy kattaliklarini, sirtni parametrik ravishda aniqlovchi $\mathbf{r}(u, v)$ funksiyaga murojaat qilmasdan, hisoblashimiz mumkin.

Masalan, birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlarini bilgan holda, sirt yuzini qanday hisoblash mumkinligini ko'raylik. Buning uchun quyidagi

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]^2 + (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 = \mathbf{r}_u^2 \cdot \mathbf{r}_v^2$$

ayniyatdan foydalanamiz.

Bevosita bu ayniyat va (16.2.3) ta'rifdan

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]^2 + F^2 = E \cdot G$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak,

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]^2 = EG - F^2. \quad (16.2.5)$$

Shunday ekan, navbatdagi tasdiq o'rinli.

16.2.1 - tasdiq. *Birinchi kvadratik formasi (16.2.4) ga teng bo'lgan S sirtning yuzi*

$$|S| = \iint_{\Omega} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \, du \, dv \quad (16.2.6)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Isbot 16.1.1 - teorema va (16.2.5) tenglikdan kelib chiqadi.

16.2.5 - misol. 16.2.2 - misolga ko'ra, sfera sirti uchun quyidagi

$$EG - F^2 = R^4 \sin^2 \theta$$

tenglik o'rinli.

Agar $\Omega \subset (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ sohani

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

radius-vektor akslantiradigan sfera qismini S deb belgilasak, u holda S sirt yuzi uchun

$$|S| = \iint_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$$

tenglikni olamiz.

16.2.6 - misol. Hiperbolik paraboloid uchun

$$EG - F^2 = (1 + 4u^2)(1 + 4v^2) - (-4uv)^2 = 1 + 4u^2 + 4v^2.$$

Agar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohani

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

radius-vektor akslantiradigan hiperbolik paraboloid qismini S deb belgilasak, u holda S sirt yuzi uchun

$$|S| = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \, du \, dv$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar, masalan,

$$\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 < R^2\}$$

bo'lsa, u holda qutb koordinatalariga o'tib,

$$\begin{aligned} |S| &= \iiint_{u^2+v^2 < R^2} \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho \, d\rho = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{\pi}{6} \left[(1 + 4R^2)^{3/2} - 1 \right] \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

3. Birinchi kvadratik forma yordamida sirtida yotuvchi egri chiziq uzunligini ham hisoblash mumkin.

Ushbu

$$\Phi(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

parametrik ko'rinishda berilgan L fazoviy egri chiziqni qaraylik.

E'tibor bering, sirtni aniqlovchi $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektordan farqli o'laroq, $\Phi(t)$ radius-vektor komponentalari bir o'zgaruvchili haqiqiy funksiyalardir.

Parametr a dan t gacha o'zgargandagi egri chiziq yoyi uzunligini $l(t)$ orqali belgilaylik. (7.1.19) formulaga ko'ra,

$$l(t) = \int_a^t \left| \frac{d\Phi(s)}{ds} \right| ds, \quad \text{ya'ni} \quad \frac{dl}{dt} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|. \quad (16.2.7)$$

Endi, faraz qilaylik, S silliq sirt $\mathbf{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ radius-vektor bilan berilgan bo'lib, L egri chiziq S sirtida yotsin: $L \subset S$. Bu holda L egri chiziqni, $w(t) = (u(t), v(t))$ komponentalarga ega bo'lgan $w : [a, b] \rightarrow \Omega$ akslantirish va $\mathbf{r}(u, v)$ akslantirishlarning superpozitsiyasi sifatida, parametrik ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni

$$\Phi(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Bunda

$$\varphi(t) = x(u(t), v(t)), \quad \psi(t) = y(u(t), v(t)), \quad \chi(t) = z(u(t), v(t)).$$

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{r}_u \cdot \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Shunday ekan, hosilaning skalyar kvadrati

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right|^2 = \mathbf{r}_u^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \mathbf{r}_v^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$$

kabi aniqlanadi.

Birinchi kvadratik formaning (16.2.3) ta'rifidan foydalanib, biz yuqoridagi tenglikni

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right|^2 = E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \quad (16.2.8)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Bu tenglikni (16.2.7) bilan taqqoslab, biz egri chiziqli uzunligi uchun, birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari orqali ifodalangan, quyidagi formulaga kelimiz.

16.2.2 - tasdiq. Faraz qilaylik, L egri chiziqli, birinchi kvadratik formasi (16.2.4) ko'rinishga ega bo'lgan, sodda silliq S sirtida yotsin. U holda L egri chiziqli uzunligi

$$|L| = \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt \quad (16.2.9)$$

ga teng.

Bu formulada birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari L egri chiziqni aniqlovchi $(u(t), v(t))$ vektor-funksiyaga bog'liq.

1 - eslatma. Faraz qilaylik, S silliq sirt biror almashtirishlardan so'ng shunday S_1 silliq sirtga akslauskini, bunda S_1 ning birinchi kvadratik formasi S ning birinchi kvadratik formasiga teng bo'lsin. U holda, 16.2.1 - va 16.2.2 - tasdiqlarga asosan, bunday almashtirishda sirt yuzi va bu sirtida yotgan egri chiziqlarning uzunliklari o'zgarmaydi.

Masalan, to'g'ri to'rtburchakni shunday bukish mumkinki, natijada u silindrik sirt ko'rinishiga keladi, lekin bunda egri chiziqlar uzunligi va shakllar yuzi o'zgarmay qoladi.

2 - eslatma. (16.2.8) tenglikni differensiallarda quyidagi

$$d\Phi^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 \quad (16.2.10)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(16.2.7) ga ko'ra, $\Phi(t)$ vektor-funksiyaning t parametr va l yoy uzunligi bo'yicha hosilalari

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{d\Phi}{dl} \cdot \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$

munosabat bilan bog'langan.

Shuning uchun, tabiiy parametr bo'yicha hosila

$$\frac{d\Phi}{dl} = \frac{\frac{d\Phi}{dt}}{\left| \frac{d\Phi}{dt} \right|} \quad (16.2.11)$$

ga teng.

Demak,

$$\left| \frac{d\Phi}{dl} \right| = 1. \quad (16.2.12)$$

15.2 - paragraf natijalariga ko'ra ((15.2.16) formulaga qarang), $\frac{d\Phi}{dl}$ vektor L egri chiziqqa o'tkazilgan τ birlik urinma vektorga teng. Shuning uchun, (16.2.11) tenglikni

$$\frac{d\Phi}{dl} = \tau, \quad \text{yoki} \quad d\Phi = \tau dl$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Oxirgi tenglikning har ikki tarafini kvadratga ko'tarib,

$$d\Phi^2 = dl^2 \quad (16.2.13)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bundan va (16.2.10) tenglikdan S sirtida yotgan egri chiziq uzunligi differensial uchun

$$dl^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 \quad (16.2.14)$$

formulani olamiz.

Bu formulada u va v lar $[a, b]$ kesmani biror $L' \subset \Omega$ egri chiziqqa akslantiruvchi $(u(t), v(t))$ vektor-funksiyaning komponentalari bo'lib, $r(u, v)$ akslantirish bu L' egri chiziqni S da yotuvchi berilgan L egri chiziqqa o'tkazadi.

16.3-§*. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi

1. Ushbu paragrafda biz ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi sirtlarni qaraymiz, ya'ni sirtning aniqlovchi $\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiya komponentalarini Ω sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi, deb faraz qilamiz. Bu vektor-funksiyaning ikkinchi differensial

$$d^2\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_{uu} du^2 + 2\mathbf{r}_{uv} du dv + \mathbf{r}_{vv} dv^2 \quad (16.3.1)$$

ko'rinishdagi vektor qiymatli kvadratik formadan iborat.

Aytaylik, $\mathbf{n}$ berilgan S sirtning birlik normal vektori bo'lsin. (16.3.1) tenglikning ikki tarafini $\mathbf{n}$ vektorga skalyar ko'paytiraylik. Natijada hosil bo'lgan

$$d^2\mathbf{r}(u, v) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} du^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} du dv + \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} dv^2 \quad (16.3.2)$$

skalyar kattalik S sirtning *ikkinchi kvadratik formasi* deyiladi. Ikkinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari, odatda,

$$L(u, v) = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad M(u, v) = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad N(u, v) = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} \quad (16.3.3)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Bu belgilashlar yordamida ikkinchi kvadratik forma quyidagi

$$d^2\mathbf{r}(u, v) \cdot \mathbf{n} = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2 \quad (16.3.4)$$

standart ko'rinishda yoziladi.

16.3.1 - misol. Quyidagi (16.2.1 - misolga qarang)

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 0)$$

radius-vektor bilan aniqlangan Q to'g'ri to'rtburchak uchun

$$\mathbf{r}_{uu} = \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vv} = 0$$

tengliklar o'rinli.

Bu holda $d^2\mathbf{r}(u, v) = 0$ va demak, ikkinchi kvadratik forma aynan nolga teng.

16.3.2 - misol. Quyidagi

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

radius-vektor bilan berilgan sfera uchun normal vektor sifatida ichki $\mathbf{n} = -\mathbf{r}(\theta, \varphi)/R$ normalni olamiz.

Ikki marta differensiallab, $\mathbf{r}_{\theta\theta} = -\mathbf{r}(\theta, \varphi)$ tenglikka ega bo'lamiz. Bundan

$$L(\theta, \varphi) = \mathbf{r}_{\theta\theta}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r} \cdot (-\mathbf{r}/R) = |\mathbf{r}|^2/R = R$$

kelib chiqadi.

Endi

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) = -(R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, 0)$$

bo'lgani uchun,

$$N(\theta, \varphi) = \mathbf{r}_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{n} = R \sin^2 \theta.$$

Nihoyat, quyidagi

$$\mathbf{r}_{\theta\varphi}(\theta, \varphi) = (-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

tenglikka ko'ra,

$$M(\theta, \varphi) = \mathbf{r}_{\theta\varphi}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Shunday qilib, sfera uchun ikkinchi kvadratik forma

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = R d\theta^2 + R \sin^2 \theta d\varphi^2$$

ga teng.

16.3.3 - misol. Ushbu

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$$

radius-vektor bilan berilgan silindr $\mathbf{n} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$ ichki normalga ega.

Ravshanki, $\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, 0)$. Shuning uchun,

$$L(\varphi, z) = \mathbf{r}_{\varphi\varphi} \cdot \mathbf{n} = R.$$

Endi $\mathbf{r}_{\varphi z}(\varphi, z) = 0$ bo'lgani uchun,

$$M(\varphi, z) = \mathbf{r}_{\varphi z} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Nihoyat, $\mathbf{r}_{zz}(\theta, \varphi) = 0$ tenglikka ko'ra,

$$N(\varphi, z) = \mathbf{r}_{zz} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Shunday qilib, qarayotgan silindrning ikkinchi kvadratik formasi

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = R d\varphi^2$$

ga teng.

16.3.4 - misol. $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ parametrlar yoqdamida

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

radius-vektor bilan aniqlangan hiperbolik paraboloidni qaraylik.

Quyidagi

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, 2u), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, -2v)$$

tengliklarga ko'ra,

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 2), \quad \mathbf{r}_{uv} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{vv} = (0, 0, -2).$$

Eslatib o'tamiz,

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = (-2u, 2v, 1)$$

vektor ko'paytma urinma tekislikka ortogonal bo'lgani sababli, u normalga kollinear.

Normal sifatida

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}$$

vektorni olaylik.

Oson hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$L(u, v) = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}},$$

$$M(u, v) = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} = 0$$

va

$$N(u, v) = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Demak, hiperbolik paraboloidning ikkinchi kvadratik formasi

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(du^2 - dv^2)$$

ga teng.

16.3.5 - misol. Ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyaning grafigidan iborat S sirtini qaraylik. Bu holda (u, v) parametrlar sifatida (x, y) o'zgaruvchilarni olish mumkin, bunda $\mathbf{r}$ radius-vektor

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Shunday ekan,

$$d^2\mathbf{r}(x, y) = (0, 0, d^2f(x, y)).$$

Faraz qilaylik, koordinatalar boshida urinma tekislik $z = 0$ koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushsin. U holda

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Koordinatalar boshida sirtga normal sifatida $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ vektorni olaylik. U holda

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d^2f(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \quad (16.3.5)$$

ya'ni ikkinchi kvadratik forma grafigi qaralayotgan sirtidan iborat funksiyaning ikkinchi differensialiga teng.

Eslatma. Oxy tekislikni Oz o'qi atrofida burish yordamida (16.3.5) formuladagi $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ aralash hosilani koordinatalar boshida nolga teng qilish mumkin. Haqiqatan, soat miliga qarama-qarshi φ burchakka burish natijasida hosil bo'lgan yangi (x', y') koordinatalar eski (x, y) koordinatalar bilan

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi,$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

tengliklar orqali bog'langan.

Shunday ekan, (indekslar mos o'zgaruvchilar bo'yicha hosila olishni anglatadi) murakkab funksiyaning differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$f_{x'} = f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi$$

va

$$\begin{aligned} f_{x'y'} &= f_{xx} \cos \varphi (-\sin \varphi) + f_{xy} \cos^2 \varphi + f_{yx} (-\sin^2 \varphi) + \\ &+ f_{yy} \sin \varphi \cos \varphi = f_{xy} \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy}) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Endi φ burchakni

$$f_{xy} \cos 2\varphi = \frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy}) \sin 2\varphi$$

shartdan tanlab olamiz, ya'ni, $f_{xy} = 0$ bo'lsa, $\varphi = 0$ deymiz va $f_{xy} \neq 0$ bo'lsa,

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{(f_{xx} - f_{yy})}{2f_{xy}}$$

deymiz.

Ravshanki, φ ni bunday tanlashda $f_{x'y'}(0,0) = 0$ shart bajari-ladi. (16.3.5) formula esa,

$$d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d^2 f(0,0) = f_{x'x'} dx'^2 + f_{y'y'} dy'^2 \quad (16.3.6)$$

ko'rinishga keladi.

2. Sirtni aniqlovchi parametrlarni o'zgartirish natijasida sirtning ikkinchi kvadratik formasi qanday o'zgarishini o'rganamiz.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor yordamida berilgan S silliq sodda sirtni qaraylik, bu yerda $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Faraz qilaylik, P bu sirtning istalgan nuqtasi bo'lib, $\mathbf{n}(P)$ esa, P nuqtadan chiquvchi va $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal normal vektor bo'lsin.

Bundan tashqari, faraz qilaylik, (u, v) parametrlar yangi $(\xi, \eta) \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ parametrlarning

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta)$$

ko'rinishdagi silliq funksiyalari bo'lib, bunda $\rho(\xi, \eta) = r(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ radius-vektor xuddi o'sha S sirtni aniqlasin va bu sirt, xuddi avvalgidек, maxsus nuqtalar bo'lmasin. Buning uchun parametrlarni almashtirish xosmas bo'lsin deb, ya'ni

$$\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)} \neq 0$$

deb shart qo'yamiz.

Agar $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ bo'lsa, $P = \rho(\xi_0, \eta_0)$ bo'lib, bunda $u(\xi_0, \eta_0) = u_0$, $v(\xi_0, \eta_0) = v_0$ bo'ladi.

Yangi parametrlarga mos ikkinchi kvadratik forma

$$d^2 \rho(\xi, \eta) \cdot \mathbf{n} = \rho_{\xi\xi} \cdot \mathbf{n} d\xi^2 + 2\rho_{\xi\eta} \cdot \mathbf{n} d\xi d\eta + \rho_{\eta\eta} \cdot \mathbf{n} d\eta^2 \quad (16.3.7)$$

ko'rinishga ega.

Bu forma ham xuddi (16.3.2) ikkinchi kvadratik forma kabi qiy-matlarni qabul qilishini ko'rsatamiz.

16.3.1 - tasdiq. *Ikkinchi kvadratik forma parametrlarni xosmas o'zgartirishga nisbatan invariantdir.*

Isbot. Birinchi differensial formasining invariantligiga ko'ra,

$$d\rho(\xi, \eta) = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv.$$

Shunday ekan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga asosan,

$$\begin{aligned} d^2\rho(\xi, \eta) &= \mathbf{r}_{uu} du^2 + 2\mathbf{r}_{uv} du dv + \mathbf{r}_{vv} dv^2 + \mathbf{r}_u \cdot d^2u(\xi, \eta) + \mathbf{r}_v \cdot d^2v(\xi, \eta) = \\ &= d^2\mathbf{r}(u, v) + \mathbf{r}_u \cdot d^2u(\xi, \eta) + \mathbf{r}_v \cdot d^2v(\xi, \eta). \end{aligned}$$

E'tibor bering, $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlar urinma tekislikda yotadi va demak, ular $\mathbf{n}$ normal vektorga ortogonal. Bundan chiqdi,

$$d^2\mathbf{r}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{n} = d^2\mathbf{r}(u, v) \cdot \mathbf{n}$$

tenglik o'rinli. Bu tenglik esa, (16.3.2) va (16.3.7) kvadratik formalar tengligini anglatadi.



Eslatma. Agar ikkinchi kvadratik forma ta'rifida $\mathbf{n}$ vektor normal vektoridan farq qilsa, u holda mos kvadratik forma invariantlik xossasiga ega bo'lmaydi.

3. Ikkinchi kvadratik forma sirtning ancha nozik kattaliklarini ham, sirtni parametrik ravishda aniqlovchi formulalardan foydalanmasdan turib, topish imkonini beradi. Bunday kattaliklardan biri egrilikdir.

Tegishli tushunchalarni kiritish maqsadida avval fazoviy va yassi egri chiziqlarning ba'zi xossalari o'rganamiz.

Xuddi avvalgi bandedagidek,

$$\Phi(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

kabi parametrik ravishda berilgan L fazoviy egri chiziqni qaraylik. (16.2.12) formulaga ko'ra, radius-vektorning yoy uzunligi bo'yicha hosilasi quyidagi

$$\left(\frac{d\Phi}{dl}, \frac{d\Phi}{dl} \right) = \left| \frac{d\Phi}{dl} \right|^2 = 1$$

shartni qanoatlantiradi.

Bu tenglikni l bo'yicha differensiallab,

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{d\Phi}{dl}, \frac{d\Phi}{dl} \right) = 2 \left(\frac{d^2\Phi}{dl^2}, \frac{d\Phi}{dl} \right) = 0$$

tenglikni olamiz. Bu tenglik radius-vektorning ikkinchi hosilasi birinchi hosilaga ortogonal ekanini anglatadi.

Eslatib o'tamiz, 15.2 - paragraf natijalariga ((15.2.16) formulaga qarang) ko'ra, $\frac{d\Phi}{dl}$ vektor L egri chiziqqa o'tkazilgan τ birlik urinma vektor bilan ustma-ust tushadi. Demak, $\frac{d^2\Phi}{dl^2}$ ikkinchi hosila τ urinma vektorga ortogonal bo'lar ekan.

Egri chiziqning urinma vektoriga ortogonal har qanday birlik vektor bu egri chiziqqa normal deb ataladi. Ravshanki, silliq fazoviy egri chiziq har bir nuqtasida cheksiz ko'p turli normallarga ega. $\Phi(t)$ radius-vektor bilan berilgan L egri chiziqning *bosh normal*i deb

$$\nu = \frac{\frac{d^2\Phi}{dl^2}}{\left| \frac{d^2\Phi}{dl^2} \right|} \quad (16.3.8)$$

(albatta, maxraj noldan farqli bo'lgan hollarda) vektorga aytiladi. Agar maxraj nolga teng bo'lsa, barcha normallar teng kuchli bo'lib, bunda bosh normal mavjud bo'lmaydi.

Agar (16.3.8) ning ikki tarafini ν birlik vektorga skalyar ko'paytirib, so'ngra maxrajdan ozod bo'lsak,

$$\left| \frac{d^2\Phi}{dl^2} \right| = \frac{d^2\Phi}{dl^2} \nu \quad (16.3.9)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi (16.3.9) ning chap tarafini koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burishga nisbatan invariant ekanini ko'rsatamiz.

16.3.2 - tasdiq. Faraz qilaylik, $\Psi(l) = S\Phi(l) + c$ bo'lib, bunda S ortogonal matritsa va c esa, biror o'zgarmas vektor bo'lsin. U holda

$$\left| \frac{d^2\Psi}{dl^2} \right| = \left| \frac{d^2\Phi}{dl^2} \right| \quad (16.3.10)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Agar $\Psi(l)$ radius-vektorni aniqlovchi tenglikni ikki marta differensiallab, S matritsa va c vektorning o'zgarmas ekanini hisobga olsak, $\Psi''(l) = S\Phi''(l)$ tenglikni olamiz.

Lekin, S ortogonal matritsa bo'lgani uchun $S^*S = I$, bunda S^* qo'shma matritsa. Demak,

$$\begin{aligned} |\Psi''(l)|^2 &= (S\Phi''(l), S\Phi''(l)) = (\Phi''(l), S^*S\Phi''(l)) = \\ &= (\Phi''(l), \Phi''(l)) = |\Phi''(l)|^2. \end{aligned}$$

■

Natija. Agar ν bosh normal bo'lsa,

$$k(l) = \frac{d^2\Phi}{dl^2} \cdot \nu \quad (16.3.11)$$

kattalik koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burishga nisbatan invariantdir.

Bu tasdiqning to'g'riligi (16.3.9) tenglikdan kelib chiqadi.

4. Agar fazoviy L egri chiziqni o'z ichiga oluvchi $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tekislik mavjud bo'lsa, ya'ni $L \subset \Pi$ bo'lsa, u holda L yassi egri chiziq deyiladi.

Biror $y = f(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya grafigidan iborat $L \subset \mathbb{R}^2$ silliq yassi egri chiziqni qaraylik. $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgani uchun, istalgan $(a, f(a))$ nuqtaning ki-chik

atrofida bu egri chiziqni biror $y = kx + b$ (urinma deb ataluchi) to'g'ri chiziq bilan birinchi tartibli kichiklikda approksimatsiyalash mumkin, ya'ni

$$x \rightarrow a \quad \text{da} \quad f(x) = kx + b + o(x - a).$$

Umuman aytganda, har qanday L silliq egri chiziqni ham to'g'ri chiziq yordamida ikkinchi tartibli kichiklikda approksimatsiyalab bo'lmaydi. Ammo, agar f funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, uning grafigini $(a, f(a))$ nuqtaning kichik atrofida radiusi $R > 0$ va markazi biror $P \in \mathbb{R}^2$ nuqtada bo'lgan aylana bilan approksimatsiyalab, ikkinchi tartibli approksimatsiyaga erishish mumkin. Bunday aylananing R radiusiga egri chiziqning $(a, f(a))$ nuqtadagi *egrilik radiusi* va P nuqtaga esa, *egrilik markazi* deyiladi.

16.3.6 - misol. Faraz qilaylik, f funksiya

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (16.3.12)$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Bu degani, f funksiya grafigiga $(0, 0)$ koordinatalik nuqtada o'tkazilgan urinma absissalar o'qi bilan ustma-ust tushadi.

f funksiya grafigiga koordinatalar boshi atrofida ikkinchi tartibli approksimatsiya bilan yaqinlashadigan aylana radiusini topamiz. Ravshanki, aylana $(0, 0)$ nuqtadagi urinmaga ham, ya'ni absissalar o'qiga ham urinishi kerak. Shunday ekan, aylananing markazi ordinatalar o'qida yotishi zarur. Faraz qilaylik, markaz yuqori yarim tekislikda yotsin. U holda aylana tenglamasi

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2}, \quad |x| < R$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunday $R > 0$ ni topish talab qilinadiki,

$$x \rightarrow 0 \quad \text{da} \quad f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2} + o(x^2)$$

bo'lsin.

Kichik x larda Nyuton binomi formulasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} R - \sqrt{R^2 - x^2} &= R - R \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right)^{1/2} = \\ &= R - R \left[1 - \frac{x^2}{2R^2} + O(x^4) \right] = \frac{x^2}{2R} + O(x^4). \end{aligned}$$

Demak, shunday $R > 0$ sonni topish kerakki, kichik x larda

$$f(x) = \frac{x^2}{2R} + o(x^2) \quad (16.3.13)$$

tenglik bajarilsin.

Faraz qilaylik, f funksiya nolning atrofida ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, (16.3.12) ni hisobga olsak, Teylor formulasiga ko'ra,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2). \quad (16.3.14)$$

(16.3.13) va (16.3.14) ni taqqoslab,

$$f''(0) = \frac{1}{R}$$

tenglikni olamiz.

Agar aylana markazi quyi yarim tekislikda bo'lsa, u holda oxirgi tenglikning o'ng tarafida minus ishora hosil bo'ladi. Demak, umumiy holda

$$|f''(0)| = \frac{1}{R}. \quad (16.3.15)$$

Shunday qilib, biz qarayotgan holda, f funksiya grafigidan iborat egri chiziqning egrilik radiusi bu funksiyaning ikkinchi tartibli hosila-si bilan (16.3.15) munosabat yordamida bog'langan.

1 - eslatma. Xuddi shu egri chiziqni parametrik ko'rinishda beraylik. $\Phi(x) = (x, f(x))$ deb, koordinatalar boshi bilan egri

chiziqning $(x, f(x))$ nuqtasini tutashtiruvchi $\Phi(x)$ radius-vektorni kiritamiz. Bu vektor egri chiziqni parametrik ravishda aniqlaydi.

$\Phi''(x) = (0, f''(x))$ tenglikka ko'ra,

$$|\Phi''(x)| = |f''(x)| \quad (16.3.16)$$

va biz (16.3.15) tenglikni

$$|\Phi''(0)| = \frac{1}{R} \quad (16.3.17)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

2 - eslatma. (16.3.17) kabi tenglik urinish nuqtasida hosilani x bo'yicha emas, balki yoy uzunligi l bo'yicha olsa ham, o'rinli bo'ladi. Haqiqatan, qaralayotgan holda yoy uzunligi

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

ga teng.

Shunday ekan,

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

va bundan chiqdi,

$$\frac{dx}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}. \quad (16.3.18)$$

Demak,

$$\frac{df}{dl} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dl} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}.$$

Bundan, murakkab funktsiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{d^2 f}{dl^2} = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \frac{[f'(x)]^2 \cdot f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^2} = \frac{f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^2}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Boshqa tarafdin, agar (16.3.18) ni differensiallasak,

$$\frac{d^2x}{dl^2} = - \frac{f'(x)f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} = \frac{f'(x)f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^2}$$

munosabatni olamiz.

Shuning uchun,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2f}{dl^2}\right)^2 &= \frac{[f'(x)]^2[f''(x)]^2}{(1 + [f'(x)]^2)^4} + \\ &+ \frac{[f''(x)]^2}{(1 + [f'(x)]^2)^4} = \frac{[f''(x)]^2}{(1 + [f'(x)]^2)^3}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}\right| = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}. \quad (16.3.19)$$

Bu tenglik va (16.3.16) formuladan, (16.3.12) shartga ko'ra,

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}(0)\right| = |f''(0)| = \left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(0)\right|$$

munosabat kelib chiqadi.

Shuning uchun, (16.3.17) ga ko'ra, urinish nuqtasida

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}\right| = \frac{1}{R} \quad (16.3.20)$$

tenglik bajariladi.

Ta'rif. L yassi egri chiziqning $P \in L$ nuqtadagi **egriligi** deb shu nuqtadagi egriklik radiusiga teskari kattalikka aytamiz.

Shunday qilib, agar k yassi egri chiziqning egriligi bo'lsa, u egrilik radiusi R bilan

$$k = \frac{1}{R} \quad (16.3.21)$$

ko'rinishda bog'langan.

16.3.3 - tasdiq. Faraz qilaylik, L yassi egri chiziq $\Phi(t)$ radius-vektor bilan berilgan bo'lib, l bu egri chiziqning yoy uzunligi bo'lsin. U holda k egrilik uchun

$$k = \left| \frac{d^2\Phi}{dl^2} \right| \quad (16.3.22)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (16.3.20) va (16.3.21) formulalarga ko'ra, isbotlanayotgan (16.3.22) tenglik urinma absissalar o'qi bilan ustma-ust tushgan nuqtalarda bajarilishi aniq.

Endi P berilgan L silliq egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parallel ko'chirish va burish yordamida markazi P nuqtada bo'lgan shunday yangi koordinatalar sistemasiga o'taylikki, bunda L ga urinma absissalar o'qi bilan ustma-ust tushsin. Natijada $\Phi(t)$ radius-vektor yangi $\Psi(t)$ radius-vektorga o'tadi va yuqoridagi mulohazalarga ko'ra,

$$k = \left| \frac{d^2\Psi}{dl^2} \right|. \quad (16.3.23)$$

Nihoyat, 16.3.1 - tasdiqqa ko'ra, (16.3.22) va (16.3.23) tengliklarning o'ng taraflari teng. Demak, (16.3.22) tenglik istalgan $P \in L$ nuqta uchun o'rinli bo'lar ekan.

■

Natija. Faraz qilaylik, L yassi egri chiziq $\Phi(t)$ radius-vektor bilan berilgan bo'lib, ν bosh normal, l esa L egri chiziqning yoy uzunligi bo'lsin. U holda egri chiziq egriligi uchun

$$k = \frac{d^2\Phi}{dl^2} \cdot \nu \quad (16.3.24)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, (16.3.24) tenglik (16.3.9) va (16.3.22) dan kelib chiqadi.

Eslatma. Agar L egri chiziq biror silliq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lsa, u holda uning $(x, f(x))$ nuqtadagi egriligi uchun

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}} \quad (16.3.25)$$

tenglik o'rinli. Bu formula bevosita (16.3.19) va (16.3.22) tengliklardan kelib chiqadi.

16.3.7 - misol. Tenglamasi

$$y = x^2$$

ko'rinishda bo'lgan parabolaning egrilik radiusini toping.

Ravshanki,

$$y'(x) = 2x, \quad y''(x) = 2.$$

Demak, (16.3.25) formulaga ko'ra, egrilik

$$k = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

ga teng.

Shunday ekan, parabolaning egrilik radiusi uchun

$$R = \frac{1}{2} (1 + 4x^2)^{3/2}$$

munosabat o'rinli.

5. Yuqorida kiritilgan yassi egri chiziq egriligi tushunchasi yordamida sirt egriligi tushunchasini kiritish va uning asosiy xossalarini o'rganish mumkin.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor bilan parametrik ko'rinishda berilgan S silliq sodda sirtni qaraymiz, bu yerda $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Faraz

qilaylik, P bu sirtning istalgan nuqtasi bo'lib, $\mathbf{n}(P)$ esa P nuqtada $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal birlik normal vektor bo'lsin.

II orqali qayd etilgan normaldan o'tuvchi biror tekislikni, ya'ni $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal bo'lib, P nuqtani o'z ichiga olgan biror tekislikni belgilaylik. Bunda $L = \Pi \cap S$ kesishmani S sirtning P nuqtadagi normal kesimi deyviz.

16.3.4 - tasdiq. Silliq sodda S sirtning biror $P \in S$ nuqtasidagi ixtiyoriy normal kesimi P nuqtaning biror atrofida silliq yassi egri chiziq bo'ladi.

Isbot. $P \in S$ nuqtani koordinatalar boshi qilib tanlab, shunday lokal koordinatalar sistemasini kiritamizki, bunda Oxy koordinatalar tekisligi $T(P)$ urinma tekislik bilan ustma-ust tushsin. Bu koordinatalar sistemasida sirtning P nuqtasini o'rab turgan biror qismi $z = f(x, y)$ tenglama bilan aniqlanadi.

Oxy urinma tekislikka ortogonal va Oz o'qdan o'tuvchi istalgan tekislik $Ax + By = 0$ tenglama bilan berilishi mumkin, bunda A va B koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli. Agar, masalan, $B \neq 0$ bo'lsa, qayd etilgan tekislik tenglamasini $y = kx$ ko'rinishda yozish mumkin. Shunday ekan, bu tekislikning S sirt bilan kesishmasi $z = F(x)$ tenglamaga ega, bunda $F(x) = f(x, kx)$. Ravshanki, $F(x)$ funksiya koordinatalar boshining biror atrofida silliq bo'lib, uning grafigi silliq yassi egri chiziqdan iborat.



Eslatma. $L = \Pi \cap S$ egri chiziqqa P nuqtada o'tkazilgan ν bosh normal Π tekislikda yotadi va τ urinma vektorga ortogonal bo'ladi. Xuddi shuni Π tekislik o'tadigan $\mathbf{n}(P)$ normal haqida ham aytish mumkin. Bundan chiqdi, ν vektor $\mathbf{n}(P)$ bilan yoki $-\mathbf{n}(P)$ bilan ustma-ust tushar ekan, ya'ni $\nu = \pm \mathbf{n}$.

Faraz qilaylik, L egri chiziq

$$\Phi(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

vektor-funksiya bilan aniqlangan bo'lsin, bu yerda $(u(t), v(t)) \in \Omega$.

Ikkinchi kvadratlik formaning (16.3.2) ta'rifida qatnashgan normalni L egri chiziqlarning bosh normaliga teng qilib tanlaymiz, ya'ni $\nu = \mathbf{n}$ deymiz. U holda (16.3.24) tenglik

$$k = \frac{d^2\Phi}{dl^2} \cdot \mathbf{n} \quad (16.3.26)$$

ko'rinishga keladi.

Bu tenglik normal kesim egriligi birinchi va ikkinchi kvadratlik formalar yordamida hisoblash imkonini beradi.

16.3.5 - tasdiq. Faraz qilaylik, S silliq sodda sirt $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor bilan aniqlangan bo'lib, $P \in S$ nuqtadagi normal kesimi L bo'lsin. U holda L egri chiziqlarning P nuqtadagi egriligi

$$k = \frac{L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2}{E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2} \quad (16.3.27)$$

kasrga teng bo'lib, bunda surat ikkinchi kvadratlik formaga va maxraj esa, birinchi kvadratlik formaga teng.

Isbot. (16.3.26) ning o'ng tarafidagi ikkinchi tartibli hosilani, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dl^2} &= \frac{d}{dl} \frac{d\Phi}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\mathbf{r}_u \frac{du}{dl} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dl} \right) = \\ &= \mathbf{r}_{uu} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{dl} \cdot \frac{dv}{dl} + \mathbf{r}_{vv} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 \end{aligned} \quad (16.3.28)$$

deb yozamiz.

$u(t)$ va $v(t)$ funksiyalar birinchi differensiallari formasining invariantligiga ko'ra, oxirgi tenglikni ikkinchi differensial ko'rinishida yozish mumkin, ya'ni

$$d^2\Phi = \mathbf{r}_{uu} du^2 + 2\mathbf{r}_{uv} du dv + \mathbf{r}_{vv} dv^2 = d^2\mathbf{r}.$$

Bu tenglikni hisobga olib, (16.3.26) ning o'ng tarafini

$$k = \frac{d^2\Phi \cdot \mathbf{n}}{dl^2} = \frac{d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{dl^2} \quad (16.3.29)$$

ko'rinishga keltiramiz.

(16.3.4) ga ko'ra, bu tenglik o'ng tarafidagi kasr surati ikkinchi kvadratik formaga, (16.2.14) ga ko'ra esa, kasr maxraji birinchi kvadratik formaga teng. Bundan talab qilingan (16.3.27) tenglikni olamiz.

■

Eslatma. (16.3.2) ta'rifga asosan, ikkinchi kvadratik forma sirtga o'tkazilgan $\mathbf{n}$ birlik normal vektorni ikkinchi differensialga skalyar ko'paytmasiga teng. Yuqorida normal kesimning ν bosh normali yoki $\mathbf{n}$ bilan, yoki $(-\mathbf{n})$ bilan ustma-ust tushishi shartligi qayd etilgan edi. Birinchi holda (16.3.27) tenglik bajariladi, ikkinchi holda esa, kasr oldiga minus ishora qo'yiladi. Agar $\mathbf{n}$ normal ixtiyoriycha tanlansa, biz faqat

$$k = \pm \frac{L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2}{E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2} \quad (16.3.30)$$

tenglik bajariladi deya olamiz.

16.3.8 - misol. Agar S radiusi R ga teng sfera bo'lsa, u holda (16.3.27) tenglik va 16.2.2 - hamda 16.2.8 - misollarga ko'ra, normal kesimning har bir nuqtadagi egriligi

$$k = \frac{R d\theta^2 + R \sin^2 \theta d\varphi^2}{R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2} = \frac{1}{R}$$

ga teng.

Bundan chiqdi, sferaning har qanday normal kesimi egriligi o'zgarmas bo'lib, egrilik radiusi sfera radiusiga teng. Aslida xuddi shu natijaga oddiy geometrik mulohazalar yordamida ham kelish mumkin.

16.3.9 - misol. Agar silindr

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$$

radius-vektor bilan parametrik berilgan bo'lsa, u holda ichki normal $\mathbf{n} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$ ga teng.

Bu silindrning ikkinchi kvadratik formasi

$$d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = R d\varphi^2$$

kabi va birinchi kvadratik formasi esa,

$$d\mathbf{r}^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2$$

kabi aniqlanadi.

Demak,

$$k = \frac{1}{R} \cdot \frac{(R d\varphi)^2}{(R d\varphi)^2 + dz^2}.$$

Ahamiyat bering, o'ng tarafdagi ikkinchi kasr qiymati 0 va 1 orasida yotadi. Ravshanki, $\varphi = \text{const}$ chiziqlar (bunda $d\varphi = 0$) nolga teng minimal egrilikka ega, $1/R$ ga teng maksimal egrilikka esa, $z = \text{const}$ chiziqlar (bunda $dz = 0$) ega. Boshqacha aytganda, silindr o'qidan o'tuvchi kesimlar minimal egrilikka, silindr o'qiga ortogonal kesimlar esa, maksimal egrilikka ega bo'ladi. Shunday qilib, ekstremal egriliklar

$$k_{\min} = 0, \quad k_{\max} = \frac{1}{R}$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

6. Ushbu bandda biz normal kesimlar egriliklarini batafsilroq o'rganamiz va olingan natijalardan foydalanib, keyingi bandda sirt egriligi tushunchasini kiritamiz va uni eng sodda xossalari aniqlaymiz.

Faraz qilaylik, P silliq S sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, $T(P)$ bu sirtga P nuqtada o'tkazilgan urinma tekislik bo'lsin. 16.1.2 - tasdiqqa ko'ra, $O' = P$ nuqtani koordinatalar boshi qilib tanlab, shunday $\{O'x'y'z'\}$ lokal koordinatalar sistemasini kiritish mumkinki, bunda $O'x'y'$ koordinatalar tekisligi $T(P)$ bilan ustma-ust tushadi

va S sirtning koordinatalar boshi atrofidagi qismi biror $z' = f(x', y')$ funksiya grafigidan iborat bo'ladi.

(16.3.6) tenglikka ko'ra, $O'x'$ absissalar o'qini va $O'y'$ ordinatalar o'qini shunday tanlash mumkinki, bunda P nuqtadagi kvadratik forma uchun (16.3.6) tenglik bajariladi. Bundan buyon, qulaylik uchun, lokal koordinatalardagi shtrixni tushirib qoldiramiz.

Shunday qilib, biz shunday lokal koordinatalarni tanlashimiz mumkinki, bunda P nuqtaning atrofida S sirt $z = f(x, y)$ funksiya grafigi bilan ustma-ust tushib, P nuqtadagi ikkinchi kvadratik forma

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d^2f(0, 0) = f_{xx}dx^2 + f_{yy}dy^2 \quad (16.3.31)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik, L normal kesim

$$\Phi(t) = \mathbf{r}(x(t), y(t)) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))), \quad a \leq t \leq b,$$

vektor-funksiya bilan berilgan bo'lsin.

Agar L egri chiziq bosh normalining yo'nalishi Oz o'qining musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, u holda (16.3.29) va (16.3.31) larga ko'ra, L egri chiziq egriligi

$$k = \frac{d^2\Phi \cdot \mathbf{n}}{dl^2} = \frac{d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{dl^2} = f_{xx} \cdot \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + f_{yy} \cdot \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 \quad (16.3.32)$$

kabi aniqlanadi.

Bordiyu, bosh normal Oz o'qiga teskari yo'nalgan bo'lsa, (16.3.32) ning o'ng tarafidagi kattalik $-k$ ga teng bo'ladi. Lekin, shunga qaramasdan, biz L egri chiziqning egriligini (16.3.32) kattalikka teng deb, ya'ni kesim egriligini manfiy bo'lishi ham mumkin deb hisoblaymiz.

E'tibor bering, (16.2.12) ga ko'ra,

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}, \frac{dz}{dl} \right)$$

vektor L egri chiziqning birlik urinma vektori bo'lib, uning komponentalari

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi

$$\tau = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

yo'naltiruvchi kosinuslardan iborat.

Eslatib o'tamiz, Oz o'qni $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal qilib tanlagan edik. Bundan chiqdi, τ urinma vektor $T(P)$ da yotgani uchun, u Oz o'qqa ortogonal bo'ladi. Demak, $\cos \gamma = 0$ va

$$\cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

Shunday ekan, $k_1 = f_{xx}(0, 0)$ va $k_2 = f_{yy}(0, 0)$ deb belgilab, (16.3.32) tenglikni

$$k = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha \quad (16.3.33)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (16.3.33) tenglikda α absissalar o'qi bilan L normal kesimni aniqlaydigan tekislik orasidagi burchakdir.

Furaz qilaylik, $k_1 \geq k_2$ bo'lsin. U holda o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$k_1 \equiv k_1 \cos^2 \alpha + k_1 \sin^2 \alpha \geq k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha = k$$

va

$$k = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha \geq k_2 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha \equiv k_2$$

tengsizliklarga ko'ra, S sirtida yotgan va P nuqtadan o'tuvchi istalgan egri chiziqli egriligi quyidagi

$$k_2 \leq k \leq k_1$$

ikki tarallama tengsizlikni qanoatlantiradi.

E'tibor bering, Oz o'q yo'nalishini tanlash va Oxy koordinatalar tekisligini burish hisobiga $k_1 \geq |k_2|$ shart bajarilishiga erishish mumkin. Bunda k_2 kattalik istalgan qiy-matni: musbat, manfiy yoki nol qiymatni qabul qilishi mumkin.

k_1 va k_2 kattaliklar S sirtning P nuqtadagi bosh egriliklari deyiladi. Ularga mos normal kesimlar bosh normal kesim, bu kesimlarga urinmalar esa, bosh yo'nalishlar deb ataladi.

Ravshanki, k_1 normal kesimning maksimal egriligi va k_2 esa, uning minimal egriligi bo'ladi. Bundan tashqari, har bir nuqtada bosh yo'nalishlar o'zaro ortogonaldir; bu tasdiq bevosita (16.3.33) formuladan kelib chiqadi. Haqiqatan, k_1 maksimal egrilikka mos keluvchi bosh yo'nalish $\alpha = 0$ va $\alpha = \pi$ burchaklar bilan aniqlanib, absissalar o'qiga kollinear, k_2 minimal egrilikka mos keluvchi bosh yo'nalish esa, $\alpha = \pi/2$ va $\alpha = 3\pi/2$ burchaklar bilan aniqlanib, ordinatalar o'qiga kollinear bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan tasdiqlarni umumlashtirib, navbatdagi teorema ko'rinishida yozishimiz mumkin.

16.3.1 - teorema. Faraz qilaylik, S ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi, maxsus nuqtasiz sodda sirt bo'lsin. Istalgan $P \in S$ nuqta uchun bu nuqtadagi bosh yo'nalishlar o'zaro ortogonal bo'lib, ixtiyoriy L normal kesimning egriligi normal egrilik bilan **Eyler formulasi**

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi \quad (16.3.34)$$

orqali bog'langan, bu yerda φ orqali L normal kesimni aniqlovchi tekislik bilan k_1 maksimal egrilikka mos keluvchi bosh yo'nalish orasidagi burchak belgilangan.

7. Yuqorida kiritilgan tushunchalar yordamida ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi sirt egriligiga turli ta'riflar berish mumkin.

Sirtning biror nuqtadagi o'rtacha egriligi deb bu nuqtadagi bosh egriliklarning o'rta arifmetigiga aytiladi, ya'ni

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (16.3.35)$$

O'rtacha egrilik ba'zan *Eyler egriligi* deb ham ataladi.

O'rtacha egrilik tushunchasi 1768 yilda birinchi marta J. L. Lagranj o'rgangan masala bilan chambarchas bog'liq bo'lib chiqdi. Eslatib o'tamiz, Lagranj masalasi berilgan konturga tortilgan eng kichik yuzalik sirtni topishdan iborat. Agar berilgan kontur yopiq

yassi egri chiziqdan iborat bo'lsa, u holda yechim bu egri chiziq bilan chegaralangan tekislikning qismi bo'ladi, albatta. Keyinchalik aniqlanishicha, kontur fazoviy yopiq egri chiziq bo'lganda, sirt yuzi eng kichik bo'lishining zaruriy sharti uni o'rtacha egriligining har bir nuqtada nolga teng bo'lishidan iborat ekan. Bu shart yetarli bo'lmasada, shunga qaramasdan, o'rtacha egriligi nolga teng sirtlar uchun «minimal sirt» nomi biriktirib qo'yilgan.

Sirtning berilgan nuqtadagi *to'la* yoki *Gauss egriligi* deb shu nuqtadagi bosh egriliklarining ko'paytmasiga aytiladi, ya'ni

$$K = k_1 \cdot k_2. \quad (16.3.36)$$

Gauss egriligi sirt nuqtalarining umum qabul qilingan klassifikatsiyasi asosida yotadi. Agar S sirtning P nuqtasida Gauss egriligi musbat bo'lsa, bu nuqta *elliptik*, agar Gauss egriligi manfiy bo'lsa, bu nuqta *hiperbolik* va nihoyat, agar Gauss egriligi nolga teng bo'lib, hech bo'lmasa bitta bosh egrilik noldan farqli bo'lsa, bu nuqta *parabolik* deb ataladi.

Bordiyu har ikkala bosh egrilik nolga teng bo'lsa, u holda P nuqta *yassilanish nuqtasi* deyiladi. Masalan, agar S sirt tekislikning qismi bo'lsa, u holda ikkinchi kvadratik forma aynan nolga teng bo'lib, natijada sirtning barcha nuqtasida har ikki bosh egrilik nolga teng, ya'ni sirtidagi har bir nuqta yassilanish nuqtasi bo'ladi. Bu tasdiqni teskarisi ham o'rinli, ya'ni, agar S sirtning barcha nuqtasi yassilanish nuqtasi bo'lsa, u holda bu sirt tekislikning qismidir.

16.3.10 - misol. Agar S radiusi R ga teng sfera bo'lsa, u holda, 16.3.8 - misolga ko'ra, istalgan normal kesim egriligi $1/R$ ga teng bo'ladi. Bundan chiqdi, bosh egriliklar ham $1/R$ ga teng bo'lib, har bir nuqtada o'rtacha egrilik va Gauss egriligi mos ravishda

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R}, \quad K = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}$$

kabi aniqlanadi.

Ravshanki, sfera sirtining har bir nuqtasi elliptik nuqtadir.

16.3.11 - misol. Agar S radiusi R ga teng silindr bo'lsa, u holda, 16.3.9 - misolga ko'ra, normal kesim maksimal egriligi $1/R$ ga, minimal egriligi esa, 0 ga teng. Bundan chiqdi, har bir nuqtada o'rtacha egrilik va Gauss egriligi mos ravishda

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + 0 \right) = \frac{1}{2R}, \quad K = \frac{1}{R} \cdot 0 = 0$$

kabi aniqlanadi.

Ravshanki, silindr sirtining har bir nuqtasi parabolik nuqtadir.

16.3.6 - tasdiq. Faraz qilaylik, S ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi mazsus nuqtasiz sirt bo'lib, $P \in S$ nuqtada ikkinchi kvadratik forma noldan farqli bo'lsin. U holda,

1) agar ikkinchi kvadratik forma P nuqtada aniq ishorali bo'lsa, bu nuqta elliptik;

2) agar ikkinchi kvadratik forma P nuqtada ishorasi o'zgaruvchi bo'lsa, bu nuqta hiperbolik;

3) agar ikkinchi kvadratik forma P nuqtada xos bo'lsa, bu nuqta parabolik bo'ladi.

Isbot. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burishni qo'llab, so'ngra (u, v) lardan yangi (x, y) parametrlashga o'tib, ikkinchi kvadratik formani dl^2 ko'paytuvchi aniqligida (16.3.33) ko'rinishga keltiramiz. E'tibor bering, (16.2.14) ga ko'ra, dl^2 birinchi kvadratik formaga teng bo'lib, bu forma musbat aniqlangandir.

Shartga ko'ra, bosh egriliklardan kamida bittasi noldan farqli; masalan, $k_1 \neq 0$ deb hisoblashimiz mumkin. Shunday ekan, (16.3.33) ning o'ng tarafidagi kvadratik forma ishorasining aniqlanganligi faqat k_2 ikkinchi bosh egrilikka bog'liq. Jumladan, agar k_2 ning ishorasi k_1 ishorasi bilan ustma-ust tushsa, kvadratik forma aniq ishorali bo'lib, bunda $K = k_1 \cdot k_2 > 0$ bo'ladi, ya'ni P elliptik nuqtadir.

Bordiyu k_2 ishorasi k_1 ishorasiga teskari bo'lsa, qaralayotgan kvadratik forma ishorasi o'zgaruvchan bo'lib, bunda $K = k_1 \cdot k_2 < 0$ bo'ladi, ya'ni P hiperbolik nuqtadir.

Nihoyat, agar $k_2 = 0$ bo'lsa, berilgan kvadratik forma xos bo'lib, P parabolik nuqta bo'ladi.

Isbotni yakunlash uchun quyidagi ikki tasdiqni hisobga olish yetarli: koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish ikkinchi kvadratik formani o'zgartirmaydi; 16.3.1 - tadqiqqa ko'ra, ikkinchi kvadratik forma parametrlarni o'zgartirishga nisbatan invariantdir.



16.3.12 - misol. Hiperbolik paraboloidning ikkinchi kvadratik formasi, 16.2.10 - misolga ko'ra,

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(du^2 - dv^2)$$

ga teng.

Ravshanki, bu kvadratik forma ishorasi o'zgaruvchan va shuning uchun, hiperbolik paraboloid sirtining har bir nuqtasi hiperbolikdir.

Har bir nuqtasida Gauss egriligi manfiy bo'lgan hiperbolik paraboloidning egarsimon ko'rinishga egaligi tasodif emas. Umuman, istalgan sirtning har qanday hiperbolik turdagi nuqtasi atrofida egarsimon ko'rinishga ega bo'lishini ko'rsatish qiyin emas, chunki bosh egriliklar markazlari urinma tekislikning turli tomonlarida yota-di.

1 - eslatma. Berilgan

$$Q(du, dv) = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2 \quad (16.3.37)$$

kvadratik formaning ishorasi aniqlanganligi uning

$$D = M^2 - LN$$

diskriminanti orqali aniqlanadi.

Jumladan, agar $D < 0$ bo'lsa, (16.3.37) kvadratik forma aniq ishorali, agar $D > 0$ bo'lsa, ishorasi o'zgaruvchan va nihoyat, $D = 0$

bo'lsa, kvadratik forma xos bo'ladi. Shunday qilib, 16.3.6 - tasdiqqa ko'ra,

agar

$$M^2 - LN < 0$$

bo'lsa, P nuqta elliptik,

agar

$$M^2 - LN > 0$$

bo'lsa, P nuqta hiperbolik,

agar

$$M^2 - LN = 0$$

bo'lsa, P nuqta parabolik bo'ladi.

2 - eslatma. Sirt bo'yicha olingan va ossilyatsiyalanuvchi deb ataladigan integrallar nazariyasida bosh egriliklar teng bo'lgan, ya'ni $k_1 = k_2$ bo'lgan nuqtalar alohida o'rin tutadi. Bunday nuqtalar *ombilik* nuqtalar deb ataladi. Masalan, sferaning barcha nuqtalari ombilikdir. Ravshanki, har qanday ombilik nuqta elliptik bo'ladi.

16.3.13 - misol. Ushbu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

ellipsoid berilgan bo'lsin.

Ellipsoidni $P_{\pm} = (0, 0, \pm c)$ nuqtalarining ombilik ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun $P_+ = (0, 0, c)$ nuqta atrofida ellipsoid tenglamasini

$$z = f(x, y) = c\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ko'rinishda yozamiz.

Ravshanki,

$$f_{xx}(0, 0) = -c, \quad f_{xy}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = -c.$$

Demak, (16.3.33) ga ko'ra, bosh egriliklar o'zaro teng:

$$k_1 = k_2 = c.$$

Bundan chiqdi, $P_+ = (0, 0, c)$ nuqta ombilik bo'lar ekan. $P_- = (0, 0, -c)$ nuqtaning ombilik ekani xuddi yuqoridagidek ko'rsatiladi.

16.4-§. Birinchi tur sirt integrallari

1. Faraz qilaylik, S sodda silliq sirt $\mathbf{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya bilan berilgan bo'lib, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ soha bo'lakli-silliq chegaraga ega bo'lsin. Bundan tashqari, $\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiya hamda uning qisimiy hosilalari yopiq $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sohada uzluksiz bo'lsin.

Aytaylik, $P = \{\Delta S_k\}_{k=1}^n$ berilgan S sirtning ΔS_k qisimiy to'plamlarga bo'linishi bo'lsin. Ω_k simvol orqali ΔS_k to'plamlarning aslini belgilaymiz, ya'ni $\mathbf{r}(\Omega_k) = \Delta S_k$. S sirtning P bo'linishi natijasida Ω sohasining mos $P^* = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi hosil bo'ladi. Bundan buyon shunday P bo'linishlarni qaraymizki, bunda ΔS_k larga mos bo'lgan har bir Ω_k qisimiy to'planning chegarasi bo'lakli-silliq egri chiziqli bo'lsin.

Odatdagidek, $d(P)$ simvol orqali P bo'linishning diametrini belgilaymiz, ya'ni

$$d(P) = \max_k \text{diam } \Delta S_k.$$

Haqiqiy qiymat qabul qiluvchi va S da aniqlangan $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani qaraylik. Istalgan ravishda $\xi_k \in \Delta S_k$ nuqtalarni tanlab, quyidagi

$$\Sigma_P(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot |\Delta S_k| \quad (16.4.1)$$

integral yig'indini tashkil qilamiz.

Ta'rif. f funksiyadan S sirt bo'yicha birinchi tur sirt integrali deb (16.4.1) integral yig'indilarning limitiga aytamiz va

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \Sigma_P(f) = \iint_S f(x, y, z) dS \quad (16.4.2)$$

ko'inishda belgilaymiz.

Biz yana

$$I = \int_S f(x, y, z) d\sigma$$

belgilashdan ham foydalanamiz.

Bu belgilashda, bu haqida aniq aytilmasada, $\sigma(E)$ simvol $E \subset S$ sirtning yuzini anglatadi deb faraz qilinadi.

Eslatma. Agar $f(x, y, z)$ funksiya S sirt bo'yicha taqsimlangan biror massa zichligi bo'lsa, u holda f dan olingan birinchi tur sirt integrali bu sirtning to'la massasiga teng bo'ladi.

2. Sirt bo'yicha birinchi tur integralni hisoblash parametrlar o'zgarish sohasi bo'yicha olingan ikki karrali integralni hisoblashga keltiriladi. Chunonchi, navbatdagi tasdiq o'rinli.

16.4.1 - teorema. Faraz qilaylik, S sirt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ tenglama bilan parametrik ravishda berilgan bo'lib, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ bo'lsin.

Istalgan tekis uzluksiz $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya S bo'yicha olingan birinchi tur sirt integrali mavjud bo'lib, u

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\| du dv \quad (16.4.3)$$

kabi hisoblanadi.

Isbot. $|S|$ orqali S sirtning yuzini belgilaylik. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ ni tanlaylikki, $|M - M'| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $M \in S$ va $M' \in S$ nuqtalar juftligi uchun

$$|f(M') - f(M)| < \frac{\varepsilon}{|S|} \quad (16.4.4)$$

tengsizlik bajarilsin.

(16.4.3) formulaning o'ng tarafidagi integralni I bilan belgilaylik. U holda, 16.1.1 - teoremaga ko'ra, (16.4.1) integral yig'indi uchun

$$\Sigma_P(f) - I = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot |S_k| - \iint_{\Omega} f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\| du dv =$$

$$= \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_k} [f(\mathbf{r}(u_k, v_k)) - f(\mathbf{r}(u, v))] \|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\| \, du \, dv \quad (16.4.5)$$

tenglikni olamiz.

Agar diam $S_k < \delta$ bo'lsa, $(u, v) \in \Omega_k$ uchun

$$|\mathbf{r}(u_k, v_k) - \mathbf{r}(u, v)| < \delta$$

baho o'rinli.

Shuning uchun, (16.4.4) ga ko'ra,

$$|f(\mathbf{r}(u_k, v_k)) - f(\mathbf{r}(u, v))| < \frac{\varepsilon}{|S|}.$$

Bundan chiqdi, 16.1.1 - teoremani qo'llab, (16.4.5) dan

$$\begin{aligned} |\Sigma_P(f) - I| &\leq \frac{\varepsilon}{|S|} \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_k} \|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\| \, du \, dv = \\ &= \frac{\varepsilon}{|S|} \iint_{\Omega} \|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\| \, du \, dv = \frac{\varepsilon}{|S|} \cdot |S| = \varepsilon \end{aligned}$$

bahoni olamiz.

Demak, (16.4.1) integral yig'indilarning limiti mavjud bo'lib, (16.4.3) tenglik bajarilar ekan.

■

Natija. Agar E, F va G berilgan S sirtini birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari bo'lsa,

$$\int_S f(x, y, z) \, d\sigma = \iint_{\Omega} f(\mathbf{r}(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \, du \, dv \quad (16.4.6)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, bu tenglikning to'g'riligi (16.2.5) formuladan kelib chiqadi.

16.4.1 - misol. Agar

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > a\}, \quad 0 \leq a < R,$
bo'lsa,

$$I = \int_S z d\sigma(x, y, z)$$

sirt integrali hisoblangin.

Yuqoridagi (16.4.6) formuladan foydalanamiz. Buning uchun (θ, φ) sferik koordinatalarni kiritib, $\beta = \arccos \frac{a}{R}$ deymiz. 16.2.2 - misolga ko'ra, radiusi R ga teng sfera uchun

$$\sqrt{E(\theta, \varphi)G(\theta, \varphi) - F^2(\theta, \varphi)} = R^2 \sin \theta$$

tenglik o'rinli.

Shuning uchun, (16.4.6) ga ko'ra,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\beta \int_0^{2\pi} (R \cos \theta) R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \\ &= 2\pi R^3 \int_0^\beta \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi R^3}{2} [1 - \cos 2\beta]. \end{aligned}$$

Lekin $1 - \cos 2\beta \approx 2(1 - \cos^2 \beta) = 2(1 - a^2/R^2)$ bo'lgani uchun,

$$\int_S z d\sigma(x, y, z) = \pi R(R^2 - a^2).$$

Eslatma. Agar S sirtini chekli sondagi, bo'lakli-silliq chekkaga ega bo'lgan, S_k , $k = 1, 2, \dots, m$, silliq sodda sirtlarga ajratish mumkin bo'lsa, S sirtini bo'lakli-silliq deymiz. Shunday sirt uchun, agar $\bar{S}_k$ bilan S_k to'plam yopig'ini belgilasak,

$$S = \bigcup_{k=1}^m \bar{S}_k$$

deb yozish mumkin, bunda $k \neq j$ bo'lganda, $S_k \cap S_j = \emptyset$.

(16.4.3) va (16.4.6) formulalar bo'lakli-silliqlik S sirt uchun ham o'rinli. Bunga ishonch hosil qilish uchun S ni chekli sondagi sodda silliq sirlarga bo'lib, o'ng tarafdagi ikki karrali integralning additivligidan foydalanish kifoya.

16.4.2 - misol. Ushbu

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < h\}$$

silindrik sohaning chegarasi S bo'yicha olingan

$$I = \int_S \frac{z}{x^2 + y^2 + a^2} d\sigma(x, y, z), \quad a > 0,$$

sirt integralini hisoblang.

S sirtini quyidagi uch qismga bo'lamiz, ya'ni silindrning quyi asosi:

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < R^2, z = 0\},$$

yuqori asosi:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < R^2, z = h\},$$

va yon sirti:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, 0 < z < h\}.$$

Mos integrallarni I_0, I_1 va I_2 deb belgilaymiz.

S_0 quyi asosda integral ostidagi funksiya nolga teng va shuning uchun $I_0 = 0$. S_1 yuqori asosda $z = h$, shuning uchun qutb koordinatlariga o'tib,

$$I_1 = \int_{S_1} \frac{z}{x^2 + y^2 + a^2} d\sigma(x, y, z) = h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + a^2} =$$

$$= 2\pi h \cdot \frac{1}{2} \ln(\rho^2 + a^2) \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \pi h \ln \left(1 + \frac{R^2}{a^2} \right)$$

tenglikni olamiz.

I_2 integralni hisoblash uchun (16.4.6) formuladan foydalanamiz. Silindrni $\{\varphi = 0, \rho = R\}$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesib, silindrik koordinatalarga o'tamiz. Agar $\sqrt{EG - F^2} = R$ tenglikni va S_2 yon sirtida $x^2 + y^2 = R^2$ ekanini hisobga olsak,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{S_2} \frac{z}{x^2 + y^2 + a^2} d\sigma(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{z}{R^2 + a^2} R d\varphi dz = \\ &= \frac{2\pi R}{R^2 + a^2} \int_0^h z dz = \frac{\pi R h^2}{R^2 + a^2} \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib,

$$I = \frac{\pi R h^2}{R^2 + a^2} + \pi h \ln \left(1 + \frac{R^2}{a^2} \right).$$

16.5-§. Ikkinchi tur sirt integrallari

1. Ikki yoqli sirtlar. Agar S sodda silliq sirt maxsus nuqtaga ega bo'lmasa, u holda bu sirtning har bir nuqtasida ikki o'zaro qarama-qarshi yo'nalgan normal vektorni aniqlash mumkin.

Istalgan $A \in S$ nuqtani tayinlab, ikki normaldan birini tanlaymiz va uni $\mathbf{n}(A)$ deb belgilaymiz. Ravshanki, A nuqtaning yetarlicha kichik atrofidan olingan har bir nuqtada normal yo'nalishini shunday tanlash mumkinki, bunda tanlangan normal qayd etilgan atrofda uzluksiz bo'ladi.

Aytaylik, B berilgan S sirtning istalgan boshqa nuqtasi bo'lsin. A nuqtani B nuqta bilan S sirtida yotuvchi uzluksiz AB egri chiziq yordamida tutashtiramiz (ta'rifga ko'ra har bir sirt bog'lamli to'plam bo'lgani sababli, bunday egri chiziq mavjud). AB egri chiziq kompakt bo'lgani uchun, uning har bir nuqtasida normalni shunday tanlash mumkinki, natijada u AB da uzluksiz bo'ladi. Normalni qayd etilgan egri chiziq bo'yicha harakatlantirib, uni A nuqtadan B nuqtaga olib kelamiz.

Bunda quyidagi ikki holdan biri yuz berishi mumkin:

1) istalgan $B \in S$ nuqta uchun, AB egri chiziqni qanday tanlashdan qat'iy nazar, $\mathbf{n}(A)$ birlik normal bu egri chiziq bo'ylab harakatlanganda xuddi o'sha vektorning o'ziga, ya'ni $\mathbf{n}(B)$ ga o'tadi;

2) biror $B \in S$ nuqta uchun uni A nuqta bilan tutashtiruvchi shunday ikki egri chiziqlar topiladiki, $\mathbf{n}(A)$ birlik vektor bu egri chiziqlardan biri bo'ylab harakatlanganda $\mathbf{n}(B)$ vektorga o'tib, ikkinchisi bo'ylab harakatlanganda esa, unga qarama-qarshi $\tilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}(B)$ vektorga o'tadi.

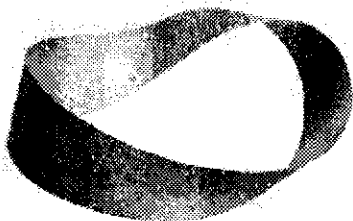
Birinchi holda S sirt *ikki yoqli*, ikkinchi holda esa, u *bir yoqli* deyiladi.

Ikki yoqli S sirtga yana quyidagi teng kuchli ta'rifni berish mumkin:

har qanday $A \in S$ nuqta va bu nuqtadan o'tuvchi istalgan yopiq $L \subset S$ kontur uchun A nuqtada $\mathbf{n}(A)$ birlik normal vektorni olib, uni uzluksiz ravishda L kontur bo'ylab harakatlantirsak, A nuqtaga qaytganda yana o'sha $\mathbf{n}(A)$ vektorni olamiz.

Bordiyu biror $L \subset S$ kontur uchun uni aylanib chiqqanda qarama-qarshi yo'nalgan $\tilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}(A)$ vektorni olsak, u holda S sirt bir yoqli bo'ladi.

Ikki yoqli sirtga misol sifatida sfera yoki torni, bir yoqli sirtga esa, Myobius yaprog'ini olish mumkin. Myobius yaprog'ini tasavvur qilish uchun, qog'ozdan $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak kesib olib, uning qarama-qarshi AB va CD tomonlarini, avval bulardan birini teskari-siga qayirib olib, yelimlash kerak (16.3 - rasm). Bunda A nuqta D bilan B nuqta esa, C bilan ustina-ust tushadi.



16.3-rasm

Agar oq qog'ozni buklab, oddiy halqa (silindrik sirt) hosil qilsakda, so'ngra, chekkalaridan chiqib ketmasdan, uni qora rangga bo'yasak, u holda sal turib halqaning bir tarafi qora rang bo'lib, ikkinchi tarafi esa, oqligicha qoladi. Agarda Myobius yaprog'ini shu usulda bo'yasak, natijada sirtida oq qism qolmaydi. Aynan mana shu hol oddiy halqa ikki yoqqa, Myobius yaprog'i esa, bir yoqqa ega ekanini anglatadi.

E'tibor bering, ixtoyoriy sirtni har qanday nuqtasining kichik atrofi ikki yoqli sirt bo'ladi, ya'ni istalgan sirt lokal ma'noda ikki yoqlidir. Boshqacha aytganda, sirtning bir yoki ikki yoqli bo'lishlik xossasi global xossadir.

Bundan buyon biz faqat ikki yoqli sirlarni qaraymiz.

Har qanday ikki yoqli sirtida normalni shunday taulash mumkin-ki, bunda u sirtning har bir nuqtasida bir qiymatli aniqlangan bo'lib, bir nuqtadan ikkinchisiga o'tganda uzluksiz o'zgaradi. $\mathbf{n}(A)$ normal yo'nalishi tanlangan ikki yoqli S sirt *orientirlangan* (yoki yo'nalish o'rnatilgan) sirt deyiladi. Ravshanki, har qanday ikki yoqli sirtni ikki xil usulda orientirlash mumkin.

Sirtida yo'nalish o'rnatish sirtida yoq tanlash deb ham ataladi. Ba'zan tanlangan normal musbat deb atalib, agar S sirtni shaffof emas deb faraz qilsak, musbat normal uchidan ko'rinadigan sirt yog'i ham musbat deyiladi va S^+ simvol bilan belgilanadi. Unga qarama-qarshi yoq manfiy deyilib, S^- kabi belgilanadi.

Agar S sirt biror uch o'lchovli G sohaning chegarasi bo'lsa, ya'ni $S = \partial G$ bo'lsa, bunday sirt yopiq deyiladi. Har qanday yopiq S sirtning chekkasi bo'sh to'plamdan iborat, ya'ni S o'zining yopig'i

bilan ustma-ust tushadi.

Maxsus nuqtasiz har qanday yopiq sirt ikki yoqlidir. Yopiq ∂G sirt nuqtasidagi G sohaga yo'nalgan normal *ichki*, qarama-qarshi tomonga yo'nalgan normal esa, *tashqi* normal deb ataladi.

Odatda, yopiq sirt musbat normal sifatida tashqi normal olgan holda orientirlanadi.

2. Ikkinchi tur sirt integrali. Ikkinchi tur sirt integrallari S sirtidan $\mathbf{v}$ tezlik bilan o'tayotgan va ρ zichlikka ega bo'lgan suyuqlik oqimi ta'rif bilan bog'liq. Avval tezlik vektori o'zgarmas bo'lib, S sirt tekislikning qismidan iborat bo'lsin deylik. U holda S sirtidan bir vaqt birligi ichida massasi quyidagi

$$\mu = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} |S|$$

skalyar ko'paytmaga teng bo'lgan suyuqlik o'tadi, bu yerda $\mathbf{n}$, odatdagidek, S ga o'tkazilgan birlik normal vektor.

Endi, faraz qilaylik, $\mathbf{A} = \rho \mathbf{v}$ vektor (x, y, z) ga uzluksiz bog'liq bo'lib, S ixtiyoriy silliq sirt bo'lsin. S sirtidan o'tuvchi $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor oqimini topish uchun bu sirtni chekkalari silliq bo'lgan ΔS_k qismlarga bo'laniz. $T = \{\Delta S_k\}_{k=1}^n$ bo'linish diametrini shunchalik kichik qilib tanlaymizki, bunda har bir ΔS_k ni deyarli tekislikning qismi deb, $\mathbf{A}$ vektorini esa, ΔS_k da o'zgarmas deb hisoblash mumkin bo'lsin. U holda $\mathbf{A}$ vektorning ΔS_k dan o'tuvchi oqimi taxminan

$$\mu_k = \mathbf{A}(\xi_k) \cdot \mathbf{n}(\xi_k) |\Delta S_k|$$

ga teng bo'ladi, bu yerda ξ_k orqali ΔS_k to'plamining istalgan nuqtasi belgilangan. Shunday ekan, S sirtidan o'tuvchi to'la oqim taxminan quyidagi

$$\Sigma_T(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}(\xi_k) \cdot \mathbf{n}(\xi_k) |\Delta S_k| \quad (16.5.1)$$

integral yig'indiga teng deyishimiz mumkin.

T bo'linish diametrini qanchalik kichik olsak, yuqoridagi taxmini tenglik shunchalik aniq bo'ladi.

16.4.1 - teoreмага ko'ra, istalgan tekis uzluksiz $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor-funksiya uchun (16.5.1) integral yig'indilar limiti mavjud bo'lib, u $f(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)$ funksiyadan olingan birinchi tur sirt integraliga teng, ya'ni

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \Sigma_T(\mathbf{A}) = \int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma. \quad (16.5.2)$$

(16.5.2) integral $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor-funksiyadan olingan *ikkinchi tur sirt integrali* deb ataladi.

Eslatma. Ikkinchi tur sirt integrali faqat ikki yoqli sirtlar uchun aniqlanadi, ya'ni tanlangan normal har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan sirtlar uchungina aniqlanadi. Eslatib o'tamiz, normalni tanlash sirtning musbat yog'ini aniqlaydi.

Xuddi shu natijaga fizik mulohazalar bilan ham kelish mumkin: vektor-funksiyaning sirt orqali o'tadigan oqimini aniqlash uchun sirtning bir yog'i kiruvchi va boshqa yog'i chiquvchi bo'lishi zarur.

Bir yoqli sirtlar uchun ikkinchi tur sirt integrallari aniqlanmagan. Masalan, Myobius yaproq'ini to'laligicha olsak, u orqali hech qanday oqim o'tmaydi, shuning uchun Myobius yaproq'i bo'yicha *ikkinchi tur integrali mavjud emas*.

Shuni aytish zarurki, ikkinchi tur sirt integralidan farqli o'laroq, birinchi tur sirt integrallari istalgan (ikki yoqli bo'lishi shart bo'lmagan) silliq sirt uchun aniqlangan va bunday integral yordamida, masalan, (bir jinsli bo'lmagan zichlikli) Myobius yaproq'ining massasini hisoblash mumkin.

Navbatdagi teorema ikkinchi tur sirt integralini hisoblashni yassi soha bo'yicha ikki karrali integral hisoblashga keltiradi.

16.5.1 - teorema. Faraz qilaylik, ikki yoqli silliq S sirt parametrik ravishda $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ bo'lsin. Bundan tashqari, sirtning musbat yog'i

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\|} \quad (16.5.3)$$

normal vektor bilan aniqlangan bo'lsin.

U holda istalgan tekis uzluksiz $\mathbf{A} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya uchun S bo'yicha ikkinchi tur sirt integrali mavjud va u quyidagi ikki karrali integralga teng:

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] du dv \quad (16.5.4)$$

Isbot. 16.4.1 - teoreмага ko'ra, (16.5.2) integral mavjud va

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\| du dv. \quad (16.5.5)$$

Endi o'ng tarafdagi $\mathbf{n}$ normal vektor o'rniga uning (16.5.3) qiymatini qo'ysak, talab qilingan (16.5.4) tenglikni olamiz.

■

1 - eslatma. Agar S sirt $\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiya bilan parametrik berilib, qarama-qarshi yo'nalgan

$$\tilde{\mathbf{n}} = - \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\|}$$

normal bilan orientirlangan bo'lsa, u holda

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \tilde{\mathbf{n}}(x, y, z) d\sigma = - \iint_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] du dv.$$

2 - eslatma. $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ vektorni $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko'paytmaga skalyar ko'paytirsak,

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = (\mathbf{A}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

determinantga teng aralash ko'paytinani olamiz.

Shuning uchun, (16.5.4) tenglikni

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} (\mathbf{A}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) du dv \quad (16.5.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

16.5.1 - misol. Agar S sirt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}$$

ko'rinishdagi yarim sfera bo'lib, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ bo'lsa,

$$I = \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma$$

ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin.

Sferik koordinatalarda radius-vektor

$$\mathbf{r} = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

ko'rinishga ega. Shuning uchun, aralash ko'paytma

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi) = \begin{vmatrix} R \sin \theta \cos \varphi & R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = R^3 \sin \theta$$

kabi aniqlanadi. Shunday ekan, (16.5.6) formulaga ko'ra,

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\mathbf{r}, \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi) d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} R^3 \sin \theta d\theta = 2\pi R^3.$$

3. Faraz qilaylik, silliq orientirlangan S sirtida

$$\mathbf{n}(x, y, z) = (\cos \alpha(x, y, z), \cos \beta(x, y, z), \cos \gamma(x, y, z)), (x, y, z) \in S,$$

normal tanlangan bo'lib, bu sirtida $\mathbf{A} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya quyidagi

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \quad (16.5.7)$$

koordinatalar ko'rinishida berilgan bo'lsin.

U holda, bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

kabi aniqlanadi.

Bundan chiqdi, (16.5.4) ning chap tarafidagi integralni uchta integral yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma &= \int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \int_S P(x, y, z) \cos \alpha d\sigma + \int_S Q(x, y, z) \cos \beta d\sigma + \int_S R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma. \end{aligned} \quad (16.5.8)$$

Boshqa tarafdin, (16.1.16) tenglikka ko'ra, (16.5.4) ning o'ng tarafidagi integral ostidagi skalyar ko'paytma

$$A \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

ga teng. Shunday ekan, qayd etilgan ikki karrali integral uchun

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] du dv &= \iint_{\Omega} P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} du dv + \\ &+ \iint_{\Omega} Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} du dv + \iint_{\Omega} R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv. \end{aligned} \quad (16.5.9)$$

tenglikni olamiz.

(16.5.8) va (16.5.9) munosabatlardan (16.5.4) tenglikning koordinatalardagi ko'rinishi kelib chiqadi, ya'ni

$$\begin{aligned} & \int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ & = \iint_{\Omega} \left[P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right] du dv. \end{aligned}$$

16.5.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, S sirt $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya grafigidan iborat bo'lsin. Bu sirtni $r = (x, y, z(x, y))$ radius-vektor bilan berib, normal vektor yuqoriga yo'nalgan qilib, ya'ni bu vektorning Oz o'qiga proeksiyasini musbat qilib orientirlaymiz. U holda istalgan tekis uzluksiz $R : S \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun

$$\int_S R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} R(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (16.5.10)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. 16.5.1 - teoremdan foydalanamiz. Buning uchun $A = (0, 0, R)$ deb, (15.6.4) formulani qo'llaymiz. U holda,

$$\begin{aligned} & \int_S R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) d\sigma = \\ & = \iint_{\Omega} R(x, y, z(x, y)) \cos \gamma \cdot \|\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y\| dx dy. \end{aligned} \quad (16.5.11)$$

16.1.3 - misolga ko'ra, qaralayotgan holda

$$\cos \gamma \cdot \|\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y\| = 1$$

tenglik o'rinli ((16.1.21) formulaga qarang). Bu qiymatni (16.5.11) ning o'ng tarafida turgan integral ostidagi ifodaga qo'ysak, talab qilingan (16.5.10) tenglikni olamiz.

1 - eslatma. Ushbu

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Omega} R(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (16.5.12)$$

belgilashni kiritamiz; bu belgilash integrallash jarayonida (x, y, z) nuqta S sirtini aylanib chiqishini anglatadi.

Bu belgilashdan foydalanib, (16.5.10) tenglik, odatda, quyidagi

$$\int_S R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) d\sigma = \iint_S R(x, y, z) dx dy \quad (16.5.13)$$

ko'rinishda yoziladi.

(16.5.12) ning chap tarafidagi simvol S sirt biror funksiyaning grafigi emas, balki ixtiyoriy sirt bo'lgan holda ham ishlatiladi. Yana shuni aytish kerakki, (16.5.12) ning o'ng tarafidagi integral hatto S sirt uchun normal vektori aniqlanmagan va u yuzaga ega bo'lmagan hollarda ham mavjud. Shuning uchun, bunday hollarda ham S bo'yicha ikkinchi tur sirt integrali (16.5.12) ta'rif ma'nosida mavjud va u odatdagi xossalarga ega.

Xuddi (16.5.13) dagi kabi

$$\int_S P(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z) d\sigma = \iint_S P(x, y, z) dy dz, \quad (16.5.14)$$

$$\int_S Q(x, y, z) \cos \beta(x, y, z) d\sigma = \iint_S Q(x, y, z) dz dx \quad (16.5.15)$$

belgilashlardan ham foydalaniladi.

(16.5.13), (16.5.14) va (16.5.15) belgilashlarda o'ng tarafda turgan har bir integral chap tarafdagi ikkinchi tur sirt integralini anglatadi. Bu belgilashlarga ko'ra, (16.5.8) formulani

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma = \iint_S P(x, y, z) dy dz +$$

$$+ \iint_S Q(x, y, z) dz dx + \iint_S R(x, y, z) dx dy \quad (16.5.16)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

2 - eslatma. (16.5.9) va (16.5.16) formulalarni taqqoslab, (16.5.4) ni hisobga olsak, biz quyidagi uchta

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \iint_{\Omega} P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} du dv, \quad (16.5.17)$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iint_{\Omega} Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} du dv, \quad (16.5.18)$$

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Omega} R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv \quad (16.5.19)$$

tenglikni olamiz.

3 - eslatma. Tarixan (16.5.13)-(16.5.15) belgilashlarni kiritish, odatda, quyidagicha asoslanadi: agar sirtning cheksiz kichik elementi ning yuzi $d\sigma$ ga teng bo'lsa, u holda uni Oxy koordinatalar tekisligiga proeksiyasining yuzi $\cos \gamma d\sigma$ ga teng bo'ladi. Boshqa tarafdin, Oxy koordinatalar tekisligida cheksiz kichik element yuzi $dx dy$ ga teng. Shuning uchun

$$\cos \gamma d\sigma = dx dy$$

deb hisoblasak, (16.5.13) tenglik formal ravishda kelib chiqadi.

16.5.2 - misol. Faraz qilaylik, S sirt quyidagi

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z > 0 \right\}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. U holda navbatdagi

$$I = \iint_S z \, dx \, dy$$

ikkinchi tur sirt integralini hisoblang.

Agar

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$$

deb belgilasak, bu sirt

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi.

16.5.1 - tasdiqqa va (16.5.13) tenglikka ko'ra,

$$I = \iint_{\Omega} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy.$$

Integralda quyidagi munosabatlar yordamida o'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x = ar \cos \varphi,$$

$$y = br \sin \varphi.$$

Bu almashtirishning yakobiani

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & b \sin \varphi \\ -ar \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr$$

ga teng.

Yangi o'zgaruvchilarda

$$z(x, y) = \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - r^2}$$

ekanini hisobga olsak,

$$I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = -\frac{2\pi}{3} abc (1-r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{2\pi}{3} abc.$$

16.6-§. Stoks formulasi

1. Stoks formulasi Grin formulasining umumlashgan holi bo'lib, u funksiya hosilasidan sirt bo'yicha olingan integralni funksiyaning o'zidan sirt chekkasi bo'yicha olingan integral bilan bog'laydi.

Chekkasi ∂S silliq egri chiziq bo'lgan sodda silliq S sirtini qaraylik. Biz, qisqaroq qilib, S sirt silliq ∂S egri chiziq bilan chegaralangan deymiz.

Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada berilgan va S sirtini aniqlovchi $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor o'zining $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ hosilalari bilan birga $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohaga uzluksiz davom ettirilsin. Bundan tashqari, qayd etilgan radius-vektor $\bar{\Omega}$ ni $\bar{S} = S \cup \partial S$ ga homeomorf aks ettirsin. Bunda, albatta, $\partial\Omega$ chegara S sirtning ∂S chekkasiga homeomorf akslanadi.

So'ngra S sirtini shunday orientirlaylikki, bunda

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} \quad (16.6.1)$$

normal vektor musbat bo'lsin.

Bundan tashqari, biz (u, v) parametrlarning o'zgarish sohasidan iborat Ω ni bir bog'lamli va uning $\partial\Omega$ chegarasini silliq Jordan egri chizig'i deb hisoblaymiz.

(u, v) nuqta $\partial\Omega$ egri chiziq bo'ylab musbat yo'nalishda (Ω soha chapda qolib) harakatlanganda, $\mathbf{r}(u, v)$ nuqta ∂S egri chiziq bo'ylab harakatlanadigan yo'nalishni biz musbat deb ataymiz. Shunday qilib,

$\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor tabiiy ravishda ∂S egri chiziqning $\partial\Omega$ egri chiziq yo'nalishiga mos yo'nalishini aniqlaydi.

Shuni aytish kerakki, orientirlangan S sirt chekkasi uchun bunday aniqlangan yo'nalish (16.6.1) normalni tanlashga bog'liq. Bu yo'nalishni quyidagicha tasavvur qilish mumkin: agar S sirtning musbat yog'ida turgan kuzatuvchi uchun ξ nuqta ∂S kontur bo'yicha soat miliga teskari yo'nalishda harakatlanayotgan ko'rinsa, bu yo'nalish konturning musbat yo'nalishi bo'ladi.

Faraz qilaylik, $G \subset \mathbb{R}^3$ soha S sirtini o'z ichiga olsin, ya'ni $S \subset G$. $P(x, y, z)$ funksiya esa, shu G sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Navbatdagi tasdiq o'rinli.

16.6.1 - teorema. S sirtini o'z ichiga oluvchi $G \subset \mathbb{R}^3$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi istalgan P funksiya uchun

$$\int_{\partial S} P(x, y, z) dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (16.6.2)$$

tenglik o'rinli, bu tenglikning chap tarafida ikkinchi tur egri chiziqli integral va o'ng tarafida esa, ikkinchi tur sirt integrali turibdi.

Isbot. Faraz qilaylik, S sirt $\mathbf{r} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya bilan, $\partial\Omega$ chegara esa, $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ komponentalarga ega bo'lgan $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektor-funksiya bilan berilgan bo'lsin. U holda S sirtning ∂S chekkasi $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ vektor-funksiya bilan aniqlanadi, bu yerda $u(t) = \varphi(t)$, $v(t) = \psi(t)$.

(15.2.21) formulaga ko'ra, (16.6.2) ning chap tarafidagi ikkinchi tur egri chiziqli integral uchun

$$\int_{\partial S} P(x, y, z) dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt \quad (16.6.3)$$

tenglik o'rinli, bu yerda $x(t) = x(u(t), v(t))$.

Ravshanki, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t).$$

Bundan chiqdi, (16.6.3) ning o'ng tarafidagi integral

$$\int_a^b P x'(t) dt = \int_a^b P \left(\frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \right) dt$$

ga teng.

Yana (15.2.21) formulani qo'llab, oxirgi tenglikni

$$\int_{\partial S} P dx = \int_{\partial \Omega} P \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) du + P \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) dv \quad (16.6.4)$$

ko'rinishda yozamiz.

So'ngra quyidagi

$$\int_{\partial \Omega} f du + g dv = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) du dv$$

Grin formulasidan foydalanamiz.

Bu formulada $f = P \cdot x_u$ va $g = P \cdot x_v$ deb, (16.6.4) dan

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \Omega} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) du + \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv = \\ & = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du dv \end{aligned} \quad (16.6.5)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

O'ng tarafdagi hosilalarni murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra hisoblaymiz:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.$$

Mos hadlarni soddalashtirsak,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} \frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{D(y, x)}{D(u, v)} \end{aligned}$$

tenglikka kelamiz.

Demak, (16.6.4) va (16.6.5) larga ko'ra,

$$\int_{\partial S} P dx = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{D(y, x)}{D(u, v)} \right] du dv.$$

Agar (16.5.17)-(16.5.19) formulalarni hisobga olsak, bu tenglik talab qilingan (16.6.3) tenglikning o'zidir. ■

1 - eslatma. Teoremani isbotlash jarayonida biz oshkormas ravishda ikkinchi tartibli $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ aralash hosila mavjudligini talab qildik. Bu hosila (16.6.5) integral ostidagi ifodani hisoblashda paydo bo'lib, mos hadlarni soddalashtirish natijasida yo'qoldi. Shunga qaramasdan, teorema bu shartsiz ham o'rinli ekanini isbotlash mumkin.

Buni sirt bir marta uzluksiz differensiallanuvchi $z = f(x, y)$ funksiya grafigidan iborat bo'lgan holda ko'rsatish oson. Haqiqatan, $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$ parametrlashtirishni kiritaylik. Bunda $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \equiv 0$ tenglik o'rinli bo'lib, teorema isbotining korrektiligi ko'rinib turibdi.

2 - eslatma. 16.6.1 - teorema isboti Grin formulasiga asoslanadi. Bu formula §15.3 da regulyar bo'lakli-silliqlik kontur uchun isbotlangan edi. Bunga mos ravishda biz S sirtning ∂S chekkasini

shunday bo'la-kli-silliqliq egri chiziqli deb faraz qilamizki, uning $r(u, v)$ akslantirish-dagi asli regulyar bo'la-kli-silliqlik kontur bo'lsin.

2. Ushbu paragrafning asosiy maqsadi navbatdagi teoremani isbotlashdan iborat.

16.6.2 - teorema (Stoks formulasi). Faraz qilaylik, P , Q va R funksiyalar S ni o'z ichiga olgan $G \subset \mathbb{R}^3$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \end{aligned} \quad (16.6.6)$$

formula o'rinli.

Isbot. 16.6.1 - teorema-ga ko'ra,

$$\int_{\partial S} P(x, y, z) dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad (16.6.7)$$

$$\int_{\partial S} Q(x, y, z) dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \quad (16.6.8)$$

va

$$\int_{\partial S} R(x, y, z) dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx. \quad (16.6.9)$$

Endi (16.6.7)-(16.6.9) tengliklarni qo'shib, talab qilingan (16.6.6) formula-ga bo'lamiz.



Eslatma. Stoks teoremasining isboti 16.6.1 - teoremaga asoslanadi. Lekin 16.6.1 - teoremada oshkormas ravishda $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektorning komponentalari uzluksiz ikkinchi tartibli aralash hosilaga ega, deb faraz qilingan edi. 16.6.1 - teoremaga keltirilgan 1-eslatma-ga ko'ra, S sirt koordinata tekisliklaridan biriga o'zaro bir qiymatli proeksiyalangan holda, ya'ni S sirt istalgan ikki o'zgaruvchili funksiya grafigi bo'lgan holda bu farazni olib tashlash mumkin.

3. $G \subset \mathbb{R}^3$ sohada aniqlangan uchta $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ va $R(x, y, z)$ funktsiyani olaylik. Agar G sohada shunday differensiallanuvchi $U(x, y, z)$ funksiya topilsaki, uning birinchi differensial

$$dU(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (16.6.10)$$

ga teng bo'lsa,

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (16.6.11)$$

ifodani G da to'la differensial deymiz.

(16.6.10) dan quyidagi

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (16.6.12)$$

tengliklarning bajarilishi kelib chiqadi.

Bunda $U(x, y, z)$ funksiya $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ vektorning potentsiali deb ataladi.

Masalan,

$$x dx + y dy + z dz$$

ifoda to'la differensial bo'ladi, chunki $U(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$ funksiya differensial bu ifodaga teng.

Lekin

$$y dx + z dy + x dz$$

ifoda, quyida isbotlanadigan 16.6.3 - teoremaga ko'ra, to'la differensial bo'lmaydi, ya'ni differensial shu ifodaga teng $U(x, y, z)$ funksiya mavjud emas.

Xuddi ikki o'zgaruvchili funksiya holidagidek, (16.6.11) ifodaning to'la differensial bo'lishlik shartlarini, ya'ni biror $U(x, y, z)$ funksiya uchun (16.6.10) tenglikning bajarilish shartlarini topish masalasi nihoyatda muhimdir. Bu masalaning bitta yechimini, xuddi 15.4.2 - teorema kabi isbotlanadigan, navbatdagi teorema beradi.

16.6.3 - teorema. Faraz qilaylik, P , Q va R funksiyalar biror nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lgan G sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.

(16.6.11) ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun G sohada

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (16.6.13)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. 1) Faraz qilaylik. (16.6.11) ifoda biror $U(x, y, z)$ funksiyaning to'la differensial bo'lsin, ya'ni (16.6.12) tengliklar bajarilsin. Bu tengliklardan U potensialning barcha ikkinchi tartibli uzluksiz aralash hosilalarga ega ekani kelib chiqadi. Bundan chiqdi, (16.6.13) tengliklar qayd etilgan aralash hosilalarning differensiallash tartibiga bog'liq emasligini anglatadi, xolos.

2) Aytaylik, G soha A nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lsin. $[AB]$ simvol orqali A nuqtani istalgan (x_0, y_0, z_0) koordinatali $B \in G$ nuqta bilan tutashtiruvchi kesmani belgilab,

$$U(x_0, y_0, z_0) = \int_{[AB]} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (16.6.14)$$

deymiz.

B nuqtani Ox o'q bo'ylab h masofaga siljitib, $B_h = (x_0 + h, y_0, z_0)$ deb belgilaymiz. G to'plam ochiq bo'lgani uchun, yetarlicha kichik h larda BB_h kesma butunligicha G da yotadi. Ravshanlik, $S_h = ABB_h$ uchburchakning tomonlari regulyar bo'lakli-silliqlik ∂S_h konturni tashkil qiladi; bu kontur uchun (16.6.6) Stoks formulasini qo'llash mumkin. (16.6.13) ga ko'ra, (16.6.6) ning o'ng tarafidagi sirt integrali nolga teng. Demak,

$$\int_{\partial S_h} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0. \quad (16.6.15)$$

∂S_h kontur uch qismdan, ya'ni AB, BB_h va B_hA dan iborat bo'lgani sababli, (16.6.15) integralni quyidagi

$$\begin{aligned} \int_{[AB]} P dx + Q dy + R dz + \int_{[BB_h]} P dx + Q dy + R dz + \\ + \int_{[B_hA]} P dx + Q dy + R dz = 0 \end{aligned} \quad (16.6.16)$$

integrallar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin.

Birinci integral, (16.6.4) ga ko'ra, $U(x_0, y_0, z_0)$ ga teng. Uchinchi integral uchun, ikkinchi tur egri chiziqli integral xossasiga asosan,

$$\int_{[B_hA]} P dx + Q dy + R dz = - \int_{[AB_h]} P dx + Q dy + R dz = -U(x_0 + h, y_0, z_0)$$

tenglik o'rinli.

Shunday ekan, (16.6.16) ga ko'ra,

$$U(x_0 + h, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0) = \int_{[BB_h]} P dx + Q dy + R dz.$$

Absissalar o'qiga parallel bo'lgan BB_h kesmada $dy = 0$ va $dz = 0$. Bundan chiqdi, P funksiyaning uzluksizligini hisobga olsak,

$$\int_{[BB_h]} P dx + Q dy + R dz = \int_{BB_h} P dx = P(x_0, y_0, z_0) \cdot h + o(h).$$

Demak,

$$U(x_0 + h, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, z_0) \cdot h + o(h).$$

Bu esa (16.6.12) dagi birinchi tenglik bajarilishini anglatadi.

(16.6.12) dagi qolgan ikki tenglik ham xuddi shu usulda isbotlanadi. Demak, (16.6.11) ifoda (16.6.14) tenglik bilan aniqlangan funksiyaning to'la differensial bo'lar ekan.



16.6.1 - misol. Ushbu

$$y^2 z^3 dx + 2xyz^3 dy + 3xy^2 z^2 dz$$

ifoda to'la differensial ekanini ko'rsating.

Agar

$$P = y^2 z^3, \quad Q = 2xyz^3, \quad R = 3xy^2 z^2$$

desak, oddiy hisoblashlar (16.6.13) shartlarning bajarilishini ko'rsatadi, ya'ni yuqoridagi ifoda biror $U(x, y, z)$ potensialning to'la differensial ekan. Berilgan ifodani navbat bilan har bir o'zgaruvchi bo'yicha integrallab, va bunda qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb hisoblab, potensialni topish qiyin emas:

$$U(x, y, z) = xy^2 z^3 + C,$$

bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas son.

16.7-§. Gauss-Ostrogradskiy formulasi

1. Gauss-Ostrogradskiy formulasi Grin formulasining uch o'lchovli analogidir. Uch o'lchovli quyidagi

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z_1(x, y) < z < z_2(x, y), \quad (x, y) \in D\} \quad (16.7.1)$$

to'plamni olaylik, bu yerda ikki o'lchovli $D \subset \mathbb{R}^2$ soha silliq chegara-ga ega. Shu ko'rinishdagi sohalarni bundan buyon Oz o'qi bo'ylab joylashgan soha deb ataymiz.

16.7.1 - teorema. Faraz qilaylik, $f(x, y, z)$ funksiya va uning $\frac{\partial f}{\partial z}$ qismaniy hosilasi Oz o'qi bo'ylab joylashgan yopiq $\bar{G}$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\iiint_G \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} f(x, y, z) dx dy \quad (16.7.2)$$

tenglik o'rinli; bunda tenglikning o'ng tarafida ikkinchi tur sirt integrali turibdi.

Isbot. Quyidagi

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz = f(x, y, z_2(x, y)) - f(x, y, z_1(x, y))$$

Nyuton-Leybnits formulasini olib, uni D soha bo'yicha integral-lasak,

$$\begin{aligned} & \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz = \\ & = \iint_D f(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D f(x, y, z_1(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi bu tenglikning chap va o'ng taraflari mos ravishda talab qilingan (16.7.2) tenglikning chap va o'ng taraflari bilan ustma-ust tushishini qayd etish yetarli.



Faraz qilaylik, (16.7.1) ta'rifdagi $z_1(x, y)$ va $z_2(x, y)$ funksiyalar $\overline{D}$ yopiq sohada uzluksiz va uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Bundan tashqari, bo'lakli-silliq ∂G sirtning tashqi birlik normal vektori

$$\mathbf{n}(x, y, z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

ko'rinishda bo'lsin.

Natija. 16.7.1 - teorema shartlari bajarilganda

$$\iiint_G \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} f(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) d\sigma$$

formula o'rinli.

2. Agar G soha har bir koordinata o'qlari bo'ylab joylashgan bo'lsa, biz uni regulyar deymiz. Masalan, har qanday qavariq soha regulyar bo'ladi.

16.7.2 - teorema (Gauss-Ostrogradskiy formulasi). Faraz qilaylik, P, Q, R funksiyalar va ularning $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ qisman hosilalari yopiq regulyar $\overline{G}$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} & \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{\partial G} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma \end{aligned} \quad (16.7.3)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. 16.7.1 - teorema natijasiga ko'ra,

$$\iiint_G \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial G} P(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z) d\sigma, \quad (16.7.4)$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} Q(x, y, z) \cos \beta(x, y, z) d\sigma, \quad (16.7.5)$$

$$\iiint_G \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) d\sigma. \quad (16.7.6)$$

Bu (16.7.4)-(16.7.6) tengliklarni qo'shib chiqsak, talab qilingan (16.7.3) tenglikni olamiz.



Eslatma. (16.7.3) formula chekli sondagi regulyar sohalarning birlashmasi uchun ham o'rinli. Haqiqatan,

$$G = G_1 \cup G_2 \cup S$$

deylik, bu yerda S bo'lakli-silliqlik sirt bo'lib, u G sohani umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan ikki G_1 va G_2 regulyar qismaniy sohalarga ajratadi.

G_1 va G_2 sohalarning har biri uchun (16.7.3) tenglikni yozamiz:

$$\begin{aligned} & \iiint_{G_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{\partial G_k} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

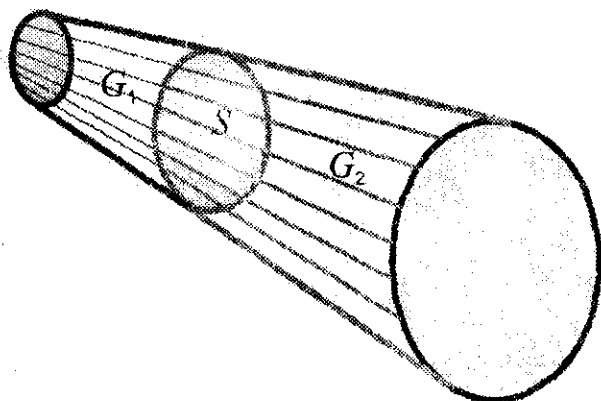
Bu tengliklarni qo'shib, uch karrali integralning additivligiga ko'ra,

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$$= \iint_{\partial G_1} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma + \\ + \iint_{\partial G_2} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Endi ∂G_1 va ∂G_2 bo'yicha olingan ikkinchi tur sirt integrallari-ning yig'indisi ∂G bo'yicha integralga teng ekanini qayd etish yetarli. Haqiqatan, qayd etilgan yig'indi «tashqi» ∂G chegara hamda «ichki» S sirt bo'yicha integrallar yig'indisidan iborat (16.4 - rasm).



16.4-rasm

Bunda S boyicha ikkinchi tur sirt integrali ikki marta olinadi: birinchi marta sirtning musbat yog'i va ikkinchi marta esa, uning manfiy yog'i bo'yicha. Shuning uchun S bo'yicha ikki integral yig'indisi nolga teng bo'lib, faqat ∂G bo'yicha integral qoladi.

16.7.1 - misol. Agar $a + b + c = 1$ bo'lsa,

$$\iiint_{\partial G} (ax \cos \alpha + by \cos \beta + cz \cos \gamma) d\sigma = |G|$$

tenglik o'rinli, bu yerda $|G|$ uch o'lchovli G sohaning hajmi.

Haqiqatan, Gauss-Ostrogradskiy formulasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial G} (ax \cos \alpha + by \cos \beta + cz \cos \gamma) d\sigma = \\ & = \iiint_G \left(\frac{\partial(ax)}{\partial x} + \frac{\partial(by)}{\partial y} + \frac{\partial(cz)}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iiint_G (a + b + c) dx dy dz = |G|. \end{aligned}$$

Eslatma. Yuqoridagi misol istalgan sohaning chegarasi bo'ylab harakatlanib, uning hajmini hisoblash imkonini beradi.

16.8-§. Misollar

1 - misol. Agar S sirt $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ doirada berilgan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ funksiya grafigi bo'lsa, bu sirtga $(x_0, y_0) \in \Omega$ nuqtada o'tkazilgan normal vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Ko'rsatma. Bu sirtni $\mathbf{r} = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ radius-vektor bilan berilgan deb hisoblab, (16.1.21) formulalarni qo'llang.

2 - misol. Agar S sirt $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ doirada berilgan $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ funksiya grafigi bo'lsa, bu sirt yuzini toping.

Ko'rsatma. Agar $u = x$ va $v = y$ desak,

$$||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v|| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Talab qilingan yuzani topish uchun bu kattalikni (16.1.26) integralga qo'yib, hosil bo'lgan integralni qutb koordinatalar sistemasiga o'tib hisoblang.

3 - misol. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyaning grafigidan iborat S sirt uchun birinchi kvadratik formani hisoblang. (16.2.5) formula yordamida $||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v||$ kattalikni topib, (16.1.20) formula bilan taqqoslang. So'ngra S sirt yuzasini hisoblash formulasini toping.

Ko'rsatma. Agar $u = x$, $v = y$ va $z = f(x, y)$ desak, bu sirtni $\mathbf{r} = (x, y, z)$ radius-vektor bilan berish mumkin. Shunday ekan, E , F va G kattaliklarni (16.2.3) formula yordamida hisoblang. S sirt yuzasi uchun formula (16.2.6) dan kelib chiqadi.

4 - misol. Faraz qilaylik, S sirt $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ kvadratda aniqlangan $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya grafigidan iborat bo'lsin. Bu sirt yotuvchi $z = f(0, y)$ egri chiziq uzunligi uchun formula toping.

Ko'rsatma. S sirt uchun E , F va G kattaliklar xuddi 3 - misoldagi singari hisoblanadi. Egri chiziqni $\mathbf{r} = (0, y, f(0, y))$ radius-vektor bilan aniqlab, (16.2.9) formulani qo'llang (bu yerda parametr y bo'lib, $u(y) = 0$ va $v(y) = y$).

5 - misol. Faraz qilaylik, S sirt $z = x^2 + y^2$ funksiyaning grafigidan iborat bo'lsin. Bu sirt uchun ikkinchi kvadratik formani toping.

Ko'rsatma. Agar $u = x$, $v = y$ va $z = x^2 + y^2$ desak, bu sirtni $\mathbf{r} = (x, y, z)$ radius-vektor bilan berish mumkin. Endi normal vektorni (16.1.13) formula bilan aniqlab, ikkinchi kvadratik formani hisoblash uchun (16.3.2) formulani qo'llang.

6 - misol. Agar $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 + z^4 = 1, z \geq 0\}$ ko'rinishda aniqlangan sirt bo'lsa, $P = (0, 0, 1)$ nuqtadagi bosh egriliklarni hisoblang.

Ko'rsatma. P nuqtadagi $T(P)$ urinma tekislikni toping va bu tekislikni Oz o'qiga ortogonal ekanligiga ishonch hosil qiling. So'ngra, (16.3.33) formula asosida bosh egriliklarni hisoblang.

7 - misol. Agar $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq$

$0, z \geq 0\}$ ko'rinishda aniqlangan sirt bo'lsa, quyidagi

$$I = \iint_S (x+y) d\sigma$$

birinchi tur sirt integralini hisoblang.

Ko'rsatma. Agar $u = x, v = y$ deb olsak, bu sirtning $\mathbf{r} = (x, y, 1-x-y)$ radius-vektor bilan berish mumkin. Endi $||\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v||$ kattalikni hisoblab, I integralni (16.4.3) formula yordamida Oxy tekislikdagi uchburchak bo'yicha integralga keltiring.

8 - misol. Agar S sirt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0\}$$

ko'rinishdagi yarim sfera bo'lib, $\mathbf{r} = (0, 0, z^2)$ bo'lsa,

$$I = \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma$$

ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin.

Ko'rsatma. Agar

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$$

deb belgilasak, bu sirt

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi. Endi 16.5.1 - tasdiqni qo'llab, hosil bo'lgan doira bo'yicha integralda qutb koordinatalar sistemasiga o'tish yetarli.

9 - misol. Faraz qilalylik, S sirt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

ko'rinishdagi sfera bo'lib, S_1 esa, quyidagi

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

tekislik bo'lsin. Agar Γ aylana S sferani S_1 tekislik bilan kesish natijasida hosil bo'lsa,

$$I = \int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$$

integralni hisoblang (integral, agar Ox o'qining musbat yo'nalishidan qaralsa, soat miliga teskari yo'nalishda olinayapti).

Ko'rsatma. Avval I integralni (16.6.6) Stoks formulasi yordamida Γ o'rab turgan va S_1 tekislikda yotuvchi S_2 doira bo'yicha integralga olib kelamiz:

$$I = - \iint_{S_2} dy dz + dx dz + dx dy.$$

So'ngra bu integralni, (16.5.13) tenglikdan foydalanib,

$$I = - \int_{S_2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) d\sigma.$$

ko'rinishda yozib olib, $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tengliklardan foydalanamiz.

10 - misol. Agar S sirt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

ko'rinishdagi sfera bo'lsa, uning tashqi tarafi bo'yicha olingan

$$I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$$

integralni hisoblang.

Ko'rsatma. 16.7.1 - teorema yordamida Gauss-Ostrogradskiy formulasini

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu formula yordamida I integralni shar bo'yicha integral sifatida yozib olib, sferik koordinatalarga o'ting.

17-bob. Parametrga bog'liq integrallar

17.1-§. Parametrga bog'liq integrallarning asosiy xossalari

1. Yopiq to'g'ri to'rtburchak:

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

va bu to'g'ri to'rtburchakda haqiqiy qiymat qabul qiluvchi $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, har bir tayinlangan $x \in [a, b]$ uchun y o'zgaruvchining $f(x, y)$ funksiyasi $[c, d]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. U holda har bir $x \in [a, b]$ uchun

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

integralni aniqlash mumkin.

Bu integralda x o'zgaruvchi parametr deb va integralning o'zi esa, x *parametrga bog'liq integral* deb ataladi.

Ba'zan parametr uchun Yunon alifbosidagi harflardan foydalaniladi, masalan,

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} e^{-\alpha y} dy.$$

Bizning navbatdagi maqsadimiz parametrga bog'liq integralning parametr bo'yicha uzluksiz, differensiallanuvchi va integrallanuvchi funksiya bo'lish shartlarini topishdan iborat.

Tadbiqlarda ko'pincha shunday integrallar uchraydiki, bunda integral ostidagi funksiya x parametr bo'yicha uzluksiz bo'lib, y o'zgaruvchi bo'yicha esa, uzilishga ham ega bo'lishi mumkin. Shu sababli, biz

$$\Phi(x) = \int_c^d g(y)f(x, y) dy \quad (17.1.1)$$

ko'rinishdagi parametrga bog'liq integrallarni o'rganamiz.

Ushbu paragrafdagi integral ostidagi g funksiyani $[c, d]$ kesmada integrallanuvchi deb faraz qilamiz. Shuning uchun

$$\|g\|_1 = \int_c^d |g(y)| dy$$

kattalik chekli sonda iborat.

2. Biz (17.1.1) integralning uzluksizligini ko'rsatishdan boshlaymiz. Eslatib o'tamiz, $C(Q)$ simvol bilan yopiq Q to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plami belgilangan edi.

17.1.1 - teorema. Agar $f \in C(Q)$ bo'lsa, u holda (17.1.1) integral $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo'ladi.

Isbot. Kantor teoremasiga ko'ra, f funksiya Q to'g'ri to'rtburchakda tekis uzluksiz, ya'ni istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, barcha $(x, y) \in Q$ va $(\xi, \eta) \in Q$ lar uchun

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \delta$$

shartdan

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Aytaylik, $x \in [a, b]$ va $x + h \in [a, b]$ bo'lsin. U holda

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_c^d g(y)[f(x + h, y) - f(x, y)] dy$$

tenglik o'rinli.

Agar $|h| < \delta$ bo'lsa, Kantor teoremasiga ko'ra, $|f(x+h, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ bo'ladi va demak,

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leq \varepsilon \int_c^d |g(y)| dy = \|g\|_1 \cdot \varepsilon.$$

Bu esa (17.1.1) integralning x nuqtada uzluksizligini anglatadi.



17.1.1 - misol. Ushbu

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + \alpha \sin x} dx$$

integral $\alpha \geq 0$ yarim to'g'ri chiziqda α parametrning uzluksiz funksiyasi ekanini ko'rsatilsin.

Ahamiyat bering, integral ostidagi funksiya $x = 0$ nuqtada aniqlanmagan va shuning uchun integralni, umuman aytganda, xosmas deb hisoblashimiz kerak. Ammo, birinchi ajoyib limitdan foydalanib, $x = 0$ da integral ostidagi funksiyani $1/(1+\alpha)$ ga teng deb hisoblasak, uning $[0, \pi]$ kesmada uzluksiz funksiyaga aylanishini ko'rsatish qiyin emas.

Umuman, agar integral ostidagi funksiya integrallanish kesmasining chegaraviy nuqtasida chekli limitga ega bo'lsa, ana shu limit funksiyaning qayd etilgan nuqtadagi qiymati deb hisoblanadi.

Bunday kelishuvda integral ostidagi funksiya (x, α) o'zgaruvchilar bo'yicha $0 \leq x \leq \pi$ va $\alpha \geq 0$ sohada uzluksiz funksiyaga aylanadi. Shunday ekan, o'rganilayotgan integralning uzluksizligi bevosita 17.1.1 - teoremadan kelib chiqadi.

3. Parametrga bog'liq integralning integrallanish masalasini o'rganamiz.

17.1.2 - teorema. *Ixtiyoriy $f \in C(Q)$ funksiya uchun (17.1.1) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \int_c^d g(y) dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (17.1.2)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (17.1.2) ning chap tarafida avval y , so'ngra x bo'yicha olingan takroriy integral turibdi. Bu tenglikning o'ng tarafida esa, avval x , so'ngra y bo'yicha olingan takroriy integral turibdi. 13.5.1 - teoremda bu ikki integralning quyidagi

$$\iint_Q g(y) f(x, y) dx dy$$

ikki karrali integralga tengligi ko'rsatilgan. Demak, (17.1.2) dagi takroriy integrallar o'zaro teng.



Ba'zan, bir karrali integrallarni hisoblashda ham, sun'iy ravishda parametr kiritib, 17.1.2 - teoremani qo'llash foydali bo'ladi.

17.1.2 - misol. Ushbu

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\ln \cos x} dx$$

xosnas integral hisoblaunsin.

Yordamchi

$$\Phi(x) = \int_0^2 (\cos x)^t dt = \frac{(\cos x)^t}{\ln \cos x} \Big|_{t=0}^{t=2} = \frac{\cos^2 x - 1}{\ln \cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\ln \cos x}$$

integralni kiritaylik. 17.1.2 - teorema ko'ra,

$$I = - \int_0^{\pi/2} \Phi(x) \sin x \, dx = - \int_0^2 dt \int_0^{\pi/2} (\cos x)^t \sin x \, dx .$$

Agar

$$- \int_0^{\pi/2} (\cos x)^t \sin x \, dx = \frac{(\cos x)^{t+1}}{t+1} \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = - \frac{1}{t+1}$$

ekanini hisobga olsak, berilgan integral uchun

$$I = - \int_0^2 \frac{dt}{t+1} = - \ln 3$$

tenglikka ega bo'lamiz.

4. Parametrga bog'liq integralning differensiallanuvchi bo'lish masalasini o'rganamiz.

17.1.3 - teorema. Agar $f \in C(Q)$ va $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(Q)$ bo'lsa, u holda (17.1.1) integral $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \int_c^d g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (17.1.3)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Ushbu

$$\psi(x) = \int_c^d g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (17.1.4)$$

funksiyani qaraylik.

17.1.1 - teoreмага ko'ra, bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz. Demak, istalgan $x \in [a, b]$ uchun u $[a, x]$ kesmada integrallanuvchi. U holda

$$\int_a^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt = f(x, y) - f(a, y), \quad a \leq x \leq b,$$

Nyuton-Leybnits formulasini qo'llab, 17.1.2 - teoreмага ko'ra,

$$\begin{aligned} \int_a^x \psi(t) dt &= \int_c^d g(y) dy \int_a^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt = \\ &= \int_c^d g(y) [f(x, y) - f(a, y)] dy = \Phi(x) - \Phi(a) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \psi(t) dt.$$

O'ng tarafda uzluksiz funksiya dan olingan yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral turibdi. Bu integralni x bo'yicha differensiallab,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \psi(x)$$

tenglikni olamiz.

Bundan, (17.1.4) ta'rifni e'tiborga olsak, talab qilingan (17.1.3) tenglik kelib chiqadi.

■

Eslatma*. Aniq integralga Riman bergan ta'rif quyidagi ikki

$$F'(x) = f(x) \quad (*)$$

va

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt \quad (**)$$

tenglik orasida maksimal umumiylikda bog'lanish o'rnatishga intilish bilan bog'liq.

Chunonchi, agar f funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, (*) tenglikdan (**) tenglik kelib chiqadi. Teskari tasdiq, umuman aytganda, o'rinli emas: f funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, (**) tenglikni qanoatlantirsada, ammo (*) tenglik bajarilmasligi mumkin (6 - bob oxirida keltirilgan 9 - misolga qarang). Teskari tasdiq qo'shimcha shartlarda, masalan, f uzluksiz bo'lganda o'rinli.

Zamonaviy yondashuvda hosila ta'rifi (**) tenglikka asoslanadi: agar f funksiya integrallanuvchi bo'lib, (**) tenglik bajarilsa, u holda bu funksiya F funksiyaning umumlashgan hosilasi deb ataladi va F' orqali belgilanadi. Bunday yondashuvda (*) tenglik (**) tenglikning boshqa bir ko'rinishiga aylanadi.

Shuni aytish kerakki, 17.1.3 - teoremaning yuqorida keltirilgan isboti, aslida, umumlashgan hosila uchun ham o'rinli.

5. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, qiymatlar to'plami $[c, d]$ kesmadan iborat bo'lsin. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan

$$\Psi(x) = \int_c^{\varphi(x)} f(x, y) dy \quad (17.1.5)$$

integralni qaraylik.

17.1.4 - teorema. Faraz qilaylik, $f \in C(Q)$ va $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(Q)$ bo'lib, φ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda (17.1.5) integral $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi

funksiya bo'lib,

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = \int_c^{\varphi(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f[x, \varphi(x)] \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (17.1.6)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Ikki o'zgaruvchili

$$F(x, u) = \int_c^u f(x, y) dy \quad (17.1.7)$$

funksiyani qaraylik.

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral xossasi va 17.1.3 - teoreмага ko'ra, bu funksiya uzluksiz qisman hosilalarga ega:

$$\frac{\partial F(x, u)}{\partial x} = \int_c^u \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy, \quad \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} = f(x, u). \quad (17.1.8)$$

Demak, $F(x, u)$ ikki o'zgaruvchining uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo'lar ekan. (17.1.5) ta'rifga ko'ra,

$$\Psi(x) = F[x, \varphi(x)].$$

Shunday ekan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\Psi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}[x, \varphi(x)] + \frac{\partial F}{\partial u}[x, \varphi(x)] \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

(17.1.8) tengliklarni hisobga olsak, bundan talab qilingan (17.1.6) tenglik kelib chiqadi.



Natija. Faraz qilaylik, $f \in C(Q)$ va $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(Q)$ bo'lsin. Agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lib, qiymatlari $[c, d]$ kesmada yotsa,

$$I(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy$$

integral $[a, b]$ kesmada uzluksiz differentsiallanuvchi funksiya bo'ladi va

$$I'(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f[x, \varphi(x)] \cdot \varphi'(x) - f[x, \psi(x)] \cdot \psi'(x) \quad (17.1.9)$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan, buni ko'rsatish uchun

$$I(x) = \int_c^{\varphi(x)} f(x, y) dy - \int_c^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

tenglikdan foydalanib, 17.1.4 - teoremani qo'llash yetarli.

17.1.3 - misol. Parametrga bog'liq

$$I(x) = \int_x^{2x} \ln(x^2 + y^2) dy$$

integralning $x > 0$ da hosilasini toping.

(17.1.9) formulaga ko'ra,

$$I'(x) = 2x \int_x^{2x} \frac{dy}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + 4x^2) \cdot 2 - \ln(x^2 + x^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{y=x}^{y=2x} + 2 \ln 5x^2 - \ln 2x^2 = \\
&= 2 \operatorname{arctg} 2 - 2 \operatorname{arctg} 1 + 2 \ln 5 - \ln 2 + 2 \ln x.
\end{aligned}$$

Demak,

$$I'(x) = 2 \ln x + C_0, \quad \text{bu yerda} \quad C_0 = 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} + \ln \frac{25}{2}.$$

6. Integral ostidagi funksiya haqiqiy o'zgaruvchining kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyasi bo'lgan holda ham, ya'ni

$$f(x, y) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$$

bo'lganda ham parametrga bog'liq $\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ integrallar xuddi yuqoridagidek o'rganiladi.

Agar

$$\Phi_k(x) = \int_c^d f_k(x, y) dy, \quad k = 1, 2,$$

deb belgilasak, qayd etilgan integral

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + i \Phi_2(x)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ko'pgina parametrga bog'liq integrallarni hisoblashda bu belgilashdan foydalanish asqotadi.

17.1.4 - misol. Ushbu

$$I = \int_0^R e^{-\alpha x} \sin \beta x dx$$

integralni hisoblang.

Buning uchun

$$\Phi(\beta) = \int_0^R e^{-\alpha x + i\beta x} dx$$

yordamchi integralni qaraymiz, bu yerda β haqiqiy parametr. Kompleks qiymatli funksiyalarni integrallash qoidasiga ko'ra,

$$\Phi(\beta) = \int_0^R e^{(i\beta - \alpha)x} dx = \frac{e^{(i\beta - \alpha)x}}{i\beta - \alpha} \Big|_{x=0}^{x=R} = \frac{1 - e^{-\alpha R + i\beta R}}{\alpha - i\beta}.$$

Demak,

$$\Phi(\beta) = \frac{1 - e^{-\alpha R}(\cos \beta R + i \sin \beta R)}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha + i\beta). \quad (17.1.10)$$

Haqiqiy va mavhum qismlarni ajratsak, quyidagi ikki

$$\int_0^R e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha - e^{-\alpha R}(\alpha \cos \beta R - \beta \sin \beta R)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (17.1.11)$$

va

$$\int_0^R e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta - e^{-\alpha R}(\beta \cos \beta R + \alpha \sin \beta R)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (17.1.12)$$

tenglikni olamiz.

7. Parametrga bog'liq integrallar funksiyalarni silliqlashda, ya'ni berilgan funksiyani undan kam farq qiladigan silliq funksiya bilan almashtirishda foydalaniladi. Buni biz hammasidan ko'ra keng qo'llaniladigan silliqlash usuli misolida ko'rsatamiz. Buning uchun

$$\frac{1}{A} = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x^2-1}} dx$$

deb,

$$\omega(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (17.1.13)$$

funksiyani kiritamiz.

Bu funksiyaning $\mathbb{R}$ sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi ekanini tekshirish qiyin emas (10.9.9 - misol bilan solishtiring). Bundan tashqari, u $(-1, 1)$ intervaldan tashqarida nolga teng bo'lib,

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(x) dx = 1$$

shartni qanoatlantiradi.

Shunday ekan, istalgan $h > 0$ uchun

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \quad (17.1.14)$$

funksiya ham cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, u manfiymas, $(-h, h)$ intervaldan tashqarida nolga teng va

$$\int_{\mathbb{R}} \omega_h(x) dx = 1 \quad (17.1.15)$$

shartni qanoatlantiradi.

Bundan istalgan $h_n \rightarrow 0$ ketma-ketlik uchun $\{\omega_{h_n}(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligining delta-simon ekani kelib chiqadi (§10.6 ning 1 - bandiga qarang).

Eslatib o'tamiz, agar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya sonlar o'qidagi har qanday kesmada integrallanuvchi bo'lsa, biz uni lokal integrallanuvchi deb atagan edik. Ixtiyoriy lokal integrallanuvchi f funksiya va istalgan $h > 0$ uchun

$$f_h(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(x-y) f(y) dy \quad (17.1.16)$$

funksiyani (f funksiyaning o'rtachasi deb ataymiz) kiritamiz.

Bu funksiyani, integralda o'zgaruvchini almashtirib, quyidagi

$$f_h(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) f(y+x) dy = \int_{-h}^h \omega_h(y) f(y+x) dy \quad (17.1.17)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Oxirgi integralga, x ni parametr deb hisoblab, yuqorida isbotlangan teoremlarni qo'llashimiz mumkin. Xususan, (17.1.16) tenglikdan $f_h(x)$ funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi.

(17.1.17) formula uzluksiz funksiyalarni cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar bilan tekis yaqinlashtirishda ishlatiladi.

17.1.1 - tasdiq. *Istalgan uzluksiz $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun $\mathbb{R}$ dagi har qanday kesmada tekis ravishda*

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x) \quad (17.1.18)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Aytaylik, h_n nolga intiluvchi musbat sonlarning ixtiyoriy ketma-ketligi bo'lsin. Yuqorida qayd qilinganidek, $\{\omega_{h_n}(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi delta-simondir (§10.6 ning 1 - bandiga qarang). Shunday ekan, teoremaning o'rinli ekanligi bevosita 10.6.1 - teorema va funksiya limitining Heine ta'rifidan kelib chiqadi.

■

1 - eslatma. Agar f funksiya k -tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d^k f_h(x)}{dx^k} = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

tenglik bajariladi.

Buni isbotlash uchun (17.1.17) formula o'rniga

$$f_h^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) f^{(k)}(y+x) dy$$

tenglikdan foydalanish yetarli.

2 - eslatma. (17.1.18) tenglikning biror tayinlangan $x \in \mathbb{R}$ nuqtada bajarilishi uchun f funksiyaning $\mathbb{R}$ sonlar o'qida uzluksizligini talab qilish shart emas. Buning uchun f funksiyaning aynan o'sha x nuqtada uzluksiz bo'lishi kifoya. Haqiqatan, (17.1.17) ta'rif va (17.1.15) shartga ko'ra,

$$f_h(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) [f(x+y) - f(x)] dy. \quad (17.1.19)$$

Demak,

$$\begin{aligned} |f_h(x) - f(x)| &\leq \sup_{|y| \leq h} |f(x+y) - f(x)| \int_{|y| \leq h} \omega_h(y) dy = \\ &= \sup_{|y| \leq h} |f(x+y) - f(x)|. \end{aligned}$$

Endi, funksiya uzluksiz bo'lgan har bir nuqtada o'ng taraf $h \rightarrow 0$ da nolga intilishini qayd etish yetarli.

(17.1.17) funksiya dan uzilishga ega funksiyalarni silliqlashda ham foydalaniladi.

17.1.5 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (17.1.20)$$

funksiyani qaraylik.

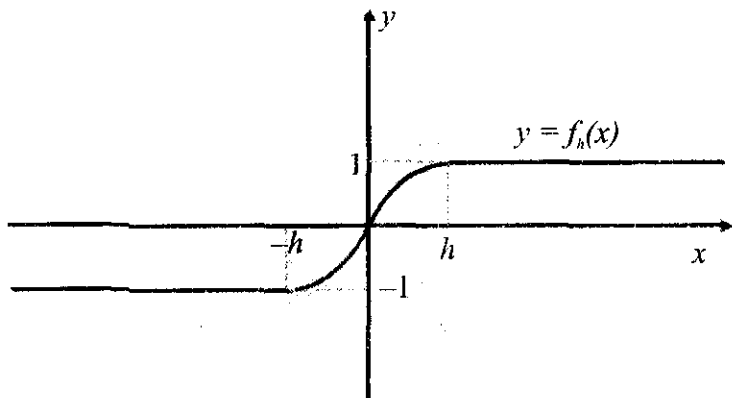
(17.1.17) tenglikdan mos silliqlangan $f_h(x)$ funksiyaning $\mathbb{R}$ sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi. Bundan tash-qari, bu funksiya $|x| \geq h$ da $\operatorname{sign} x$ funksiya bilan ustma-ust tushadi.

Haqiqatan, agar $x > h$ bo'lsa, $f(y+x)$ funksiya $-h \leq y \leq h$ da 1 ga teng va shuning uchun, (17.1.17) dan $f_h(x) = 1$ tenglikni

olaniz. Shunga o'xshash, agar $x < -h$ bo'lsa, $f_h(x) = -1$. Demak, qarayotgan holda

$$f_h(x) = \operatorname{sign} x, \quad |x| > h.$$

va $-h \leq x \leq h$ kesmada esa, $\mathbb{R}$ sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi bo'lgan holda, $f_h(x)$ funksiya -1 dan 1 gacha o'sadi (17.1 - rasm).



17.1-rasm

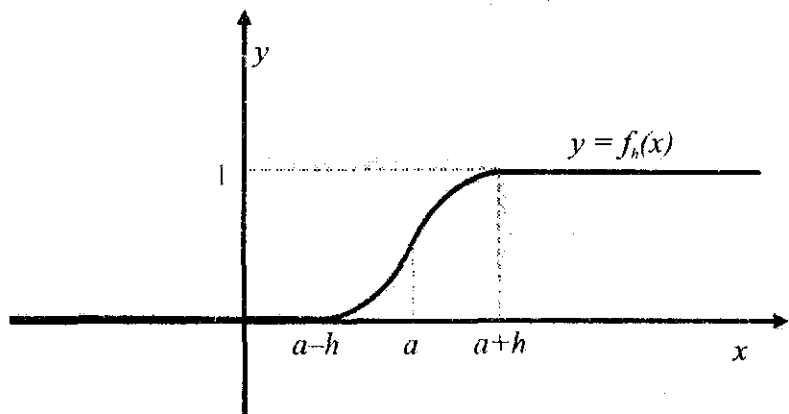
Yuqoridagi singari mulohazalarni navbatdagi funksiyaga ham qo'llash mumkin.

17.1.6 - misol. Istalgan $a \in \mathbb{R}$ uchun Hevisayd yoki «zina» deb ataluvchi

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a, \end{cases} \quad (17.1.21)$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiyaning (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan $\chi_h(x)$ o'rtachasi, ravshanki, $x \leq a - h$ da 0 ga va $x \geq a + h$ da 1 ga teng. $a - h \leq x \leq a + h$ kesmada $\chi_h(x)$ funksiya, $\mathbb{R}$ sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi bo'lgan holda, 0 dan 1 gacha o'sadi (17.2 - rasm).



17.2-rasm

8. Albatta, Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday f funksiyani cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar bilan tekis approksimatsiyalash mumkin emas, chunki f uzluksiz bo'lmisligi ham mumkin. Shunday bo'lsada, o'rtacha ma'noda (ya'ni quyida keltirilgan (17.2.22) tenglik ma'nosida) bunday approksimatsiyalash o'rinli.

17.1.2 - tasdiq. Agar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda istalgan $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmada

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx = 0 \quad (17.1.22)$$

tenglik o'rinli, bu yerda f_h funksiya (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan.

Isbot. (17.1.19) tenglikka ko'ra,

$$\int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b dx \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) |f(x+y) - f(x)| dy =$$

$$= \int_{|y| \leq h} \omega_h(y) dy \int_a^b |f(x+y) - f(x)| dx, \quad (17.1.23)$$

10 - bobdagi 10.8.3 - teorema asosan, istalgan lokal integrallanuvchi f funksiya uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+y) - f(x)| dx = 0.$$

Bundan chiqdi, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|y| < \delta$ bo'lganda

$$\int_a^b |f(x+y) - f(x)| dx < \varepsilon$$

baho bajariladi.

Demak, $h < \delta$ da (17.1.23) va (17.1.15) munosabatlarga ko'ra,

$$\int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon \int_{|y| \leq h} \omega_h(y) dy = \varepsilon.$$

Bu esa talab qilingan (17.1.22) tenglikning bajarilishini anglatadi. ■

O'rta kvadratik yaqinlashish uchun ham shunga o'xshash tasdiq o'rinni.

17.1.3 - tasdiq. Agar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya lokal integrallanuvchi bo'lsa, u holda istalgan $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmada

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (17.1.24)$$

tenglik o'rinli, bu yerda f_h funksiya (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan.

Isbot. Ma'lumki, biror kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiya shu kesmada chegaralangan bo'ladi. Shartga ko'ra f funksiya lokal integrallanuvchi bo'lgani sababli, u har bir kesmada chegaralangan va xususan, $[a-1, b+1]$ kesmada ham, ya'ni

$$|f(x)| \leq M, \quad a-1 \leq x \leq b+1.$$

Bevosita (17.1.16) formula va silliqlovchi ω_h yadro xossalariga ko'ra, f funksiyaning approksimatsiyalovchi $f_h(x)$ funksiya ham $0 < h \leq 1$ uchun $[a, b]$ kesmada xuddi o'sha M o'zgarish bilan tekis chegaralangan. Bundan chiqdi,

$$|f(x) - f_h(x)|^2 \leq 2M|f(x) - f_h(x)|, \quad a \leq x \leq b.$$

Demak, (17.1.24) munosabat to'g'ridan to'g'ri (17.1.22) dan kelib chiqadi.

■

9. Funksiyaning silliqlashning yuqorida o'rganilgan usuli matematika keng foydalaniladi. Biz buni, 6 - bobda ancha chegaralovchi shartlar ostida isbotlangan, ikkinchi o'rta qiymat formulasi misolida ko'rsatamiz. Quyida bu formulani umumiyroq (klassik) ko'rinishining isboti keltiriladi.

17.1.4 - tasdiq (ikkinchi o'rta qiymat formulasi). Faraz qilaylik, f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, g funksiya esa, bu kesmada monoton va kesma chekkalarida uzluksiz bo'lsin. U holda shunday $\xi \in [a, b]$ nuqta topiladiki, u uchun

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx \quad (17.1.25)$$

tenglik (Bonne formulasi) bajariladi.

Isbot. Avvalo shuni qayd etish joizki, har qanday monoton funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi (6.5.1 - teoreмага qarang) bo'lgani sababli, (17.1.25) formulaning chap qismidagi integral ma'noga ega.

Eslatib o'tamiz, 6 - bobda (17.1.25) formula f uzluksiz va g esa, differensiallanuvchi funksiya bo'lgan holda isbotlangan edi ((6.5.29) formulaga qarang).

f funksiyani $[a, b]$ kesmadan $\mathbb{R}$ to'g'ri chiziqqa $x < a$ da $f(x) = f(a)$ deb va $x > b$ da $f(x) = f(b)$ deb davom ettiramiz. Xuddi shu usulda g funksiyani ham davom ettiramiz. $f_h(x)$ simvol orqali f funksiyaning (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan o'rtachasini belgilaymiz. $g_h(x)$ belgilash ham xuddi shu ma'noga ega.

Bu ikki funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, $g_h(x)$ monoton hamdir. Haqiqatan, aytaylik, $g(x)$ o'suvchi bo'lib, $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda, (17.1.17) ta'rifga ko'ra,

$$g_h(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) g(y + x_1) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) g(y + x_2) dy = g_h(x_2).$$

Shunday ekan, biz $f_h(x)$ va $g_h(x)$ silliq funksiyalarga 6 - bobda isbotlangan ikkinchi o'rta qiymat formulasini qo'llashimiz mumkin. Natijada

$$\int_a^b f_h(x) g_h(x) dx = g_h(a) \int_a^{\xi_h} f_h(x) dx + g_h(b) \int_{\xi_h}^b f_h(x) dx \quad (17.1.26)$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $\xi_h [a, b]$ kesmaning biror nuqtasidir.

17.1.2 - tasdiqqa ko'ra, $h \rightarrow 0$ da f_h va g_h funksiyalar mos ravishda f va g funksiyalarga o'rtacha ma'noda yaqinlashadi. Bundan tashqari, 17.1.1 - tasdiqqa keltirilgan 2 - eslatmaga ko'ra,

$$g_h(a) \rightarrow g(a), \quad g_h(b) \rightarrow g(b), \quad h \rightarrow 0.$$

Aytaylik, $\{h_n\}$ biror cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lib, h indeks h_n qiymatlarni qabul qilsin. ξ_{h_n} sonli ketma-ketlik chegaralangan

bo'lib, Boltsano-Veyershtross teoremasiga ko'ra, undan biror $\xi \in [a, b]$ nuqtaga intiluvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. (17.1.26) tenglikda h indeksni shu ketma-ketlik bo'yicha nolga intiltirsak, talab qilingan (17.1.25) formulani olamiz.

■

Eslatma. 3.4.1 - teoremaga ko'ra, har qanday monoton g funksiya istalgan c nuqtada bir taraffi $g(c \pm 0)$ limit qiymatlarga ega. Ikkinchi o'rta qiymat formulasi g funksiya a va b nuqtalarda uzluksiz bo'lmagan holda ham o'rinli ekanini ko'rsatish oson. Umumiy holda bu formula

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a+0) \int_a^\xi f(x) dx + g(b-0) \int_\xi^b f(x) dx \quad (17.1.27)$$

ko'rinishda yoziladi.

17.2-§. Parametrga bog'liq xosmas integrallar

1. Parametrga bog'liq birinchi tur xosmas integrallarning tekis yaqinlashishi.

1^0 . Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya

$$Q_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y < \infty\}$$

yarim tasmda berilgan bo'lib, har bir $x \in [a, b]$ uchun $[c, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziqda xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsin. U holda, *parametrga bog'liq birinchi tur xosmas integral* deb ataluvchi, quyidagi

$$\Phi(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy \quad (17.2.1)$$

funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'ladi.

Eslatma. Ikki va undan ortiq parametrga bog'liq xosmas integrallar ham xuddi shunday aniqlanadi. Masalan, navbatdagi

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx$$

va

$$\Psi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

ikki integral α va β parametrlarga bog'liq xosmas integrallardir.

Bu integrallarning istalgan $\alpha > 0$ parametr uchun yaqinlashishi (17.1.11) va (17.1.12) tengliklardan kelib chiqadi. Haqiqatan, bu tengliklarda $R \rightarrow +\infty$ deb limitga o'tsak,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0, \quad (17.2.2)$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0 \quad (17.2.3)$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

Ta'rif. Agar (17.2.1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $A > 0$ son topilsaki, barcha $x \in [a, b]$ lar uchun

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y) \, dy \right| < \varepsilon$$

baho bajarilsa, bu xosmas integralni $x \in [a, b]$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi deyimiz.

Eslatma. Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya $x \in [a, b]$ parametrning har bir qiymatida $y \geq c$ yarim to'g'ri chiziqli lokal integrallanuvchi bo'lsin. Koshi kriteriysiga ko'ra, agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $A_\varepsilon > 0$ son topilsaki, har qanday $B > A \geq A_\varepsilon$ va barcha $x \in [a, b]$ lar uchun

$$\left| \int_A^B f(x, y) dy \right| < \varepsilon \quad (17.2.4)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (17.2.1) xosmas integral $x \in [a, b]$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

$E \subset \mathbb{R}$ to'plam kesma bo'lmagan holda ham bu to'plamga tegishli parametr bo'yicha tekis yaqinlashish xuddi yuqoridagidek aniqlanadi.

Parametrga bog'liq xosmas integral tekis yaqinlashishining navbatdagi yetarli sharti tathbiqlarda ko'p uchraydi.

17.2.1 - teorema (Veyershtress alomati). Faraz qilaylik, har bir $x \in [a, b]$ uchun $f(x, y)$ funksiya $y \geq c$ yarim to'g'ri chiziqli lokal integrallanuvchi bo'lib,

$$|f(x, y)| \leq g(y), \quad (x, y) \in Q_+,$$

shart bajarilsin.

Agar

$$\int_c^\infty g(y) dy$$

integral yaqinlashsa, u holda (17.2.1) integral $x \in [a, b]$ bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Isbot parametrga bog'liq xosmas integral tekis yaqinlashishining (17.2.4) Koshi kriteriysi va

$$\left| \int_A^B f(x, y) dx \right| \leq \int_A^B g(y) dy$$

bahodan kelib chiqadi.

Haqiqatan, teorema shartiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $A_\varepsilon > 0$ son topiladiki, barcha $B > A \geq A_\varepsilon$ lar uchun o'ng tarafdagi integral ε dan kichik bo'ladi. Bundan chiqdi, chap taraf ham bir vaqtning o'zida barcha x lar uchun o'sha ε dan kichik bo'ladi.

■

17.2.1 - misol. Ushbu

$$\int_0^{\infty} e^{-y} \sin(x^2 + y^2) dy$$

integralni $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashishini ko'rsating.

17.2.1 - teoremaga ko'ra, berilgan integralni tekis yaqinlashishi e^{-y} funksiyani $y \geq 0$ yarim to'g'ri chiziqda integrallanuvchi ekani va quyidagi

$$|e^{-y} \sin(x^2 + y^2)| \leq e^{-y}$$

bahodan kelib chiqadi.

2^o. Tekis yaqinlashishning Dirixle-Abel alomati nisbatan nozik-roq alomatdir.

Faraz qilaylik, $f(x, \alpha)$ funksiya α parametrning biror $E \subset \mathbb{R}$ to'plamdan olingan barcha qiymatlarda $x \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda aniqlangan bo'lsin. Agar x bo'yicha differensiallanuvchi shunday $F(x, \alpha)$ funksiya topilsaki, u uchun x va α ga bog'liqmas biror M soni bilan

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = f(x, \alpha), \quad |F(x, \alpha)| \leq M, \quad x \geq c, \quad \alpha \in E, \quad (17.2.5)$$

munosabatlar bajarilsa, biz f funksiyani $x \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda $\alpha \in E$ bo'yicha tekis chegaralangan boshlang'ich funksiyaga ega deyimiz.

17.2.2 - teorema (Dirixle-Abel alomati). Faraz qilaylik, $f(x, \alpha)$ funksiya parametrlarning har bir $\alpha \in E$ qiymatida $x \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib, bu yarim to'g'ri chiziqda $\alpha \in E$ bo'yicha tekis chegaralangan boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsin. Bundan tashqari, $g(x)$ funksiya $x \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda monoton kamayuvchi bo'lib, $x \rightarrow +\infty$ da nolga intilsin.

U holda

$$\int_c^\infty f(x, \alpha)g(x) dx \quad (17.2.6)$$

zosmas integral $\alpha \in E$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Isbot. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday A_ε son topilib, istalgan $B > A \geq A_\varepsilon$ va barcha $\alpha \in E$ larda

$$\left| \int_A^B f(x, \alpha)g(x) dx \right| < \varepsilon \quad (17.2.7)$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $F(y, \alpha)$ funksiya $f(y, \alpha)$ funksiyaning (17.2.5) shartlarini qanoatlantiruvchi boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. (17.1.27) ikkinchi o'rta qiymat formulasini qo'llasak,

$$\int_A^B f(x, \alpha)g(x) dx = g(A+0) \int_A^\xi f(x, \alpha) dx + g(B-0) \int_\xi^B f(x, \alpha) dx$$

tenglikni olamiz.

Nyuton-Leybnits formulasini e'tiborga olib, bu tenglikni

$$\int_A^B f(x, \alpha)g(x) dx =$$

$$g(A+0)[F(\xi, \alpha) - F(A, \alpha)] + g(B-0)[F(B, \alpha) - F(\xi, \alpha)]$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bundan chiqdi, (17.2.5) shart va g funksiyaning monoton kamayuvchi ekanini hisobga olsak,

$$\left| \int_A^B f(x, \alpha) g(x) dx \right| \leq 4Mg(A)$$

bahoga ega bo'lamiz.

$A \rightarrow +\infty$ da $g(A) \rightarrow 0$ bo'lgani uchun, A_ε ni

$$g(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

shartdan tanlab olish mumkin. Demak, talab qilingan (17.2.7) baho o'rinli ekan.

■

17.2.2 - misol. Agar E sonlar o'qining nol kirmaydigan istalgan kesmasi bo'lsa, har qanday tayinlangan $\beta > 0$ uchun

$$I(\alpha) = \int_1^\infty x^{1-\beta} \cos(\alpha x^2) dx$$

integral $\alpha \in E$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Haqiqatan,

$$F(x, \alpha) = \frac{\sin(\alpha x^2)}{2\alpha}, \quad g(x) = x^{-\beta}$$

deylik.

Agar

$$f(x, \alpha) = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = x \cos(\alpha x^2)$$

deb belgilasak,

$$f(x, \alpha)g(x) = x^{1-\beta} \cos(\alpha x^2)$$

bo'ladi. Endi Dirixle-Abel alomatidan foydalanish yetarli.

Yana N. Abel va P. Dirixle nomlari bilan bog'liq tekis yaqinlashish alomatining boshqa ko'rinishini keltiramiz.

17.2.3 - teorema (Abel-Dirixle alomati). *Faraz qilaylik, quyidagi*

$$\int_c^\infty f(x) dx \quad (17.2.8)$$

xosmas integral yaqinlashsin.

Bundan tashqari, $g(x, \alpha)$ funksiya har bir $\alpha \in E$ da $x \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda monoton kamayib,

$$0 \leq g(x, \alpha) \leq M, \quad x \geq c, \quad \alpha \in E, \quad (17.2.9)$$

shartni qanoatlantirsin, bu yerda M o'zgarmas x va α ga bog'liq emas.

U holda

$$\int_c^\infty f(x)g(x, \alpha) dx$$

xosmas integral $\alpha \in E$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Isbot. Agar

$$F(x) = \int_x^\infty f(y) dy$$

va

$$\varepsilon(R) = \sup_{x \geq R} |F(x)|$$

deb belgilasak, (17.2.8) xosmas integral yaqinlashgani uchun, $\varepsilon(R)$ kattalik R o'sganda monoton kamayib, $R \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

Keyingi mulohazalar 17.2.2 - teorema isbotiga o'xshash bo'lib, quyidagi

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x)g(x, \alpha) dx &= g(A-0, \alpha) \int_A^\xi f(x) dx + g(B-0, \alpha) \int_\xi^B f(x) dx \approx \\ &= g(A-0, \alpha) [F(\xi) - F(A)] + g(B-0, \alpha) [F(B) - F(\xi)] \end{aligned}$$

ikkinchi o'rta qiymat formulasiga asoslandi.

Bu formuladan, (17.2.9) shartlarni hisobga olsak,

$$\left| \int_A^B f(x)g(x, \alpha) dx \right| \leq M[\varepsilon(\xi) + \varepsilon(A)] + M[\varepsilon(B) + \varepsilon(\xi)] \leq 4M\varepsilon(A)$$

baho kelib chiqadi. Demak, teorema o'rinli ekan.

■

17.2.3 - misol. Quyidagi integralning $\alpha \geq 0$ bo'yicha tekis yaqinlashishini ko'rsating:

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos x^2 dx.$$

Buning uchun

$$f(x) = \cos x^2, \quad g(x, \alpha) = e^{-\alpha x^2}$$

funksiyalar 17.2.3 - teorema shartlarini qanoatlantirishini qayd etish yetarli.

3⁰. Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya uzluksiz bo'lib, $g(y)$ lokal integrallanuvchi bo'lsin. Parametrga bog'liq xosmas integralning quyidagi

$$\Phi(x) = \int_c^\infty g(y)f(x, y) dy \quad (17.2.10)$$

maxsus ko'rinishini o'rganamiz.

Buning uchun

$$\Phi_n(x) = \int_c^{c+n} g(y)f(x,y) dy \quad (17.2.11)$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritaylik.

Ravshanki, agar (17.2.10) integral biror $\Phi(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa, $\Phi_n(x)$ ketma-ketlik ham $n \rightarrow \infty$ da $\Phi(x)$ ga tekis yaqinlashadi. Boshqacha aytganda, $x \in [a, b]$ bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^A g(y)f(x,y) dy = \Phi(x) \quad (17.2.12)$$

limitning mavjudligidan $x \in [a, b]$ bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^{c+n} g(y)f(x,y) dy = \Phi(x) \quad (17.2.13)$$

ketma-ketlik limitining mavjudligi kelib chiqadi.

Ammo teskarisi o'rinli emas. Masalan, $g(y) = \cos \pi y$ va $f(x, y) \equiv 1$ funksiyalar uchun $c = 0$ da

$$\int_0^n \cos \pi y dy = \frac{1}{\pi} \sin n\pi y \Big|_{y=0}^{y=n} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lib, (17.2.13) limit mavjud va u nolga teng. Lekin unga mos (17.2.12) limit mavjud emas, chunki

$$\int_0^A \cos \pi y dy = \frac{1}{\pi} \sin \pi A.$$

Ammo, shunga qaramasdan, agar $f(x, y)$ va $g(y)$ funksiyalar monoton bo'lsa, teskari tasdiq ham o'rinli bo'ladi, ya'ni (17.2.13)

limit mavjudligidan (17.2.12) limitning mavjudligi kelib chiqadi. Haqiqatan, agar biror natural N uchun

$$\Phi(x) - \Phi_N(x) = \int_{c+N}^{\infty} g(y)f(x,y) dy < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $A \geq c + N$ da bundan

$$\int_A^{\infty} g(y)f(x,y) dy < \varepsilon$$

baho kelib chiqadi. Demak, (17.2.10) integral tekis yaqinlashar ekan.

4^o. Tekis yaqinlashuvchi parametrga bog'liq xosmas integrallar xos integrallar xossalarga o'xshash xossalarga ega.

17.2.4 - teorema. Faraz qilaylik, g funksiya $[c, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib, f funksiya esa, $Q_+ = [a, b] \times [c, +\infty)$ yarim tasmda uzluksiz bo'lsin.

Agar (17.2.10) xosmas integral biror kesmada parametr bo'yicha tekis yaqinlashsa, u holda bu integral o'sha kesmada parametrning uzluksiz funksiyasi bo'ladi.

Isbot. 17.1.1 - teoreмага ko'ra, (17.2.11) funksiyalar ketma-ketligi uzluksiz funksiyalardan tashkil topgan. Shartga ko'ra, bu ketma-ketlik tekis yaqinlashadi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \int_c^{\infty} g(y)f(x,y) dy$$

tenglik o'rinli.

Shunday ekan, integral parametrning uzluksiz funksiyasi bo'lishi tekis yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi limitining uzluksizligi haqidagi teoremadan kelib chiqadi (10.1.2 - teoreмага qarang).



Eslatma. $\mathbb{R}$ sonlar o'qi bo'yicha xosmas integrallar ham xuddi yuqoridagi singari xossalarga ega. Bunda g funksiyadan hech qanday silliqlik talab qilinmaydi. Masalan, $\mathbb{R}$ sonlar o'qi bo'yicha absolyut integrallanuvchi $g(y)$ funksiya uchun

$$C(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cos y\xi dy, \quad S(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \sin y\xi dy$$

integrallar, Veyershtrass alomatiga ko'ra, tekis yaqinlashadi va 17.2.4 - teorema ko'ra esa, ular uzluksiz funksiyalardir.

Navbatdagi tasdiq qandaydir ma'noda 17.2.4 - teorema teskari tasdiqdir.

17.2.5 - teorema. Faraz qilaylik, g funksiya $[c, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib, f funksiya esa, Q_+ yarim tasmada uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari, $g(y) \geq 0$ va $f(x, y) \geq 0$ shartlar bajarilsin.

Agar (17.2.10) integral yaqinlashib, $[a, b]$ kesmada parametrning uzluksiz funksiyasi bo'lsa, u holda bu integral o'sha kesmada tekis yaqinlashadi.

Isbot. Dini teoremasiga ko'ra (10.4.1 - teorema qarang), (17.2.11) ketma-ketlik tekis yaqinlashadi. U holda, 2^0 banddagi muhlozalariga asosan, (17.2.10) integral ham tekis yaqinlashadi.



2. Parametrغا bog'liq xosmas integrallarning differentsi-allanuvchanligi.

17.2.6 - teorema. Faraz qilaylik, $y \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi g funksiya va $f \in C(Q_+)$ funksiya shunday bo'lsinki, bunda (17.2.10) xosmas integral barcha $x \in [a, b]$ larida yaqinlashsin. Agar $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(Q_+)$ va quyida keltirilgan (17.2.14) tenglikning o'ng tarafidagi integral x bo'yicha $[a, b]$ kesmada tekis

yaqinlashsa, u holda (17.2.10) xosmas integral $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyaga yaqinlashadi va

$$\frac{d}{dx} \int_c^\infty g(y) f(x, y) dy = \int_c^\infty g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (17.2.14)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar

$$\Phi_n(x) = \int_c^{c+n} g(y) f(x, y) dy$$

desak, 17.1.3 - teoreмага ko'ra, bu funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{d\Phi_n(x)}{dx} = \int_c^{c+n} g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$$

tenglik bajariladi.

Teorema shartidan $\frac{d\Phi_n(x)}{dx}$ ketma-ketlikni (17.2.14) ning o'ng tarafidagi integralga $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Shunday ekan, 10.3.2 - teoreмага asosan, $\{\Phi_n(x)\}$ ketma-ketlik uzluksiz differensiallanuvchi (17.2.10) funksiyaga $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashadi va bunda (17.2.14) tenglik bajariladi.

■

Xosmas integrallarni parametr bo'yicha differensiallash ularni hisoblashda samarali qo'llaniladi. Masalan, (17.2.2) va (17.2.3) tengliklarni α parametr bo'yicha differensiallab,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x \cos \beta x dx = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0, \quad (17.2.15)$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x \sin \beta x \, dx = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0, \quad (17.2.16)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

α va β parametrlar bo'yicha differensiallashni davom ettirib, xosmas integrallar uchun boshqa formulalarni ham olish mumkin.

Navbatdagi misolda integralni hisoblash uchun avval uni parametr bo'yicha differensiallab, so'ngra uni yana integrallanadi.

17.2.4 - misol. Ixtiyoriy $\alpha > 0$ va $\beta \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$I_{\alpha}(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx$$

xosmas integral hisoblansin.

Bu integral $\alpha > 0$ da $\beta \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashadi. 17.2.6 - teorema ko'ra esa,

$$\frac{dI_{\alpha}(\beta)}{d\beta} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Differensiallash mumkinligi

$$|e^{-\alpha x} \cos \beta x| \leq e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0,$$

babo va o'ng tarafdagi funksiyaning integrallanuvchi ekanidan kelib chiqadi.

(17.2.2) formulaga ko'ra,

$$\frac{dI_{\alpha}(\beta)}{d\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Demak,

$$I_{\alpha}(\beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha).$$

Agar $\beta = 0$ da $I_\alpha(0) = 0$ va $\arctg 0 = 0$ ekanini hisobga olsak, $C(\alpha) \equiv 0$ ayniyatni olamiz. Shunday qilib,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (17.2.17)$$

Ba'zi hollarda bu usulni qo'llash juda sodda differensial tenglamalarni yechishni talab qiladi.

17.2.5 - misol. Istalgan $\alpha > 0$ va $\beta \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$J_\alpha(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \lambda x dx$$

xosmas integral hisoblansin.

λ parametr bo'yicha differensiallab, so'ngra bo'laklab integral-lasak,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\alpha(\lambda)}{d\lambda} &= - \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x \sin \lambda x dx = \\ &= \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \sin \lambda x \Big|_{x=0}^\infty - \frac{\lambda}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \lambda x dx = - \frac{\lambda}{2\alpha} J_\alpha(\lambda) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\frac{d}{d\lambda} \ln J_\alpha(\lambda) = - \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Hosil bo'lgan differensial tenglamani integrallasak,

$$\ln J_\alpha(\lambda) = - \frac{\lambda^2}{4\alpha} + C(\alpha)$$

yoki

$$J_\alpha(\lambda) = C_0(\alpha) e^{-\lambda^2/4\alpha}$$

ko'rinishdagi umumiy yechimni olamiz.

$\lambda = 0$ deb, $C_0(\alpha)$ o'zgarmasni topamiz:

$$C_0(\alpha) = J_\alpha(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Demak,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \lambda x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\lambda^2/4\alpha}. \quad (17.2.18)$$

3. Xosmas integrallarda integrallash tartibini o'zgartirish.

Ushbu badda chegaralanmagan yopiq

$$Q_{++} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < \infty, \quad c \leq y < \infty\}$$

sohada berilgan uzluksiz funktsiyani, ya'ni $f(x, y) \in C(Q_{++})$ funktsiyani qaraymiz. Bundan tashqari, $f(x, y)$ funktsiya har bir $y \geq c$ da x bo'yicha $[a, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziqda xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsin deymiz.

Faraz qilaylik, $g(y)$ funktsiya $y \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib, har bir $x \geq a$ da $g(y)f(x, y)$ ko'paytma y bo'yicha $[c, +\infty)$ sohada xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsin.

Keltirilgan shartlarda $x \geq a$ yarim to'g'ri chiziqda

$$\Phi(x) = \int_c^\infty g(y)f(x, y) dy \quad (17.2.19)$$

funktsiya va $y \geq c$ yarim to'g'ri chiziqda esa,

$$\Psi(y) = g(y) \int_a^\infty f(x, y) dx \quad (17.2.20)$$

funktsiya aniqlangan bo'ladi.

17.2.7 - teorema. Faraz qilaylik, $f \in C(Q_{++})$ funksiya va lokal integrallanuvchi g funksiya

$$f(x, y) \geq 0, \quad g(y) \geq 0$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Bundan tashqari, (17.2.19) va (17.2.20) integrallar parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashsin.

U holda, agar quyida keltirilgan integrallardan biri yaqinlashsa, ikkinchisi ham yaqinlashib,

$$\int_a^{\infty} \Phi(x) dx = \int_c^{\infty} \Psi(y) dy \quad (17.2.21)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Aytaylik, (17.2.21) integrallardan birinchisi yaqinlashsin. Shartga ko'ra, quyidagi monoton o'suvchi

$$\Phi_n(x) = \int_c^{c+n} g(y)f(x, y) dy, \quad \Psi_m(y) = \int_a^{a+m} g(y)f(x, y) dx \quad (17.2.22)$$

ketma-ketliklar $\Phi(x)$ va $\Psi(y)$ funksiyalarga mos ravishda yaqinlashadi. Bu ikki funksiya 17.2.4 - teoreмага ko'ra uzluksiz bo'lgani sababli, ular lokal integrallanuvchidir.

17.1.2 - teoreмага ko'ra,

$$\int_a^{a+m} \Phi_n(x) dx = \int_c^{c+n} \Psi_m(y) dy. \quad (17.2.23)$$

Ψ_m ketma-ketlik o'suvchi bo'lgani sababli, $\Psi_m(x) \leq \Psi(x)$. Bundan chiqdi,

$$\int_c^{c+n} \Psi_m(y) dy \leq \int_c^{c+n} \Psi(y) dy \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy$$

va yuqoridagi farazimizga ko'ra, o'ng tarafdagi integral yaqinlashadi.

Bu tengsizlik va (17.2.23) tenglikdan quyidagi

$$\int_a^{a+m} \Phi_n(x) dx \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy \quad (17.2.24)$$

munosabatni olamiz.

$\Phi_n(x)$ ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ da $\Phi(x)$ funksiyaga $a \leq x \leq a+m$ kesmada tekis yaqinlashgani sababli, 10.3.1 - teoreмага ko'ra, tayinlangan m da integral ostida limitga o'tish mumkin. Shunday ekan, $n \rightarrow \infty$ deb, (17.2.24) tengsizlikdan

$$\int_a^{a+m} \Phi(x) dx \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy$$

bahoga ega bo'lamiz.

Agar $m \rightarrow \infty$ desak,

$$\int_a^{\infty} \Phi(x) dx \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy. \quad (17.2.25)$$

Shunday qilib, isbotlanayotgan (17.2.21) tenglikning o'ng tarafida turgan integralning yaqinlashishidan uning chap tarafida turgan integralni yaqinlashishi kelib chiqar ekan.

Endi biz, Φ va Ψ funksiyalarning o'rnini almashtirib, yuqoridagi mulohazalarni qaytarsak,

$$\int_c^{\infty} \Psi(y) dy \leq \int_a^{\infty} \Phi(x) dx$$

teskari tengsizlikka ega bo'lamiz.

Oxirgi ikki tengsizlikdan talab qilingan (17.2.21) tenglik kelib chiqadi.

Natija. 17.2.7 - teorema shartlari bajarilganda $g(y)f(x, y)$ funksiya ikki o'lchovli Q_{++} sohada xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lib,

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy &= \int_c^\infty g(y) dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \\ &= \int_a^\infty dx \int_c^\infty g(y)f(x, y) dy \end{aligned} \quad (17.2.26)$$

tengliklar bajariladi.

Haqiqatan, (17.2.26) takroriy integrallardan biri mavjud desak, u holda, 17.2.7 - teoremaga ko'ra, ikkinchisi ham mavjud va ular o'zaro teng bo'ladi. So'ngra, agar istalgan n va m nomerlar uchun $Q_{nm} = [a, a+n] \times [c, c+m]$ orqali tomonlari uzunligi $n \times m$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni belgilasak, 13.5.1 - teoremaga ko'ra,

$$\iint_{Q_{nm}} g(y)f(x, y) dx dy = \int_c^{c+m} g(y) dy \int_a^{a+n} f(x, y) dx \quad (17.2.27)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, f funksiya manfiymas bo'lgani uchun,

$$\iint_{Q_{nm}} g(y)f(x, y) dx dy \leq \int_c^\infty g(y) dy \int_a^\infty f(x, y) dx.$$

Bu baho va 14.1.2 - teoremaga ko'ra, (17.2.26) ning chap tarafidagi ikki karrali integral yaqinlashadi va

$$\iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy \leq \int_c^\infty g(y) dy \int_a^\infty f(x, y) dx \quad (17.2.28)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Boshqa tarafdin, (17.2.27) tenglik va $g(y)f(x, y) \geq 0$ shartga ko'ra,

$$\iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy \geq \int_c^{c+m} g(y) dy \int_a^{a+n} f(x, y) dx.$$

Bu tengsizlikda $n \rightarrow +\infty$, so'ngra $m \rightarrow +\infty$ deb,

$$\iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy \geq \int_c^{\infty} g(y) dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad (17.2.29)$$

tengsizlikka kelamiz.

(17.2.28) va (17.2.29) baholardan talab qilingan (17.2.26) tenglik kelib chiqadi.

Eslatma. 17.2.7 - teoremda integral ostidagi funksiyaning manfiylik sharti muhimdir. Bu shart olib tashlanganda teorema tasdiq o'z kuchini yo'qotishini navbatdagi misolda ko'ramiz.

17.2.6 - misol. $\mathbb{R}^2$ tekislikda

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

to'g'ri to'rtburchak va

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & (x, y) \in P, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus P \end{cases}$$

funksiya berilgan bo'lsin.

Ravshanki, bu funksiya tekislikda uzluksiz bo'lib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx = \sin y \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \sin y, \quad 0 \leq y \leq 2\pi,$$

va

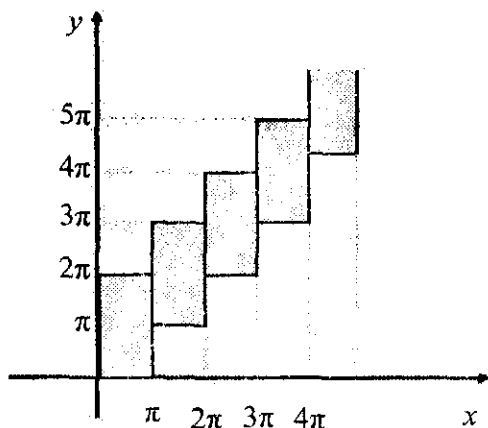
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = \sin x \int_0^{2\pi} \sin y dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

tengliklarni qanoatlantiradi.

Endi

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x - k\pi, y - k\pi)$$

funksiyani kiritaylik.



17.3-rasm

Bu funksiya $\mathbb{R}^2$ tekislikda uzluksiz bo'lib, 17.3 - rasmda tasvirlangan to'g'ri to'rtburchaklardan tashqarida nolga teng ekanini ko'rish qiyin emas.

Bevosita funksiya ta'rifidan

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy = 0, \quad x \geq 0,$$

va

$$\Psi(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 2 \sin y, & 0 \leq y \leq \pi, \\ 0, & y > \pi \end{cases}$$

qiliqlarni olamiz.

Demak,

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} \Psi(y) dy = 2 \int_0^{\pi} \sin y dy = 4.$$

Bundan chiqdi,

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy \neq \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(x, y) dx.$$

E'tibor bering, bunda har ikki takroriy integral yaqinlashadi, buning ustiga, ichki integrallar parametr bo'yicha uning o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashadi.

Navbatdagi teoremda turli ishorali qiymat qabul qiluvchi integral ostidagi funksiyaga integrallar tartibini o'zgartirish uchun yetarli bo'lgan shartlar keltirilgan.

17.2.8 - teorema. Faraz qilaylik, $F(x, y) = g(y)f(x, y)$ bo'lib, g funksiya lokal integrallanuvchi va $f \in C(Q_{++})$ bo'lsin. Bundan tashqari, parametrga bog'liq

$$\int_a^{\infty} |F(x, y)| dx \quad \text{va} \quad \int_c^{\infty} |F(x, y)| dy$$

integrallar parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashsin va quyidagi

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} |F(x, y)| dx \quad \text{yoki} \quad \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} |F(x, y)| dy$$

takroriy integrallardan biri yaqinlashsin.

U holda $F(x, y)$ funksiya chegaralanmagan Q_{++} sohada integrallanuvchi bo'lib,

$$\iint_{Q_{++}} F(x, y) dx dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty F(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty F(x, y) dy \quad (17.2.30)$$

tengliklar bajariladi.

Isbot. Agar

$$F_+(x, y) = \frac{|F(x, y)| + F(x, y)}{2}, \quad F_-(x, y) = \frac{|F(x, y)| - F(x, y)}{2}$$

desak, bu funksiyalar manfiyimas bo'lib, ular

$$F_+(x, y) - F_-(x, y) = F(x, y), \quad F_+(x, y) + F_-(x, y) = |F(x, y)|$$

ayniyatlarni qanoatlantiradi.

Teorema sharti va

$$0 \leq F_\pm(x, y) \leq |F(x, y)|$$

tengsizliklarga ko'ra, $F_+(x, y)$ va $F_-(x, y)$ funksiyalar 17.2.7 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, ularning har biri uchun (17.2.30) tenglik o'rinli; bu tenglikni F_+ va F_- funksiyalar uchun alohida yozib, keyin bu tengliklarni o'zaro ayirib tashlasak, xosmas integrallarning chiziqliligiga ko'ra, F uchun ham talab qilingan (17.2.30) tenglikni olamiz.

Eslatma. Shunga o'xshash natija kompleks qiymat qabul qiluvchi, ya'ni $F(x, y) = F_1(x, y) + iF_2(x, y)$ ko'rinishdagi funksiyalar uchun ham o'rinli. Buni ko'rsatish uchun 17.2.8 - teoremani F_1 va F_2 funksiyalar uchun qo'llab, keyin hosil bo'lgan tengliklarni qo'shish kifoya.

17.2.7 - misol. Ixtiyoriy $\alpha > 0$ va $\beta \geq 0$ lar uchun

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)x^2} dx$$

integralni hisoblang.

Buning uchun integral ostidagi funksiyani

$$e^{-(\alpha-i\beta)x^2} = e^{-\alpha x^2} [\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2]$$

deb yozib, berilgan integral kvadratini, ya'ni quyidagi

$$I^2(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} g(x) dx \int_0^{\infty} g(y) dy = \iint_{x \geq 0, y \geq 0} e^{-(\alpha-i\beta)(x^2+y^2)} dx dy$$

integralni qutb koordinatalariga o'tib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} I^2(\alpha, \beta) &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)t} dt = \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{e^{-(\alpha-i\beta)t}}{-(\alpha-i\beta)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha-i\beta} = \frac{\pi}{4} \frac{\alpha+i\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Demak,

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{\alpha+i\beta}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Agar

$$\sqrt{\alpha+i\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$$

ekanini hisobga olsak, berilgan integral qiymati uchun

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)x^2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} \right) \quad (17.2.31)$$

formulaga ega bo'lamiz.

1 - eslatma. (17.2.31) formulada haqiqiy va mavhum qismlarni ajratsak, quyidagi ikki

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (17.2.32)$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \sin \beta x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (17.2.33)$$

formulani olamiz.

2 - eslatma. (17.2.32) va (17.2.33) formulalar $\alpha = 0$ da ham o'rinli. Haqiqatan, agar $\beta > 0$ bo'lsa, u holda 17.2.3 - misolda ko'rganimizdek, yuqoridagi integrallar $\alpha \geq 0$ bo'yicha tekis yaqinlashadi va shuning uchun, 17.2.1 - teorema ko'ra, ular α ning o'sha qiymatlariga uzluksiz bog'liq bo'ladi. Endi o'z-o'zidan ko'rinib turgan quyidagi tasdiqdan foydalanamiz: agar biror kesmada uzluksiz ikki funksiya bir nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda o'zaro teng bo'lsa, ular o'sha nuqtada ham o'zaro teng qiymat qabul qiladi.

Yuqorida (17.2.32) va (17.2.33) tengliklar faqat $\alpha > 0$ uchun isbotlangan edi. Lekin bu tengliklarning chap va o'ng taraflari $\alpha \geq 0$ da uzluksiz bo'lgani sababli, ular $\alpha = 0$ da ham o'rinli. Bundan chiqdi, barcha $\beta > 0$ larda

$$\int_0^{\infty} \cos \beta x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \quad (17.2.34)$$

va

$$\int_0^{\infty} \sin \beta x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \quad (17.2.35)$$

tengliklar bajariladi.

Bu integrallar birinchi bo'lib fransuz olimi O.J. Frenel tomonidan optika masalalarini yechish uchun kiritilgan edi. Shuning uchun bu ikki integral o'sha olim nomi bilan ataladi.

4. Parametrga bog'liq ikkinchi tur xosmas integrallar.

Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x \leq b, \quad c \leq y \leq d\} \quad (17.2.36)$$

yarim ochiq to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan bo'lsin.

Bundan chiqdi, biz f funksiyaning $x = a$ nuqtada aniqlanmagan bo'lishini istisno qilmaymiz (masalan, bu funksiya to'g'ri to'rtburchakning chap chegarasi atrofida chegaralanmagan bo'lishi mumkin).

Shunday ekan,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (17.2.37)$$

integral $y \in [c, d]$ parametrga bog'liq ikkinchi tur xosmas integraldir. Eslatib o'tamiz, agar

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{a+\alpha}^b f(x, y) dx$$

limit mavjud bo'lsa, (17.2.37) xosmas integral yaqinlashadi deyiladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < \alpha < \delta$ bo'lganda barcha $y \in [c, d]$ uchun

$$\left| F(y) - \int_{a+\alpha}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (17.2.37) ikkinchi tur xosmas integral $F(y)$ funksiyaga $y \in [c, d]$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi deyiladi.

Tekis yaqinlashuvchi ikkinchi tur xosmas integrallar ham birinchi tur xosmas integrallar kabi xossalarga ega. Xususan, ular uchun tekis yaqinlashishning yetarli shartlari haqidagi Veyershtrass va Dini teoremlari o'rinli.

Navbatdagi tasdiqlarda Ω (17.2.36) tenglik bilan aniqlangan ya'ni ochiq to'g'ri to'rtburchakni anglatadi.

17.2.9 - teorema. Agar $f \in C(\Omega)$ bo'lib, (17.2.37) xosmas integral $F(y)$ ga $y \in [c, d]$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashsa, u holda $F \in C[c, d]$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar integral ostidagi funksiya uzluksiz bo'lsa, tekis yaqinlashuvchi xosmas integral parametrga uzluksiz bog'liq bo'ladi.

17.2.10 - teorema. Faraz qilaylik, $f \in C(\Omega)$ bo'lib, (17.2.37) xosmas integral barcha $y \in [c, d]$ larda yaqinlashsin. Agar $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Omega)$ va quyida keltirilgan (17.2.38) tenglikning o'ng tarafidagi integral y bo'yicha $[c, d]$ kesmada tekis yaqinlashsa, u holda (17.2.37) xosmas integral $[c, d]$ kesmada uzluksiz differentsiallanuvchi funksi-yaga yaqinlashadi va

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \quad (17.2.38)$$

tenglik bajariladi.

Ikki ikkinchi tur xosmas integralning tartibini o'zgartirish haqida ham 17.2.7 - teoreмага o'xshash tasdiq o'rinli. Bu tasdiqni keltirish maqsadida quyidagi

$$\Omega_* = \{(x, y) : a < x \leq b, c < y \leq d\}$$

yarim ochiq to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan $f(x, y)$ funksiya uchun ikki

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_c^d f(x, y) dy \quad (17.2.39)$$

xosmas integrallarni qaraymiz.

17.2.11 - teorema. Faraz qilaylik, $f \in C(\Omega_*)$ va $f(x, y) \geq 0$ bo'lsin. Bundan tashqari, (17.2.39) integrallarni parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashadi deb faraz qilamiz.

U holda, quyida keltirilgan takroriy integrallardan biri yaqinlashsa, ikkinchisi ham yaqinlashib, $f(x, y)$ funksiya ikki o'lchovli Ω_* sohada xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\iint_{\Omega_*} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (17.2.40)$$

tengliklar bajariladi.

Keltirilgan teoremlar isboti parametrga bog'liq birinchi tur xosmas integrallar holidagi singari olib boriladi. Bunda (17.2.22) ketma-ketliklar o'ruiga (17.2.39) integrallarga tekis yaqinlashuvchi

$$\Phi_n(y) = \int_{a+1/n}^b f(x, y) dx, \quad \Psi_m(x) = \int_{c+1/m}^d f(x, y) dy$$

ketma-ketliklarni olish kerak. Bundan keyingi mulohazalar 17.2.7 - , 17.2.4 - hamda 17.2.6 - teoremlar isbotlarida keltirilgan mulohazalardan farq qilmaydi.

17.2.8 - misol. Agar $p > -1$ bo'lsa,

$$I(p) = \int_0^1 (x^p - 1) \frac{dx}{\ln x}$$

integral hisoblansin.

Integral ostidagi funksiya $x = 0$ nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lishi mumkinligi sababli, bu integral ikkinchi tur xosmas integraldir.

17.1.2 - misoldagi sun'iy usuldan foydalanamiz: avval quyidagi

$$\int_0^p f(x, t) dt = \int_0^p x^t dt = \frac{x^t}{\ln x} \Big|_{t=0}^{t=p} = \frac{x^p - 1}{\ln x}$$

integralni hisoblab, so'ngra, 17.2.11 - teorema ko'ra, berilgan integralni hisoblaymiz:

$$I(p) = \int_0^1 dx \int_0^p x^t dt = \int_0^p dt \int_0^1 x^t dx = \int_0^p \frac{dt}{1+t} = \ln(1+p).$$

Eslatma. Integral ostida turli ishorali qiymat qabul qiluvchi funksiya turgan holda, integrallash tartibini almashtirish haqidagi 17.2.8 - teorema o'xshash tasdiq ham o'rinli bo'lib, bunda (17.2.39) va (17.2.40) integrallar absolyut yaqinlashishini talab qilish zarurdir.

5. Bir vaqtning o'zida birinchi va ikkinchi tur bo'lgan xosmas integrallar ham xuddi yuqoridagidek o'rganiladi. Chunonchi, agar $f(x, y)$ funksiya $a < x < +\infty$ ochiq to'g'ri chiziqda aniqlangan bo'lsa, u holda bu ochiq to'g'ri chiziq bo'yicha integral, biri birinchi tur va ikkinchisi ikkinchi tur bo'lgan, ikki xosmas integral yig'indisi deb tushuniladi:

$$\int_a^\infty f(x, y) dx \approx \int_a^b f(x, y) dx + \int_b^\infty f(x, y) dx,$$

bu yerda b quyidagi $a < b < +\infty$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonidir. Agar bu tenglikning o'ng tarafidagi ikki integral tekis yaqinlashsa, u holda chap tarafidagi integral ham tekis yaqinlashadi deyiladi.

Ravshanki, bunday aniqlangan xosmas integral b sonni tanlashga bog'liq emas va uni

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{a+\alpha}^A f(x, y) dx$$

ko'rinishdagi ikki karrali limit deb aniqlash mumkin.

17.2.9 - misol. Quyidagi xosmas integralni

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (17.2.41)$$

α bo'yicha uzluksizlikka tekshiring.

Bu integralni ikkiga ajratamiz, ya'ni uni biri $(0, 1]$ yarim interval va ikkinchisi $[1, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziq bo'yicha integrallar yig'indisi deb yozamiz. Bunda

$$\int_1^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

integral, Abel-Dirixle alomatiga ko'ra (17.2.3 - teoremaga qarang), $\alpha \geq 0$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi. Ikkinchi

$$\int_0^1 e^{-\alpha x} \cos x \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

integral esa, Veyershtass alomatiga ko'ra, $\alpha \geq 0$ bo'yicha tekis yaqinlashadi, chunki integral ostidagi funksiya, o'ng tarafida $(0, 1]$ da integrallanuvchi funksiya bo'lgan,

$$\left| \frac{e^{-\alpha x} \cos x}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

bahoni qanoatlantiradi. Shunday qilib, (17.2.41) integral $\alpha \geq 0$ bo'yicha tekis yaqinlashar ekan.

6*. Yuqorida o'rganilgan parametrga bog'liq xosmas integrallar ba'zan mahkamlangan maxsuslikka ega integrallar deb ataladi. Bu degani, integral ostidagi funksiya maxsuslikka ega bo'lgan nuqtalar parametrga bog'liq emas. Ammo, ko'pgina misollarni yechishda maxsus nuqtalari to'plami parametrga bog'liq bo'lgan integrallarni o'rga-nishga to'g'ri keladi. Bunday integrallarga misol sifatida

$$T(y) = \int_0^y \frac{g(x) dx}{\sqrt{y-x}} \quad (17.2.42)$$

integralni olishimiz mumkin.

$T(y)$ vaqt ichida y balandlikdan absissalar o'qiga tortishish kuchi ta'siri ostida tushayotgan nuqta traektoriyasi haqidagi masalani yechishda, N. Abel bu integralni atrofficha o'rgangan. Bu yerda noma'lum funksiya $g(x)$ bo'lib, u qidirilayotgan traektoriyani aniq-laydi. Bu funksiya integral ostida qatnashgani uchun, (17.2.42) teng-lama *integral tenglama* deb ataladi. Abel o'rgangan bu masala mate-matik fizikadagi integral tenglamalarni o'rganish zaruriyatini tug'dirgan birinchi masala deb hisoblanadi.

Integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalari to'plami parametrga bog'liq bo'lgan xosmas integrallar §17.5 da karrali integrallar uchun batafsil o'rganiladi.

7. Xosmas integrallarni jamlash usullari.

¹⁰. Parametrga bog'liq integrallar uzoqlashuvchi xosmas integrallarni regulyarlashtirishda ham ishlatiladi. Uzoqlashuvchi qatorlarni jamlash usullari kabi (9 - bobning §9.5 bandiga qarang), qayd etilgan regulyarlashtirish usullari uzoqlashuvchi integrallarni jamlash usul-lari deb ataladi.

Integral ostidagi funksiya cheksizlikda "o'zini yomon tutishi" sababli uzoqlashuvchi bo'lgan

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad (17.2.43)$$

xosmas integralni qaraylik. Integral ostidagi funksiyani, cheksizlikda yetarlicha tez nolga intiluvchi funksiyaga ko'paytirib, o'zgartiramiz, ya'ni $\alpha > 0$ parametrga bog'liq

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi(\alpha x) f(x) dx \quad (17.2.44)$$

integralni qaraymiz. Faraz qilaylik, $\varphi(t)$ bo'lakli-uzluksiz, $t \rightarrow +\infty$ da nolga intiluvchi, nolga uzluksiz va $\varphi(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin. U holda, agar (17.2.44) da $\alpha = 0$ desak, formal ravishda (17.2.43) integralni olamiz.

Odatda, $\varphi(t)$ funksiyani (17.2.44) xosmas integral istalgan $\alpha > 0$ da yetarlicha keng f funksiyalar sinfi uchun yaqinlashadigan qilib tanlanadi. Masalan, agar $\varphi(t) = e^{-t}$ funksiyani olsak, u holda (17.2.44) integral polinom bilan chegaralangan yoki polinomial o'suvchi deb ataladigan har qanday funksiya uchun yaqinlashadi.

Albatta, eng qiziqarli hol bu - qachonki (17.2.44) integral $\alpha = 0$ da (bunda u berilgan (17.2.43) integral bilan ustma-ust tushadi) uzoqlashib, $\alpha > 0$ yaqinlashsa hamda quyidagi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi(\alpha) = I$$

limitga ega bo'lsa.

Bu holda I soni (17.2.43) integralning $\langle \varphi \rangle$ jamlash usuli bilan aniqlanuvchi umumlashgan ma'nodagi qiymati va (17.2.43) xosmas integralning o'zi esa, $\langle \varphi \rangle$ usul bilan I ga jamlanadi deyiladi.

Masalan, $\varphi(t) = e^{-t}$ funksiya bilan aniqlanuvchi usul *Abel jamlash usuli* deb ataladi. Boshqacha aytganda, agar

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = I \quad (17.2.45)$$

tenglik bajarilsa, (17.2.43) integral Abel usuli bilan I soniga jamlanadi deyiladi.

(17.2.45) tenglik qisqartirilgan holda

$$(A) \int_0^{\infty} f(x) dx = I$$

deb yoziladi.

Bunda (17.2.45) ning chap tarafidagi integral (17.2.43) integralning *Abel o'rtachasi* deyiladi. Masalan, uzoqlashuvchi

$$\int_0^{\infty} \cos \beta x dx, \quad \int_0^{\infty} \sin \beta x dx, \quad \beta > 0,$$

integrallar uchun Abelning mos o'rtachalari ((17.2.2) va (17.2.3) formulalarga qarang):

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0,$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0,$$

ko'rinishga ega.

Bu tengliklarda $\alpha \rightarrow 0$ desak,

$$(A) \int_0^{\infty} \cos \beta x dx = 0, \quad (A) \int_0^{\infty} \sin \beta x dx = \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 0, \quad (17.2.46)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

1 - eslatma. Agar $r = e^{-\alpha}$ desak, $\alpha \rightarrow 0 + 0$ shart faqat va faqat $r \rightarrow 1 - 0$ bo'lganda bajariladi. Bu belgilashlarda (17.2.45) tenglik

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{\infty} f(t) r^t dt = I$$

ko'rinishga kelib, sonli qatorlar uchun Abel o'rtachalarining (9.5.10) ta'rifiga mos keladi.

2 - eslatma. Xosmas integralning oddiy ma'nodagi yaqinlashishini ham, jamlash usulini beruvchi funksiya sifatida quyidagi

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{agar } 0 \leq t \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } t > 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani olib, jamlash usulining xususiy holi deyish mumkin. Chunki, xosmas integralni $\langle \varphi^* \rangle$ usul bilan jamlash integral yaqinlashishi bilan ustma-ust tushadi. Haqiqatan, $\alpha > 0$ da

$$\int_0^\infty \varphi^*(\alpha x) f(x) dx = \int_0^{1/\alpha} f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$$

bo'lib, $\alpha \rightarrow 0$ da $A = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \infty$ bo'ladi.

2⁰. Jamlash usulining *regulyar* bo'lishi mos φ funksiyani tanlashning muhim shartidir. Bu degani, har qanday yaqinlashuvchi xosmas integral $\langle \varphi \rangle$ usul bilan ham xuddi integral yaqinlashadigan songa jamlanishi zarur. Boshqacha aytganda, yaqinlashuvchi (17.2.43) xosmas integral uchun

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_0^\infty \varphi(\alpha x) f(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx$$

tenglik bajarilsa, mos jamlash usuli *regulyar* deyiladi. Shunday qilib, agar (17.2.43) integralning yaqinlashishidan (17.2.44) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(\alpha)$ funksiyaning nolda uzluksizligi kelib chiqsa, $\langle \varphi \rangle$ funksiya bilan aniqlangan jamlash usuli *regulyar* bo'ladi. Demak, $\langle \varphi \rangle$ usulning *regulyar* bo'lishining yetar-li sharti, 17.2.4 - teorema ko'ra, (17.2.44) integralning $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ kesmadan olingan α larda tekis yaqinlashishidan iborat, bu yerda α_0 biror musbat sonidir.

17.2.12 - teorema. *Xosmas integrallarni jamlashning Abel usuli quyidagidir.*

Isbot parametrga bog'liq xosmas integrallar tekis yaqinlashishining Abel-Dirixle alomatidan bevosita kelib chiqadi (17.2.3- teorema qarang).

Haqiqatan, aytaylik, (17.2.43) xosmas integral yaqinlashsin. U holda, agar

$$g(x, \alpha) = e^{-\alpha x}, \quad \alpha \geq 0,$$

desak, 17.2.3 - teoremaning barcha shartlari o'rinli bo'ladi. Shuning uchun

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$$

integral $\alpha \geq 0$ bo'yicha tekis yaqinlashadi. Bundan chiqdi, 17.2.4 - teorema ko'ra, $\Phi(\alpha)$ funksiya $\alpha = 0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, bu esa o'z navbatida, Abel jamlash usulining quyidagi ekanini anglatadi.



Eslatma. 17.2.12 - teorema odatda quyidagi ko'rinishda keltiriladi:

Agar $f(x)$ funksiya $x \geq 0$ da lokal integrallanuvchi bo'lib, (17.2.43) xosmas integral yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (17.2.47)$$

tenglik bajariladi.

17.2.10 - misol. Dirixle-Abel alomati bo'yicha yaqinlashuvchi bo'lgan

$$I(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

integralni ixtiyoriy haqiqiy β uchun hisoblang.

Yordamchi (17.2.17) xosmas integralni qaraymiz:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Ravshanki,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta.$$

U holda, (17.2.47) ga ko'ra,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta. \quad (17.2.48)$$

(17.2.48) integral uzilishga ega bo'lgan Dirixle ko'paytuvchisi deb ataladi.

Abel usuli oddiy ma'noda uzoqlashuvchi bo'lgan ko'pgina xosmas integrallarga ma'no beradi. Masalan,

$$\int_0^{\infty} x \cos \beta x dx, \quad \int_0^{\infty} x \sin \beta x dx$$

integrallarni qaraylik. (17.2.15) va (17.2.16) tengliklarga ko'ra, bu integrallar uchun Abel o'rtachasi

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x \cos \beta x dx = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0,$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x \sin \beta x dx = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0,$$

ko'rinishga ega. Bundan, $\alpha \rightarrow 0$ deb,

$$(A) \int_0^{\infty} x \cos \beta x dx = -\frac{1}{\beta^2}$$

va

$$(A) \int_0^{\infty} x \sin \beta x dx = 0$$

tengliklarni olamiz.

3⁰. Shuni aytish kerakki, Abel jamlash usuli (xuddi boshqa regul-yar usullar kabi) integral ostidagi funksiya nol atrofida tebranganda ayniqsa samaralidir, chunki bunda funksiya musbat va manfiy bo'lgan qismlar bo'yicha integrallar o'zaro qisqarib ketib (bu hodisa "interferentsiya" deb ataladi), natijada Abel o'rtachalari limitga ega bo'lishi mumkin. Bordiyu integral ostidagi funksiya manfiy-mas bo'lsa, u holda Abel usuli oddiy yaqinlashishdan kuchli bo'lmas ekan, ya'ni manfiymas funksiyadan olingan integralning Abel usuli bilan jamlanishidan integral o'zining ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

Haqiqatan, aytaylik f funksiya lokal integrallanuvchi bo'lib, $f(x) \geq 0$, $x \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantirsin.

Istalgan $R > 0$ uchun $\alpha = 1/R$ deb belgilasak, $0 \leq x \leq R$ kesmada $1 \leq e^{1-\alpha x}$ baho bajariladi. Demak,

$$\int_0^R f(x) dx \leq e \int_0^{1/\alpha} e^{-\alpha x} f(x) dx \leq e \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx.$$

Agar f funksiyadan olingan xosmas integral Abel usuli bilan jamlansa, u holda o'ng taraf $\alpha \rightarrow 0$ da limitga ega bo'ladi. Demak, chap taraf R bo'yicha chegaralangan va integral ostidagi funksiya manfiymas bo'lgani uchun f dan olingan integral yaqinlashadi.

4⁰. Yuqorida Abel o'rtachalarining $\alpha > 0$ da istalgan polinomial o'sishga ega funksiya uchun mavjudligi aytilgan edi. Bordiyu integral ostidagi funksiya eksponensial o'ssa, u holda Abel o'rtachalari mavjud bo'lmazligi ham mumkin. Bunday hollarda Riss usulini qo'llash qulay bo'ladi. Bu usul uzoqlashuvchi qatorlar uchun qo'llanilgan Chezaro jamlash usulining integral ko'rinishidan iboratdir.

Tartibi $s \geq 0$ bo'lgan *Riss usuli* quyidagi

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} (1-t)^s, & \text{agar } 0 \leq t \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } t > 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya bilan aniqlanadi.

Riss o'rtachalari

$$R_s(\alpha) = \int_0^{1/\alpha} (1-\alpha x)^s f(x) dx$$

ko'rinishga ega bo'lib, $x \geq 0$ yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lgan ixtiyoriy f funksiya uchun mavjud. Riss usuli s ko'rsatkichning o'sishi bilan kuchayadi, ya'ni $\alpha \rightarrow 0$ da s - tartibli Riss o'rtachalarining biror limitga yaqinlashishidan, $s_1 > s$ - tartibli Riss o'rtachalarining ham xuddi o'sha limitga yaqinlashishi kelib chiqadi.

Shuni aytish kerakki, Riss o'rtachalarini aniqlash mumkin bo'lgan funksiyalar sinfi Abel o'rtachalarini aniqlash mumkin bo'lgan funksiyalar sinfidan kengroq bo'lsada, Abel usuli Riss usulidan kuchliroqdir. Chunonchi, agar xosmas integral biror s uchun Riss usuli bilan jamlansa va u uchun Abel o'rtachalari aniqlangan bo'lsa, u holda Abel o'rtachalarining limiti aynan Riss o'rtachalarining limitiga teng bo'ladi. Masalan, $f(x) = \sin \beta x$ funksiyaning birinchi tartibli Riss o'rtachalari uchun

$$R_1(\alpha) = \int_0^{1/\alpha} (1-\alpha x) \sin \beta x dx = -(1-\alpha x) \frac{\cos \beta x}{\beta} -$$

$$-\alpha \frac{\sin \beta x}{\beta^2} \Big|_{x=0}^{x=1/\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \frac{1}{\beta}, \quad \alpha \rightarrow 0$$

munosabat o'rinli.

Demak,

$$(R_1) \int_0^{\infty} \sin \beta x \, dx = \frac{1}{\beta}$$

bo'lib, bu (17.2.46) ning o'ngidagi tenglikning o'zidir.

17.3-§. Eylerning beta va gamma funksiyalari

Parametrga bog'liq quyidagi ikki

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx \quad (17.3.1)$$

va

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \, dx \quad (17.3.2)$$

integralni L. Eyler batafsil o'rgangan.

(17.3.1) integral Eylerning *beta-funksiyasi* yoki Eylerning birinchi tur integrali deb, (17.3.2) integral esa, Eylerning *gamma-funksiyasi* yoki Eylerning ikkinchi tur integrali deb ataladi.

Bu ikki funksiyani, quyida isbot qilinadigan,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (17.3.3)$$

klassik formula bog'laydi. Bu formulaga ko'ra, Eyler funksiyalari xossalari o'rganish uchun faqat gamma-funksiya xossalari batafsil o'rganish yetarli.

1. Eyler gamma-funksiyasining asosiy xossalari.

1⁰. Uzlüksizligi va differentsiallanuvchanligi.

17.3.1 - tasdiq. *Eyler gamma-funksiyasi (17.3.2) tenglik bilan istalgan $p > 0$ uchun aniqlangan.*

Isbot. (17.3.2) integral ikki sababga ko'ra xosmasdir, ya'ni yoki integral ostidagi funksiya $x = 0$ nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lgani uchun yoki integrallash intervali chegaralanmagan bo'lgani uchun. Bu integralni ikki

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

integral yig'indisi ko'rinishida yozib olsak, birinchi integral $p > 0$ da yaqinlashadi va ikkinchi integral esa, barcha haqiqiy p larda yaqinlashadi. Shunday qilib, gamma-funksiya (17.3.1) tenglik bilan istalgan $p > 0$ uchun aniqlangan.

Xususan, $p = 1$ da

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

17.3.2 - tasdiq. *Eyler gamma-funksiyasi $p > 0$ yarim to'g'ri chiziqda uzluksizdir.*

Isbot. E'tibor bering, integral ostidagi

$$f_p(x) = f(x, p) = e^{-x} x^{p-1} \quad (17.3.4)$$

funksiya ikki o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $x > 0$ va $p > 0$ da uzluksiz. Demak, 17.2.4 - teorema ko'ra, (17.3.2) xosmas integralning $p > 0$ yarim to'g'ri chiziqdagi istalgan $[a, b]$ kesmada parametrga nisbatan tekis yaqinlashishini isbotlash yetarli. Shu maq-sadda $0 < a \leq p \leq b$ deylik. U holda istalgan $x \geq 0$ uchun

$$x^{p-1} \leq x^{a-1} + x^{b-1} \quad (17.3.5)$$

tengsizlik o'rinli; bunda o'ng tarafdagi birinchi had chap tarafni $0 \leq x \leq 1$ da yuqoridan baholaydi, ikkinchi had esa, $x \geq 1$ da baholaydi.

Demak, integral ostidagi (17.3.4) funksiya uchun

$$f_p(x) = e^{-x} x^{p-1} \leq e^{-x} (x^{a-1} + x^{b-1}) = f_a(x) + f_b(x)$$

baho o'rinli.

O'ng tarafdagi funksiya p ga bog'liq emas va $0 < x < \infty$ soha bo'yicha integrallanuvchi. Shunday ekan, (17.3.2) integralning tekis yaqinlashishi Veyershtress alomatidan kelib chiqadi (17.2.1 - teoremaga qarang).



17.3.3 - tasdiq. Eylerning gamma-funksiyasi $p > 0$ yarim to'g'ri chiziqda cheksiz differensiallanuvchidir.

Isbot. Integral ostidagi (17.3.4) funksiya hosilasi

$$\frac{\partial f(x, p)}{\partial p} = e^{-x} x^{p-1} \ln x$$

ga teng.

Ravshanki, (17.3.5) tengsizlikka ko'ra, ixtiyoriy $0 < a < b$ lar uchun $a \leq p \leq b$ kesmada tekis ravishda

$$\left| \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \right| \leq e^{-x} |\ln x| (x^{a-1} + x^{b-1}), \quad x > 0,$$

baho o'rinli.

Bahoning o'ng tarafdagi funksiya p parametriga bog'liq emas va xosmas ma'noda $x > 0$ yarim to'g'ri chiziqda integrallanuvchi. Shuning uchun, bu baho va Veyershtress alomatiga ko'ra,

$$\Gamma'(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x \, dx \quad (17.3.6)$$

tenglikning o'ng tarafidagi integral p parametr bo'yicha $a \leq p \leq b$ kesmada tekis yaqinlashadi.

Demak, 17.2.6 - teoreмага asosan, formal ravishda differensiallab olingan (17.3.6) tenglik aslida ham o'rinlidir.

Yuqoridagi mulohazalarni so'zma-so'z qaytarib, $p > 0$ da gamma-funksiyaning m -tartibli hosilasi uchun

$$\Gamma^{(m)}(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} (\ln x)^m dx \quad (17.3.7)$$

tenglikni olamiz. Bunda integral p parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashadi.

■

17.3.4 - tasdiq. *Eylerning gamma-funksiyasi har bir $p > 0$ da*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (17.3.8)$$

rekurrent munosabatni qanoatlantiradi.

Isbot bo'laklab integrallash formulasidan kelib chiqadi:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = -e^{-x} x^p \Big|_{x=0}^{x=\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Natija. *Istalgan natural n uchun*

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (17.3.9)$$

tenglik o'rinli.

$\Gamma(1) = 1$ bo'lgani sababli, agar $0! = 1$ desak, bu tenglik $n = 0$ da ham o'rinli bo'ladi. Bu 0 ning faktorialini 1 ga teng deb kelishish to'g'ri ekanligiga yana bir sababdir.

2⁰. Gamma-funksiyaning grafigini o'rganish.

Eslatib o'tamiz, gamma-funksiya (17.3.2) formula yordamida $p > 0$ yarim to'g'ri chiziqda aniqlangan.

1) Bevosita (17.3.2) ta'rifdan gamma-funksiyaning qat'iy musbat ekani kelib chiqadi:

$$\text{barcha } p > 0 \text{ larda } \Gamma(p) > 0.$$

Demak, gamma-funksiya nolga aylanmaydi.

2) Agar $m = 2$ desak, (17.3.7) tenglikdan $\Gamma''(p) > 0$ kelib chiqadi. Shuning uchun gamma-funksiya grafigining qavariqligi past-ga qaragan.

3) (17.3.8) munosabatga ko'ra, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Bundan chiqdi, Roll teoremasiga ko'ra (4.4.1 - teoreмага qarang), $1 < p < 2$ intervalda shunday p^* nuqta topiladiki, u uchun

$$\Gamma'(p^*) = 0, \quad 1 < p^* < 2.$$

4) $\Gamma''(p) > 0$ tengsizlikka ko'ra, birinchi hosila o'suvchi funksiyadir. Demak,

$$0 < p < p^* \text{ da } \Gamma'(p) < 0 \text{ va } p > p^* \text{ da } \Gamma'(p) > 0.$$

Bundan chiqdi, gamma-funksiya $0 < p < p^*$ intervalda qat'iy kamayadi va $p > p^*$ yarim to'g'ri chiziqda qat'iy o'sadi.

5) p^* nuqta gamma-funksiyaning minimum nuqtasi bo'lib, bu nuqtada

$$0 < \Gamma(p^*) < 1.$$

6) Uzluksizlikka ko'ra, $p \rightarrow 0$ da $\Gamma(p+1) = 1 + o(1)$. Demak,

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \cdot [1 + o(1)] \rightarrow +\infty, \quad p \rightarrow 0 + 0.$$

Shunday ekan, ordinatalar o'qi gamma-funksiya grafigiga vertikal asimptota bo'ladi.

7) (17.3.7) rekurrent formuladan, $t \geq 1$ da

$$\Gamma(t+2) = (t+1)\Gamma(t+1) = (t+1)t\Gamma(t) \geq (t+1)t\Gamma(1) = (t+1)t$$

tenglik kelib chiqadi. Agar $p = t + 2$ desak, bundan $p \geq 3$ lar uchun

$$\Gamma(p) \geq (p-1)(p-2)$$

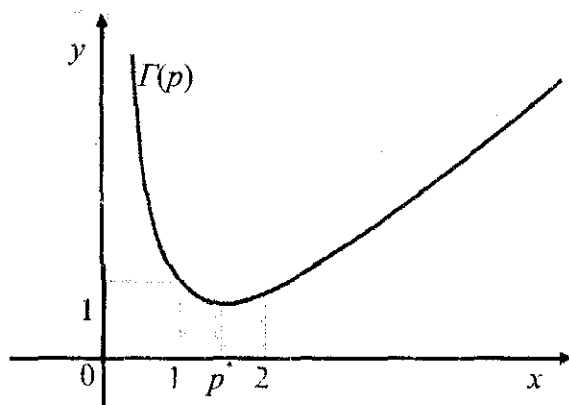
bahoni olamiz.

Ravshanki, bu bahodan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \Gamma(p) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(p)}{p} = +\infty.$$

Demak, gamma-funksiya grafigi og'ma asimptotaga ega bo'lmas ekan.

Gamma-funksiya grafigining eskizi 17.4 - rasinda keltirilgan.



17.4-rasm

3⁰. Matematik tahlilda keng foydalaniladigan ko'plab o'zgarmas kattaliklar gamma-funksiya orqali ifodalanadi. Masalan, (13.8.18) formula bilan kiritilgan kattalikni, ya'ni

$$\omega_n = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

sonni qaraylik.

Bu ω_n kattalik $\mathbb{R}^n$ fazodagi radiusi 1 ga teng $(n-1)$ o'lchovli sfera sirtining yuzasi bilan ustma-ust tushadi.

Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki, $\omega_2 = 2\pi$ va $\omega_3 = 4\pi$. Gamma-funksiya yordamida ixtiyoriy o'lchovli fazodagi birlik sfera sirtining yuzasi uchun formula olishimiz mumkin.

Buning uchun (14.1.13) formuladan, ya'ni

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \pi^{n/2} \quad (17.3.10)$$

tenglikdan foydalanamiz.

Chap tarafdagi xosmas integralni, $\mathbb{R}^n$ fazoni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligi sifatida

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}$$

sharlarni olib, hisoblaymiz.

Sferik koordinatalar sistemasiga o'tib, (13.8.17) formuladan foydalansak,

$$\int_{\Omega_k} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \omega_n \int_0^k e^{-r^2} r^{n-1} dr$$

tenglikni olamiz.

O'ng taraf $k \rightarrow \infty$ da quyidagi xosmas integralga intiladi:

$$\omega_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Demak,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Bu tenglik va (17.3.10) ga ko'ra,

$$\frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{n/2}.$$

Bundan chiqdi,

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (17.3.11)$$

Eslatma. (17.3.11) tenglikdan $n = 3$ da

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\pi^{3/2}}{\omega_3}$$

tenglikni olamiz. Lekin, $\omega_3 = 4\pi$ bo'lgani uchun,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(17.3.8) munosabatga ko'ra, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Shunday ekan, oxirgi tenglikdan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (17.3.12)$$

ko'rinishdagi muhim formula kelib chiqadi.

2. Eyler beta-funksiyasining asosiy xossalari.

17.3.5 - tasdiq. Eyler beta-funksiyasi

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (17.3.13)$$

tenglik bilan barcha $p > 0$ va $q > 0$ larda aniqlangan.

Isbot. (17.3.13) integralni quyidagi

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

ikki integral yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz.

Ravshanki, bu tenglikning o'ng tarafidagi birinchi integral ostidagi funksiya faqat $x = 0$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu integral $p > 0$ da barcha haqiqiy q lar uchun yaqinlashadi.

Xuddi shu kabi, ikkinchi integral $x = 1$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lib, $q > 0$ da barcha haqiqiy p lar uchun yaqinlashadi.

Demak, beta-funksiya (17.4.1) tenglik bilan barcha $p > 0$ va $q > 0$ lar uchun aniqlangan.



(17.3.13) integralda o'zgaruvchilarni almashtirish natijasida hosil bo'ladigan, Euler beta-funksiyasining boshqa ko'rinishlari ham tadbiqlarda ko'p uchraydi. Shunday ko'rinishlardan birini $x = \sin^2 t$ almashtirish bajarib olish mumkin:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cdot \cos^{2q-1} t dt. \quad (17.3.14)$$

Ba'zan beta-funksiyani birinchi tur xosmas integral ko'rinishida yozib olish qulay bo'ladi. Buning uchun $(0, 1)$ integrallash intervalini $(0, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziqqa o'tkazadigan almashtirishdan, masalan, $x = \frac{1}{1+t}$ almashtirishdan foydalaniladi. U holda,

$$dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}, \quad 1-x = \frac{t}{1+t}.$$

Natijada, beta-funksiya uchun barcha $p > 0$ va $q > 0$ larda o'rinli bo'lgan

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{q-1} dt}{(1+t)^{p+q}} \quad (17.3.15)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Biz beta-funksiyaning xossalarini batafsil o'rganish o'rniga, quyida keltirilgan klassik formula yordamida, uni yuqorida o'rganilgan Eyler-ning gamma-funksiyasiga keltiramiz.

17.3.1 - teorema. Har qanday $p > 0$ va $q > 0$ lar uchun

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (17.3.16)$$

ayniyat o'rinli.

Isbot. Ikki o'zgaruvchining

$$F(x, t) = t^{q-1} x^{p+q-1} e^{-(1+t)x}$$

funksiyasini qaraylik.

(17.3.4) belgilashlardan foydalanib, uni

$$F(x, t) = x f_p(x) \cdot f_q(tx) = x [e^{-x} x^{p-1}] \cdot [e^{-tx} (tx)^{q-1}]$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(17.2.26) formulaga ko'ra,

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} F(x, t) dt = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} F(x, t) dx. \quad (17.3.17)$$

Bu tenglikning chap tarafidagi integralni, ichki integralda $y = tx$ almashtirish bajarib, hisoblaymiz:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-tx} (tx)^{q-1} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y} y^{q-1} dy = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q).$$

Endi (17.3.17) ning o'ng tomonidagi integralni, ichki integralda $y = (1+t)x$ almashtirish bajarib, so'ngra (17.3.15) formulani qo'llab hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} t^{q-1} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t)x} x^{p+q-1} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{q-1} dt}{(1+t)^{p+q}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{p+q-1} dy = B(p, q) \cdot \Gamma(p+q). \end{aligned}$$

Bundan, (17.3.17) formulaga ko'ra, talab qilingan (17.3.16) tenglik kelib chiqadi.

■

(17.3.16) formula yordamida Eyler beta-funksiyasining uzluksiz va differensiallanuvchi ekanligi haqida xulosa qilish va boshqa turli xossalarni o'rnatish mumkin. Masalan, bevosita o'sha formuladan beta-funksiyaning simmetrikligi kelib chiqadi:

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Yana shu formula orqali turli rekurrent munosabatlarni keltirib chiqarish mumkin. Masalan, (17.3.16) va (17.3.8) formulalarni qo'llab,

$$B(p+1, q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q} B(p, q)$$

munosabatni olamiz. Demak, istalgan $p > 0$ va $q > 0$ lar uchun

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$$

tenglik o'rinli.

(17.3.16) formula yordamida Eyler funksiyalarining ba'zi nuqtalardagi qiymatini ham hisoblash mumkin. Masalan, shu formulaga ko'ra,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2 + 1/2)} = [\Gamma(1/2)]^2.$$

Boshqa tarafdin, (17.3.14) formulaga asosan,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} dt = \pi.$$

Demak,

$$[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$$

va yana (17.3.12) tenglikka keldik:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

17.4-§. Parametrga bog'liq integrallarni asimptotik hisoblash usullari

1. Turli matematik masalalarni yechishda yechim uchun aniq formulaningina emas, balki bu yechimga yetarlicha yaqin bo'lgan taqribiy yechimni ham bilish muhimdir.

Masalan, n ta jismni joyini o'zgartirish va biror mezonga ko'ra, eng yaxshi o'zgartirishni topish masalasini qaraylik. Aytaylik, kompyuter har bir o'zgartirish mezonga mos ekanini 1 mikrosekundda baholasin, ya'ni bir sekundda 1 million baholashni amalga oshirsin. Ma'lumki, n ta jismni $n!$ ta usulda joyini o'zgartirish mumkin. 10

ta jism bo'lganda bu masalani yechish uchun qancha vaqt ketadi? 20 ta bo'lgandachi? 100 ta bo'lgandachi?

Ravshanki,

$$10! = 3\,628\,800 \simeq 3,6 \cdot 10^6.$$

Demak, 10 ta jism uchun eng yaxshi o'zgartirishni kompyuter 4 sekunddan kam vaqtda topar ekan.

Yana oson hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \simeq 2,4 \cdot 10^{18}.$$

Bu hol uchun kompyuter $2,4 \cdot 10^{12}$ sekund yoki 77 000 yilga yaqin ishlashi kerak ekan.

100! ga kelsak, bu sonni oddiy usulda hisoblash ancha murakkab masaladir. Ammo, asimptotik usullardan foydalansak, bu masala ancha soddalashadi.

2. Parametrga bog'liq integral asimptotikasini topishning eng kuchli usullaridan birini P. Laplas taklif qilgan. Biz *Laplas usulining* eng sodda holini, ya'ni

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt \quad (17.4.1)$$

ko'rinishdagi integralning $\lambda \rightarrow +\infty$ dagi asimptotikasini topish uchun ishlatiladigan holini keltiranz (biz $a = -\infty$ yoki $b = +\infty$ hollarni istisno qilmaymiz).

Agar $g''(t) > 0$ bo'lib, (a, b) interval ichida g minimumga erisha, u holda (17.4.1) integralda o'zgaruvchini shunday almashtirish mum-kinki, bunda integral

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx \quad (17.4.2)$$

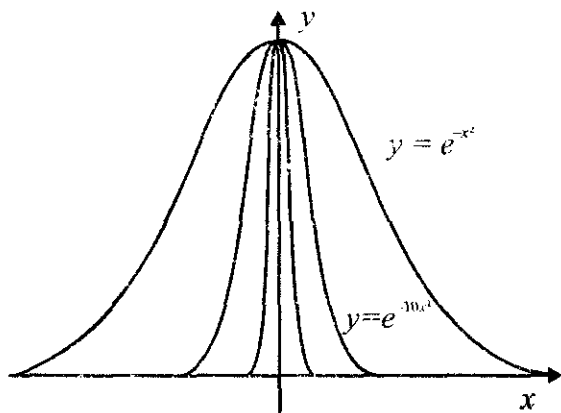
ko'rinishga keladi (ba'zan asimptotika olishning aynan shu qismini eng ko'p mehnat talab qiladi).

Faraz qilaylik, $f(x)$ shunday funksiya bo'lsinki, quyidagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |f(x)| dx < +\infty \quad (17.4.3)$$

xosmas integral yaqinlashsin.

E'tibor bering, (17.4.2) integral ostidagi ifodada eksponenta $x = 0$ nuqtada 1 ga teng bo'lib, boshqa nuqtalarda 1 dan qat'iy kichik. Shuning uchun, $\lambda \rightarrow +\infty$ da integral ostidagi ifoda noldan tashqari barcha nuqtalarda nolga intiladi (17.5 - rasm). Ravshanki, bunda (17.4.2) integral ham nolga intiladi va bizning maqsadimiz mana shu intilish tartibini baholashdan iborat.



17.5-rasm

Laplas usuli quyidagi g'oyaga asoslangan: (17.4.2) integralga asosiy qiymatni $x = 0$ nuqtaning istalgancha kichik atrofi bo'yicha olingan integral beradi va bu atrofda esa, integral asimptotikasini, f funksiyani uning Teylor qatori bilan almashtirib, topish mumkin.

Masalan, $f(x) \equiv 1$ bo'lsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad (17.4.4)$$

ya'ni integral parametr kvadrat ildiziga teskari proporsional ravishda nolga intiladi. Xuddi shu natijani $\mathbb{R}$ to'g'ri chiziqli bo'yicha emas, balki istalgancha kichik $(-\delta, \delta)$ interval bo'yicha integrallaganda ham olamiz; integralni bunday almashtirishdagi xato eksponentsial kichik bo'ladi.

Laplas usulini qo'llash uchun (17.4.2) integral ostidagi funksiya-dan faqat koordinatalar boshining biror atrofida silliqlik talab qilinadi, boshqa nuqtalarda esa, funksiya ixtiyoriy lokal integrallanuvchi bo'lib, (17.4.3) shartni qanoatlantirishi yetarli.

Biz (17.4.2) integralga asosiy qiymatni $x = 0$ nuqtaning istalgancha kichik atrofi berishi haqidagi sodda tasdiqni isbotlashdan boshlaymiz.

17.4.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, f funksiya (17.4.3) shartni qanoatlantirsin. U holda istalgan $\delta > 0$ uchun (17.4.2) integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx + O(1)e^{-\lambda \delta^2}, \quad \lambda \geq 1. \quad (17.4.5)$$

bahoni qanoatlantiradi.

Isbot. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$I_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx, \quad I_2(\lambda) = \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx.$$

U holda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx + I_1(\lambda) + I_2(\lambda). \quad (17.4.6)$$

Masalan, $I_2(\lambda)$ integralni baholaylik. Ravshanki, $\lambda \geq 1$ va $x \geq \delta$ lar uchun

$$e^{-\lambda x^2} = e^{-(\lambda-1)x^2} e^{-x^2} \leq e^{-(\lambda-1)\delta^2} e^{-x^2}$$

baho o'rinli.

Shuning uchun, (17.4.3) shartga ko'ra,

$$|I_2(\lambda)| \leq e^{-(\lambda-1)\delta^2} \int_{\delta}^{\infty} e^{-x^2} |f(x)| dx = C(\delta) e^{-\lambda\delta^2}.$$

$I_1(\lambda)$ integral ham xuddi shu usulda baholanadi. Bu baholarini 17.4.6) tenglikka qo'ysak, talab qilingan (17.4.5) munosabatga ega bo'lamiz.

■

Natija sifatida (17.4.4) tenglikning umumiyroq ko'rinishini olishimiz mumkin.

17.4.2 - tasdiq. Har qanday $\delta > 0$ va ixtiyoriy $k \geq 0$ uchun

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + O(e^{-\lambda\delta^2}) \quad (17.4.7)$$

baho o'rinli.

Isbot. Isbotlangan (17.4.5) bahoda $f(x) = x^{2k}$ desak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx + O(e^{-\lambda\delta^2}) \quad (17.4.8)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Agar chap tomondagi integralda integral ostidagi funksiya juftligidan foydalanib, $x = \sqrt{\frac{t}{\lambda}}$ almashtirish bajarsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{k+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1/2} dt = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\lambda^{k+1/2}}$$

tenglikni olamiz.

Bu ifodani (17.4.8) ning chap tarafidagi integral o'rniga qo'ysak, talab qilingan (17.4.7) bahoga kelamiz.

■

Navbatdagi tasdiq yuqoridagi mulohazalarning natijasidir.

17.4.3 - tasdiq. Faraz qilaylik, f funksiya (17.4.3) shartni qanoatlantirib, koordinatalar boshining biror atrofida $2m$ marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\lambda \rightarrow \infty$ da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda^{m+1/2}} \quad (17.4.9)$$

asimptotik tenglik o'rinli.

Isbot. Aytaylik, f funksiya $2m$ marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan interval $(-\delta, \delta)$ bo'lsin. Agar $e^{-\lambda \delta^2}$ eksponenta $\lambda \rightarrow +\infty$ da $\lambda^{-m-1/2}$ darajadan tezroq nolga intilishini hisobga olsak, 17.4.1 - tasdiqqa ko'ra, quyidagi

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda^{m+1/2}}, \quad (17.4.10)$$

formulani isbotlash yetarli.

Berilgan $f(x)$ funksiyani $(-\delta, \delta)$ intervalda Teylor formulasi bilan almashtiramiz:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{2m}).$$

Bu formulani (17.4.10) ning chap qismidagi integralga qo'yib, integral chegaralari simmetrik ekanini hisobga olsak, toq k larga mos

kelgan integrallar nolga aylanadi. Juft k larga mos kelgan integral-larga 17.4.2 - tasdiqni qo'llasak, talab qilingan (17.4.9) tenglikka ega bo'lamiz.

■

Natija. Koordinatalar boshining biror atrofida ikki marta uzluk-siz differensiallanuvchi f funksiya uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cdot \left[f(0) + \frac{O(1)}{\lambda} \right], \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (17.4.11)$$

asimptotik tenglik o'rinli.

3. Endi (17.4.1) integralni (17.4.2) ko'rinishga keltirish masalasi-ni qaraylik. Integrallash intervalini surib, ya'ni chiziqli almashtirish bajarib, doim $a < 0$ va $b > 0$ deyishimiz mumkin. Shunday ekan, yuqoridagi masala quyidagi ko'rinishga keladi: qanday shartlarda $g(t)$ funksiyani

$$g(t) = \varphi^2(t) \quad (17.4.12)$$

deb yozish mumkin. bu yerda $\varphi(t)$ funksiya

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(t) > 0, \quad a < t < b, \quad (17.4.13)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Haqiqatan, (17.4.13) shartga ko'ra, $x = \varphi(t)$ funksiya monoton o'sadi va $t = \psi(x)$ teskari funksiyaga ega, bunda teskari funksiya ham monoton o'sib, $\psi(0) = 0$ shartni qanoatlantiradi. U holda (17.4.1) integralda $t = \psi(x)$ almashtirish bajarsak, (17.4.12) tenglikka ko'ra,

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \int_a^b e^{-\lambda x^2} \psi'(x) dx \quad (17.4.14)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Endi (α, β) interval ichida $f(x) = \psi'(x)$ va intervaldan tashqarida $f(x) = 0$ desak,

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx \quad (17.4.15)$$

tenglikka kelamiz.

Shunday qilib, biz (17.4.1) integralni (17.4.2) ko'rinishga keltirdik.

E'tibor bering, 3 - bobda isbotlangan 3.6.9 - teorema asosan, har qanday elementar funksiya o'zi aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir. Ammo, differensiallanuvchanlik haqida bunday teorema yo'q va bo'lishi ham mumkin emas. Masalan, $\varphi(t) = \sqrt{t^2} = |t|$ murakkab funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida uzluksiz bo'lib, lekin faqat $t \neq 0$ nuqtalardagina differensiallanuvchidir. Bunga sabab shundaki, $\sqrt{x}$ funksiya faqat $x > 0$ larda differensiallanuvchidir ($x \geq 0$ da uzluksiz bo'lishiga qaramasdan).

Demak, agar $g(t)$ differensiallanuvchi funksiya qat'iy musbat bo'lsa, $\varphi(t) = \sqrt{g(t)}$ murakkab funksiya ham differensiallanuvchi va musbat bo'ladi. Bordini $g(t)$ funksiya manfiy bo'lsa, u holda $\varphi(t) = \sqrt{g(t)}$ funksiya differensiallanuvchi bo'lmazligi ham mumkin. Bunda silliqlik g funksiya nolga aylangan nuqtalarda yo'qolishi mumkin.

Lekin, shunga qaramasdan, har qanday cheksiz differensiallanuvchi nomanfiy funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi funksiyaning kvadrati (manfiy bo'lishi shart bo'lmagan) ko'rinishda yozish mumkin. Qulaylik uchun shu paragrafning oxirigacha, agar funksiya biror intervalda cheksiz differensiallanuvchi bo'lsa, biz uni shu intervalda *silliqlik* deyimiz.

Aytaylik, $g(t)$ funksiya nolning biror atrofida silliq bo'lib, shu atrofning noldan boshqa nuqtalarida musbat bo'lsin. Bundan tashqari, nol nuqtada

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g''(0) > 0 \quad (17.4.16)$$

shartlar bajarilsin.

Qayd etilgan atrofda $g(t)$ funksiyani, integral ko'rinishdagi qoldiq had bilan, Teylor formulasi bo'yicha yoyamiz (6.5.4 - teoremaga qarang):

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \int_0^t (t-s)g''(s) ds.$$

(17.4.16) shartni hisobga olib va $s = yt$ almashtirish bajarib, bu tenglikni biz

$$g(t) = t^2 \int_0^1 (1-y)g''(ty) dy$$

deb yozishimiz mumkin.

Endi

$$h(t) = \int_0^1 (1-y)g''(ty) dy,$$

funksiyani kiritaylik; 17.1.3 - teoremaga asosan, bu funksiya nolning atrofida silliqdir. Ravshanki,

$$g(t) = t^2 h(t).$$

Ikkinchi hosila uzluksiz bo'lgani uchun, yuqoridagi $g''(0) > 0$ tengsizlik nolning biror atrofida ham o'rinli bo'ladi, ya'ni $g''(t) > 0$. Demak, $h(t)$ funksiya nolning atrofida nafaqat silliq, balki qat'iy musbat ham bo'lar ekan. Bundan chiqdi, $\sqrt{h(t)}$ funksiya va demak,

$$\varphi(t) = t\sqrt{h(t)}$$

funksiya ham nolning atrofida cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, (17.4.12) tenglik bajariladi.

Shunday qilib, (17.4.16) shart ostida, g funksiyani silliq funksiya kvadrati ko'rinishida yozish mumkin ekan. Bunda

$$\varphi(t) = (\text{sign } t) \sqrt{g(t)}$$

ekanini ko'rish qiyin emas.

Yuqoridagi mulohazalarni umumlashtirib, biz quyidagi asosiy teorema kelamiz.

17.4.1 - teorema. Faraz qilaylik, $g(t)$ funksiya 0 nuqtani o'z ichiga olgan (a, b) intervalda ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lib, (17.4.16) shartlarni qanoatlantirsin. Bundan tashqari, $t = 0$ nuqtaning biror atrofida bu funksiya cheksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. U holda istalgan natural m uchun $\lambda \rightarrow \infty$ da quyidagi

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\psi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda^{m+1/2}} \quad (17.4.17)$$

asimptotik tenglik bajariladi. Bu tenglikda $\psi(x)$ funksiya $\varphi^2(t) = g(t)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\varphi(t)$ funksiyaga teskari funksiyadir.

Isbot 17.4.3 - tasdiqqa ko'ra, bevosita (17.4.14) va (17.4.15) tengliklardan kelib chiqadi.

1 - eslatma. 17.4.1 - teorema shartlarida $g(t)$ funksiyaning cheksiz differentsiallanuvchi bo'lishini talab qilish shart emas. Buning o'rniga uning biror chekli sondagi hosilaga ega ekanini talab qilish yetarli, lekin bunda (17.4.17) formuladagi hadlar soni hosilalar soniga bog'liq bo'ladi.

2 - eslatma. $x = \varphi(t)$ funksiyaga teskari, ya'ni

$$g[\psi(x)] = x^2 \quad (17.4.18)$$

tenglamaning yechimi bo'lgan, $t = \psi(x)$ funksiya hosilalarining noldagi qiymatini hisoblash uchun yuqoridagi tenglamani yechish shart emas. Biz buni, masalan, (17.4.7) asimptotikaning birinchi hadiga kirgan $\psi'(0)$ qiymatni hisoblashda ko'rsatamiz.

Buning uchun $t = \psi(x)$ deb, (17.4.18) ayniyatni x bo'yicha ikki marta differentsiallaymiz. Birinchi differentsiallashdan so'ng

$$g'(t) \cdot \psi'(x) = 2x$$

tenglikni va ikkinchi differensiallash natijasida esa,

$$g''(t) \cdot [\psi'(x)]^2 + g'(t) \cdot \psi''(x) = 2$$

tenglikni olamiz.

Ravshanki, $x = 0$ da $t = \psi(0) = 0$ tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, agar $g'(0) = 0$ ekanini hisobga olsak, oxirgi ayniyatdan

$$g''(0) \cdot [\psi'(0)]^2 = 2$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{g''(0)}}. \quad (17.4.19)$$

Shunday ekan, 17.4.1 - teoremdan navbatdagi tasdiqling to'g'riligi kelib chiqadi.

17.4.4 - tasdiq. 17.4.1 - teorema shartlari ostida

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{g''(0) \cdot \lambda}} \left[1 + \frac{O(1)}{\lambda} \right] \quad (17.4.20)$$

asimptotik tenglik o'rinli.

Haqiqatan, (17.4.17) formulada $m = 1$ deb, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ekanini hisobga olish yetarli.

Xuddi shu usulda (17.4.17) asimptotik yoyilmadagi boshqa hadlarni ham topish mumkin.

Eslatma. Laplas usulini yanada umumiyroq bo'lgan quyidagi

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} f(t) dt$$

integrallarga ham qo'llash mumkin.

Bunda asosiy mulohazalar xuddi (17.4.1) integralni o'rganishdagidek bo'lib qolaveradi.

3. Laplas usulini

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx \quad (17.4.21)$$

Eyler gamma-funksiyasini p parametrning katta qiymatlaridagi asimptotikasini o'rganishga qo'llaymiz.

Agar

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-p(y-1)} y^p dy = \int_0^{\infty} e^{-p(y-1-\ln y)} dy$$

deb belgilab, $x = py$ almashtirish bajarsak,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = p^{p+1} \int_0^{\infty} e^{-py} y^p dy = p^{p+1} e^{-p} I(p) \quad (17.4.22)$$

ifodani olamiz.

Endi $I(p)$ integralda $t = y - 1$ almashtirish bajarsak, bu integral

$$I(p) = \int_{-1}^{\infty} e^{-pg(t)} dt$$

ko'rinishga keladi, bu yerda

$$g(t) = t - \ln(1+t). \quad (17.4.23)$$

Ravshanki,

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t}, \quad g''(t) = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Bundan chiqdi, g funksiya 17.4.1 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, 17.4.4 - tasdiqqa ko'ra,

$$I(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left[1 + \frac{O(1)}{p} \right].$$

Bunda biz $g''(0) = 1$ ekanini hisobga oldik. Nihoyat, topilgan asimptotik bahoni (17.4.22) ning o'ng tarafiga qo'yib, (17.4.21) ta'rifni hisobga olsak,

$$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p \left[1 + \frac{O(1)}{p}\right] \quad (17.4.24)$$

asimptotik formulaga ega bo'lamiz.

Parametr p natural son bo'lganda bu formula *Stirling formulasi* deb ataladi va odatda,

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (17.4.25)$$

ko'rinishda yoziladi.

Eslatma. Agar (17.4.20) formula o'rniga (17.4.17) formulani qo'llasak, faktorialning yetarlicha ko'p hadli asimptotik yoyilmasini olamiz. Masalan, beshta hadli yoyilmasi

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} - \frac{571}{2\,488\,320n^4} + \frac{O(1)}{n^5}\right]$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ishorasi takrorlanadigan qatorlar kabi, bu asimptotik formula-ning xatoligi ham oxirgi topilgan hadning absolyut qiymatidan oshmaydi.

17.4.1 - misol. O'nlik sanoq sistemasida $N = 100!$ sonini taqriban hisoblang.

Buning uchun (17.4.25) formulani qo'llash yetarli:

$$100! \simeq \sqrt{2\pi \cdot 100} \left(\frac{100}{e}\right)^{100} = 10\sqrt{2\pi} 10^{100(\lg 100 - \lg e)} \simeq 9 \cdot 10^{157}.$$

Shuni aytish kerakki, tabiatda bunday katta son bilan xarakterlanadigan ob'ekt topish qiyin.

17.5-§. Parametrga bog'liq karrali integrallar

1. Ta'rif va asosiy xossalari. Ixtiyoriy ikki $G \subset \mathbb{R}^m$ va $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to'plamlarni hamda $f: G \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani qaraylik. Bu degani, $f(x, y)$ ikki ko'p o'lchovli o'zgaruvchilarning, ya'ni m o'lchovli x ning va n o'lchovli y ning funksiyasidir.

Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to'plam Jordan ma'nosida o'lchovli (ya'ni, $n = 2$ da kvadratlanuvchi va $n \geq 3$ da kublanuvchi) bo'lsin. Bundan tashqari, $f(x, y)$ har bir tayinlangan $x \in G$ da y ning funksiyasi sifatida Ω to'plamda integrallanuvchi bo'lsin. Bu holda

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy \quad (17.5.1)$$

integral $x \in G$ parametrga bog'liq karrali integral deb ataladi.

Quyida keltirilgan tasdiqlarda biz G va Ω to'plamlarni soha deb, ya'ni ochiq bog'lamli to'plam deb hisoblaymiz. Jordan bo'yicha o'lchovli ekanidan ularning chegaralangani kelib chiqadi. Eslatib o'tamiz, $\overline{G}$ siravol G to'plamning yopig'ini anglatar edi.

Parametrga bog'liq karrali integrallar ham xuddi bir karrali integrallar kabi xossalarga ega.

17.5.1 - tasdiq. *Istalgan $f \in C(\overline{G} \times \overline{\Omega})$ funksiya uchun (17.5.1) integral $\overline{G}$ yopiq to'plamda uzluksiz funksiyadir.*

17.5.2 - tasdiq. *Agar G kvadratlanuvchi soha bo'lsa, istalgan $f \in C(\overline{G} \times \overline{\Omega})$ funksiya uchun (17.5.1) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiya G to'plamda integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_G \Phi(x) dx = \int_{\Omega} dy \int_G f(x, y) dx \quad (17.5.2)$$

tenglik bajariladi.

17.5.3 - tasdiq. Agar $f \in C(\bar{G} \times \bar{\Omega})$ va har bir $1 \leq j \leq m$ uchun $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\bar{G} \times \bar{\Omega})$ bo'lsa, u holda (17.5.1) integral G sohada x_j o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_j} dy \quad (17.5.3)$$

tenglik bajariladi.

Isbot xuddi mos 17.1.1 - 17.1.3 - teoremlar isboti kabidir. Masalan, 17.5.3 - tasdiqni isbotlaylik.

Buning uchun $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ deb belgilash kiritamiz. U holda, $x = (\tilde{x}, x_m) \in G$. Endi $\tilde{x}$ ni tayinlab, shunday a son tanlaymizki, bunda $(\tilde{x}, a)$ va $(\tilde{x}, x_m)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma butunligicha G sohada yotsin.

Agar

$$\psi(x_m) = \int_{\Omega} \frac{\partial f(\tilde{x}, x_m, y)}{\partial x_m} dy \quad (17.5.4)$$

bir o'zgaruvchili funksiyani kiritsak, u holda bu funksiya integrali uchun, 17.5.2 - tasdiqni qo'llab va Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib,

$$\begin{aligned} \int_a^{x_m} \psi(t) dt &= \int_{\Omega} dy \int_a^{x_m} \frac{\partial f(\tilde{x}, t, y)}{\partial t} dt = \\ &= \int_{\Omega} [f(\tilde{x}, x_m, y) - f(\tilde{x}, a, y)] dy = \Phi(\tilde{x}, x_m) - \Phi(\tilde{x}, a) \end{aligned}$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikning ikki tarafini x_m bo'yicha differensiallasak,

$$\psi(x_m) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_m}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan tenglikni (17.5.4) bilan taqqoslab, talab qilingan (17.5.3) formulani $j = m$ uchun olamiz. Boshqa j lar uchun ham isbot xuddi shu kabi bo'ladi.

2. Parametrga bog'liq karrali xosmas integrallar.

(17.5.1) ko'rinishdagi karrali xosmas integrallar xuddi bir karrali parametrga bog'liq integrallar kabi o'rganiladi. Bunda quyidagi ikki holni alohida qarash kerak: 1) integral ostidagi funksiya maxsusliklar to'plami parametrga bog'liq emas; 2) bu to'plam parametrga bog'liq.

Birinci holda (17.5.1) xosmas integral mahkamlangan maxsuslikka ega bo'lgan integral deb ataladi. Ushbu bandda aynan shunday xosmas integrallarni o'rganamiz.

Mahkamlangan maxsuslikka ega (17.5.1) xosmas integralni, parametrga bog'liqmas ravishda tanlangan, qamrab oluvchi sohalar bo'yicha integrallar bilan yaqinlashtirish mumkin. Biz integral ostidagi funksiya maxsusliklari Ω sohasining chegarasida yotadi deb faraz qilamiz. Masalan, agar ψ funksiyaning maxsusligi bo'lmasa,

$$\int_{|y|<1} \frac{\psi(x, y)}{|y|^{n-1} \sqrt{1-|y|^2}} \quad (17.5.5)$$

xosmas integral uchun Ω soha sifatida, tabiiyki,

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < |y| < 1\}$$

to'plamni olish kerak.

Bu sohaning chegarasi radiusi 1 va markazi $y = 0$ nuqtada bo'lgan sfera va $y = 0$ nuqtaning o'zidan iborat.

Ravshanki,

$$\Omega_k = \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |y| < 1 - \frac{1}{k}\}$$

to'plamlar Ω ni qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalar ketma-ketligini tashkil qiladi.

Yana bir misol sifatida

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x, y) dy}{|y - a|^{n-1}} \quad (17.5.6)$$

integralni olishimiz mumkin, bu yerda a orqali $\mathbb{R}^n$ fazosining ixtiyoriy tayinlangan nuqtasi belgilangan. (17.5.6) integral uchun Ω soha sifatida $\mathbb{R}^n$ fazodan a nuqtani chiqarib tashlash natijasida hosil bo'lgan to'plamni olish mumkin, ya'ni

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y \neq a\}.$$

Ravshanki,

$$\Omega_k = \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |y - a| < k\}$$

sohalar x parametrga bog'liq bo'lmay, Ω ni qamrab oluvchi ketma-ketlikni tashkil qiladi.

Har bir (17.5.5) va (17.5.6) integral mahkamlangan maxsuslikka ega va x parametrga bog'liq xosmas integraldir. Shuning uchun integrallash sohasini qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini x parametrga bog'liqmas ravishda tanlash mumkin. (E'tibor bering, agar (17.5.6) integralda a ni parametr deb hisoblasak, u holda Ω_k sohalarini a ga bog'liq qilib tanlashga to'g'ri kelar edi).

Faraz qilaylik, (17.5.1) xosmas integral bo'lib, $x \in G$ parametrining har bir qiymatida yaqinlashsin. Bundan tashqari, Ω_k sohalar ketma-ketligi Ω ni qamrab olsin. Quyidagi

$$\Phi_k(x) = \int_{\Omega_k} f(x, y) dy \quad (17.5.7)$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz.

Agar (17.5.7) ko'rinishdagi ixtiyoriy $\Phi_k(x)$ ketma-ketlik $\Phi(x)$ ga G da tekis yaqinlashsa, u holda

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy$$

xosmas integralni $x \in G$ parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi deyimiz.

Xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, karrali xosmas integrallar uchun ham Veyershtrassning tekis yaqinlashish alomati o'rinli: agar integral ostidagi $f(x, y)$ funksiya yuqoridan x ga bog'liqmas $g(y)$ funksiya bilan baholansa, u holda g dan olingan integral yaqinlashishidan f dan olingan integralning tekis yaqinlashishi kelib chiqardi. Masalan, agar ψ funksiya biror o'zgarmas bilan chegaralangan bo'lsa, u holda (17.5.5) integral x bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Parametrغا bog'liq (17.5.1) ko'rinishdagi tekis yaqinlashuvchi karrali xosmas integrallar uchun ham bir o'zgaruvchili holda isbotlangan kabi tasdiqlar o'rinli. Xususan,

1) agar integral ostidagi $f(x, y)$ funksiya $G \times \Omega$ da uzluksiz bo'lsa, u holda tekis yaqinlashuvchi (17.5.1) integral G da uzluksiz funksiya bo'ladi;

2) agar (17.5.1) integral barcha $x \in G$ larda yaqinlashsa hamda integral ostidagi funksiya $G \times \Omega$ da uzluksiz $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_j}$ hosilaga ega bo'lib, bu hosiladan olingan integral tekis yaqinlashsa, u holda integral ostida differensiallash formulasi o'rinli:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_j} dy.$$

17.5.1 - misol. Quyidagi

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x, y) dy}{|y|^\lambda}, \quad \lambda < n. \quad (17.5.8)$$

integralni qaraymiz.

Aytaylik, $\psi(x, y)$ funksiya markazi koordinatalar boshida bo'lgan biror shardan tashqarida nolga teng bo'lsin, ya'ni shunday $R > 0$ son topilsinki,

$$\psi(x, y) = 0, \quad |y| > R, \quad (17.5.9)$$

shart bajarilsin.

U holda integral, aslida, shu shar bo'yicha olinadi, ya'ni

$$u(x) = \int_{|y| \leq R} \frac{\psi(x, y) dy}{|y|^\lambda}.$$

Ravshanki, $g(y) = |y|^{-\lambda}$ funksiya $\lambda < n$ da shu shar bo'yicha integrallanuvchi. Shunday ekan, biz Veyershtress alomatini qo'llashimiz mumkin. Bu alomatga ko'ra:

1) agar ψ ikki o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi bo'lsa, u holda (17.5.8) integral uzluksiz funksiya bo'ladi;

2) agar ψ funksiya uzluksiz $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x_j} \frac{dy}{|y|^\lambda}, \quad \lambda < n,$$

tenglik bajariladi.

Eslatma. Agar $\psi(x, y)$ funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, (17.5.9) shartni qanoatlantirsa, u holda (17.5.8) integral ham parametrğa nisbatan cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, istalgan α multiindeks uchun (§12.2 ning 6 - bandini qarang)

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{D_x^\alpha \psi(x, y) dy}{|y|^\lambda}, \quad 0 < \lambda < n, \quad (17.5.10)$$

tenglik bajariladi.

3. Diagonalda maxsuslikka ega karrali xosmas integrallar.

Ushbu bandeda biz integral ostidagi funksiya parametrğa bog'liq to'plamda cheksizlikka aylanishi mumkin bo'lgan xosmas integrallarni qaraymiz. Bunday turdagi xosmas integrallardan eng ko'p ahamiyatga ega bo'lgani quyidagi

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y - x) \psi(y) dy \quad (17.5.11)$$

ko'rinishdagi integrallardir. Bu integralda $\psi(y)$ funksiya $\mathbb{R}^n$ fazoda aniqlangan va yetarlicha silliq bo'lib, $F(y)$ esa, faqat $y = 0$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lishi mumkin bo'lgan, $\mathbb{R}^n$ fazoda uzluksiz funksiya-dir. Bu degani, integral ostidagi funksiyaning maxsusligi $x = y$ «diagonalda» joylashgan. Parametr rolini $x \in \mathbb{R}^n$ o'zgaruvchi o'ynaydi.

Agar F funksiyanı tayinlab qo'ysak, (17.5.11) integral o'zi aniqlangan har bir $\psi(x)$ funksiyağa biror $u(x)$ funksiyanı mos qo'yadi. Bunday akslantirish *integral operator* va $F(y - x)$ funksiya esa, uning *yadrosi* deb ataladi. Yadronı biz lokal integrallanuvchi deb hisoblaymiz, ya'ni istalgan $R > 0$ uchun

$$\int_{|y| < R} |F(y)| dy = C_R < +\infty \quad (17.5.12)$$

xosmas integral yaqinlashadi dey-miz.

(17.5.11) integral operator ta'sir qiluvchi ψ funksiya-lar sifatida biror $R > 0$ (ψ ga bog'liq bo'lgan) o'zgarmas bilan

$$\psi(y) = 0, \quad |y| > R, \quad (17.5.13)$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiya-larnı olamiz.

Bu shartlardan (17.5.11) da integrallash, aslida, $\mathbb{R}^n$ fazosi bo'yicha emas, balki radiusi R va markazi koordinatalar bo'shida bo'lgan shar bo'yicha olinayotgani kelib chiqadi. Shunday ekan, (17.5.11) ikkinchi tur xosmas integral bo'lib, integral ostidagi funksiya maxsusligi $y = x$ nuqtada joylashgan. Misol sifatida, matematik fizikada muhim rol o'ynovchi,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(y)}{|x - y|^{n-2}} dy$$

integralni olishimiz mumkin.

(17.5.11) ko'rinishdagi xosmas integrallar quyidagi ajoyib xossaga ega: agar integral operator ta'sir qiluvchi $\psi(x)$ funksiya cheksiz

differensiallanuvchi bo'lsa, u holda, yadro silliq bo'lmasada, $u(x)$ funksiya ham cheksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, o'zgaruvchini almashtirib, (17.5.11) integralni

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) \psi(y+x) dy$$

deb yozishimiz mumkin.

Agar $\psi(x)$ funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda istalgan α multiindeks uchun, formal ravishda quyidagi

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) D^\alpha \psi(x+y) dy \quad (17.5.14)$$

tenglik o'rinli.

Agar F funksiya lokal integrallanuvchi ((17.5.12) shartga qarang) bo'lib, ψ funksiya (17.5.13) shartni qanoatlantirsa, u holda Veyershtass alomatiga ko'ra, (17.5.14) integrallar tekis yaqinlashadi. Bundan (17.5.14) formulalarning to'g'ri ekanligi va (17.5.11) integralning cheksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi. Teskari almashtirish bajarsak,

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y-x) D^\alpha \psi(y) dy \quad (17.5.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ba'zi muhim hollarda (17.5.11) integral operatori yadrosini «silliqlash», ya'ni uni diagonalning yetarlicha kichik atrofidan tashqarida u bilan ustma-ust tushuvchi silliq funksiya bilan almashtirish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Buning uchun $\mathbb{R}$ sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi bo'lgan shunday $\eta(t)$ funksiyani olamizki, u uchun $0 \leq \eta(t) \leq 1$ shart va

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } t \leq 1/2 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } t \geq 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (17.5.16)$$

tenglik bajarilsin (17.1.6 - misolni qarang).

Bu funksiya yordamida

$$F_k(x) = F(x) \cdot \eta(k|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (17.5.17)$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz.

$F_k(x)$ funksiyalar $|x| < 1/k$ shardan tashqarida $F(x)$ funksiya bilan ustma-ust tushib, $|x| \leq 1/(2k)$ da 0 ga teng. Ravshanki, $k \rightarrow \infty$ da har bir $x \neq 0$ nuqtada $F_k(x) \rightarrow F(x)$. Lekin, F funksiya nolning atrofida chegaralanmagan bo'lishi mumkinligi sababli, bu ketma-ketlik $F(x)$ ga tekis yaqinlasha olmaydi. Shunday bo'lsa-da, (17.5.17) ketma-ketlik F ga o'rtacha yaqinlashadi. Haqiqatan,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |F_k(x) - F(x)| dx &= \int_{|x| < \frac{1}{k}} |F(x)| \cdot [1 - \eta(k|x|)] dx \leq \\ &\leq \int_{|x| < \frac{1}{k}} |F(x)| dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Oxirgi integralning nolga intilishi F yadroning lokal integrallanuvchi ekanligidan kelib chiqadi ((17.5.12) shartga qarang).

Demak, (17.5.13) shartni qanoatlantiruvchi istalgan uzluksiz $\psi(x)$ funksiya uchun

$$u_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_k(x-y) \psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_k(y) \psi(x+y) dy \quad (17.5.18)$$

ketma-ketlik (17.5.11) integralga tekis yaqinlashadi. Aslida bundanda umumiyroq tasdiq o'rinni.

17.5.4 - tasdiq. Faraz qilaylik, α ixtiyoriy multiindeks bo'lsin. Agar (17.5.13) shartni qanoatlantiruvchi ψ funksiya uzluksiz $D^\alpha \psi(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda (17.5.18) ketma-ketlik uchun $x \in \mathbb{R}^n$ bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D^\alpha u_k(x) = D^\alpha u(x) \quad (17.5.19)$$

tenglik o'rinni.

Isbot. (17.5.18) ning o'ng tarafidagi ikkinchi integralni differensiallab,

$$D^\alpha u_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_k(y) D^\alpha \psi(x+y) dy$$

tenglikni olamiz.

$D^\alpha \psi(x)$ funksiya biror M_α o'zgarmas bilan chegaralangan bo'lgani sababli, bu tenglik va (17.5.14) dan talab qilingan munosabatni olamiz:

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_k(x) - D^\alpha u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |F_k(y) - F(y)| \cdot |D^\alpha \psi(x+y)| dy \leq \\ &\leq M_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |F_k(y) - F(y)| dy \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Bu tasdiqqa asosan, biz (17.5.11) xosmas integralni va uning hosilalarini silliq funksiyalardan oliugan integrallar bilan yaqinlashtirishimiz mumkin.

4. Potensial xilidagi integrallar. Quyidagi

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad 0 < \lambda < n, \quad (17.5.20)$$

ko'rinishdagi integrallar potensial xilidagi integrallar deyiladi.

Agar $n = 3$ va $\lambda = 1$ bo'lsa, yuqoridagi integral gravitatsiya nazariyasida *Nyuton* potensiali deb, elektr nazariyasida esa, *Kulon* potensiali deb ataladi. Bunda integral ostidagi ψ funksiyaga zichlik deyiladi.

Potensial xilidagi integrallarni $F(y) = |y|^{-\lambda}$ yadro bilan (17.5.11) ko'rinishda yozish mumkin, bunda, albatta, yadro lokal integrallar nuvchi bo'ladi, ya'ni (17.5.12) shartni qanoatlantiradi. Shunday ekan, yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, navbatdagi tasdiqni olamiz.

17.5.5 - tasdiq. Faraz qilaylik, α ixtiyoriy multiindeks bo'lsin. Agar ψ funksiya uzluksiz $D^\alpha \psi(x)$ hosilaga ega bo'lib, (17.5.13) shartni qanoatlantirsa, u holda potentsial xilidagi (17.5.20) integral ham α - tartibli hosilaga ega bo'lib,

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{D^\alpha \psi(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad 0 < \lambda < n. \quad (17.5.21)$$

tenglik bajariladi.

Isbot (17.5.15) formuladan kelib chiqadi.

E'tibor bering, umumiy (17.5.11) holdan farqli o'laroq, potentsial xilidagi integrallar yadrosi diagonalidan tashqarida cheksiz differensiallanuvchidir. Shu sababli, (17.5.20) integral silliqqligini ψ funksiyaga nisbatan kamroq shartlarda isbotlash mumkin.

Haqiqatan, bu holda biz

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^\lambda} = -\lambda \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{\lambda+2}}$$

tenglikdan foydalanishimiz mumkin.

Ravshanki, differensiallangan

$$F_j(x-y) = -\lambda \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{\lambda+2}}$$

yadro

$$|F_j(x-y)| \leq \frac{\lambda}{|x-y|^{\lambda+1}}$$

bahoni qanoatlantiradi.

Agar $\lambda + 1 < n$ bo'lsa, $F_j(y)$ funksiya lokal integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} F_j(x-y) \psi(y) dy$$

tenglikdan uzluksiz ψ zichlikka ega potentsiallarning barcha qisman hosilalari uzluksiz ekani kelib chiqadi. Bundan chiqdi, navbatdagi tasdiq o'rinli bo'lar ekan.

17.5.6 - tasdiq. Agar $\lambda < n-1$ bo'lsa, u holda (17.5.13) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz ψ funksiya uchun potentsial xilidagi (17.5.20) integral $\mathbb{R}^n$ fazoda uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lib,

$$\nabla u(x) = -\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x-y}{|x-y|^{\lambda+2}} \psi(y) dy$$

tenglik bajariladi.

Eslatma. $\lambda = n-1$ da bu tasdiq o'rinli emas, chunki, shunday uzluksiz ψ zichlik topiladiki, bunda (17.5.20) funksiya uzluksiz bo'lib, uzluksiz differensiallanuvchi bo'lmaydi.

5. Nyuton potentsiali. Yuqorida qayd etganimizdek,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(y)}{|x-y|} dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(x+y)}{|y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (17.5.22)$$

integral Nyuton potentsiali deb ataladi.

Bu potentsialga Laplas operatorining ta'siri natijasini topamiz, ya'ni

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

ifodani hisoblaymiz.

17.5.1 - teorema. (17.5.13) shartni qanoatlantiruvchi istalgan ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $\psi(x)$ zichlik uchun (17.5.22) Nyuton potentsiali

$$\Delta u(x) = -4\pi\psi(x) \quad (17.5.23)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Isbot. F yadroga yaqinlashuvchi

$$F_k(x) = F(x) \cdot \eta(k|x|) = \frac{\eta(k|x|)}{|x|}$$

funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz.

Bu yerda η (17.5.16) tenglik bilan aniqlangan silliq funksiyadir.

Endi silliqqlangan

$$u_k(x) = \int_{R^3} F_k(x-y) \psi(y) dy = \int_{R^3} F_k(y) \psi(x+y) dy \quad (17.5.24)$$

ketma-ketlikni qaraylik.

17.5.4 - tasdiqqa ko'ra, teoremanizning shartlari ostida

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u_k(x) = \Delta u(x)$$

munosabat o'rinli.

Demak, teoremani isbotlash uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u_k(x) = -4\pi\psi(x) \quad (17.5.25)$$

tenglikni ko'rsatish yetarli.

(17.5.24) dagi birinchi integralni parametr bo'yicha differensiallasak,

$$\Delta u_k(x) = \int_{R^3} \Delta F_k(x-y) \psi(y) dy = \int_{R^3} \Delta F_k(y) \psi(x+y) dy$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikni

$$\Delta u_k(x) = \psi(x) \int_{R^3} \Delta F_k(y) dy + \int_{R^3} \Delta F_k(y) [\psi(x+y) - \psi(x)] dy \quad (17.5.26)$$

ko'rinishda yozamiz.

Ravshanki, bunda

$$\Delta F_k(y) = k^2 \frac{\eta''(k|y|)}{|y|}.$$

Bu funksiya $|y| \leq 1/k$ shardan tashqarida nolga teng. Shuning uchun, $x = ky$ almashtirish bajarib va sferik koordinatalarga o'tib,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta F_k(y) dy &= \int_{|y| \leq 1/k} k^2 \frac{\eta''(k|y|)}{|y|} dy = \int_{|x| \leq 1} \frac{\eta''(|x|)}{|x|} dx = \\ &= 4\pi \int_0^1 \eta''(r) r dr = 4\pi \eta'(r) r \Big|_{r=0}^{r=1} - 4\pi \int_0^1 \eta'(r) dr = -4\pi \eta(1) = -4\pi \end{aligned}$$

tenglikni olamiz (bo'laklab integrallashda biz $\eta(0) = \eta'(1) = 0$ munosabatni hisobga oldik).

Demak, (17.5.26) tenglik

$$\Delta u_k(x) = -4\pi\psi(x) + \int_{\mathbb{R}^3} \Delta F_k(y) [\psi(y+x) - \psi(x)] dy$$

ko'rinishga keladi.

Isbotni yakunlash uchun bu tenglikning o'ng tarafidagi integral nolga intilishini ko'rsatish yetarli. Buning uchun

$$\varepsilon_k(x) = \sup_{|y| \leq 1/k} |\psi(y+x) - \psi(x)|$$

deylik.

ψ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra, $k \rightarrow \infty$ da $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Bundan chiqdi,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \Delta F_k(y) [\psi(y+x) - \psi(x)] dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta F_k(y)| |\psi(y+x) - \psi(x)| dy \leq$$

$$\leq \varepsilon_k \int_{|y| < 1/k} k^2 \frac{M}{|y|} dy = 4\pi \varepsilon_k M k^2 \int_0^{1/k} \frac{r^2 dr}{r} = 2\pi M \cdot \varepsilon_k \rightarrow 0$$

(bu yerda $M = \max |\eta''(t)|$).

Shunday qilib, (17.5.25) tenglikning isboti va shu bilan birga teoremaning ham isboti yakunlandi.

■

Eslatma. 17.5.1 - teorema shartida zichlik (17.5.13) munosabatini qanoatlantirishini talab qilish shart emas. Teorema tasdig'i ψ zichlik cheksizlikda yetarlicha tez nolga intilganda ham o'rinli.

6. Uzoqlashuvchi karrali xosmas integrallarni jamlash.

Parametrga bog'liq integrallardan uzoqlashuvchi karrali xosmas integrallarni jamlashda ham foydalaniladi.

Masalan,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad (17.5.27)$$

xosmas integralni qaraylik.

Abel jamlash usulini ko'p o'lchovli holda kiritish uchun, $\alpha > 0$ parametrga bog'liq quyidagi

$$A(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx \quad (17.5.28)$$

integralni qaraymiz. Agar

$$(A) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx$$

tenglikning o'ng tarafidagi limit mavjud bo'lsa, u holda (17.5.27) xosmas integral Abel usuli bilan jamlanadi deyiladi. Eslatib o'tamiz, agar (17.5.27) integralning bosh qiymati:

$$\text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq R} f(x) dx$$

mavjud bo'lsa, integral Koshi ma'nosida yaqinlashadi deyiladi. Navbatdagi tasdiq Abel jamlash usuli bilan xosmas integrallarni Koshi bo'yicha integrallashni bog'laydi.

17.5.2 - teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $\mathbb{R}^n$ fazosida uzluksiz bo'lib, istalgan $\alpha > 0$ uchun (17.5.28) integral yaqinlashsin. Agar (17.5.27) xosmas integral Koshi bo'yicha yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx = \text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Sferik koordinatalarni kiritib, radiusi r va markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera bo'yicha

$$\psi(r) = \int_{|x|=r} f(x) d\sigma(x)$$

sirt integralini qaraylik.

Ravshanki,

$$\int_{|x| \leq R} f(x) dx = \int_0^R \psi(r) dr$$

va demak, (17.5.27) integralning bosh qiymati uchun

$$\text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \psi(r) dr \quad (17.5.29)$$

tenglik o'rinli.

Bundan chiqdi, (17.5.28) integralni quyidagi

$$A(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} \psi(r) dr \quad (17.5.30)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Isbotni yakunlash uchun Abelning 17.2.9 - teoremasini qo'llash yetarli. Bu teoreмага ko'ra, (17.5.30) tenglikning o'ng tarafidagi integral $\alpha \rightarrow 0$ da (17.5.29) ning o'ng tarafidagi integralga yaqinlashadi.

■

Natija. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $\mathbb{R}^n$ fazoda uzluksiz bo'lsin. Agar (17.5.27) xosmas integral yaqinlashsa, u holda quyidagi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

tenglik bajariladi.

1 - eslatma. (17.5.27) integralni jamlashning Abel nomi bilan bog'liq yana bir usuli

$$\Phi(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|^2} f(x) dx \quad (17.5.31)$$

integral bilan aniqlanadi. $\Phi(\alpha)$ funksiya ba'zan Gauss o'rtachalari deb ham ataladi.

Xuddi yuqoridagidek, agar (17.5.27) integral I soniga yaqinlashsa, u holda (17.5.31) integrallarning $\alpha \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud bo'lib, u I ga teng bo'ladi.

2 - eslatma. (17.5.28) va (17.5.31) integrallar bilan aniqlangan Abel jamlash usullaridan biz, aslida, Dirixlening uzilishga ega bo'lgan (17.2.48) ko'paytuvchisini hamda (17.2.34) va (17.2.35) Frenel integrallarini hisoblashda foydalangan edik.

17.6-§. Misollar

1 - misol. Quyidagi integral parametrning uzluksiz funksiyasi ekanini ko'rsating va limitni hisoblang:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \sin \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx.$$

Ko'rsatma. Integral ostidagi funksiya 17.1.1 - teorema shartlarini qanoatlantiradi. Shunday ekan, integral ostida limitga o'tish mumkin.

2 - misol. Ushbu

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x \cos x - 1)(\cos x - x \sin x)}{\ln(x \cos x)} dx$$

integralni hisoblang.

Ko'rsatma. Yordamchi

$$\Phi(x) = \int_0^1 (x \cos x)^t dt = \frac{x \cos x - 1}{\ln(x \cos x)}$$

integralni kiritib, 17.1.2 - va 17.2.8 - misollarda keltirilgan sun'iy usulni qo'llang.

3 - misol. Parametrga bog'liq quyidagi

$$I(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{ye^{x(1-y^2)}}{1-y^2} dy$$

integralning $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ nuqtadagi hosilasini toping.

Ko'rsatma. (17.1.9) formulani qo'llash kifoya.

4 - misol. Parametrga bog'liq quyidagi

$$I(x) = \int_0^{\infty} xy e^{-xy^2} dy$$

integralning har qanday $[a, b] \subset (0, \infty)$ kesmada tekis yaqinlashishini va $[0, b]$ kesmada esa, har bir x uchun yaqinlashadiyu, lekin tekis yaqinlashmasligini ko'rsating.

Ko'rsatma. Integral tekis yaqinlashishini ko'rsatish uchun integralda $t = y^2$ almashtirish bajarib, 17.2.1 - teoremani qo'llang. Integralning ikkinchi kesmada yaqinlashishini ko'rsatish uchun esa, integralda $t = xy^2$ almashtirish bajarib, bevosita ta'rif yordamida tekshiring.

5 - misol. Har qanday $n \geq 1$ uchun

$$I(\alpha) = \int_2^{\infty} \frac{x^{n-1} \sin(\alpha x^n)}{\ln x} dx$$

integral istalgan $[a, b] \subset (0, \infty)$ kesmada tekis yaqinlashishini ko'rsating.

Ko'rsatma. $f(x, \alpha) = x^{n-1} \sin(\alpha x^n)$ va $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ deb, 17.2.2 - teoremani qo'llang.

6 - misol. $\alpha \in [0, \infty)$ parametrqa bog'liq bo'lgan quyidagi

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ikkinchi tur xosmas integralni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. §17.2.4 da qayd etilganidek, bunday integrallar uchun ham Veyershtrass teoremasi o'rinli. Mana shu teoremadan foydalaning.

7 - misol. Birinchi tartibli Riss usuli bilan $\cos x$ funksiyadan $(0, \infty)$ yarim o'q bo'yicha olingan integral jamlansada, $\cos \sqrt{x}$ funksiyadan olingan integral esa, shu usul bilan jamlanmas ekanini ko'rsating.

Ko'rsatma. $\cos x$ funksiyadan olingan integral xuddi $\sin x$ funksiyadan olingan integral kabi o'rganiladi (§17.2.7 ning 4° bandiga qarang). $\cos \sqrt{x}$ funksiya uchun birinchi tartibli Riss o'rtachalari quyidagi

$$R_1(\alpha) = \int_0^{1/\alpha} (1 - \alpha x) \cos \sqrt{x} dx$$

ko'rinishga ega. Bu integralning $\alpha \rightarrow 0$ dagi limitini aniqlash uchun integralda $\sqrt{x} = t$ almashtirish bajarib, bo'laklab integrallash yetarli.

8 - misol. Agar $a > 0$ bo'lsa, Eyler integrallaridan foydalanib, quyidagi integralni hisoblang:

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Ko'rsatma. Integralda $x = a\sqrt{t}$ almashtirish bajaring. So'ngra beta-funksiyaning (17.3.13) ta'rifidan foydalaning. Hosil bo'lgan beta-funksiyani (17.3.16) formula yordamida gamma-funksiyaga keltiring. Gamma-funksiyani hisoblash uchun (17.3.9) va (17.3.11) formulalarni qo'llang.

9 - misol. Quyidagi

$$\int_{-1}^1 e^{-\lambda(1-\sqrt{1-x^2})+x} dx$$

integral asimptotik yoyilmasining birinchi hadini toping.

Ko'rsatma. Avval $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ funksiya (17.4.16) shartlarini qanoatlantirishiga ishonch hosil qiling. So'ngra $g(x) = \varphi^2(x)$ almashtirish bajarib, (17.4.9) formuladan foydalaning.

10 - misol. Faraz qilaylik, $x \in \mathbb{R}^n$ va $t \in \mathbb{R}$ bo'lsin. Agar $\theta(t)$ Hevisayd funksiyasi bo'lib,

$$E(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

bo'lsa,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) E(y - x, t) dy$$

funksiya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

issiqlik tarqalishi tenglamasini va

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(x, t) = f(x)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantirishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Avval $\xi_j = \frac{x_j}{2\sqrt{t}}$ almashtirish bajarib,

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = 1$$

ekanini ko'rsating. So'ngra integral ostida limitga o'tish va integral ostida differensiallash qoidalaridan foydalaning.

18-bob. Maydon nazariyasi elementlari

18.1-§. Skalyar va vektor maydonlar

1. Ushbu bobda, bizni o'rab turgan olamdagi fizik hodisalarning matematik tavsifi deb tushuniladigan, an'anaviy maydonlar nazariyasi bayon qilinadi. Mavjud dunyoning uch o'lchovlilik haqiqatga yaqin bo'lib, u Evklid geometriyasiga bo'ysungani uchun, maydonlar nazaruyasidagi asosiy ob'ektlar uch o'lchovli E^3 Evklid fazosidagi turli akslantirishlardan iborat. Eslatib o'tamiz, ixtiyoriy $\mathbf{r}_1 \in E^3$ va $\mathbf{r}_2 \in E^3$ elementlari uchun $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ skalyar ko'paytma aniqlangan E^3 vektor fazosiga Evklid fazosi deyiladi. Skalyar ko'paytma tabiiy ravishda vektorning $|\mathbf{r}| = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}$ uzunligini (yoki normasini) aniqlaydi. Natijada, ikki vektor orasidagi $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ masofa va bundan chiqdi, ochiq va yopiq to'plamlar tushunchasi aniqlanadi.

Navbatdagi ikki turdagi akslantirishlar asosiy hisoblanib, ularni tavsiflash uchun biz fizik atamalardan foydalanamiz. Lekin bu atamalar ushbu bobdan tashqarida umuman qo'llanilmaydi.

¹⁰. E^3 fazosining har bir $\mathbf{r}$ nuqtasiga $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ sonni mos qo'yuvchi $f : E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ akslantirish skalyar funksiya yoki *skalyar maydon* deb ataladi.

Masalan, issiqlik tarqalish nazariyasida fazoning har bir nuqtasi haroratga ega deb hisoblanadi. Har bir nuqtaga uning haroratini mos qo'yuvchi funksiya haroratlar maydoni deb atalib, u skalyar maydonga klassik misol bo'ladi.

2^o. E^3 fazosining har bir $\mathbf{r}$ nuqtasiga $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \in E^3$ vektorni mos qo'yuvchi $\mathbf{A} : E^3 \rightarrow E^3$ akslantirish vektor funksiya yoki *vektor maydon* deb ataladi.

Masalan, suyuqlik harakati nazariyasida suyuqlik bilan to'la farazning har bir nuqtasi biror yo'nalishda qandaydir tezlik bilan harakatlanadi deb faraz qilinadi. Har bir nuqtaga tezlik vektorini mos qo'yuvchi funksiya tezliklar maydoni deb atalib, u vektor maydonga klassik misol bo'ladi.

Ushbu bobda skalyar va vektor maydonlar va ularning bir-biriga ta'siri o'rganiladi. Shuni aytish kerakki, matematik maydonlar nazariyasida skalyar va vektor maydonlar butun fazoda emas, balki biror $\Omega \subset E^3$ sohada, ya'ni ochiq bog'lamli to'plamda aniqlangan bo'lishi mumkin. Ushbu bobning mazmuni matematik tahlilning nazariy fizikaga tatbiqidan iborat deyish mumkin.

2. Ixtiyoriy E^3 Evklid fazosida aniqlangan skalyar funksiya gradienti 12 - bobda arifmetik $\mathbb{R}^3$ fazosidagi funksiya uchun kiritilgan kabi aniqlanadi. Bunda farq shundan iboratki, umumiy holda tayinlangan bazisdagi koordinatalardan foydalanishga zaruriyat yo'q.

E^3 fazosidagi biror Ω sohada aniqlangan $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ skalyar maydonni qaraylik. Agar shunday $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \in E^3$ vektor topilsaki, har qanday yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in E^3$ vektor uchun

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{r}) = (\mathbf{A}, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0, \quad (18.1.i)$$

munosabat bajarilsa, f skalyar maydonni $\mathbf{r} \in \Omega$ nuqtada *differentsiallanuvchi* deyimiz.

Bunda $\mathbf{A}$ ni f skalyar maydonning hosila vektori yoki *gradienti* deb ataymiz va $\text{grad} f$ yoki $\nabla f(\mathbf{r})$ simvol bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{grad} f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}).$$

Gradientning biror ortonormal bazisdagi ko'rinishini topaylik.

Eslatib o'tamiz, agar uch vektordan iborat $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^3$ sistema

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

munosabatni qanoatlantirsa, u E^3 fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi.

Bunda har bir $\mathbf{r} \in E^3$ vektor, o'zaro bir qiymatli aniqlangan haqiqiy

$$x_j = (\mathbf{r}, \mathbf{e}_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

koeffitsientlar yordamida,

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

kabi yoziladi.

Bu holda skalyar maydon

$$f(\mathbf{r}) = f(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3)$$

ko'rinishga ega bo'lib, biz bu maydonni uch (x_1, x_2, x_3) haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasi deb qarashimiz mumkin.

Agar skalyar maydon differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (18.1.1) tenglik istalgan yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in E^3$ vektor uchun bajariladi. Bu tenglikda $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$ deb, t ga bo'lsak,

$$\frac{f(\mathbf{r} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{r})}{t} = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_j) + o(1), \quad t \rightarrow 0,$$

munosabatni olamiz.

Chap taraf $t \rightarrow 0$ da f funksiyaning x_j o'zgaruvchi bo'yicha qismaniy hosilasiga intiladi, o'ng taraf esa, maydon gradientining j -komponentasi $A_j = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_j)$ ga intiladi. Demak, istalgan $j = 1, 2, 3$ uchun

$$(\nabla f(\mathbf{r}))_j = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \quad (18.1.2)$$

tenglik o'rinli.

Shu sababli, tanlangan bazisda gradient vektori simvolik ravishda

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

kabi yoziladi.

Ko'rinib turibdiki, istalgan E^3 Evklid fazosida gradient har qanday ortonormal bazisda bir xilda yozilar ekan. Shuning uchun, gradient ko'rinishi koordinatalar sistemasini ortogonal akslantirishga nisbatan invariant deyiladi.

Eslatib o'tamiz, agar $U : E^3 \rightarrow E^3$ akslantirish, ya'ni E^3 fazoni E^3 fazoga akslantirish, ixtiyoriy ikki $\mathbf{r}_1 \in E^3$ va $\mathbf{r}_2 \in E^3$ vektor uchun

$$(U\mathbf{r}_1, U\mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

tenglikni qanoatlantirsa, bu akslantirish ortogonal deyiladi.

Ortogonal akslantirish skalayr ko'paytmani saqlagani sababli, u normani va vektorlar orasidagi masofani ham saqlaydi, ya'ni u *izometrik* akslantirish bo'ladi. Ravshanki, ortogonal akslantirish istalgan ortonormal bazisni yana biror ortonormal bazisga o'tkazadi.

Asosiy Evklid fazosi E^3 sifatida, maydonlar nazariyasi uchun nihoyatda muhim bo'lgan, uch o'lchovli $\mathbb{R}^3$ arifmetik fazosini olamiz. Bu fazo elementlarini

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Qaralayotgan fazoning eng muhim ortonormal bazislaridan birini

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1) \quad (18.1.3)$$

vektorlar tashkil qiladi.

Ushbu bazisda $\mathbf{r}$ vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

ko'rinishga ega bo'lib, f skalyar maydonni esa,

$$f(x, y, z) = f(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

labi yozish mumkin.

(18.1.2) ga ko'ra, bu maydon gradienti

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

ga teng. Shunday ekan, simvolik ravishda,

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (18.1.4)$$

deyishimiz mumkin.

$\mathbb{R}^3$ fazosida f skalyar maydon gradientini yana

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Bu formula 12 - bobda keltirilgan (12.1.16) ta'rif bilan ustma-ust tushadi.

18.1.1 - misol. Sferik simmetrik maydonning, ya'ni faqat koordinatalar boshigacha bo'lgan masofaga bog'liq $f(\mathbf{r}) = \varphi(|\mathbf{r}|)$ maydonning gradienti topilsin.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(|\mathbf{r}|)}{\partial x} = \varphi'(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial x} = \varphi'(|\mathbf{r}|) \frac{x}{|\mathbf{r}|}.$$

Xuddi shu usulda y va z bo'yicha differensiallasak, talab qilingan

$$\text{grad } \varphi(|\mathbf{r}|) = \varphi'(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

formulani olamiz.

Eslatib o'tamiz, agar $\mathbf{e}$ birlik vektor bo'lsa, $f(\mathbf{r})$ funksiyaning $\mathbf{e}$ yo'nalish bo'yicha hosilasi

$$\frac{df(\mathbf{r})}{d\mathbf{e}} = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r} + t\mathbf{e}) \right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}$$

formula bilan aniqlangan edi (§12.1 ning 5 - bandiga qarang). Ravshanki, berilgan nuqtada hosila o'zining maksimal qiymatiga e vektor $\nabla f(\mathbf{r})$ gradient vektoriga kollinear bo'lgan yo'nalishda erishadi.

3. Vektor ko'paytma. Har qanday uch o'lchovli E^3 Evklid fazosining uchdan farqli o'lchovli Evklid fazolaridan farqi shundaki, E^3 da, skalyar ko'paytmadan tashqari, vektor ko'paytmani ham kiritish mumkin.

Buning uchun $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ortonormal bazisni tayinlab, $[\times]$ vektor ko'paytirish amalini

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (18.1.5)$$

tengliklar yordamida kiritamiz. E'tibor bering, bu tengliklardan har biri avvalgisidan siklik almashtirish yordamida olinadi. Yuqoridagi tengliklarga yana quyidagi

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j$$

antisimmetriklik shartini qo'shamiz. Bundan, xususan, $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_j = 0$ tenglik kelib chiqadi.

Endi, agar

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

bo'lsa, antisimmetriklik shartini hisobga olib, bazis elementlari uchun kiritilgan (18.1.5) amalni chiziqli ravishda davom ettirsak, vektor ko'paytma uchun

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$$

formulaga ega bo'lamiz.

Ravshanki, bunday aniqlangan vektor ko'paytma $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bazisni tanlashga bog'liq. Masalan, agar bazis elementlari sifatida $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3)$ ni olsak, yangi bazisda xuddi yuqoridagidek aniqlangan vektor ko'paytma avvalgisidan farq qiladi, aniqrog'i unga qarama-qarshi vektor bo'ladi.

Agar bir ortonormal bazisdan ikkinchisiga o'tish matritsasining determinanti 1 ga teng bo'lsa, u holda, oson ko'rsatish mumkinki, har ikki bazisda aniqlangan vektor ko'paytma ustma-ust tushadi va agarda determinant -1 ga teng bo'lsa, bu vektor ko'paytmalar o'zaro teskari yo'nalgan bo'ladi.

Biz uchun muhim bo'lgan uch o'lchovli $\mathbb{R}^3$ arifmetik vektor fazosida asosiy bazis sifatida (18.1.3) olinadi.

Bu bazisda ixtiyoriy ikki

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

vektor uchun ularning vektor ko'paytmasi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \quad (18.1.6)$$

kabi aniqlanadi. Ravshanki, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Eslab qolishni osonlashtirish uchun, ikki vektorning vektor ko'paytmasi simvolik ravishda quyidagi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (18.1.7)$$

determinant ko'rinishida yoziladi.

Bundan buyon skalyar ko'paytmani yana

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

simvol bilan belgilaymiz.

Bu belgilashlarda uch vektorning *aralash ko'paytmasini* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ deb yozish mumkin. Bevosita (18.1.7) dan aralash ko'paytmaning

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

determinantga teng ekanligi kelib chiqadi.

4. Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^3$ fazosining istalgan Ω sohasi berilgan bo'lsin. $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektor maydon (18.1.3) bazisda

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x, y, z) &= A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k} = \\ &= (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))\end{aligned}$$

ko'rinishga ega.

Aytaylik, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ va $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ikki vektor maydon bo'lsin.

Bu ikki vektor maydonning $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skalyar ko'paytmasi skalyar maydon bo'lib, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bazisda

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (18.1.8)$$

kabi yoziladi.

Ravshanki,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Ikki vektor maydonning $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektor ko'paytmasi vektor maydon bo'lib, (18.1.7) ga ko'ra, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bazisda

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (18.1.9)$$

ko'rinishga ega.

Ravshanki,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

Skalyar ko'paytma uchun (18.1.8) formula va vektor ko'paytma uchun (18.1.9) formuladan

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \quad (18.1.10)$$

ayniyatning kelib chiqishini tekshirish oson.

Shu sababli, noldan farqli istalgan ikki $\mathbf{A}$ va $\mathbf{B}$ vektorlar uchun

$$0 \leq \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} \leq 1 \quad (18.1.11)$$

tengsizliklar o'rinli.

(18.1.10) va (18.1.11) munosabatlarga ko'ra, $0 \leq \varphi \leq \pi$ shartni qanoatlantiruvchi shunday φ son mavjud va yagona bo'ladiki, uning uchun (18.1.11) da chapdagi kasr $\sin \varphi$ ga va o'ngdagi kasr esa, $\cos \varphi$ ga teng bo'ladi. Shunday qilib,

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \varphi, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \varphi. \quad (18.1.12)$$

Bunda φ burchak $\mathbf{A}$ va $\mathbf{B}$ vektorlar orasidagi burchak deyiladi.

18.2-§. Vektor maydon divergensiya va rotori

1. ∇ gradient vektorining (18.1.4) simvolik ko'rinishi yordamida f skalyar maydon gradientini ∇ vektor va f funksiyalarning formal ko'paytmasi sifatida aniqlash mumkin:

$$\text{grad} f(x, y, z) = \nabla \cdot f(x, y, z).$$

Endi, agar $f(x, y, z)$ skalyar maydon o'rniga $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor maydonni olsak, u holda ∇ simvolik vektorni $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektorga ham skalyar, ham vektor ko'paytirish mumkin. Bunda skalyar ko'paytirish natijasi divergeniya deb ataluvchi skalyar maydon bo'lib, vektor ko'paytirish natijasi esa, rotor deb ataluvchi vektor maydonni tashkil qiladi.

Ushbu paragrafda $\mathbf{A}$ vektor maydonni

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \quad (18.2.1)$$

komponentalarga ega deb hisoblaymiz.

Barcha vektor maydonlarni cheksiz differensiallanuvchi deb, ya'ni uzluksiz va yetarlicha marta differensiallanuvchi deb faraz qilamiz.

2. Divergensiya. (18.2.1) vektor maydonning *divergensiya* deb quyidagi

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (18.2.2)$$

skalyar funksiyaga aytiladi.

Yuqorida qayd qilinganidek, vektor maydon divergensiya ∇ ni simvolik vektorning $\mathbf{A}$ vektorga skalyar ko'paytmasi sifatida ham aniqlash mumkin:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z). \quad (18.2.3)$$

18.2.1 - misol. Agar $g(|\mathbf{r}|)$ sferik simmetrik skalyar maydon bo'lsa,

$$\mathbf{A} = g(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (18.2.4)$$

vektor maydon divergensiya ∇ ni hisoblang.

(18.2.1) belgilashlarga ko'ra.

$$P = g \cdot \frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, \quad Q = g \cdot \frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, \quad R = g \cdot \frac{z}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Endi murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llasak,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g'(|\mathbf{r}|) \frac{x}{|\mathbf{r}|} \cdot \frac{x}{|\mathbf{r}|^3} + g(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} - g(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{3x^2}{|\mathbf{r}|^5}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Xuddi shu usulda Q funksiyani y bo'yicha va R funksiya ∇ ni z bo'yicha qismiy hosilalarini hisoblab, so'ngra ularni yig'ib chiqsak, (18.2.2) ta'rifga ko'ra,

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{g'(|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^2} \quad (18.2.5)$$

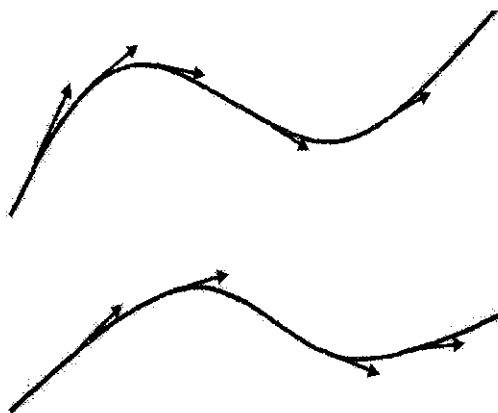
tenglikni olamiz.

1 - eslatma. (18.2.4) vektor maydon divergensiya skalyar funktsiya bo'lib, uning ishorasi $g(|\mathbf{r}|)$ ning o'sish yoki kamayishiga bog'liq. Xususan, $g(|\mathbf{r}|) = \text{const}$ bo'lsa, divergensiya nolga teng bo'ladi. Bu hol tatbiq uchun hammasidan ko'ra muhim bo'lib, bunda (18.2.4) vektor maydon Nyuton tortish kuchi maydoni bilan yoki nuqtaviy elektr zaryadi hosil qilayotgan Kulon elektr kuchlanish maydoni bilan ustma-ust tushadi. Bu maydonlarning asosiy o'ziga xosligi shundaki, ular cheksizlikda masofaning kvadratiga teskari proporsional ravishda nolga intiladi.

Shunday qilib, (18.2.5) formulaga ko'ra, (18.2.4) vektor maydon divergensiya sinining nolga tengligi bu maydonning Kulon maydoni bilan aynan ustma-ust tushishini anglatadi.

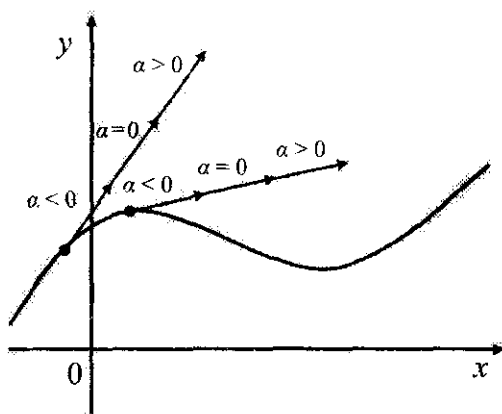
Bordiyu divergensiya noldan farqli bo'lsa, o'rganilayotgan maydon Kulon maydonidan farq qiladi. Aniqrog'i, agar divergensiya musbat bo'lsa, u holda $g'(|\mathbf{r}|) > 0$ bo'lib, $g(|\mathbf{r}|)$ funktsiya o'sadi. Shuning uchun vektor maydon Kulon maydonidan ortiq bo'ladi, ya'ni kattaroq masofaga ta'sir ko'rsatadi. Agar divergensiya manfiy bo'lsa, u holda $g(|\mathbf{r}|)$ kamayadi va shuning uchun, vektor maydon Kulon maydonidan tezroq nolga intilib, kichikroq masofaga samarali ta'sir ko'rsatadi. Shunday qilib, ushbu holda divergensiya (18.2.4) maydonning klassik Kulon maydonidan uzoqlashish o'lchovini xarakterlaydi, deyishimiz mumkin.

2 - eslatma. Vektor maydon haqida tassavur hosil qilish uchun fazoning har bir nuqtasida vektorlarni mos uzunlik va mos yo'nalishga ega bo'lgan strelkachalar shaklida tasvirlash kerak. Tekislikda bunday tasvirlash ayniqsa ifodali ko'rinadi (18.1 - rasim). Bunda strelkachalarni ular urinadigan egri chiziqlar bo'ylab joylashtirishga harakat qilinadi. Bunday egri chiziqlar vektor chiziqlari deyiladi. Agar vektor maydon biror kuchlar maydoni bo'lsa, vektor chiziqlarini kuch chiziqlari deb va agar u tezliklar maydoni bo'lsa, u holda bu chiziqlarni tok chiziqlari deb atashadi. Shuni aytish kerakki, vektor maydon va kuch chiziqlari tushunchalari ingliz fizigi M. Faradey tomonidan kiritilgan.



18.1-rasm

Taassufki, qayd etilgan tasvirlar qaralayotgan vektor maydon divergentsiyasi haqida tassavur bermaydi. Masalan, $g(|\mathbf{r}|) = |\mathbf{r}|^\alpha$ bo'lsa, Oxy tekislikdagi (18.2.4) vektor maydonning tasviri $|\alpha| < 1$ intervaldan olingan barcha α lar uchun taxminan bir xil ko'rinadi (18.2 - rasm), ammo, aslida esa, $\alpha < 0$ da divergentsiya manfiy bo'lib, $\alpha > 0$ da musbat va $\alpha = 0$ da esa, divergentsiya nolga tengdir. Boshqacha aytganda, chizmadan na faqat divergentsiyaning kattaligi haqida, xattoki uning ishorasi haqida ham hech qanday xulosa qilib bo'lmaydi.



18.2-rasm

Divergensiyaning fizik ma'nosi navbatdagi bandda ochib beriladi.

18.2.2 - misol. Agar $u(\mathbf{r})$ skalyar maydon bo'lsa, $\mathbf{A} = \text{grad } u$ vektor maydonning divergensiya-sini hisoblang.

Shartga ko'ra,

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (P, Q, R) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Demak,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Shunday ekan, (18.2.2) ta'rifga ko'ra,

$$\text{div } \mathbf{A} = \text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Eslatma. Maydon nazariyasida Δ Laplas operatori

$$\Delta u = \text{div grad } u \quad (18.2.6)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Yuqoridagi misoldan istalgan u skalyar maydon uchun

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (18.2.7)$$

tenglikning bajarilishi kelib chiqadi.

Bundan chiqdi, (18.2.6) va (18.2.7) ta'riflar teng kuchli ekan.

3. Rotor. $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ vektor maydonining *rotori* (ba'zan *uyurma* ham deb ataladi) deb

$$\text{rot } \mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (18.2.8)$$

vektor funksiyaga aytamiz.

(18.1.6) formulaga asosan, vektor maydon rotorini formal ravishda ∇ vektorni $\mathbf{A}$ vektorga vektor ko'paytmasi sifatida, ya'ni

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z) \quad (18.2.9)$$

deb aniqlash mumkin.

(18.1.7) formulaga ko'ra, vektor maydon rotorini simvolik ravishda, esda saqlashga qulay bo'lgan,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (18.2.10)$$

determinant ko'rinishida ham yozsa bo'ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun, determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyish yetarli.

18.2.3 - misol. Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^3$ fazosining har bir nuqtasi Oz o'qi atrofida ω burchak tezligi bilan aylansin. Tezliklar vektor maydonining rotorini topilsin.

Shartga ko'ra,

$$x(t) = \rho \cos \omega t, \quad y(t) = \rho \sin \omega t, \quad z(t) = \text{const.}$$

Bu tengliklarni vaqt bo'yicha differentsiallab va $x(t)$ funksiyaning t bo'yicha hosilasini $\dot{x}(t)$ simvol bilan belgilab,

$$\dot{x}(t) = -\omega \rho \sin \omega t, \quad \dot{y}(t) = \omega \rho \cos \omega t, \quad \dot{z}(t) = 0$$

munosabatlarni olamiz.

Shunday ekan, $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ tezliklar vektor maydoni

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$$

ko'rinishga ega bo'lib,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) = (0, 0, 2\omega) = 2\omega \mathbf{k}$$

ekanini tekshirish oson.

Shunday qilib, rotor aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan va burchak tezligining ikkilanganiga teng bo'lgan vektor ekan. 2 ga teng koeffitsi-entni ba'zan quyidagicha talqin qilishadi: agar har bir nuqtani kich-kina pirildoq deb qarasak, u $T = 2\pi/\omega$ vaqt ichida Oz o'qi atrofida ham va o'z o'qi atrofida ham to'la aylanadi.

Kiritilgan differensial operatsiyalarining o'zaro bog'liq ekanini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan, har qanday $U(x, y, z)$ skalyar maydon uchun

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U \equiv 0 \quad (18.2.11)$$

ayniyat bajarilishini tekshirish qiyin emas.

Bundan tashqari, har qanday $\mathbf{A}$ vektor maydon uchun quyidagi

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0 \quad (18.2.12)$$

muhim ayniyat o'rinli.

Keltirilgan (18.2.11) va (18.2.12) formulalar ahamiyati navbatdagi §18.4 bandeda aniqlashiriladi.

4. Integral formulalarning vektor ko'rinishida yozilishi. 16 - bobda isbotlangan Stoks va Gauss-Ostrogradskiy formulalari maydon nazariyasi atamalarida ayniqsa bejirim ko'rinishga ega.

¹⁰. Faraz qilaylik, Ω uch o'lchovli $\mathbb{R}^3$ fazosining, Gauss-Ostrogradskiy formulasi o'rinli bo'lgan (16.7.2 - teoreмага qarang), ixtiyoriy sohasi bo'lsin. Ω sohani chegaralovchi $\partial\Omega$ sirtga o'tkazilgan tashqi birlik normal vektorini $\mathbf{n}$ simvol bilan belgilaymiz.

18.2.1 - tasdiq. Yopiq $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sohada aniqlangan ixtiyoriy silliq $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor maydon uchun quyidagi

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (18.2.13)$$

Gauss-Ostrogradskiy formulasi o'rinli.

(18.2.13) formulaning haqligi bevosita 16.7.2 - teoremdan kelib chiqadi.

(18.2.13) formula divergensiya tushunchasining fizik ma'nosini ochib berishda asosiy rolni o'ynaydi. Eslatib o'tamiz, o'ng tarafdagi sirt integrali $\partial\Omega$ sirt orqali o'tuvchi $\mathbf{A}$ vektor maydon oqimi deyiladi. Biz Ω sohaning ichida bu oqimni vujudga keltiruvchi va $D(x, y, z)$ zichlikka ega bo'lgan manbalar bor deb faraz qilamiz. $D(x, y, z) < 0$ tengsizlik berilgan nuqtada manba emas, balki oqib ketadigan joy, ya'ni tarnov borligini anglatadi. Shunday ekan, muvozanat tengla-masini quyidagi ko'rinishda keltirish mumkin: Ω sohani chegaralovchi yopiq sirt bo'yicha umumiy oqim Ω ichidagi barcha manbalar unum-dorligidan hamma tarnovlar ish intensivligini olib tashlanganiga teng, ya'ni

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} D(x, y, z) dx dy dz. \quad (18.2.14)$$

(18.2.13) va (18.2.14) formulalarni taqqoslasak, bu formulalardagi uch o'lchovli integrallar tengligini ko'ramiz. Demak, Ω integrallash sohasining ixtiyoriyligiga ko'ra, integral ostidagi ifodalar o'zaro teng, ya'ni $\operatorname{div} \mathbf{A} = D$. Bundan chiqdi, yuqorida aniqlangan vektor maydon divergensiya manbalar (va tarnovlar) taqsimotining zichligiga teng bo'lar ekan.

Boshqacha aytganda, divergensiya vektor maydonning kiruvchi va chiquvchi oqimlari orasidagi farqqa teng. Darhaqiqat, divergensiya so'zining kelib chiqishiga aynan shu fakt sabab bo'lgan bo'lishi mumkin (inglizcha *divergency* so'zi uzoqlashish yoki og'ish deb tarjima qilinadi).

Agar istalgan yopiq sirt bo'yicha oqim ma'lum bo'lsa, u holda Gauss-Ostrogradskiy formulasi vektor maydon divergensiya hisoblashga imkon beradi. Haqiqatan, agar istalgan $\mathbf{r}$ nuqtani olib, Ω soha sifatida shu nuqtaga tortilib keluvchi kichik atroflar ketma-ketligini olsakda, so'ngra limitga o'tsak, u holda ixtiyoriy $\mathbf{A}$ vektor

maydoni uchun

$$\lim_{\Omega \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{1}{|\Omega|_3} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

tenglikni olamiz. Bu yerda $|\Omega|_3$ simvol Ω sohasining hajmini va $\Omega \rightarrow \{\mathbf{r}\}$ simvol esa, Ω sohalar ketma-ketligining $\mathbf{r}$ nuqtaga tortilishini anglatadi.

Shunday ekan, Gauss-Ostrogradskiy formulasiga ko'ra,

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Omega \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{1}{|\Omega|_3} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{A}_n d\sigma. \quad (18.2.15)$$

Eslatma. (18.2.15) formuladan vektor maydon divergensiya ta'rifi sifatida foydalanish mumkin. Bu ta'rifning avzalligi shundaki, u o'ng tarafdagi sirt integrali invariant bo'lgan barcha almashtirishlarga nisbatan invariantdir.

Ma'lumki, bu integral ta'rifi uch o'lchovli fazodagi (chegaraviy sirt qismining proeksiyasidan iborat) yassi shakl yuzi tushunchasiga asoslanadi. 13 - bobda bu yuzaning izometrik akslantirishlarga nisbatan invariant ekani ko'rsatilgan edi. Demak, divergeniya har qanday izometrik akslantirishda, xususan, ortogonal akslantirishda qiymatini o'zgartirmaydi.

2^o. Aytaylik, $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor maydon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sohada aniqlangan bo'lib, S sirt shu sohada yotsin. Faraz qilaylik, bu sirt Stoks formulasi o'rinli bo'lishini ta'minlaydigan shartlarni qanoatlantirsin (16.6.2 - teoremaga qarang). Bundan tashqari, $\boldsymbol{\tau}(x, y, z)$ vektor (x, y, z) koordinatali nuqtada ∂S egri chiziqqa urinma bo'lsin.

18.2.2 - tasdiq. *Istalgan silliq $\mathbf{A}$ vektor maydon uchun quyidagi*

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dl \quad (18.2.16)$$

Stoks formulasi o'rinli.

Isbot 16 - bobda o'rnatilgan quyidagi

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx = \\ = \int_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \end{aligned}$$

((16.6.6) formulaga qarang) formuladan kelib chiqadi. Buning uchun vektor maydon rotorining (18.2.8) ta'rif va 15 - bobda isbotlangan

$$\int_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$$

((15.2.28) va (15.2.29) tengliklarga qarang) tenglikdan foydalanish kifoya.

Eslatma. Stoks formulasining o'ng tarafidagi egri chiziqli integral $\mathbf{A}$ vektor maydonining ∂S yopiq kontur bo'ylab sirkulyatsiyasi (aylanishi) deyiladi. Maydon nazariyasida Stoks teoremasini quyidagicha keltirish qabul qilingan:

vektor maydon rotorining biror sirt orqali oqimi bu vektor maydonining berilgan sirt chegarasi bo'ylab sirkulyatsiyasiga teng.

Agar $\mathbf{A}$ vektor maydonining istalgan aylana bo'ylab sirkulyatsiyasi ma'lum bo'lsa, Stoks formulasi $\mathbf{A}$ vektor maydon rotorining istalgan $\mathbf{n}$ yo'nalishga $(\text{rot } \mathbf{A})_n$ proeksiyasini topish imkonini beradi. Buning uchun S sirt sifatida $\mathbf{n}$ vektorga perpendikulyar K doirani olamiz. U holda (18.2.16) formula

$$\iint_K (\text{rot } \mathbf{A})_n d\sigma = \oint_{\partial K} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$$

ko'rinishga keladi.

Xuddi (18.2.15) tenglikning isbotidagidek, K doirani $\mathbf{r}$ nuqtaga tortib kelib,

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n(\mathbf{r}) = \lim_{K \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{1}{|K|_2} \oint_{\partial K} \mathbf{A}_\tau dl \quad (18.2.17)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu yerda $|K|_2$ simvol $\mathbf{r}$ nuqtaga tortiluvchi K doira yuzini va $\mathbf{A}_\tau$ kattalik esa, vektor maydonning τ urinma vektorga proeksiyasi anglatadi.

E'tibor bering, rotorning $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ va $\mathbf{k}$ bazis vektorlarga proeksiyasi rotorning Dekart koordinatalari bilan ustma-ust tushadi. Shunday ekan, istalgan aylana bo'ylab vektor maydonining sirkulyatsiyasini bilsak, u holda bu maydon rotorini topa olamiz.

(18.2.17) formuladan vektor maydon rotorining ikkinchi tur sirt integrallarini o'zgartirmaydigan almashtirishlarga nisbatan invariant ekani kelib chiqadi.

18.3-§. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida maydon nazariyasining asosiy operatsiyalari

1. Koordinatalarni almashtirish. Avvalgi paragrafda biz maydon nazariyasining asosiy operatsiyalari koordinatalarni keng qo'llaniladigan chiziqli almashtirishlarga nisbatan invariant ekanini aniqladik. Agarda almashtirish chiziqli bo'lmasa, u holda yangi koordinatalarda gradient, divergensiya va rotor murakkab ko'rinishga ega bo'lishi mumkin. Ushbu paragrafda biz bu operatsiyalar uchun chiziqsiz almashtirishlardagi formulalarni aniqlaymiz.

Biror $G \subset \mathbb{R}^3$ sohani berilgan $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sohaga o'tkazuvchi $\Phi : G \rightarrow \Omega$ homeomorf (ya'ni, o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz) akslantirishni qaraymiz. Yangi G sohaning nuqtalarini $q = (q_1, q_2, q_3)$ simvol bilan belgilaymiz, bu yerda q_j orqali $q \in G$

nuqtaning Dekart koordinatalari belgilangan. Berilgan Ω sohasining nuqtalarini, odatdagidek, $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \Omega$ simvol bilan belgilaymiz.

U holda Φ akslantirish qiymatini

$$\mathbf{r} = \Phi(q) = (x(q), y(q), z(q)) = x(q)\mathbf{i} + y(q)\mathbf{j} + z(q)\mathbf{k}$$

ko'inishda yozish mumkin.

Eslatib o'tamiz, koordinata chiziqlari deb biz Ω sohada yotuvchi

$$L_k = \{\mathbf{r} \in \Omega : \mathbf{r} = \Phi_k(t), \quad t \in (\alpha_k, \beta_k)\}$$

ko'inishdagi chiziqlarga aytgan edik. Bu yerdagi Φ_k akslantirish Φ da q_k o'zgaruvchini t parametrga almashtirib, qolgan o'zgaruvchilarni «muzlatish» orqali hosil qilinadi:

$$\Phi_1(t) = \Phi(t, q_2, q_3), \quad \Phi_2(t) = \Phi(q_1, t, q_3), \quad \Phi_3(t) = \Phi(q_1, q_2, t).$$

Ravshanki, har bir $\mathbf{r} \in \Omega$ nuqta orqali uchta (ya'ni har bir turdan bittadan) koordinata egri chizig'i o'tadi.

Bundan buyon shu bobda biz Φ akslantirishni va qaralayotgan maydonlarni silliq deb faraz qilamiz. Ixtiyoriy $q \in G$ nuqtani tayinlab, har bir koordinata egri chiziq tenglamasini parametr bo'yicha diffe-rensiallaymiz. Natijada quyidagi uchta urinma vektorga ega bo'lamiz:

$$\mathbf{g}_k = \left. \frac{d\Phi_k}{dt} \right|_{t=q_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Har bir $\mathbf{g}_k$ vektor mos L_k koordinata egri chizig'iga $\mathbf{r} = \Phi(q)$ nuqtada urinadi.

Ravshanki, Dekart koordinatalarida $\mathbf{g}_k$ urinma vektorlar quyidagidek:

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_k}, \frac{\partial y}{\partial q_k}, \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial x}{\partial q_k} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \mathbf{k} \quad (18.3.1)$$

ko'inishga ega.

Bundan keyingi mulohazalarda (18.3.1) vektorlar muhim rol o'ynaydi. Biz bundan buyon har bir nuqtada uchalla koordinata egri

chiziqlari to'g'ri burchak ostida kesishadi deb faraz qilamiz. Ya'ni, bu egri chiziqlarga o'tkazilgan urinmalar o'zaro ortogonal bo'lsin deyimiz:

$$\text{agar } i \neq k \text{ bo'lsa, } (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k) = 0 \text{ bo'ladi.} \quad (18.3.2)$$

Tadbiq uchun muhim bo'lgan barcha hollarda bu shart bajariladi.

Shunday qilib, har bir tayinlangan $q \in G$ nuqta uchun $\mathbf{r}(q)$ nuqtadan chiquvchi $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ urinma vektorlar ortogonal bazis tashkil qiladi. Agar

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{|\mathbf{g}_k|} = \frac{1}{H_k} \mathbf{g}_k \quad (18.3.3)$$

desak, bu bazis ortonormal bazisga aylanadi.

Bu yerda $H_k = |\mathbf{g}_k|$ ko'paytuvchilar *Lame koeffitsiyentlari* deb atalib, ular, (18.3.1) ga ko'ra, quyidagi

$$H_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2} \quad (18.3.4)$$

ko'rinishga ega.

(18.3.3) ortonormal bazis tashkil qilgan koordinatalar sistemasi lokal koordinatalar deyiladi, chunki bu sistemaning markazi ixtiyoriy $\mathbf{r}(q)$ nuqtada joylashgan bo'lib, vektor maydonni bu bazis bo'yicha yoyilmasi, odatda, qayd etilgan nuqtaning biror atrofida qaraladi.

Maydon nazariyasida juda ko'p egri chiziqli koordinatalar sistemasidan foydalaniladi. Ushbu bobda biz asosan ikki eng muhim koordinatalar sistemasini — sferik va silindrik koordinatalar sistemasini qaraymiz.

18.3.1 - misol. Quyidagi

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \mathbf{i} \rho \cos \varphi + \mathbf{j} \rho \sin \varphi + \mathbf{k} z$$

akslantirish orqali aniqlangan silindrik koordinatalar sistemasini qaraylik.

Bunda

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

va

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Agar $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ desak, urinma vektorlar

$$\mathbf{g}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0),$$

$$\mathbf{g}_2 = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0),$$

$$\mathbf{g}_3 = (0, 0, 1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu urinma vektorlar ortogonal sistemani tashkil qilishini ko'rish qiyin emas. Mos Lamé koeffitsiyentlari

$$H_1 = |\mathbf{g}_1| = 1, \quad H_2 = |\mathbf{g}_2| = \rho, \quad H_3 = |\mathbf{g}_3| = 1$$

kabi aniqlanadi.

Shunday ekan, silindrik sistema uchun (18.3.3) ortonormal bazis

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0),$$

$$\mathbf{e}_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0),$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

ko'rinishga ega.

18.3.2 - misol. Quyidagi

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

sferik koordinatalar sistemasini qaraylik. Bunda

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Agar $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ desak, u holda urinma vektorlar

$$\mathbf{g}_1 = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

$$\mathbf{g}_2 = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, -r \sin \theta),$$

$$\mathbf{g}_3 = (-r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

kabi aniqlanadi.

Bu urinma vektorlar ortogonal sistema tashkil qiladi. Mos Lamé koeffitsiyentlari

$$H_1 = |\mathbf{g}_1| = 1, \quad H_2 = |\mathbf{g}_2| = r, \quad H_3 = |\mathbf{g}_3| = r \sin \theta$$

ko'rinishga ega.

Shunday ekan, sferik koordinatalar sistemasi uchun (18.3.3) ortogonal bazis

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{e}_2 &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_3 &= (\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

kabi yoziladi.

Navbatdagi bandlarda maydon nazariyasining asosiy operatsiyalari (gradient, divergensiya va rotor) (q_1, q_2, q_3) koordinatalarda Lamé koeffitsiyentlari orqali ifodalanishi mumkinligini ko'rsatamiz.

2. Lamé koeffitsiyentlari. Biz Lamé koeffitsiyentlarining geometrik ma'nosini aniqlashdan boshlaymiz.

18.3.1 - tasdiq. Agar $a \leq q_k \leq b$ bo'lsa, L_k koordinata egri chizig'ining yoy uzunligi

$$|L_k| = \int_a^b H_k(q) dq_k \quad (18.3.5)$$

formula bilan aniqlanadi.

Isbot. Ta'rif bo'yicha, L_k koordinata egri chizig'ini parametrik ko'rinishda berish uchun $\Phi(q_1, q_2, q_3)$ akslantirishda q_k o'zgaruvchini parametr deb, qolgan o'zgaruvchilarni tayinlab qo'yish kerak edi. Bunday egri chiziqli yoy uzunligi, (7.1.19) formulaga asosan,

$$|L_k| = \int_a^b \left| \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \right| dq_k$$

kabi aniqlanadi.

(18.3.1) va (18.3.4) formulalarga ko'ra,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2} = H_k. \quad (18.3.6)$$

Bundan talab qilingan (18.3.5) tenglik kelib chiqadi.

■

Eslatma. Isbotlangan tasdiq L_k koordinata chizig'i uzunligining elementi

$$dl = H_k dq_k \quad (18.3.7)$$

ga tengligini anglatadi.

Demak, H_k kattalikni L_k koordinata egri chizig'i bo'yicha cho'zi-
lish koeffitsienti deyish mumkin.

18.3.2 - tasdiq. Agar $k \neq j$ bo'lsa, (18.3.1) vektor ko'paytma uchun

$$|\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j| = H_k \cdot H_j \quad (18.3.8)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (18.1.10) ayniyatga ko'ra,

$$|\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j|^2 + (\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j)^2 = |\mathbf{g}_k|^2 \cdot |\mathbf{g}_j|^2.$$

(18.3.2) ortogonallik shartiga asosan, skalyar ko'paytma nolga teng va shuning uchun

$$|\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j| = |\mathbf{g}_k| \cdot |\mathbf{g}_j| = H_k \cdot H_j.$$

■

Eslatma. Bu tasdiq L_i koordinata egri chizig'iga ortogonal sirt yuzining elementi

$$d\sigma = H_k H_j dq_k dq_j \quad (18.3.9)$$

ga tengligini anglatadi, bu yerdagi barcha i, j, k indekslar har xildir.

18.3.3 - tasdiq. $\Phi(q) = (x(q), y(q), z(q))$ almashtirishning yakobiani uchun

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = H_1 H_2 H_3 \quad (18.3.10)$$

tenglik o'rinli.

Isbor. E'tibor bering, $\Phi(q)$ almashtirishning

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

tenglik bilan aniqlangan yakobiani (18.3.1) dagi uch vektorning aralash ko'paytmasi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3.$$

Agar $\{\mathbf{e}_k\}$ ortonormal bazis bo'lsa, (18.3.3) dan $\mathbf{g}_k = H_k \cdot \mathbf{e}_k$ ekani kelib chiqadi. Demak,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = H_1 H_2 H_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) = H_1 H_2 H_3.$$

■

Eslatma. Bu tasdiq ortogonal egri chiziqli koordinatalarga o'tish yakobianining Lamé koeffitsiyentlari ko'paytmasiga tengligini anglatadi. Bu holda hajm elementi uchun

$$dv = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (18.3.11)$$

tenglik o'rinli.

(18.3.9) va (18.3.11) formulalarning (18.3.7) tenglik bilan mantiqiy kelishuvda ekaniga e'tibor bering.

3. Gradient. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sohada aniqlangan $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ skalyar maydonni, ya'ni $U = U(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$, maydonni qaraylik.

Aytaylik, $\mathbf{r} = \Phi(q)$ almashtirish natijasida Ω soha G sohaga akslansin. Bunda hosil bo'lgan $V = V(q) = U(\mathbf{r}(q))$ murakkab funksiyani qaraymiz. Fizik xossalarni saqlash nuqtai nazaridan U va V larni bitta skalyar maydon deb qarash mumkin. Ammo ularning matematik tavsifi o'zaro farq qiladi.

$U(\mathbf{r})$ skalyar maydon gradienti deb

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad (18.3.12)$$

vektor maydonga aytgan edik. Shunga ko'ra, agar $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (18.1.3) da aniqlangan ortonormal bazis bo'lsa, $V(q)$ skalyar maydon gradientining

$$\Gamma(V) = \frac{\partial V}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3} \mathbf{e}_3$$

kabi aniqlanishini kutish mumkin edi. Ammo, bu bazis $\mathbf{r}(p) \in \Omega$ nuqtaga bog'liq bo'lgani uchun, masala murakkablashadi.

$U(\mathbf{r}(q))$ skalyar maydon gradientining q koordinatalardagi ko'rinishini topaylik. Eslatib o'tamiz, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (18.3.3) va (18.3.1) tengliklar bilan aniqlangan ortonormal bazisdir.

18.3.1 - teorema. *Ixtiyoriy U silliq vektor maydon berilgan bo'lsin. Agar ∇U (18.3.12) tenglik bilan aniqlangan vektor bo'lsa,*

$$\nabla U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \quad (18.3.13)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llab, (18.3.1) formulani hisobga olsak,

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_k} = \nabla U \cdot \mathbf{g}_k$$

munosabatga ega bo'larniz.

Lekin $\mathbf{g}_k = H_k \mathbf{e}_k$ bo'lgani uchun,

$$\nabla U \cdot \mathbf{e}_k = \frac{1}{H_k} \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Nihoyat, $\{\mathbf{e}_k\}$ ortonormal bazis bo'lgani sababli, bundan talab qilingan

$$\nabla U = \sum_{k=1}^3 (\nabla U, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{H_k} \frac{\partial U}{\partial q_k} \mathbf{e}_k$$

tenglikni olamiz.

Eslatma. (18.3.13) tenglik formal ravishda quyidagi

$$\nabla = \sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{e}_k}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{\mathbf{e}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (18.3.14)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu tenglik gradientning lokal koordinatalar sistemasidagi ko'rinishi deb ataladi.

18.3.3 - misol. Silindrik koordinatalar sistemasini qaraylik, ya'ni

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Lame koeffitsiyentlari uchun

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1$$

tengliklar o'rinli (indeks sifatida mos koordinata egri chizig'ini aniqlovchi o'zgaruvchi olingan). (18.3.14) formulaga ko'ra, silindrik koordinatalarda gradient

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ko'rinishga ega.

18.3.4 - misol. Sferik koordinatalar sistemasini qaraylik, ya'ni

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Bu holda Lamé koeffitsiyentlari

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta$$

kabi aniqlanadi.

Demak,

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

4. Divergensiya. $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ vektor maydon berilgan bo'lib, u $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bazisda

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Bu maydon divergensiya

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (18.3.15)$$

ga teng.

Qaralayotgan vektor maydon bilan $\Phi : G \rightarrow \Omega$ akslantirish superpozitsiyasini, ya'ni $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ koordinatalarda

$$\tilde{\mathbf{A}}(q) = \mathbf{A}[\Phi(q)] = A_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + A_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + A_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3 \quad (18.3.16)$$

kabi aniqlangan vektor maydonni qaraymiz.

Fizik nuqtai nazardan $\mathbf{A}$ va $\tilde{\mathbf{A}}$ vektor maydonlar bir xil xossalarga ega. Ushbu maydonning lokal koordinatalardagi divergensiya topamiz.

18.3.2 - teorema. *Istalgan silliq (18.3.16) vektor maydon uchun*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right) \quad (18.3.17)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Agar (18.3.17) formulani murakkab funksiyani differensiallash qoidasi yordamida isbotlamoqchi bo'lsak, zerikarli hisob-kitoblarni amalga oshirishga to'g'ri kelar edi. Shuning uchun biz (18.2.13) Gauss-Ostrogradskiy formulasidan foydalanamiz.

Qirralari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ixtiyoriy yopiq $Q \subset G$ kubni tayinlaymiz. Φ akslantirish bu kubni egri chiziqli $Q^* = \Phi(Q) \subset \Omega$ «parallelepipedga» o'tkazadi. Bu «parallelepipedga» Gauss-Ostrogradskiy formulasini qo'llaymiz:

$$\iiint_{Q^*} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial Q^*} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (18.3.18)$$

Chap tarafdagi integralda $\mathbf{r} = \Phi(q)$ almashtirish bajaramiz. U holda, (18.3.11) formulaga ko'ra,

$$\iiint_{Q^*} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot H_1(q) H_2(q) H_3(q) \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3. \quad (18.3.19)$$

Shu almashtirishni (18.3.18) ning o'ng tarafidagi sirt integralida ham bajaramiz. Buning uchun S simvol bilan Q kubning Oq_2q_3 tekislikka proeksiyasini va S_t simvol bilan esa, Q kubning $q_1 = t$ tekislik bilan kesishmasini belgilaymiz. Faraz qilaylik, $a \leq t \leq b$ lar uchun bu kesishma bo'sh bo'lmasin. U holda qaralayotgan kesishma S kvadratni parallel ko'chirish bilan hosil qilingan Oq_1 o'qqa perpendikulyar kvadratdan iborat bo'ladi. Bunda S_a va S_b berilgan Q kubning qarama-qarshi yoqlari bilan ustma-ust tushadi. Faraz qilaylik, bu yoqlar Φ almashtirish natijasida mos ravishda S_a^* va S_b^* sirtlarga o'tsin.

S_b^* sirtga tashqi normal $\mathbf{e}_1$ ga va S_a^* ga tashqi normal esa, $-\mathbf{e}_1$ ga tengligini ko'rish qiyin emas. Boshqacha aytganda, $\mathbf{A}$ vektor may-

donning $\mathbf{n}$ normal vektoriga proektsiyasi S_b^* sirtida A_1 ga va S_a^* sirtida esa, $-A_1$ ga teng. Shunday ekan, (18.3.9) ga ko'ra,

$$\begin{aligned} \iint_{S_a^* \cup S_b^*} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_{S_b^*} A_1 d\sigma - \iint_{S_a^*} A_1 d\sigma = \\ &= \iint_S A_1 H_2 H_3(b, q_2, q_3) dq_2 dq_3 - \iint_S A_1 H_2 H_3(a, q_2, q_3) dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (18.3.20)$$

Agar

$$I(t) = \iint_S A_1 H_2 H_3(t, q_2, q_3) dq_2 dq_3$$

deb belgilasak, u holda Nyuton-Leybnits formulasi va karrali integralni takroriy integralga keltirish qoidasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} I(b) - I(a) &= \int_a^b I'(t) dt = \int_a^b dt \iint_S \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)(t, q_2, q_3)}{\partial t} dq_2 dq_3 = \\ &= \iiint_Q \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)(q)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Bundan chiqdi, (18.3.20) tenglikka asosan,

$$\iint_{S_a^* \cup S_b^*} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_Q \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)(q)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Qolgan ikki qarama-qarshi yoqlar bo'yicha sirt integrallarida ham yuqoridagidek almashtirish bajarib,

$$\iiint_{\partial Q} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma =$$

$$= \iiint_Q \left[\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] dq_1 dq_2 dq_3 \quad (18.3.21)$$

tenglikni olamiz.

(18.3.18), (18.3.19) va (18.3.21) munosabatlarga ko'ra,

$$\begin{aligned} & \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot H_1(q) H_2(q) H_3(q) dq_1 dq_2 dq_3 = \\ &= \iiint_Q \left[\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] dq_1 dq_2 dq_3 . \end{aligned}$$

Bu tenglik ixtiyoriy $Q \subset G$ kubda bajarilgani uchun, G sohaning barcha nuqtalarida integral ostidagi ifodalar o'zaro teng. Demak, (18.3.17) formula o'rinli bo'lar ekan.

■

Eslatma. Isbot yakunida biz o'z-o'zidan ko'rinib turgan quyidagi tasdiqdan foydalandik: *agar uzluksiz funksiyadan istalgan kub bo'yi-cha olingan integral nolga teng bo'lsa, bu funksiya aynan nolga teng-dir.* Haqiqatan, agar funksiya biror nuqtada musbat bo'lsa, u holda, uzluksizlikka ko'ra, bu funksiya nuqtaning biror atrofida ham musbat bo'ladi. Bundan chiqdi, bu atrofda yotuvchi kub bo'yicha olingan integral qat'iy musbat bo'lishi kerak, ya'ni u nolga teng bo'la olmaydi.

18.3.5 - misol. (18.3.17) formulaga ko'ra, silindrik koordinatalar sistemasida (18.3.3 - misolga qarang) $\mathbf{A}$ vektor maydon divergensiya uchun

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_r)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

tenglik o'rinli.

18.3.6 - misol. Yana o'sha formulaga ko'ra, sferik koordinatalar sistemasida (18.3.4 - misolga qarang) $\mathbf{A}$ vektor maydon divergensiya uchun

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

tenglik o'rinli.

5. Rotor. $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ vektor maydonni $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Phi(q))$ ko'rinishdagi $\mathbf{A} : G \rightarrow \mathbf{R}^3$ murakkab akslantirish deb qarab, uning rotorini topamiz.

18.3.3 - teorema. *Istalgan silliq (18.3.16) vektor maydon uchun*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_3} \right] \mathbf{e}_1 + \\ & + \frac{1}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_1} \right] \mathbf{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_2} \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (18.3.22)$$

tenglik o'rinli.

Isbot xuddi 18.3.2 - teorema isboti singari olib boriladi. Buning uchun (18.2.16) Stoks formulasidan foydalanamiz.

Bu formula yordamida rotorni $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bazis bo'yicha yoyilmasining, masalan, oxirgi $(\operatorname{rot} \mathbf{A})_3$ komponentasini topamiz. Oq_3 o'qqo perpendikulyar, ya'ni $Oq_1 q_2$ tekislikka parallel istalgan $Q \subset G$ kvadratni tayinlaylik. Faraz qilaylik, bu kvadrat

$$Q = \{(q_1, q_2, q_3) \in G : a \leq q_1 \leq b, c \leq q_2 \leq d, q_3 = \text{const}\}$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Φ akslantirish bu kvadratni biror egri chiziqli Q^* «to'rtburchakka» o'tkazadi. Bu «to'rtburchak» uchun Stoks formulasini yozamiz:

$$\iint_{Q^*} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\partial Q^*} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl. \quad (18.3.23)$$

Q kvadratning tanlanishiga ko'ra, uning Q^* aksiga o'tkazilgan $\mathbf{n}$ normal $\mathbf{e}_3$ vektoriga teng. Shuning uchun $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (\text{rot } \mathbf{A})_3$.

(18.3.23) ning chap tarafidagi sirt integralida $\mathbf{r} = \Phi(q)$ almashtirish bajaramiz. U holda, (18.3.9) formulaga ko'ra,

$$\iint_{Q^*} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{Q^*} (\text{rot } \mathbf{A})_3 \, d\sigma = \iint_Q (\text{rot } \mathbf{A})_3 H_1(q) H_2(q) \, dq_1 \, dq_2. \quad (18.3.24)$$

Xuddi shu kabi almashtirishni (18.3.23) ning o'ng tarafidagi egri chiziqli integralda ham bajaramiz. $\{q_1 = b\}$ koordinata chizig'i bo'ylab $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektor $\mathbf{e}_2$ ga va $\{q_1 = a\}$ koordinata chizig'i bo'ylab esa, $-\mathbf{e}_2$ ga teng. Shuning uchun $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}$ skalyar ko'paytma birinchi holda A_2 ga va ikkinchi holda esa, $-A_2$ ga teng. Shunday ekan, o'zgaruvchini almashtirgandan so'ng, (18.3.7) formulaga ko'ra, chegaraning mos qismi bo'yicha egri chiziqli integrallar quyidagi ayirmaga aylanadi:

$$\begin{aligned} & \int_c^d A_2(b, q_2, q_3) H_2(b, q_2, q_3) \, dq_2 - \int_c^d A_2(a, q_2, q_3) H_2(a, q_2, q_3) \, dq_2 = \\ & = \int_a^b dt \int_c^d \frac{\partial [A_2(t, q_2, q_3) H_2(t, q_2, q_3)]}{\partial t} \, dq_2 = \iint_Q \frac{\partial [A_2(q) H_2(q)]}{\partial q_1} \, dq_1 \, dq_2. \end{aligned}$$

Bunda biz Nyuton-Leybnits formulasidan va ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish qoidasidan foydalandik.

Xuddi shu mulohazalarni $q_2 = c$ va $q_2 = d$ koordinata chiziqlari bo'yicha integrallarga qo'llab, chegaraning mos qismi bo'yicha olingan egri chiziqli integrallar uchun

$$\begin{aligned} & \int_a^b A_1(q_1, c, q_3) H_1(q_1, c, q_3) \, dq_1 - \int_a^b A_1(q_1, d, q_3) H_1(q_1, d, q_3) \, dq_1 = \\ & = - \int_c^d dt \int_a^b \frac{\partial [A_1(q_1, t, q_3) H_1(q_1, t, q_3)]}{\partial t} \, dq_1 = \end{aligned}$$

$$= - \iint_Q \frac{\partial [A_1(q)H_1(q)]}{\partial q_2} dq_1 dq_2$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\oint_{\partial Q^*} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \iint_Q \left[\frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2. \quad (18.3.25)$$

(18.3.23) Stoks formulasiga ko'ra, (18.3.24) va (18.3.25) formulalarning chap taraflari o'zaro teng va, bundan chiqdi, o'ng taraflar ham o'zaro teng. Q kvadratning ixtiyoriyligidan integral ostidagi ifodalarning tengligi, ya'ni G sohaning barcha nuqtalarida

$$(\text{rot } \mathbf{A})_3 H_1(q) H_2(q) = \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_2}$$

tenglikning bajarilishi kelib chiqadi.

Bundan $\mathbf{A}$ vektor maydon rotorining $(\text{rot } \mathbf{A})_3$ komponentasi uchun talab qilingan (18.3.22) tenglikni olamiz. Xuddi shu usulda rotorning qolgan ikki komponentasi uchun mos tengliklar ko'rsatiladi.

■

6. Laplas operatori. Maydon nazariyasida Laplas operatori

$$\Delta u = \text{div grad } u$$

tenglik bilan aniqlanishi yuqorida qayd qilingan edi ((18.2.6) formula-ga qarang). Bu operator matematik fizikada nihoyatda muhim rol o'ynaydi.

Dekart koordinatalarida Laplas operatori

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ko'rinishga ega bo'lib, u elliptik xildagi ikkinchi tartibli qismaniy hosilali chiziqli differensial operatorga klassik misoldir.

Agar $u(x, y, z)$ funksiya Ω sohada quyidagi

$$\Delta u(x, y, z) = 0$$

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, u bu sohada *garmonik* deyiladi.

Agar qaralayotgan soha geometriyasi bilan bog'liq maxsus tanlangan egri chiziqli koordinatalarga o'tilsa, ba'zi sohalar uchun Laplas tenglamasining chegarada berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish jarayoni ancha osonlashadi.

Laplas operatorining ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasidagi ko'rinishini topamiz.

18.3.4 - teorema. *Ixtiyoriy U skalyar maydon uchun*

$$\Delta U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right] \quad (18.3.26)$$

tenglik o'rinli.

Isbot Laplas operatorining $\Delta = \text{div grad}$ ta'rif hamda 18.3.1 - va 18.3.2 - teoremlardan kelib chiqadi.

18.3.7 - misol. Silindrik koordinatalar sistemasida (18.3.3 - misolga qarang) Laplas operatori, (18.3.26) formulaga ko'ra,

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (18.3.27)$$

ko'rinishga ega.

Bu formuladan foydalanib, Laplas tenglamasining faqat z o'qigacha masofadan bog'liq bo'lgan barcha yechimlarini topaylik. Shunday qilib, $U = v(\rho)$ va

$$\Delta v(\rho) = 0$$

bo'lsin. U holda (18.3.27) ga ko'ra,

$$[\rho v'(\rho)]' = 0.$$

Demak,

$$v'(\rho) = \frac{C}{\rho}$$

va, bundan chiqdi,

$$v(\rho) = C \ln \rho + C_1, \quad (18.3.28)$$

bu yerda C va C_1 ixtiyoriy o'zgarmaslardir. Agar $C \neq 0$ bo'lsa, bu funksiya $\mathbb{R}^3$ fazosining z o'qidan tashqari nuqtalarida Laplas tenglamasining yechimidir.

18.3.8 - misol. Sferik koordinatalar sistemasida (18.3.4 - misolga qarang) Laplas operatori, (18.3.26) formulaga ko'ra,

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (18.3.29)$$

ko'rinishga ega.

Bu ko'rinishdan foydalanib, barcha sferik simmetrik garmonik funksiyalarni, ya'ni Laplas tenglamasining faqat koordinatalar bo'shigacha masofaga bog'liq yechimlarini topamiz. Shunday qilib, $U = v(r)$ va

$$\Delta v(r) = 0$$

bo'lsin. (18.3.29) ga ko'ra,

$$[r^2 v'(r)]' = 0.$$

Demak,

$$v'(r) = \frac{C}{r^2}$$

va, bundan chiqdi,

$$v(r) = \frac{C_1}{r} + C_2, \quad (18.3.30)$$

bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslardir. Agar $C_1 \neq 0$ bo'lsa, bu funksiya $\mathbb{R}^3$ fazosining koordinatalar boshidan tashqari nuqtalarida Laplas tenglamasining yechimidir.

Eslatma. (18.2.6) tenglik bilan Laplas operatori ixtiyoriy silliq skalyar maydon uchun aniqlanadi. Agar $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ vektor maydon bo'lib, uning komponentalari ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$$

deb hisoblanadi, ya'ni vektor maydon Laplasiani yana vektor maydon tashkil qiladi.

Istalgan silliq A vektor maydon uchun

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (18.3.31)$$

ayniyatning haqligi bevosita hisoblash orqali ko'rsatiladi. Bu ayniyatni ham vektor maydon Laplasianini ta'riflash uchun asos qilib olish mumkin.

18.4-§. Potensial va solenoidal maydonlar

Maydon nazariyasidagi asosiy differensiallash operatsiyalarining o'zaro bog'liqligi §18.2 da qayd etilgan edi ((18.2.11) va (18.2.12) formulalarga qarang). (18.2.11) formulaga ko'ra, istalgan $U(x, y, z)$ skalyar maydon uchun $\mathbf{E} = \text{grad } U$ vektor maydon rotori nolga teng:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot grad } U \equiv 0. \quad (18.4.1)$$

(18.2.12) formulaga ko'ra esa, istalgan $\mathbf{A}$ vektor maydon uchun $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ vektor maydon divergensiyasi nolga teng:

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0. \quad (18.4.2)$$

Bu ayniyatlarga e'tibor bersak, keltirilgan tasdiqlarning teskarisi ham o'rinli degan, matematik nuqtaiy nazardan tabiiy bo'lgan taxmin tug'uladi. Bu taxmin aslida to'g'ri bo'lib, uning fizik ma'nosi elektr va magnetizm nazariysida aniqlanadi.

1. Potensial maydonlar. Ta'rif. Agar $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektor maydon uchun shunday $U(\mathbf{r})$ skalyar maydon topilib,

$$\mathbf{E} = \text{grad } U \quad (18.4.3)$$

tenglik bajarilsa, u *potensial maydon* deyiladi.

Bunda $U(\mathbf{r})$ skalyar maydon $\mathbf{E}$ vektor maydonning *potensial* deyiladi.

18.4.1 - teorema. Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ soha biror nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lsin. $\mathbf{E}$ vektor maydonning Ω sohada potensial bo'lishi uchun bu sohada

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (18.4.4)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. 1) Zarurligi bevosita (18.4.1) ayniyatdan kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $\mathbf{E}$ vektor maydon potensial bo'lsa, ya'ni (18.4.3) ko'rinishga ega bo'lsa, u holda (18.4.4) shart (18.4.1) bilan ustma-ust tushadi.

2) Yetarliligi. $\mathbf{E} = (P, Q, R)$ vektor maydon (18.4.4) shartni qanoatlantirsin, deylik. U holda, rotor ta'rifiga ko'ra,

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (18.4.5)$$

Shunday ekan, qaralayotgan sohaning yulduzli ekanini hisobga olib, biz 16.6.3 - teoremani qo'llashimiz mumkin. Bu teoreмага ko'ra, $\mathbf{E}$ vektor maydon potensialdir.



Eslatma. Vektor maydonning $U(\mathbf{r})$ potentsiali o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida aniqlanadi, ya'ni ixtiyoriy boshqa potentsial $U(\mathbf{r}) + C$ ko'rinishga egadir.

Haqiqatan, agar $\mathbf{E} = \text{grad } U_1 = \text{grad } U_2$ bo'lsa, u holda

$$\text{grad } [U_1(\mathbf{r}) - U_2(\mathbf{r})] = 0.$$

Demak, 12.1.3 - teorema ko'ra, $U_1(\mathbf{r}) - U_2(\mathbf{r}) = \text{const.}$

18.4.1 - misol. Kulon qonuniga ko'ra, koordinatalar boshida joylashgan q nuqtali elektrik zaryad, masofa kvadratiga teskari proporsional ravishda nolga intiluvchi va markazga yo'naltirilgan $\mathbf{F}$ kuch maydonini vujudga keltiradi:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (18.4.6)$$

Bu vektor maydonining potentsial ekanini ko'rish qiyin emas. Haqiqatan, agar $U(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}|}$ desak,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad } U(\mathbf{r}).$$

$U(\mathbf{r})$ skalyar maydon Kulon potentsiali deb ataladi.

2. Solenoidal maydonlar. Ta'rif. Agar $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ vektor maydon uchun shunday $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektor maydon topilib,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (18.4.7)$$

tenglik bajarilsa, u *solenoidal* maydon deyiladi.

Bunda $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektor maydon $\mathbf{H}$ maydonning vektor potentsiali deyiladi.

18.4.2 - teorema. $\mathbf{H}$ vektor maydonning

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2, c_1 < z < c_3\}$$

sohada solenoidal bo'lishi uchun bu sohada

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (18.4.8)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. 1) *Zarurligi* bevosita (18.4.2) ayniyatdan kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $\mathbf{H}$ vektor maydon solenoidal bo'lsa, ya'ni u (18.4.7) ko'rinishga ega bo'lsa, u holda (18.4.8) shart (18.4.2) ayniyat bilan ustma-ust tushadi.

2) *Yetarliligi.* $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ vektor maydon (18.4.8) shartni qanoatlantirsin, deylik. Shunday $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ maydon topaylikki, u uchun (18.4.7) tenglik bajarilsin. Bunday vektor maydonlar aslida cheksiz ko'p. Shuning uchun biz inkon darajasida eng soddasini, masalan, oxirgi komponentasi nolga teng bo'lganini, ya'ni $\mathbf{A} = (A_1, A_2, 0)$ ko'rinishdagisini topamiz. Bu degani, Ω sohasining har bir nuqtasida $\mathbf{A}$ vektor Oxy koordinata tekisligida yotadi.

Ixtiyoriy ravishda (a_1, a_2) intervaldan a sonini va (c_1, c_2) intervaldan c sonini tanlab,

$$A_1(\mathbf{r}) = \int_c^z H_2(x, y, t) dt$$

va

$$A_2(\mathbf{r}) = \int_a^x H_3(s, y, c) ds - \int_c^z H_1(x, y, t) dt$$

deymiz.

U holda, vektor maydon rotorining ta'rifiga ko'ra,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \\ = \left(H_1(\mathbf{r}), H_2(\mathbf{r}), H_3(x, y, c) - \int_c^z \left[\frac{\partial H_1(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial H_2(x, y, t)}{\partial y} \right] dt \right). \end{aligned} \quad (18.4.9)$$

(18.4.8) shartga ko'ra $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ bo'lgani uchun,

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} = - \frac{\partial H_3}{\partial z}.$$

Shunday ekan, (18.4.9) vektorning oxirgi komponentasi uchun

$$H_3(x, y, c) + \int_c^z \frac{\partial H_3(x, y, t)}{\partial z} dt = H_3(x, y, z)$$

tenglik o'rinli (oxirgi tenglikni olish uchun biz Nyuton-Leybnits formulasini qo'lladik). Bu munosabatni hisobga olsak, (18.4.9) tenglik talab qilingan rot $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ ko'rinishga keladi.



1 - eslatma. 18.4.1 - teoremaga asosan, solenoidal maydonning $\mathbf{A}$ vektor potentsiali maydon potentsialidan iborat ixtiyoriy qo'shiluvchi aniqligida aniqlanadi, ya'ni har qanday boshqa vektor potentsiali $\tilde{\mathbf{A}}(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) + \nabla\varphi(x, y, z)$ ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda φ silliq skalyar maydondir.

2 - eslatma. Magnit maydonining vektor maydoni ekanligi naycha ko'rinishidagi silindrik metal spiraldan o'tayotgan elektr toki harakati o'rganilganda aniqlangan. Bunday tok o'tkazuvchi spiral birinchi marta fransuz fizik olimi A. Amper tomonidan yasalgan bo'lib, u solenoid nomini olgan (yunoncha $\sigma\omega\lambda\eta\nu\omicron\epsilon\iota\delta\acute{\epsilon}\zeta$ — uaysimon degani). Solenoid vujudga keltirayotgan magnit maydon divergensi-yasi nolga teng. Keyinroq har qanday magnit maydoni shunday xossaga ega ekani, ya'ni har qanday magnit maydoni solenoidal bo'lishi isbotlandi.

3. Nyuton potentsiali. Butun $\mathbb{R}^3$ fazosida silliq bo'lib, cheksizlikda tez noiga intiluvchi $\rho(x, y, z)$ funsiyani qaraymiz. Eslatib o'tamiz,

$$U(x, y, z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (18.4.10)$$

funksiya *Nyuton* yoki *hajm* potentsiali deb, ρ funksiya esa, potentsial zichligi deb ataladi.

17.5.1 - teorema asosan, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi istalgan $\rho(x, y, z)$ funksiya uchun $U(x, y, z)$ hajm potentsiali ham ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lib,

$$\Delta U(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z) \quad (18.4.11)$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Bu yerda $\Delta = \text{div grad}$, ya'ni Laplas operatoridir.

Hajm potentsialining bu xossasidan foydalanib, har qanday vektor maydonini potentsial va solenoidal maydonlar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkinligini isbotlaymiz.

18.4.3 - teorema (H. Helmholtzs). *Har qanday silliq $\mathbf{F}$ vektor maydonini*

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{H} \quad (18.4.12)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\mathbf{E}$ potentsial maydon bo'lib, $\mathbf{H}$ esa, solenoidal maydondir.

Isbot. Faraz qilalylik, $\mathbf{F}(x, y, z)$ silliq vektor maydoni berilgan bo'lsin. (18.4.10) formulada

$$\rho(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{F}(x, y, z)$$

deb,

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{div } \mathbf{F}(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

hajm potentsialini qaraymiz.

Hajm potentsialining asosiy (18.4.11) xossasiga ko'ra,

$$\Delta U(x, y, z) = \text{div } \mathbf{F}(x, y, z).$$

Agar

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$$

desak, ta'rifga ko'ra, $\mathbf{H}$ potentsial maydon bo'lib,

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div grad } U = \Delta U = \text{div } \mathbf{F}$$

tengliklar bajariladi.

Nihoyat,

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} - \mathbf{H}$$

deylik. U holda $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{F} - \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ va bundan chiqdi, 18.4.2 - teoreмага ko'ra, $\mathbf{E}$ solenoidal maydondir.



1 - eslatma. Istalgan vektor maydonni potensial va solenoidal maydonlar yig'indisi qilib yozish o'zaro bir qiymatli emas. Agar $\mathbf{P}(x, y, z)$ vektor maydon bir vaqtning o'zida ham potensial, ham solenoidal maydon bo'lsa, ya'ni

$$\operatorname{rot} \mathbf{P} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{P} = 0 \quad (18.4.13)$$

tengliklarni qanoatlantirsa, u *garmonik* maydon deyiladi.

Ravshanki, (18.4.12) yoyilmada $\mathbf{E}$ potensial maydondan ixtiyoriy $\mathbf{P}$ garmonik maydonni ayirib, xuddi shu garmonik maydonni $\mathbf{H}$ solenoidal maydonga qo'shish mumkin.

(18.3.31) ayniyat va (18.4.13) tenglikka ko'ra, garmonik vektor maydon

$$\Delta \mathbf{P} = 0 \quad (18.4.14)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Yuqoridagi mulohazalarga asosan, har qanday $\mathbf{P}$ garmonik maydon

$$\mathbf{P} = \operatorname{grad} \psi$$

ko'rinishga ega, bunda ψ garmonik funksiyadir, ya'ni u Laplas tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\Delta \psi(x, y, z) = 0.$$

2 - eslatma. 18.4.3 - teoremadan har qanday $\mathbf{F}$ vektor maydonni

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi$$

kabi yozish mumkinligi kelib chiqadi. Bunda $\mathbf{A}$ vektor maydon $\mathbf{F}$ maydonning vektor potentsiali va φ esa, skalyar potentsiali deyiladi.

18.5-§. Maksvell tenglamalari

1. 1831 yilda ingliz fizik-tajribachisi Maykl Faradey, gidro elektr stansiyasidan tortib to atom elektr stansiyasigacha elektr tokini ishlab chiqaruvchi barcha zamonaviy generatorlar ishlash prinsipi asosida yotuvchi, elektromagnit induksiya hodisasini kashf qildi. Faradey elektr va magnit hodisalarni bitta fizik ob'ektnining turli xossalarni namoyon bo'lishi deb hisobladi. Bu ob'ektni u *elektromagnit maydon* deb atadi. O'ttiz yildan so'ng Shotlandiyalik olim J. K. Maksvell, elektromagnit induksiyani tushuntirish maqsadida, muhitni elektr va magnit xossalari o'zgarishining matematik qonuniyatlarini tadqiq qildi. Buning uchun Maksvell ikki vektor maydonni, ya'ni $\mathbf{E}$ elektr maydonni va $\mathbf{H}$ magnit maydonni o'rgandi.

Bu vektor maydonlarning har biri uch fazoviy o'zgaruvchi va vaqtga bog'liq, ya'ni ular to'rt haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasidir:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t).$$

Elektromagnit maydon deganda qayd etilgan ikki vektor maydonning majmui tushuniladi. Bu maydon zaryadlangan zarrachaga (agar zarracha elektr zaryadiga ega bo'lmasa, u holda elektromagnit maydon unga ta'sir o'tkazmaydi) qayd etilgan ikki maydon vujudga keltirgan kuch ta'siri natijasida namoyon bo'ladi.

Tajribada aniqlanishicha, vakuumda $\mathbf{v}$ tezlik bilan harakatlana-yotgan q zaryadga ta'sir qiluvchi $\mathbf{F}$ kuch

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \quad (18.5.1)$$

ga teng, bu yerda c yorug'lik tezligidir. Bunda $\mathbf{F}$ kuchni *Lorens kuchi* deb atashadi.

Elektromagnit maydonini to'la tavsiflash uchun ρ elektr zaryadi zichligini (ya'ni birlik hajmdagi zaryadlar soni) va $\mathbf{J}$ elektr toki zichligini (birlik vaqt ichida birlik yuzadan o'tuvchi elektr zaryadlar miqdori) kiritish zarur.

Elektromagnit maydonining yuqorida qayd etilgan barcha xarakteristiklari vakuumda Maksvellning to'rtta tenglamasi bilan bog'langan. Bu tenglamalar Gauss absolyut birliklari deb ataluvchi sistemada quyidagi ko'rinishga ega:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (18.5.2)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (18.5.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (18.5.4)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \quad (18.5.5)$$

Maksvell tenglamalari tajriba usulida topilgan fizik qonunlarning matematik formasi bo'lib, ular quyidagilardan iborat:

(18.5.2) tenglama — Amper va Bio-Savar qonuni,

(18.5.3) tenglama — Faradey qonuni,

(18.5.4) tenglama — Kulon qonuni,

(18.5.5) tenglama — magnit zaryadlari qatnashmasligining tasdiqi.

Bu qonunlarning ba'zi natijalarini biz navbatdagi bandlarda keltiramiz.

Birinchi (18.5.2) tenglamaning o'ng tarafiga $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ tok siljishini qo'shilishi Maksvell kashfiyotlaridan biri bo'lib, natijada tenglamalar na faqat simmetrik ko'rinishga keldi, balki ular orasidagi o'zaro qarana-qarshilik ham yo'qoldi.

2. Sodda natija sifatida, (18.5.2) va (18.5.4) Maksvell tenglamalari va (18.2.12) ayniyatdan quyidagi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

uzluksizlik tenglamasini olish qiyin emas (*elektr zaryadining saqlanish qonuni*).

Bu tenglamani

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}$$

ko'rinishda yozib, (18.2.13) formulani hisobga olsak, uzluksizlik tenglamasini quyidagicha o'qish mumkin: *biror jismda zaryad zichligining kamayishi bu jismdan chiquvchi zaryad oqimiga teng*.

Maksvell tenglamalarining yana bir natijasi sifatida, elektr maydoni qanoatlantiruvchi differensial tenglamani keltirib chiqaramiz. (18.5.2) va (18.5.3) tenglamalarga ko'ra,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (18.5.6)$$

Endi, (18.2.12) ayniyat va (18.5.4) tenglamaga asosan,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 4\pi \nabla \rho - \Delta \mathbf{E}. \quad (18.5.7)$$

Oxirgi (18.5.6) va (18.5.7) tengliklarni taqqoslasak,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - 4\pi c^2 \nabla \rho \quad (18.5.8)$$

tenglikka kelamiz.

Agar tok va zaryad qatnashmasa, ya'ni $\mathbf{J} = 0$ va $\rho = 0$ bo'lsa, (18.5.8) dan elektr maydoning *to'liqin tenglamasini* qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E}. \quad (18.5.9)$$

Xuddi shu kabi magnit maydon uchun ham differensial tenglama keltirib chiqariladi.

Aytaylik, $f(t)$ ikki marta differensiallanuvchi bir o'zgaruvchili ixtiyoriy funksiya va $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ istalgan birlik vektor bo'lsin. U holda

$$u(x, y, z, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct) = f(k_1x + k_2y + k_3z - ct)$$

funksiya, ravshanki, to'liqin tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u. \quad (18.5.10)$$

Haqiqatan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(k_1x + k_2y + k_3z - ct)$$

va

$$\Delta u = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) f''(k_1x + k_2y + k_3z - ct) = f''(k_1x + k_2y + k_3z - ct).$$

Odatda, $u = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct)$ ko'rinishdagi yechim to'liqinli yechim deb ataladi. Agar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - ct_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - ct_2$ bo'lsa, ya'ni

$$\frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{t_2 - t_1} = c$$

tenglik o'rinli bo'lsa, to'liqinli yechimning $\mathbf{r}_1$ nuqtada va t_1 vaqt fursatidagi qiymati $\mathbf{r}_2$ nuqtada va t_2 vaqt fursatidagi qiymatiga teng bo'ladi.

Oxirgi tenglik bunday to'liqinuing $\mathbf{k}$ birlik vektori yo'nalishi bo'yicha tarqalish tezligi c yoruqlik tezligiga tengligini anglatadi. Bundan fundamental ahamiyatga ega bo'lgan quyidagi ikki natija olingan:

1) elektromagnit to'liqlari mavjud va ular yoruqlik tezligi bilan tarqaladi;

2) yoruqlik ham elektromagnit to'liqinidir.

Yorug'lik to'qlini uzunligidan katta to'qlin uzunligiga ega bo'lgan elektromagnit to'qlinlari (radio to'qlinlari) birinchi marta nemis fizigi Henrix Herts tomonidan (1888) vujudga keltirildi va detektirlandi. Radio to'qlini diapazonidagi elektromagnit to'qlinlarining amaliyotga tatbiqi Rossiyalik fizik A.C.Popov izlanishlaridan boshlandi.

Shuni aytish zarurki, elektromagnit to'qlinlari yordamida axborat uzatishdan foydalanuvchi zamonaviy texnologiyalarning barchasi Maksvell tenglamalarini matematik tahlil qilish natijasida paydo bo'lgan.

3. Elektrostatika va magnitostatika. Vaqtga bog'liq elektromagnit jarayonlarni o'rganuvchi fizik nazariya *elektrodinamika* deb ataladi. Bu nazariyaning matematik tavsifi (18.5.2)-(18.5.5) Maksvell tenglamalar sistemasi bilan beriladi.

Agar elektr va magnit maydonlarining vaqt bo'yicha o'zgarishi shunchalik kam bo'lsaki, ularni vaqtga bog'liqmas deb hisoblash mumkin bo'lsa, u holda Maksvell tenglamalar sistemasi sodda ko'rinishga keladi:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (18.5.11)$$

va

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \quad (18.5.12)$$

Natijada Maksvell sistemasi ikki o'zaro bog'liqmas (18.5.11) va (18.5.12) sistemalarga ajraladi. (18.5.11) sistema bilan tavsiflanadigan hodisalar *elektrostatikaga* va (18.5.12) sistema bilan tavsiflanadigan hodisalar esa, *magnitostatikaga* kiradi.

Bevosita (18.5.11) tenglamalardan o'zgarmas elektr maydonning potensial maydon ekani kelib chiqadi. Bundan chiqdi, o'zgarmas elektr maydon

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi(x, y, z)$$

ko'rinishga ega bo'lib, (18.5.11) dagi ikkinchi tenglama va Laplas operatori ta'rifidan

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Agar elektr maydon butun $\mathbb{R}^3$ fazoda qaralsa, elektr zaryadlar esa, ρ zichlik bilan taqsimlangan bo'lsa, u holda φ potensial (18.4.10) hajm potentsiali bilan ustina-ust tushadi, ya'ni

$$\varphi(x, y, z) = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Parametrga bog'liq bo'lgan bu integralni formal ravishda differensiallasak,

$$\mathbf{E} = \nabla\varphi = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-\xi)\mathbf{i} + (y-\eta)\mathbf{j} + (z-\zeta)\mathbf{k}}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (18.5.13)$$

tenglikni olamiz.

Bundan va (18.5.1) tenglikdan, xususan, berilgan elektr maydonning elektr zaryadga ta'sir kuchi Kulon qonuniga bo'ysunishi kelib chiqadi. Shunday qilib, Kulon qonuni Maksvell tenglamalarining natijasi ekan.

4. (18.5.5) tenglamaga ko'ra, magnit maydon doim solenoidal bo'lib, u

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

ko'rinishga ega. (18.5.12) dagi birinchi tenglamadan esa, (18.3.20) ayniyatga ko'ra,

$$\Delta \mathbf{A} = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

munosabat kelib chiqadi. Bundan, xuddi elektr maydon holidagidek,

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (18.5.14)$$

tenglikni olamiz.

Agar $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ simvol bilan

$$\mathbf{R} = (x-\xi)\mathbf{i} + (y-\eta)\mathbf{j} + (z-\zeta)\mathbf{k}$$

vektorni belgilab, parametrğa bog'liq (18.5.14) integralni formal ravishda differensiallasak,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{[\mathbf{J}, \mathbf{R}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (18.5.15)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu tenglik va (18.5.1) formuladan, xususan, $\mathbf{J}$ zichlikka ega bo'lgan o'zgarmas tokni vujudga keltiruvchi, harakatdagi elektr zaryadlariga berilgan magnit maydonning ta'sir kuchi, Bio-Savar qonuni deb tanilgan, qomunga bo'ysunishi kelib chiqadi. Shunday qilib, tajriba usulida topilgan Bio-Savar qonuni ham Maksvell tenglamalari-ning natijasi ekan.

18.6-§. Misollar

1 - misol. Agar skalyar maydon $u = xz - y^2$ funksiya bilan berilgan bo'lsa, $M(-9, 10, 12)$ nuqtada grad u ning qiymatini va yo'nalishini toping. Berilgan skalyar maydonning xOz koordinata burchagi bissektrisasi yo'nalishi bo'yicha hosilasini hisoblang.

Ko'rsatma. Gradient (18.1.4) formula yordamida topiladi. Har qanday $\mathbf{v}$ vektor yo'nalishi $\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$ formula orqali aniqlanadi. Agar τ koordinata boshidan xOz koordinata burchagi bissektrisasi bo'yicha yo'nalgan birlik vektor bo'lsa, $\tau = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ tenglik o'rinli. Bu yo'nalish bo'yicha hosilani (12.1.31) formula yordamida hisoblang.

2 - misol. Quyidagi

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y - \mathbf{k}z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

vektor maydon divergensiyasining $M(7, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ nuqtadagi qiymatini toping.

Ko'rsatma. (18.2.2) formuladan foydalaning.

3 - misol. Agar u skalyar maydon bo'lsa, $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$ ni toping.

Ko'rsatma. Divergensiya va gradient ta'riflari hamda ko'paytmani differensiallash qoidasidan foydalaning.

4 - misol. Agar vektor maydon

$$\mathbf{v} = \frac{y}{z} \mathbf{i} + \frac{z}{x} \mathbf{j} + \frac{x}{y} \mathbf{k}$$

funksiya bilan berilgan bo'lsa, $M(1, 2, -2)$ nuqtada $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ ning qiymatini va yo'nalishini toping.

Ko'rsatma. (18.2.8) formuladan foydalaning.

5 - misol. Umumlashgan qutb koordinatalari:

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

quyidagi

$$x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \theta, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \theta, \quad z = cr \sin^\beta \theta$$

formulalar yordamida kiritiladi. Bu yerda a, b, c, α va β parametrlar noldan farqli o'zgarmaslardir.

Umumlashgan qutb koordinatalari uchun urinma vektorlarni toping. Parametrlarning qanday qiymatlarida urinma vektorlar o'zaro ortogonal bo'lishini aniqlang. Urinma vektorlar ortogonal bo'lgan holda Lamé koeffitsiyentlarini toping.

Ko'rsatma. Urinma vektorlarni (18.3.1) formula bo'yicha hisoblab, (18.3.2) shart bajarilishini tekshiring. Lamé koeffitsiyentlarini (18.3.4) formulalar yordamida hisoblang.

6 - misol. Umumlashgan silindrik koordinatalari:

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

quyidagi

$$x = a \rho \cos^\alpha \varphi, \quad y = b \rho \sin^\alpha \varphi, \quad z = z$$

formulalar yordamida kiritiladi. Bu yerda a, b va α parametrlar noldan farqli o'zgarmaslardir.

Umumlashgan silindrik koordinatalari uchun urinma vektorlarni toping. Parametrlarning qanday qiymatlarida urinma vektorlar o'zaro ortogonal bo'lishini aniqlang. Urinma vektorlar ortogonal bo'lgan holda ham (18.3.10) tenglik o'rinli bo'ladimi?

Ko'rsatma. Urinma vektorlarni topish va ulani ortogonallikka tekshirish xuddi 5 - misoldagi kabi analga oshiriladi. Umumiy holda (18.3.10) tenglikni tekshirish uchun bevosita uning ikki tomonida turgan ifodani hisoblang.

7 - misol. Silindrik koordinatalarda $u = \rho \cos \varphi + z \sin^2 \varphi - 3\rho$ funksiya bilan berilgan skalyar maydon gradientini toping. So'ngra hosil bo'ldan vektor maydonning divergensiyasini hisoblang.

Ko'rsatma. Gradientni 18.3.1 - teorema yordamida hisoblang (18.3.3 - misolga qarang). Divergensiyani hisoblash uchun esa, 18.3.2 - teoremani qo'llang (18.3.5 - misolga qarang).

8 - misol. $\mathbf{v} = (2r + a \cos \varphi, -a \sin \theta, r \cos \theta)$ sferik koordinatalar bilan berilgan vektor maydon rotorini hisoblang.

Ko'rsatma. 18.3.3 - teoremani qo'llang.

9 - misol. Agar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bo'lib, $u = f(r)$ skalyar maydon berilgan bo'lsa, $\text{div}(\text{grad } u)$ ni toping. Qanday $f(r)$ funksiyalar uchun $\text{div}(\text{grad } u) = 0$ bo'lishini aniqlang.

Ko'rsatma. Δ Laplas operatorining (18.2.6) ta'rifi va 18.3.4 - teoremadan foydalaning.

10 - misol. $\mathbf{E} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$ ko'rinishda berilgan vektor maydonning potensial maydon ekanini ko'rsating va potensialni toping.

Ko'rsatma. Berilgan maydonning potensial maydon ekaniniga 18.4.1 - teorema yordamida ishonch hosil qiling. So'ngra, ta'rifga

so'ra o'rinli bo'lgan

$$\mathbf{E} = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$$

tenglikdan φ potensialni toping.

19-bob. Furiye integrali

19.1-§. Furiye almashtirishi

1. Kirish.

Bizni o'rab turgan olamdagi ko'p hodisalar davriy xarakterga ega, yoki ularni davriy jarayonlar superpozitsiyasi deb tasavvur qilish mumkin. Eng sodda davriy jarayon *garmonik tebranish* deb atalib, uning vaqtga bog'liqligi

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

ko'rinishdagi funksiya bilan ifodalanadi. Bu bog'liqlik kompleks ko'rinishda

$$u(t) = C_1(\omega)e^{i\omega t} + C_2(\omega)e^{-i\omega t}$$

kabi yoziladi.

Turli davrga ega bo'lgan sodda davriy jarayonlarning superpozitsiyasi

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ko'rinishdagi integrallarni o'rganishga olib keladi.

Deyarli har qanday funksiyaning shunday integral ko'rinishida yozilish mumkinligi, ya'ni uni cheksiz sonli garmonik tebranishlar yig'indisiga yoyilishi, ham kutilmagan, ham ajoyib fakt bo'ldi. Albatta, yuqoridagi integral ko'rinishda yozilish mumkin bo'lgan funksiyalar sinfi bu xosmas integralni qanday tushinishimizga bog'liq.

Bu xildagi integrallar birinchi marta Fransuz matematigi J.B. Furye tomonidan XIX asrning boshida o'rganildi va keyinchalik *Furye integrali* deb atala boshlandi. XX asrga kelib Furye integral-lari bizni o'rab turgan olamni o'rganishda eng muhim qurolga ay-landi va turli matematik modellarda keng foydalanila boshlandi. Furye integraliga yoyilishni o'rganadigan matematik nazariya *gar-monik tahlil* degan nom oldi.

Ushbu bobda $\mathbb{R}$ sonlar o'qida aniqlangan va kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyalar, ya'ni

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

ko'rinishdagi funksiyalar o'rganiladi, bu yerda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ - haqiqiy o'zgaruvchining haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyalaridir. Tad-biqlarda ko'pincha $f_2(x) \equiv 0$ bo'ladi.

$\mathbb{R}$ sonlar o'qida aniqlangan f funksiyaning navbatdagi

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (19.1.1)$$

integral almashtirishini kiritamiz.

Bunda $\hat{f}$ funksiya f ning *Furye almashtirishi* deb ataladi. Bizn-ing galdagi maqsadimiz yetarlicha silliq funksiyalarni quyidagi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.1.2)$$

Furye integrali ko'rinishida yozish mumkinligini ko'rsatishdan ibo-rat.

Agar bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi tur xosmas in-tegral yaqinlashsa, u holda f funksiya Furye integraliga yoyiladi deyiladi. (19.1.2) integral yana *teskari Furye almashtirishi* deb ham ataladi.

Umumiy holda qayd qilingan xosmas integral Koshi bosh qiymati ma'nosida tushuniladi, ya'ni quyidagi

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

limit deb aniqlanadi.

Agarda o'ng tarafdagi integral ostida $\widehat{f}$ ni uning (19.1.1) qiymati bilan almashtirsak, so'ngra integrallar tartibini o'zgartirib, yangi o'zgaruvchilarga o'tsak (keyingi paragrafdagi (19.2.3) formulaga qarang), ushbu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} f\left(x + \frac{t}{\lambda}\right) dt$$

muhim munosabatni olishimiz mumkin.

Agar formal ravishda f funksiyani o'zgarimas deb olsak, u holda, (17.2.48) formulaga ko'ra, o'ng taraf $f(x)$ ga teng bo'ladi. Bundan, umumiy holda ham, ya'ni istalgan uzluksiz funksiya uchun o'ng tomonning $\lambda \rightarrow +\infty$ dagi limiti $f(x)$ funksiyaga teng bo'lishi kerak, degan tahminga ega bo'lamiz. Darhaqiqat, agar $\sin t/t$ funksiya absolyut integrallanuvchi bo'lganda edi, istalgan uzluksiz funksiya yoyilmasining tekis yaqinlashishi shu bilan isbotlangan bo'lar edi. Ammo, $\sin t/t$ funksiya absolyut integrallanuvchi emas albatta va tahminimizning isboti uchun berilgan funksiyaga silliqliqi haqida qo'shimcha shartlar qo'yishga to'g'ri keladi.

Shuni aytish kerakki, funksiyani Furiye integraliga yoyilish masalasini yetarlicha to'la hal qilish uchun mashhur matematiklarning bir yarim asr tinimsiz tadqiqoti talab qilindi. Biz eng sodda va shu bilan birga tatbiqlarning aksariyati uchun yetarli bo'lgan holni qarash bilan cheklanamiz. Buning uchun funksiyalarning yangi sinflarini kiritib, absolyut integrallanuvchi funksiya Furiye almashtirishini to'laroq o'rganishimiz zarur.

Ravshanki, Furiye almashtirishi korrekt aniqlangan bo'lishi uchun (19.1.1) integral istalgan $\xi \in \mathbb{R}$ larda yaqinlashishi kerak. Odatda, bu shart o'rinli bo'lishi uchun, f funksiyaning $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanishi talab qilinadi. Ushbu bobda biz o'rganilayotgan funksiyaga aynan shu talabni qo'yamiz.

Biz, asosan, (19.1.2) integralning Koshi bosh qiymati ma'nosida yaqinlashishini o'rganamiz. Buning uchun, albatta, $\widehat{f}(\xi)$ Furiye almashtirishning absolyut integrallanishini talab qilishga zaruriyat yo'q. Lekin, hisoblash algoritmlarini amalga oshirish uchun qanday hollarda $\widehat{f}(\xi)$ funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lishi muhim ahamiyatga ega. Shu sababdan, ushbu bobda biz bu masalaga ham e'tibor qaratamiz.

19.1.1 - misol. Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

funksiyaning Furiye almashtirishi topilsin.

Ta'rifga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} (\cos x\xi - i \sin x\xi) dx.$$

Agar toq va juft funksiyalardan simmetrik oraliqda olingan integrallar xossasini e'tiborga olib, (17.2.2) tenglikdan foydalansak,

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x\xi dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2} \quad (19.1.3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

19.1.2 - misol. Ushbu

$$f(x) = xe^{-\alpha|x|}$$

funksiyaning Furiye almashtirishi topilsin.

Ta'rifga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha|x|} (\cos x\xi - i \sin x\xi) dx .$$

Agar toq va juft funksiyalardan simmetrik oraliqda olingan integrallar xossasini e'tiborga olib, (17.2.2) tenglikdan foydalansak,

$$\widehat{f}(\xi) = -2i \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} \sin x\xi dx = -i \frac{4\alpha\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^2} \quad (19.1.4)$$

formulaga ega bo'lamiz.

19.1.3 - misol. Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}$$

funksiyaning Furye almashtirishi topilsin.

Bu funksiyaning juftligiga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos x\xi dx .$$

Demak, (17.2.18) formulaga asosan,

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\xi^2/4\alpha} . \quad (19.1.5)$$

2. Furye almashtirishi xossalari.

Eslatib o'tamiz, biz (19.1.1) tenglik yordamida Furye almashtirishni $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan, ya'ni

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \quad (19.1.6)$$

kattalik chekli bo'lgan funksiyalar uchun aniqlagan edik.

19.1.1 - tasdiq. Agar f funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda uning $\widehat{f}$ Furiye almashtirishi sonlar o'qida uzluksiz va chegaralangan funksiya bo'ladi:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1.$$

Isbot. Furiye almashtirishining chegaralanganligi bevosita (19.1.1) va (19.1.6) ta'riflar va $|e^{-ix\xi}| = 1$ ayniyatdan kelib chiqadi:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Ravshanki, (19.1.1) da integral ostidagi funksiya absolyut integrallanuvchi $|f(x)|$ funksiya bilan yuqoridan chegaralangan. Bu ba-ho parametr-ga bog'liq emas. Shu sababli, Veyershtrass alomatiga (17.2.1 - teoremaga qarang) ko'ra, (19.1.1) integral ξ parametr-ga nisbatan tekis yaqinlashadi. Demak, 17.2.4 - teoremaga asosan, Furiye almash-tirishi uzluksiz funksiyadir.

■

19.1.2 - tasdiq. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi f funksiya uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx = 0 \quad (19.1.7)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Istalgan $A > 0$ uchun quyidagi

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } |x| \leq A \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x| > A \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani aniqlaymiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday katta $A > 0$ sonni tanlaymizki, u uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_A(x)| dx < \varepsilon \quad (19.1.8)$$

baho bajarilsin. Birinchi tur xosmas integral ta'rifiga ko'ra, buni amalga oshirish mumkin.

$f_A(x)$ funksiya finit hamda xos ma'noda Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgani sababli, 10.8.3 - teorema ko'ra,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x+h) - f_A(x)| dx = 0. \quad (19.1.9)$$

Ravshanki,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f_A(x+h)| dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x+h) - f_A(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x) - f(x)| dx. \end{aligned}$$

O'ng tomondagi birinchi va uchunchi integrallar (19.1.8) integralga teng ekanini ko'rish qiyin emas. Demak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x+h) - f_A(x)| dx + 2\varepsilon.$$

Bundan chiqdi, (19.1.9) ga ko'ra,

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx \leq 2\varepsilon.$$

Endi $\varepsilon \rightarrow 0$ desak, talab qilingan (19.1.7) munosabatni olamiz. ■

Eslatma. (19.1.7) tenglik har qanday absolyut integrallanuvchi funksiya o'rtacha ma'noda uzluksiz ekanini anglatadi. Agar f funksiya lokal integrallanuvchi bo'lib, kvadrati $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, bu funksiyaning o'rta kvadratik ma'noda uzluksizligi, ya'ni

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (19.1.10)$$

tenglikning bajarilishi xuddi yuqoridagidek isbotlanadi.

19.1.3 - tasdiq. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan ixtiyoriy f funksiyaning Furiye almashtirishi barcha $\lambda \neq 0$ larda

$$|\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx \quad (19.1.11)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. Agar

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (19.1.12)$$

tenglikda integral ostidagi funksiyaning $e^{i\pi} = -1$ o'zgarishiga ko'paytirsak,

$$\widehat{f}(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda(x-\pi/\lambda)} dx$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu integralda yangi o'zgaruvchi sifatida $x - \pi/\lambda$ kattalikni olib, uni yana x deb belgilasak,

$$\widehat{f}(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{-i\lambda x} dx$$

tenglikka kelimiz. Hosil bo'lgan tenglikni (19.1.12) ga qo'shsak,

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] e^{-i\lambda x} dx$$

munosabatni olamiz.

Endi $|e^{-i\lambda x}| = 1$ ekanini hisobga olsak, bundan talab qilingan (19.1.11) tengsizlik kelib chiqadi.

■

19.1.1 - teorema. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan ixtiyoriy f funksiyaning Furiye almashtirishi uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\lambda) = 0 \quad (19.1.13)$$

tenglik o'rinli.

Isbot 19.1.2 - va 19.1.3 - tasdiqlardan kelib chiqadi. Buning uchun $h = \pi/\lambda$ deb, (19.1.11) va (19.1.7) formulalardan foydalanish kifoya.

1 - natija. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan har qanday f funksiya uchun quyidagi

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx = 0, \quad (19.1.14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx = 0 \quad (19.1.15)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot uchun (19.1.1) ta'rif va

$$e^{-ix\xi} = \cos x\xi - i \sin x\xi$$

ayniyatdan foydalanish yetarli.

2 - natija. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgan har qanday f funksiya uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0 \quad (19.1.16)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot uchun f funksiyani $[a, b]$ kesmadan tashqarida nol deb, $\mathbb{R}$ sonlar o'qiga davom ettirish kifoya.

Navbatdagi tasdiqda qarayotgan funksiya $[a, b]$ kesmada yotuvchi biror c nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lishi mumkin. Bunday g funksiyadan $[a, b]$ kesmada olingan ikkinchi tur xosmas integral quyidagi ikki limit yig'indisi sifatida aniqlanadi:

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \int_a^{c-\alpha} g(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow 0+0} \int_{c+\beta}^b g(x) dx. \quad (19.1.17)$$

Bunda g funksiya $c \in (a, b)$ nuqtani o'z ichiga olmagan har qanday $\Delta \subset [a, b]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanadi, deb faraz qilinadi.

19.1.4 - tasdiq. Faraz qilaylik, $g(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning $c \in (a, b)$ dan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan bo'lib,

$$\int_a^b |g(x)| dx \quad (19.1.18)$$

xosmas integral (19.1.17) tenglik ma'nosida yaqinlashsin. U holda

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x dx = 0 \quad (19.1.19)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot. Yetarlicha kichik $\delta > 0$ lar uchun barcha $x \in [a, b]$ larda aniqlangan

$$g_\delta(x) = \begin{cases} g(x), & \text{agar } |x - c| \geq \delta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x - c| < \delta \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (19.1.20)$$

funksiyani kiritamiz.

(19.1.18) xosmas integralning ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, u uchun

$$\int_a^b |g(x) - g_\delta(x)| dx < \varepsilon \quad (19.1.21)$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan chiqdi, agar

$$\int_a^b g(x) \cos \lambda x dx = \int_a^b [g(x) - g_\delta(x)] \cos \lambda x dx + \int_a^b g_\delta(x) \cos \lambda x dx$$

deb yozib olsak,

$$\left| \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \varepsilon(b-a) + \left| \int_a^b g_\delta(x) \cos \lambda x dx \right| \quad (19.1.22)$$

munosabatni olamiz.

g_δ funksiya $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgani uchun, u 19.1.1 - teoremaning 2 - natijasi shartlarini qanoatlantiradi. Shunday ekan, (19.1.22) da yuqori limitga o'tib,

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \varepsilon(b-a)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Nihoyat $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, bundan (19.1.19) dagi birinchi limitning nolga tengligini olamiz. Ikkinchi limitning nolga tengligi xuddi shu usulda ko'rsatiladi. ■

Eslatma. 19.1.4 - tasdiq B. Riman tomonidan isbotlangan. Keyinroq A. Lebeg bu tasdiqni hozirda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deb ataladigan funksiyalar uchun isbotladi. Matematik adabiyotlarda bu olimlar isbotlagan tasdiq *Riman-Lebeg lemmasi* deb ataladi. Bu lemmaning 19.1.4 - tasdiq ko'rinishidagi dastlabki variantini ham biz shu nom bilan ataymiz.

19.1.4 - misol. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya $[-1, 1]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda istalgan $\alpha > 0$ uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |x|^{\alpha-1} \varphi(x) \sin \lambda x \, dx = 0 \quad (19.1.23)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra, $\varphi(x)$ funksiya $[-1, 1]$ kesmada chegaralangan. Bundan chiqdi,

$$|x|^{\alpha-1} |\varphi(x)| \leq C |x|^{\alpha-1}.$$

Taqqoslashning xususiy alomati hamda Riman-Lebeg lemmasini (ya'ni 19.1.4 - tasdiqni) qo'llab, talab qilingan (19.1.23) tenglikka ega bo'lamiz.

19.2-§. Furiye integral formulasi

1. Ushbu paragrafdagi asosiy maqsadimiz (19.1.2) tenglikni imkon darajada kengroq f funksiyalar sinfi uchun isbotlashdan iborat. Barcha qaralayotgan funksiyalarni $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi deb faraz qilamiz.

E'tibor bering, xatto tez kamayuvchi funksiyalar uchun ham qayd etilgan tenglikning o'ng tarafidagi integral absolyut yaqinlashmasligi mumkin. Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (19.2.1)$$

funksiya finit bo'lishiga qaramasdan, uning Furiye almashtirishi

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = 2 \int_0^1 \cos x\xi dx = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}$$

ko'rinishda bo'lib, u $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi emas.

Umumiy holda (19.1.2) Furiye integrali Koshi bosh qiymati ma'nosida tushuniladi:

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Furiye qismaniy integralini quyidagi

$$I_{\lambda} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.2.2)$$

ko'rinishda aniqlab, uning $\lambda \rightarrow +\infty$ dagi limitini o'rganamiz.

Avval (19.1.1) formuladan foydalanib, so'ngra integrallar tartibini o'zgartirsak,

$$\begin{aligned} I_{\lambda} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ix\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(x-y)\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f(y) dy \end{aligned}$$

munosabatni olamiz. Endi $y = x + t$ almshtirish bajarib, Furiye qismaniy integrallari uchun, Furiye almshtirishi oshkor ravishda qatnashmagan, quyidagi

$$I_{\lambda}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt \quad (19.2.3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

2. Navbatdagi tasdiq (19.2.3) formuladagi xosmas integralni x nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofi bo'yicha olingan integral bilan almashtirish mumkinligini ko'rsatadi.

19.2.1 - teorema. *Ixtiyoriy $\delta > 0$ son uchun quyidagi*

$$I_{\lambda}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (19.2.4)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Agar

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{agar } |t| > \delta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |t| < \delta \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani kiritsak, shubhasiz, $|\psi(t)| \leq 1/\delta$ shart bajariladi va (19.2.3) integral

$$I_{\lambda}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \psi(t) \sin \lambda t dt$$

ko'rinishga keladi.

Ravshanki, $g(t) = f(x+t)\psi(t)$ funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgani uchun, (19.1.15) ga ko'ra, oxirgi integral nolga intiladi. ■

Natija. Agar $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi f_1 va f_2 funksiyalar x nuqtaning biror atrofida ustma-ust tushsa, u holda

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [I_{\lambda} f_1(x) - I_{\lambda} f_2(x)] = 0.$$

Haqiqatan, $f = f_1 - f_2$ funksiyaga (19.2.4) formulani qo'llaylik. Yetarlicha kichik $\delta > 0$ lar uchun f funksiya $(x - \delta, x + \delta)$ intervalda aynan nolga teng. Bundan chiqdi, (19.2.4) formulaning o'ng qismida-gi integral nolga aylanib, bu formula talab qilingan ko'rinishga keladi:

$$I_{\lambda} f_1(x) - I_{\lambda} f_2(x) = o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Eslatma. Bu natijadan quyidagi xulosa kelib chiqadi: Furiye integralining istalgan nuqtada yaqinlashishi yoki uzoqlashishi faqat shu nuqta atrofida funksiya o'zini qanday tutishiga bog'liq bo'lib, nuqtadan uzoqda funksiya qanday bo'lishiga bog'liq emas. Boshqacha aytganda, qayd etilgan yaqinlashish yoyilayotgan funksiyaning lokal xossalari bilan aniqlanadi. Ushbu xulosa Furiye integrallari uchun *Riman lokallashtirish prinsipi* degan nom bilan tanilgan.

3. (19.2.4) formula yordamida (19.2.2) qismaniy integrallarning f funksiyaga yaqinlashish shartlarini aniqlash mumkin. Avvalo shuni aytish kerakki, (17.2.48) formuladan ixtiyoriy tayinlangan $\delta > 0$ da o'rinli bo'lgan ushbu

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin u}{u} du = 1 + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

munosabat kelib chiqadi.

Bu munosabatni va

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt +$$

$$+ \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin t}{t} dt$$

ayniyatni (19.2.4) formulaga qo'llasak, quyidagi

$$I_{\lambda} f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (19.2.5)$$

asosiy tenglikni olamiz.

E'tibor bering, (19.2.5) tenglik sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi istalgan f funksiya va sonlar o'qidagi har qanday x nuqta uchun o'rinli.

4. (19.2.5) tenglikdan Furiye qisman integrallarining yoyilayotgan funksiyaga yaqinlashishi uchun (19.2.5) ni o'ng tomonidagi integralning nolga intilishi zarur va yetarli ekani kelib chiqadi. Riman-Lebeg lemmasiga (19.1.4 - tasdiq) ko'ra, bu integralning nolga intilishi uchun yetarli shart

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad (19.2.6)$$

funksiyaning $[-\delta, \delta]$ kesmada xosmas ma'noda absolyut integrallanuvchi bo'lishidan iborat. Ravshanki, bu shart bajarilishini tekshirish uchun funksiyaning $t = 0$ nuqta atrofida o'rganish kifoya. (19.2.6) kasr maxraji bu nuqtada nolga aylangani sababli, kasr integrallanuvchi bo'lishi uchun, suratning ham $t = 0$ nuqtada, masalan, biror $\alpha > 0$ bilan $|t|^{\alpha}$ kabi nolga aylanishi yetarli.

Agar shunday M , α va δ musbat sonlar topilsaki, $|t| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha t lar uchun

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^{\alpha} \quad (19.2.7)$$

baho bajarilsa, biz f funksiyaning $x \in \mathbb{R}$ nuqtada *Holder shartini qanoatlantiradi* deyimiz.

Agar f funksiya biror $x \in \mathbb{R}$ nuqtada Holder shartini qanoatlantirsa, (19.2.6) tenglik bilan aniqlangan $g(t)$ funksiya x nuqtaning biror δ -atrofida xosmas ma'noda absolyut integrallanuvchi bo'ladi. Haqiqatan, (19.2.7) shartga ko'ra,

$$|g(t)| \leq M \cdot |t|^{\alpha-1}$$

baho o'rinli, ya'ni $g(t)$ funksiya nolda integrallanuvchi maxsuslik-ka ega.

Demak, bunday funksiyalar uchun, Riman-Lebeg lemmasiga ko'ra, (19.2.5) ning o'ng qismidagi integral $\lambda \rightarrow +\infty$ da nolga intiladi.

Shunday qilib, biz navbatdagi tasdiq o'rinli ekanini ko'rsatdik.

19.2.2 - teorema. Agar $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi f funksiya $x \in \mathbb{R}$ nuqtada Holder shartini qanoatlantirsa, u holda shu nuqtada

$$\text{V. p. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x) \quad (19.2.8)$$

tenglik bajariladi.

Isbot bevosita (19.2.5) formula va yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadi.

Eslatma. Agar absolyut integrallanuvchi f funksiya x nuqtada faqat uzluksiz bo'lsa, u holda uning Furiye integralini shu nuqtada yaqinlashishi haqida xech gap aytib bo'lmaydi. Furiye integrali biror tayinlangan x nuqtada uzoqlashuvchi bo'lgan uzluksiz funksiyaga misollar XIX asrdayoq qurilgan. Shubhasiz, bunday funksiyalar uchun (19.2.6) kasr surati $t \rightarrow 0$ da nolga yetarlicha tez intilmaydi. Shunga qaramasdan, Shved matematigi I. Karleson istalgan uzluksiz funksiya Furiye integralining uzoqlashish nuqtalari to'plami u qadar ko'p bo'la olmasligini ko'rsatdi. Chunonchi, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun bunday nuqtalar to'plamini shunday sanoqli sondagi interval bilan qoplash mumkinki, ularning unumiy uzunligi ε dan oshmaydi.

5. Holder shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfi ancha katta. Masalan, agar f funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u ana shu nuqtada Holder shartini ixtiyoriy $\alpha \leq 1$ ko'rsatgich bilan qanoatlantiradi. Haqiqatan, funksiya differensiallanishi ta'rifiga ko'ra,

$$f(x+t) - f(x) = f'(x) \cdot t + o(t) = t[f'(x) + o(1)], \quad t \rightarrow 0.$$

Ravshanki, x nuqtaning biror $(x - \delta, x + \delta)$ atrofida $|f'(x) + o(1)| \leq M(x)$ baho o'rinli bo'lib, bu yerda M soni t ga bog'liq emas. Demak,

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M(x) \cdot t, \quad |t| < \delta.$$

Shubhasiz, bu bahodan (19.2.7) shartning istalgan $\alpha \leq 1$ da bajarilishi kelib chiqadi.

Bu mulohazalar 19.2.2 - teoremaning navbatdagi natijasi o'rinli ekanini ko'rsatadi.

Natija. Agar sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi f funksiya $x \in \mathbb{R}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtada (19.2.8) tenglik bajariladi.

19.2.1 - misol. Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

funksiya sonlar o'qining noldan farqli istalgan nuqtasida differensiallanuvchi. (19.1.3) formulaga ko'ra, uning Furye almashtirishi

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$$

ko'rinishga ega.

Shuning uchun, 19.2.2 - teoremadan istalgan $x \neq 0$ uchun

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos x\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi \quad (19.2.9)$$

tenglik kelib chiqadi.

Eslatma. Quyida isbotlanadigan 19.4.1 - teoremaga ko'ra, (19.2.9) Furiye integrali, aslida, barcha x larda (ya'ni $x = 0$ nuqtada ham) funksiya qiymatiga yaqinlashadi.

19.2.2 - misol. Ushbu

$$f(x) = xe^{-\alpha|x|}$$

funksiya sonlar o'qining har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lib, uning Furiye almashtirishi ((19.1.4) ga qarang)

$$\widehat{f}(\xi) = -4\alpha i \frac{\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^2}$$

ga teng.

19.2.2 - teoremaga ko'ra, istalgan $x \in \mathbb{R}$ uchun

$$xe^{-\alpha|x|} = \frac{-4\alpha i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{ix\xi}}{(\alpha^2 + \xi^2)^2} d\xi = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin x\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^2} d\xi \quad (19.2.10)$$

tenglik o'rinli.

19.2.3 - misol. Barcha nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lgan ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}$$

funksiyaning Furiye almashtirishi ((19.1.5) ga qarang)

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\xi^2/4\alpha}$$

ga teng.

Demak, (19.2.8) formulaga ko'ra,

$$e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - \xi^2/4\alpha} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/4\alpha} \cos x\xi d\xi. \quad (19.2.11)$$

Eslatma. 19.2.1 - 19.2.3 - misollarda Furiye integrali birinchi tur xosmas integral sifatida oddiy ma'noda yaqinlashadi. Shu sababli, integral oldiga bosh qiymat belgisi qo'yilmagan.

6. Faraz qilaylik, f funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qilsin. Agar Furiye almashtirishning (19.1.1) ta'rifida eksponentani quyidagi

$$e^{-ix\xi} = \cos x\xi - i \sin x\xi$$

Eyler formulasi bilan almashtirsak, u holda (19.1.1) tenglik

$$\hat{f}(\xi) = A(\xi) - iB(\xi) \quad (19.2.12)$$

ko'rinishga keladi, bunda

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x\xi dx \quad (19.2.13)$$

va

$$B(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x\xi dx. \quad (19.2.14)$$

$A(\xi)$ funksiya f funksiyaning *kosinus Furiye almashtirishi* va $B(\xi)$ esa, f funksiyaning *sinus Furiye almashtirishi* deb ataladi.

E'tibor bering, istalgan absolyut integrallanuvchi funksiya uchun uning kosinus Furiye almashtirishi juft funksiya bo'lib, uning sinus Furiye almashtirishi esa, toq funksiya bo'ladi.

(19.2.12) formulani (19.1.2) ga qo'yaylik:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\xi) - iB(\xi)](\cos x\xi + i \sin x\xi) d\xi.$$

Toq funksiya dan $\mathbb{R}$ sonlar o'qi bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lgani uchun, oxirgi tenglikda qavslarni ochib,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\xi) \cos x\xi + B(\xi) \sin x\xi] d\xi \quad (19.2.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(19.2.15) formula haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyaning Furiy integraliga yoyilmasidir.

Agar qaralayotgan funksiya juft bo'lsa, uning (19.2.15) yoyilmasi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos x\xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\xi) \cos x\xi d\xi \quad (19.2.16)$$

ko'rinishga keladi. Bunda (19.2.13) tenglikka ko'ra,

$$A(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos y\xi dy.$$

Nihoyat, bu formulani (19.2.16) yoyilmaga qo'yib, haqiqiy qiymat qabul qiluvchi juft funksiyaning Furiy integraliga yoyilmasi uchun

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos x\xi d\xi \int_0^{\infty} f(y) \cos y\xi dy \quad (19.2.17)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Xuddi shunga o'xshash, haqiqiy qiymat qabul qiluvchi toq funksiyaning Furiy integraliga yoyilmasini

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin x\xi d\xi \int_0^{\infty} f(y) \sin y\xi dy \quad (19.2.18)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Kompleks sonlar ishlatishni chekkalab o'tilmoqchi bo'lingan hollarda (19.2.17) va (19.2.18) yoyilmalardan keng foydalaniladi.

7. Faraz qilaylik, haqiqiy qiymat qabul qiluvchi f funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida emas, balki

$$\overline{\mathbb{R}_+} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

yarim to'g'ri chiziqda berilgan bo'lsin.

Bunday holda biz berilgan funktsiyani $\mathbb{R}$ sonlar o'qiga juft yoki toq qilib davom ettirib, yangi funktsiyaning Furiye integrali uchun mos ravishda (19.2.17) yoki (19.2.18) yoyilmalardan foydalanishimiz mumkin. Davom ettirish usuli Furiye almashtirish yordamida yechilishi kerak bo'lgan masalaga bog'liq. Odatda, agar f funktsiya $f(0) = 0$ shartni qanoatlantirsa, toq davom ettirish tanlanadi, bordini funktsiya $f'(0) = 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda juft davom ettirish tanlanadi. Ammo bunday tanlov majburiy emas, chunki funktsiyaga qo'yilgan boshqa talablar ham e'tirbora olinishi mumkin.

19.3-§. Bo'lakli-silliqlik funktsiyalarning Furiye integraliga yoyilishi

1. Bo'lakli-silliqlik funktsiyalarning Furiye integraliga yoyilmalari tatbiqlarda hammasidan ko'ra ko'p uchraydigan integral yoyilmalardan biridir. Eslatib o'tamiz, agar $[a, b]$ kesmada aniqlangan f funktsiya uchun shunday

$$P = \{a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b\}$$

bo'linish topilsaki, har bir (c_{k-1}, c_k) intervalda f funktsiya $[c_{k-1}, c_k]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan biror funktsiya bilan ustma-ust tushsa, f funktsiyani $[a, b]$ kesmada *bo'lakli-silliqlik* degan edik.

Bu ta'rifga ko'ra, f funktsiya chekli sondagi c_k nuqtalarda uzilishga ega bo'lishi mumkin, lekin bu uzilishlar faqat birinchi tur bo'la oladi. Bu degani, o'ng $f(c_k + 0)$ va chap $f(c_k - 0)$ limitlar mavjud bo'lsada, ular o'zaro teng bo'lmasligi mumkin. Bundan tashqari, bunday ta'riflashda hosilani bir taraffi $f'(c_k \pm 0)$ limitlarining mavjudligi kafolatlanadi.

Agar f funktsiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida aniqlangan bo'lib, sonlar o'qi-ning har bir kesmasida bo'lakli-silliqlik bo'lsa, biz uni bo'lakli-silliqlik deymiz.

Bo'lakli-silliq funksiyaga klassik misol $\text{sign } x$ funksiyadir. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida aniqlangan va cheksiz sondagi uzilish nuqtaga ega funksiyaga misol sifatida $f(x) = \text{sign } \sin x$ funksiyani olish mumkin.

Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, ixtiyoriy bo'lakli-silliq funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtasida Holder shartini qanoatlantiradi va shuning uchun, uning Furiye integraliga yoyilmasi funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga Koshi ma'nosida yaqinlashadi. Qizig'i shundaki, bo'lakli-silliq funksiyaning Furiye integrali xatto uning c uzilish nuqtasida ham yaqinlashadi va bunda quyidagi tenglik bajariladi:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_{\lambda} f(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}. \quad (19.3.1)$$

Bunga sabab shundaki, uzilish nuqtalarida na faqat funksiyaning o'zi, balki hosilasi ham bir taraffi limitlarga ega. Shu nuqtai nazar-dan, garmonik tahlil uchun xatto uzilishga ega bo'lakli-silliq funksiyalar uzluksiz funksiyalardan yaxshiroq ob'ekt hisoblanadi, chunki, yuqorida qayd etilganidek, uzluksiz funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasi ba'zi nuqtalarda uzoqlashishi ham mumkin.

(19.3.1) tenglik munosabati bilan birinchi tur uzilish nuqtalarida funksiya qiymatini aniqlash masalasi tug'iladi. Garmonik tahlil nuqtai nazaridan, qayd qilingan qiymatni bir taraffi limitlarning o'rtta arif-metigiga teng qilib, ya'ni

$$f(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2} \quad (19.3.2)$$

deb olish tabiiydir.

Bunday aniqlashda istalgan bo'lakli-silliq funksiya Furiye integrali bu funksiyaga barcha nuqtalarda yaqinlashishini quyida ko'rsatamiz.

Masalan, (17.1.21) formula bilan aniqlangan Hevisayd funksiyasini qaraylik:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Bu funksiya bo'lakli-silliq, lekin (19.3.2) shartni qanoatlantirmaydi. Bu shart bajarilishi uchun funksiyaning noldagi qiymatini $\chi(0) = 1/2$ deb aniqlash kifoya.

2. Bo'lakli-silliqlik f funksiyani ixtiyoriy c uzilish nuqta atrofi-da to'laroq o'rganaylik. Lagranj formulasiga ko'ra, yetarlicha kichik $t > 0$ uchun $c < \xi < c + t$ intervaldan

$$f(c+t) - f(c+0) = tf'(\xi) = O(t)$$

shartni qanoatlantiruvchi ξ son topiladi.

Shunga o'xshash, $c-t < \eta < c$ intervaldan shunday η topiladiki, u uchun

$$f(c-t) - f(c-0) = (-t)f'(\eta) = O(t)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu ikki munosabatni qo'shib,

$$\frac{f(c+t) + f(c-t)}{2} - \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2} = O(t)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Shunday ekan, (19.3.2) tenglikka ko'ra,

$$\frac{f(c+t) + f(c-t)}{2} = f(c) + O(t). \quad (19.3.3)$$

E'tibor bering, funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtada chap va o'ng limitlar funksiya qiymatiga teng bo'lib, bu nuqtalarda ham, tabiiyki, (19.3.2) tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, (19.3.3) munosabat na faqat uzilish nuqtalarida, balki barcha $c \in \mathbb{R}$ nuqtalarda bajariladi.

(19.3.3) munosabatning muhimligini hisobga olib, (19.2.5) asosiy tenglikni bo'lakli-silliqlik funksiyalar yoyilmasini o'rganishga qulayroq qilib o'zgartiramiz. Buning uchun tenglik o'ng tarafidagi integralni ikki integral yig'indisi qilib yozamiz:

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t \, dt = \\ &= \int_{-\delta}^0 \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t \, dt + \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t \, dt. \end{aligned} \quad (19.3.4)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integralda t ni $-t$ ga o'zgartirsak,

$$\int_{-\delta}^0 \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt = \int_0^{\delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt$$

munosabatni olamiz. Shuning uchun (19.3.4) ni

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt = \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin \lambda t dt$$

deb yozish mumkin.

Bundan chiqdi, (19.2.5) asosiy tenglik

$$I_{\lambda} f(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right] \frac{\sin \lambda t}{t} dt +$$

$$+ o(1), \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.3.5)$$

ko'rinishga keladi.

(19.3.5) formula va (19.3.3) munosabat navbatdagi tasdiqni isbotlashda asosiy rolni o'ynaydi.

19.3.1 - teorema. Agar $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan bo'lakli-silliqlik f funksiya uzilish nuqtalarida (19.3.2) munosabatni qanoatlantirsa, u holda

$$\text{V. p. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x) \quad (19.3.6)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. (19.3.3) munosabatga ko'ra,

$$g(t) = \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right] \cdot \frac{1}{t}$$

funksiya istalgan $0 < t \leq \delta$ yarim intervalda chegaralangan va shuning uchun, u $[0, \delta]$ kesmada xosmas ma'noda integrallanuvchi. Shunday ekan, Riman-Lebeg lemmasiga binoan,

$$\int_0^{\delta} g(t) \sin \lambda t dt = o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Demak, (19.3.5) asosiy tenglikka ko'ra,

$$I_{\lambda} f(x) = f(x) + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Bu esa talab qilingan (19.3.6) tenglik o'rinli ekanini anglatadi.



19.3.1 - misol. Ushbu

$$\phi(x) = (\operatorname{sign} x) \cdot e^{-|x|} \quad (19.3.7)$$

funksiyani qaraylik.

Bu funksiya toq bo'lgani uchun, uning Furiye almashtirishi

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign} x) \cdot e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = -2i \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\xi dx$$

kabi aniqlanadi.

Demak, (17.2.3) formulaga ko'ra,

$$\widehat{\phi}(\xi) = -\frac{2i\xi}{1 + \xi^2}.$$

Berilgan ϕ funksiya bo'lakli-silliqlik bo'lib, (19.3.2) shartni qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, 19.3.1 - teoremlarga asosan, har qanday $x \in \mathbb{R}$ ($x = 0$ uzilish nuqtasida ham) nuqtada

$$\phi(x) = \frac{-2i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{ix\xi}}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi$$

tenglik o'rinli.

Shunday qilib, qarayotgan funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasi

$$(\operatorname{sign} x) \cdot e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (19.3.8)$$

ko'rinishga ega.

3. Qismaniy Furiye integrallarini yoyilayotgan bo'lakli-silliqlik funksiya uzilish nuqtalari atrofida batafsilroq o'rganaylik. Bo'lakli-silliqlik funksiya uchun eng tipik misol sifatida birinchi tur uzilishga ega bo'lgan $\operatorname{sign} x$ funksiyani olish mumkin. Lekin bu funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi emas. Uni eksponensial ravishda nolga intiluvchi funksiyaga ko'paytirsak, 19.3.1 - misolda o'rganilgan ((19.3.7) formulaga qarang), $(\operatorname{sign} x)e^{-|x|}$ funksiyani olamiz. Bu funksiya avvalgiday nolda birinchi tur uzilishga ega bo'lib, endi $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'ladi. Uning Furiye integraliga yoyilmasi (19.3.8) ko'rinishda bo'lib, qismaniy integrallari uchun

$$I_{\lambda}\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi \quad (19.3.9)$$

tenglik o'rinli.

19.3.1 - teoreмага asosan, har bir $x \in \mathbb{R}$ nuqtada

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I_{\lambda}\phi(x) = (\operatorname{sign} x)e^{-|x|}$$

tenglik bajariladi.

Ravshanki, $x \rightarrow 0+0$ desak, o'ng taraf 1 ga intiladi. Shu sababli, bir vaqtning o'zida $\lambda \rightarrow \infty$ va $x \rightarrow 0+0$ bo'lsa ham, qismaniy integrallarning 1 ga intilishini kutish tabiiydir. Ammo, quyida ko'rsatilganidek, aslida bunday emas ekan.

(19.3.9) tenglikni

$$I_{\lambda}\phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{\sin x\xi}{\xi} d\xi - x\beta_{\lambda}(x) \quad (19.3.10)$$

ko'rinishda yozaylik, bunda

$$\beta_{\lambda}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{\sin x\xi}{x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi^2}.$$

Bu $\beta_{\lambda}(x)$ funksiyani

$$|\sin x\xi| \leq |x\xi|$$

tengsizlikdan foydalanib, baholaymiz:

$$|\beta_{\lambda}(x)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\lambda} \frac{\sin x\xi}{x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda \leq 1. \quad (19.3.11)$$

(19.3.10) integralda $t = x\xi$ almashtirish bajarib, (19.3.11) tengsizlikni hisobga olsak, $\lambda > 0$ ga nisbatan tekis ravishda bajariluvchi

$$I_{\lambda}\phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda x} \frac{\sin t}{t} dt + O(x) \quad (19.3.12)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Bundan keyingi mulohazalarimizda

$$S(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^u \frac{\sin t}{t} dt \quad (19.3.13)$$

funksiya xossalari muhim rol o'ynaydi.

Bu funksiya $u > 0$ da musbat bo'lib, (17.2.48) formulaga ko'ra, $u \rightarrow \infty$ da 1 ga intiladi va bundan tashqari, $u = \pi$ nuqtada maksimumga erishadi:

$$\gamma = \max_{u \geq 0} S(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du. \quad (19.3.14)$$

Agar (19.3.12) formulada $\lambda \rightarrow \infty$ va shu bilan bir vaqtda, $x \rightarrow 0$ bo'lsa, $x_\lambda = \pi/\lambda$ deb,

$$I_\lambda \phi(x_\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + O(x_\lambda) = \gamma + O(1/\lambda) \quad (19.3.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(19.3.14) da integral ostidagi funksiyani quyidan baholab, $\gamma > 1$ ekanini ko'rsatish qiyin emas. Demak,

$$\phi(x_\lambda) \rightarrow 1, \quad \text{ammo} \quad I_\lambda \phi(x_\lambda) \rightarrow \gamma > 1, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Bu aniqlangan effekt *Gibbs hodisasi* degan nom olgan.

Eslatma. (19.3.14) integralni biror taqribiy usul bilan hisoblab (8 - bobdagi §8.3 ni qarang),

$$S(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1,85193705...$$

ekanini ko'rsatish mumkin.

Demak,

$$\gamma = \frac{2}{\pi} \cdot S(\pi) = 1,1789797... \approx 1,18.$$

Shunday qilib, bo'lakli-silliqlik funksiya uzilish nuqtasi yaqinida uning Furiye integraliga yoyilmasi taxminan 18% og'ishlikka ega.

Zamonaviy garmonik tahlil tatbiqlarida paydo bo'lgan bunday og'ishlikni yo'qotish muammosi §19.5 da muhokama qilinadi.

19.4-§. Furiye integraliga yoyilmalarni differensiallash

1. Ushbu paragrafda funksiya Furiye almashtirishi bilan funksiya hosilasi orasidagi bog'liqlik o'rganiladi. Bundan buyon Df simvol bilan f funksiya hosilasini belgilaymiz, ya'ni

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

19.4.1 - tasdiq. Agar f funksiya va uning Df hosilasi $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda ularning Furiye almashtirishlari uchun

$$\widehat{Df}(\xi) = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi) \quad (19.4.1)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. $f' = Df$ hosila $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'lgani uchun, quyidagi

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra,

$$A = \lim_{a \rightarrow -\infty} f(a), \quad B = \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b)$$

limitlar mavjud.

Ravshanki, f ning $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi ekanidan $A = B = 0$ kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Bu tenglikni hisobga olib, Df hosila Furiye almashtirishini bo'laklab integrallash yordamida hisoblashimiz murakin:

$$\begin{aligned}\widehat{Df}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx = \\ &= f(x)e^{-ix\xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

■

Natija. Agar f funksiya va uning m - tartibgacha barcha $D^k f$ hosilalari $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda ularning Furiye almashtirishlari

$$\widehat{D^k f}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (19.4.2)$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Bu tenglik (19.4.1) formulani ketma-ket qo'llash yordamida isbotlanadi.

Eslatma. 19.4.1 - tasdiq absolyut integrallanuvchi f funksiya uzluksiz bo'lakli-silliqlik funksiya bo'lganda ham o'rinli. Bu holda ham bo'laklab integrallash formulasi o'rinli bo'lib, natija o'z kuchida qo'ladi.

19.4.1 - misol. Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

funksiya uzluksiz bo'lakli-silliqlik bo'lib, uning

$$f'(x) = -\alpha e^{-\alpha|x|} \operatorname{sign} x$$

hosilasi $x = 0$ nuqtadan tashqari barcha nuqталarda mavjud. Bu ikki funksiya absolyut integrallanuvchi. (19.1.3) formulaga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Shunday ekan, 19.4.1 - tasdiqdan hosilaning Furiye almashtirishi uchun

$$\widehat{Df}(\xi) = \frac{2i\alpha\xi}{\alpha^2 + \xi^2}$$

tenglik kelib chiqadi.

19.4.2 - misol. (17.1.13) va (17.1.14) tengliklar bilan aniqlangan $\omega_h(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya finit va cheksiz differensiallanuvchi bo'lgani sababli, istalgan k nomer uchun

$$\widehat{D^k \omega_h}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{\omega_h}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

tenglik bajariladi.

Demak,

$$|\widehat{D^k \omega_h}(\xi)| \leq \|D^k \omega\|_1$$

bahoga ko'ra, istalgan k nomer uchun

$$|\widehat{\omega_h}(\xi)| \leq \|D^k \omega\|_1 \cdot |\xi|^{-k}, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

tengsizlik o'rinni.

Xuddi shu usulda har qanday cheksiz differensiallanuvchi finit funksiyaning Furiye almashtirishi cheksizlikda istalgan darajadan tez nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Bundan, xususan, qayd qilingan Furiye almashtirishining sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.

Aslida, biror f funksiya Furiye almashtirishining absolyut integrallanuvchi bo'lishi uchun, $\widehat{f}(\xi)$ funksiyaning cheksizlikda $|\xi|^{-2}$ kabi nolga intilishini talab qilish yetarli.

19.4.2 - tasdiq. Agar f funksiya va uning birinchi hamda ikkinchi hosilalari $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiyaning $\widehat{f}$ Furiye almashtirishi sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. 19.1.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (19.4.3)$$

Agar bu bahoda f ni D^2f ga almashtirib, (19.4.2) tenglikdan foydalansak,

$$|\xi^2 \hat{f}(\xi)| \leq \|D^2f\|_1 \quad (19.4.4)$$

bahoni olamiz.

(19.4.3) va (19.4.4) tengsizliklarni qo'shsak,

$$(1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 + \|D^2f\|_1$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f\|_1 + \|D^2f\|_1}{1 + |\xi|^2} = \frac{C}{1 + |\xi|^2}. \quad (19.4.5)$$

Bu tengsizlik va taqqoslash alomatidan $\hat{f}(\xi)$ funksiyaning absolyut integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.

■

Natija. Agar f funksiya va uning birinchi hamda ikkinchi hosilalari $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiyaning Furiye integraliga (19.1.2) yoyilmasi absolyut va $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashadi.

2. Yuqorida funksiya qanchalik silliq bo'lsa, uning Furiye almashtirishi shunchalik tez nolga intilishi ko'rsatilgan edi. Bu tasdiqing teskarisi ham o'rinli, ya'ni funksiya qanchalik tez nolga intilsa, uning Furiye almashtirishi shunchalik silliq bo'ladi. Chumonchi, quyidagi tasdiq o'rinli.

19.4.3 - tasdiq. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $xf(x)$ funksiyalar $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. U holda $\hat{f}(\xi)$ Furiye almashtirish differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilusi $\mathbb{R}$ da uzluksiz va chegaralangan bo'ladi.

Isbot. (19.1.1) tenglikni formal ravishda integral ostida differensiallaylik:

$$\hat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\xi} dx.$$

Veyershtass alomatiga binoan, integral $\xi \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashadi va shuning uchun, 17.2.6 - teorema ko'ra, bu differensiallash asoslangandir. Bundan tasdiqning to'g'ri ekanligi kelib chiqadi.

■

Natija. Faraz qilaylik, k natural son bo'lib, $f(x)$ va $x^k f(x)$ funksiyalar $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. U holda $\widehat{f}(\xi)$ Furiye almashtirish $\mathbb{R}$ da uzluksiz va chegaralangan k - tartibli hosilaga ega.

3. 19.4.1 - tasdiqqa asosan, f funksiyadan uning $\widehat{f}$ Furiye almashtirishiga o'tishda, differensiallash operatsiyasi erkli o'zgaruvchiga ko'paytirish operatsiyasiga o'zgaradi. Furiye almashtirishning bu ajoyib xossasi uning qisqiniy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida keng foydalanishiga asos bo'ladi.

19.4.3 - misol. Agar $\varphi(x)$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (19.4.6)$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini va

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (19.4.7)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ funksiya topilsin.

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish muammosini differensial tenglamalar nazariyasida *Koshi masalasi* deb atashadi.

Bu masalaning x o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va 19.4.2 - tasdiq shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini qidiramiz.

Yechimning x o'zgaruvchi bo'yicha Furiye almashtirishini qaraylik:

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx. \quad (19.4.8)$$

(19.4.2) formulaga ko'ra,

$$\widehat{D^2 u}(\xi, t) = -\xi^2 \widehat{u}(\xi, t),$$

bu yerda $D^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Bu tenglikni hisobga olib, (19.4.8) Furiye almashtirishni t bo'yicha differentsiallasak, (19.4.6) tenglamadan

$$\frac{\partial \widehat{u}(\xi, t)}{\partial t} = -a^2 \xi^2 \cdot \widehat{u}(\xi, t) \quad (19.4.9)$$

tenglikni olamiz.

Shunday qilib, u yechimdan uning $\widehat{u}$ Furiye almashtirishiga o'tsak, qisman hosilali (19.4.6) tenglama (19.4.9) oddiy differensial tenglamaga aylandi. Bu tenglamaning umumiy yechimini

$$\widehat{u}(\xi, t) = C(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}$$

ko'rinishga ega, bu yerda $C(\xi)$ o'zgarmas t ga bog'liq emas. Bu o'zgarmasni topish uchun (19.4.7) boshlang'ich shartdan foydalanamiz:

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\varphi}(\xi).$$

Demak,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}. \quad (19.4.10)$$

Shunday qilib, Furiye integral formulasiga asosan,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t + ix\xi} d\xi \quad (19.4.11)$$

funksiya (19.4.6)-(19.4.7) Koshi masalasining izlanayotgan yechimidir.

4. Agar shu bobning boshida qaralgan 19.1.3 - misolda $\alpha = 1/(4a^2t)$ desak, u holda (19.1.5) formuladan

$$G(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \quad (19.4.12)$$

funksiyaning Furiye almashtirishi

$$\widehat{G}(\xi) = \exp(-a^2\xi^2 t)$$

ko'rinishga ega ekani kelib chiqadi.

Bundan chiqdi, (19.4.10) formulani

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi) \cdot \widehat{G}(\xi) \quad (19.4.13)$$

deb yozish mumkin.

Furiye integral formulasiga ko'ra, (19.4.6)-(19.4.7) Koshi masalasi yechimini topish uchun (19.4.13) tenglik o'ng tarafidagi ko'paytmadan teskari Furiye almashtirish olish kerak. Shu munosabat bilan, Furiye almashtirishi ikki ma'lum funksiyaning Furiye almashtirishlari ko'paytmasiga teng bo'lgan, funksiyani topish masalasi tug'iladi.

Bunday masalani yechish maqsadida ikki integrallanuvchi funksiya o'ramasi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ikki f va g funksiyalar o'ramasi $f * g$ simvol bilan belgilanadi va

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \quad (19.4.14)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Avvalam bor shuni qayd etamizki, agar aqali bitta f yoki g funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida uzluksiz va chegaralangan bo'lsa, u holda ularning o'ramasi ham $\mathbb{R}$ da uzluksiz va chegaralangan bo'ladi. Haqiqatan, agar, masalan, g uzluksiz va $|g(x)| \leq M$ shartni qanoatlantirsa, (19.4.14) integral ostidagi funksiya

$$|f(y)g(x-y)| \leq M|f(y)| \quad (19.4.15)$$

bahoga ega bo'ladi.

Shunday ekan, Veyershtrass alomatiga ko'ra, (19.4.14) integral $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashadi va demak, 17.2.4 - teoreмага asosan, o'rama uzluksiz funksiyasidir. Yana o'sha (19.4.15) bahodan o'ramaning chegaralangani kelib chiqadi:

$$|(f * g)(x)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy = M \|f\|_1.$$

Bundan tashqari, qaralayotgan holda o'rama sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ham bo'ladi. Buni isbotlash uchun takroriy integralda tartibni o'zgartirib, $x - y = u$ almashtirish bajarish kifoya:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x - y)| dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(x - y)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du. \end{aligned}$$

Integrallash tartibini o'zgartirish mumkinligi 17.2.7 - teoremda ko'rsatilgan.

Shunday qilib,

$$\|(f * g)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (19.4.16)$$

Uzluksiz absolyut integrallanuvchi funksiyalar sinfidagi $f * g$ o'rama f va g funksiyalarga nisbatan simmetrikdir. Buni isbotlash uchun (19.4.14) integralda $t = x - y$ almashtirish bajarish yetarli:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(x - t) dt = g * f. \quad (19.4.17)$$

Navbatdagi tenglik o'ramaning asosiy xossaligidan biridir.

19.4.4 - tasdiq. Agar f absolyut integrallanuvchi funksiya bo'lib, g uzluksiz, chegaralangan va absolyut integrallanuvchi funksiya bo'lsa,

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (19.4.18)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. O'rama Furiye almashtirishini hisoblaylik:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy. \quad (19.4.19)$$

Endi $e^{-ix\xi} = e^{-iy\xi} \cdot e^{-i(x-y)\xi}$ ayniyatdan foydalanib, integrallash tartibini o'zgartiramiz:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) e^{-i(x-y)\xi} dx. \end{aligned} \quad (19.4.20)$$

Nihoyat, ichki integralda $x - y = u$ almashtirish bajarsak, (19.4.19) tenglikka ko'ra, talab qilingan formulani olamiz:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-iu\xi} du = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi).$$

■

Yuqorida ko'rsatilganidek, (19.4.6) - (19.4.7) Koshi masalasi yechimining Furiye almashtirishi boshlang'ich funksiyaning $\widehat{f}$ Furiye almashtirishi va (19.4.12) formula bilan aniqlangan G funksiyaning $\widehat{G}$ Furiye almashtirishi ko'paytmasiga teng. Shunday ekan, 19.4.4 -

tasdiqqa ko'ra, u yechim φ va G funksiyalarning o'ramasidan iborat. Demak, istalgan $t > 0$ va har qanday $x \in \mathbb{R}$ uchun

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy \quad (19.4.21)$$

tenglik o'rinli.

Eslatma. Furiye almashtirishini qo'llash qisman hosilali diffrensi-al tenglamalar yechimi uchun formula topishda samarali usul hisoblanadi. Odatda, bunday formulalarni topishda, barcha hisoblashlarni asoslash uchun berilgan funksiyalarga juda og'ir shartlar qo'yishga to'g'ri keladi. Ammo, yechim uchun formula topilgandan so'ng, bu shartlardan ko'pini olib tashlash mumkin.

Masalan, (19.4.6)-(19.4.7) Koshi masalasi yechimi uchun Furiye almashtirishi yordamida topilgan (19.4.21) formuladan φ boshlang'ich funksiya unga qo'yilgan shartlarni qanoatlantirmagan holda ham foydalanish mumkin. Xususan, φ funksiya na faqat absolyut integrallanuvchi bo'lganda, balki u cheksizlikda (eksponentadan sekinroq) o'suvchi bo'lganda ham yechimni (19.4.21) ko'rinishda yozish mumkin.

19.5-§*. Furiye integrallarini Abel usuli bilan jamlash

1. Funksiyani Furiye integraliga yoyilmasining biror nuqtada yaqinlashishi uchun yetarli shart uning shu nuqtada Holder shartini qanoatlantirishidan iborat ekani §19.2 da ko'rsatilgan edi. Agar yoyilayotgan funksiya uzluksiz bo'lib, lekin qo'shimcha (Holder sharti kabi) silliqlikka ega bo'lmasa, u holda, umuman aytganda, yaqinlashish bo'lmasligi mumkin. Chunonchi, uzluksiz va sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan shunday funksiyaning qurilishi mumkin, uning Furiye integrali biror nuqtada uzoqlashadi.

Lekin, shunga qaramasdan, agar funksiyaning biror nuqtada uzluksizligi ma'lum bo'lsa, uning Furiye integralini shu nuqtada Abel usuli bilan jamlash mumkin.

Abel o'rtachalarini istalgan $\alpha > 0$ uchun quyidagi

$$A_{\alpha}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \cdot e^{-\alpha|\xi|} d\xi \quad (19.5.1)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

Bizning maqsadimiz f funksiya uzluksiz bo'lgan har qanday x nuqtada

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} A_{\alpha}f(x) = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatishdan iborat.

(19.5.1) integralda $\widehat{f}(\xi)$ o'rniga (19.1.1) integralni qo'yib, integ-rallash tartibini o'zgartiramiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - \alpha|\xi|} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi - \alpha|\xi|} d\xi.$$

Lekin, (17.2.2) tenglikka ko'ra,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi - \alpha|\xi|} d\xi = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\xi} \cos(x-y)\xi d\xi = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (x-y)^2}. \quad (19.5.2)$$

Shunday ekan, (19.5.1) Abel o'rtachalari uchun quyidagi

$$A_{\alpha}f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y) dy}{\alpha^2 + (x-y)^2} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) dt}{\alpha^2 + t^2} \quad (19.5.3)$$

formulani olamiz (e'tibor bering, bu formulada $\widehat{f}(\xi)$ oshkora qatna-shmayapti).

Nihoyat,

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1 \quad (19.5.4)$$

tenglikka ko'ra, (19.5.3) dan Abel o'rtachalari bilan yoyilayotgan funksiya farqi uchun

$$A_{\alpha}f(x) - f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x)}{\alpha^2 + t^2} dt \quad (19.5.5)$$

formulaga ega bo'lamiz.

19.5.1 - teorema. Agar f funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda f uzluksiz bo'lgan har bir $x \in \mathbb{R}$ nuqtada

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi - \alpha|\xi|} d\xi = f(x) \quad (19.5.6)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Shartga ko'ra, f funksiya x nuqtada uzluksiz. Shunday ekan, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, u uchun

$$|t| < \delta \text{ bo'lganda } |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon \text{ bo'ladi.} \quad (19.5.7)$$

Shunday $\delta > 0$ ni tayinlab, (19.5.5) integralni uchta integral yig'indisi qilib yozamiz:

$$\begin{aligned} A_{\alpha}f(x) - f(x) = & \\ = & \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\alpha^2 + t^2} dt + \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x+t)}{\alpha^2 + t^2} dt - f(x) \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2}. \end{aligned} \quad (19.5.8)$$

O'ng tarafdagi birinchi integral (19.5.7) va (19.5.4) yordamida baholanadi:

$$\left| \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\alpha^2 + t^2} dt \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} < \varepsilon. \quad (19.5.9)$$

Ikkinchi integral ostidagi ifodada maxraj δ^2 dan katta. Demak,

$$\left| \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x+t)}{\alpha^2 + t^2} dt \right| \leq \frac{\alpha}{\delta^2 \pi} \int_{|t|>\delta} |f(x+t)| dt \leq \frac{\alpha}{\delta^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy.$$

Bundan chiqdi, ixtiyoriy tayinlangan $\delta > 0$ uchun (19.5.8) ning o'ng tarafdagi ikkinchi integral $\alpha \rightarrow 0+0$ da nolga intiladi.

Nihoyat, (19.5.8) ning o'ng tarafdagi uchinchi integral oddiy hisoblash yordamida baholanadi:

$$\left| f(x) \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \right| \leq |f(x)| \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\alpha} \right) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0+0.$$

Shunday ekan, (19.5.8) tenglik va (19.5.9) bahodan tayinlangan $\delta > 0$ uchun

$$|A_{\alpha}f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0+0.$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} |A_{\alpha}f(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Bundan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} A_{\alpha}f(x) = f(x)$$

tenglik kelib chiqadi.

Natija. Faraz qilaylik, f sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lib, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix_0\xi} d\xi,$$

zosmas integral yaqinlashsa, u $2\pi f(x_0)$ ga teng bo'ladi.

Haqiqatan, 19.5.1 - teorema ko'ra, bu integral Abel usuli bilan $2\pi f(x_0)$ songa jamlanadi. Abel usuli regulyar bo'lgani sababli, bu son yaqinlashuvchi integral qiymatiga teng.

1 - eslatma. Abel usuli bilan jamlanuvchi integral uchun, §17.5 ning 6 - bandidagi belgilashdan foydalanib, (19.5.6) tenglikni

$$(A) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = 2\pi f(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

2 - eslatma. 19.3.1 - teorema va Abel usulining regulyarligiga ko'ra, agar f funksiya bo'lakli-silliqlik bo'lsa, (19.5.6) tenglik uzilish nuqtalarda ham o'rinli.

3 - eslatma. Faraz qilaylik, sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi f funksiya haqiqiy qiymatlar qabul qilib,

$$m \leq f(x) \leq M, \quad -\infty < x < +\infty,$$

shartni qanoatlantirsin. U holda (19.5.3) va (19.5.4) tengliklardan Abel o'rtachalari uchun quyidagi

$$m \leq A_\alpha f(x) \leq M, \quad -\infty < x < +\infty,$$

baho kelib chiqadi.

Masalan, 19.3.1 - misolda qaralgan

$$\phi(x) = (\text{sign } x) \cdot e^{-|x|}$$

funksiyaning Abel o'rtachalari ikki yoqli

$$-1 \leq A_\alpha \phi(x) \leq 1. \quad -\infty < x < +\infty. \quad (19.5.10)$$

bahoni qanoatlantiradi.

Eslatib o'taniz, bu funksiyaning qismaniy Furye integrallari funksiyani $x = 0$ uzilish nuqtasi atrofida uning maksimal qiymatidan taxminan 18% ga ortiq bo'lgan sabchishga ega ekanini kuzatgan edik (Gibbs hodisasi). (19.5.10) tengsizlikdan, qayd etilgan integralni Abel usuli bilan jamlaganda, Gibbs hodisasining yo'qolishi kelib chiqadi.

2. Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiya ham uzluksiz bo'lavermaydi. Shuning uchun, Abel o'rtachalarining yoki Furye qismaniy integrallarining limiti mavjud bo'lsada, bu limit ba'zi nuqtalarda funksiya qiymati bilan ustma-ust tushmasligi mumkin. Biz biror nuqtada funksiya qiymatini istalgancha o'zgartirsak ham, bu funksiyadan olingan integral qiymati o'zgarmaydi. Ravshanki, bunda funksiyaning Furye almashtirishi ham o'zgarmaydi, ya'ni funksiya o'zgarsa ham, uning Furye almashtirishi avvalgidek bo'lib qolaveradi.

Funksiyani (Riman integrali nuqtai nazaridan) ahamiyatsiz ravishda o'zgartirishga aniqlik kiritish maqsadida, nolga ekvivalent funksiya tushunchasini kiritamiz.

Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0 \quad (19.5.11)$$

tenglik bajarilsa, biz bu funksiyani o'sha kesmada *nolga ekvivalent* deyimiz.

Agar f funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida aniqlangan bo'lib, istalgan kesmada nolga ekvivalent bo'lsa, shubhasiz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 0$$

tenglik bajariladi, ya'ni f sonlar o'qida nolga ekvivalent bo'ladi.

Agar f funksiya nolga ekvivalent bo'lib, g funksiya chegaralangan bo'lsa, $f \cdot g$ ko'paytma ham nolga ekvivalent bo'ladi. Haqiqatan, $|g(x)| \leq M$ bahoga ko'ra,

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq M \int_a^b |f(x)| dx = 0.$$

Agar ikki f va g funksiyaning $f - g$ ayirmasi nolga ekvivalent bo'lsa, biz ularni o'zaro ekvivalent deymiz.

Yuqoridagi bayonimizdan o'zaro ekvivalent funksiyalardan olingan integrallarning bir-biridan farq qilmasligi kelib chiqadi. Xususan, ekvivalent funksiyalarning Furiye almashtirishlari o'zaro tengdir.

E'tibor bering, uzluksiz funksiyaning biror kesmada nolga ekvivalent bo'lishi uchun, uning shu kesmada aynan nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqorida qayd qilinganidek, agar funksiya sonlar o'qida faqat absolyut integrallanuvchi bo'lsa (bunda u Furiye almashtirishga ega bo'ladi), Furiye integrali funksiya qiymatiga barcha nuqtada yaqinlashmasligi mumkin. Shunga qararnasdan, silliqlik bo'yicha hech qanday qo'shimcha shartsiz, bunday funksiyalarni Abel o'rtachalari bilan o'rtacha ma'noda yaqinlashtirish mumkin.

Chunonchi, quyidagi tasdiq o'rinli.

19.5.2 - teorema. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan istalgan funksiyaning Abel o'rtachalari shu funksiyaga o'rtacha yaqinlashadi, ya'ni

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)| dx = 0. \quad (19.5.12)$$

Isbot. (19.5.5) asosiy formulaga ko'ra, istalgan absolyut integrallanuvchi funksiya uchun

$$|A_{\alpha}f(x) - f(x)| \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{\alpha^2 + t^2} dt \quad (19.5.13)$$

tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlikni integrallab, so'ngra integrallar tartibini o'zgartiramiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha} f(x) - f(x)| dx \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx.$$

Keyingi mulohazalar 19.5.1 - teorema isbotidagiga o'xshash. Ixtiyoriy $\delta > 0$ ni tayinlab, o'ng tarafdagi tashqi integralni ikkiga bo'lamiz: $[-\delta, \delta]$ kesma bo'yicha va bu kesmadan tashqaridagi nurlar bo'yicha. Natijada

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha} f(x) - f(x)| dx &\leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx + \\ &+ \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \end{aligned} \quad (19.5.14)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

19.1.2 - teoreмага ko'ra ((19.1.7) formulaga qarang), istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ ko'rsatish mumkinki,

$$|t| < \delta \text{ bo'lsa, } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx < \varepsilon \text{ bo'ladi.}$$

Ravshanki, δ sonni bunday tanlashda (19.5.14) ning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi barcha $\alpha > 0$ larda ε dan kichik bo'ladi:

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx < \varepsilon \cdot \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} < \varepsilon. \quad (19.5.15)$$

Agar quyidagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 2\|f\|_1$$

bahoni hisobga olsak, (19.5.14) ning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini quyidagicha baholash mumkin:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \leq \\ & \leq 2\|f\|_1 \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0+0. \end{aligned} \quad (19.5.16)$$

Demak, (19.5.14)-(19.5.16) tengsizliklarga ko'ra,

$$\|A_\alpha f - f\|_1 \leq \varepsilon + o(1); \quad \alpha \rightarrow 0+0,$$

yoki

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \|A_\alpha f - f\|_1 \leq \varepsilon.$$

Bundan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan (19.5.12) munosabatga ega bo'lamiz.

1 - natija. Agar sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi f funksiyaning Furye almashtirishi nolga ekvivalent bo'lsa, u holda funksiyaning o'zi ham nolga ekvivalent bo'ladi.

Haqiqatan, agar $\hat{f}(\xi)$ funksiya nolga ekvivalent bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyani Furye integraliga yoyilmasining Abel o'rtachalari aynan nolga teng, ya'ni $A_\alpha f(x) \equiv 0$ bo'ladi. Demak, 19.5.2 - teorema ko'ra,

$$\|f\|_1 = \|f - A_\alpha f\|_1 \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0+0.$$

Bundan $\|f\|_1 = 0$ ekani, ya'ni f funksiyaning nolga ekvivalentligi kelib chiqadi.

2 - natija. Agar sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ikki funksiyaning Furiye almashtirishlari o'zaro teng bo'lsa, bu funksiyalar ekvivalentdir.

Haqiqatan, aytaylik, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar absolyut integrallanuvchi bo'lib, $\hat{f}_1(\xi) = \hat{f}_2(\xi)$ bo'lsin. U holda $f = f_1 - f_2$ deb, bu funksiyaga 1 - natijani qo'llasak, talab qilingan tasdiqni olamiz.

3*. Agar absolyut integrallanuvchi f funksiyaning kvadrati ham absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda Abel o'rtachalari berilgan funksiyaga o'rta kvadratik ham yaqinlashadi.

19.5.3 - teorema. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi funksiyaning kvadrati ham absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (19.5.17)$$

tenglik bajariladi.

Isbot 19.5.2 - teorema isbotiga o'xshash. (19.5.13) formulani olib, o'ng tarafdagi integralga Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llaymiz ((6.8.7) formulaga qarang). Bu tengsizlikdagi f funksiya sifatida $|f(x+t) - f(x)|(\alpha^2 + t^2)^{-1/2}$ ni va g funksiya sifatida esa, $(\alpha^2 + t^2)^{-1/2}$ ni olamiz. U holda, (19.5.4) tenglikka ko'ra,

$$|A_{\alpha}f(x) - f(x)|^2 \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+t) - f(x)|^2}{\alpha^2 + t^2} dt.$$

Demak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)|^2 dx \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^2 dx.$$

Bundan keyingi mulohazalar xuddi 19.5.2 - teorema isbotidek bo'lib, yagona farq shundaki, (19.1.7) formula o'rniga (19.1.10) formuladan foydalaniladi.

■

19.6-§*. Plansherel teoremasi

1. Furiye integrali nazariyasi $\mathbb{R}$ sonlar o'qida kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida ayniqsa bejirim ko'rinishga ega. Bunday funksiyalar kompleks chiziqli fazo tashkil qilib, bu fazoda skalyar ko'paytma

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (19.6.1)$$

kabi aniqlanadi, bu yerda chiziqli kompleks qo'shmasini anglatadi.

Bunday aniqlangan skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

- 1) $(f, g) = \overline{(g, f)}$;
- 2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;
- 3) $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- 4) agar $f \neq 0$ bo'lsa, $(f, f) > 0$ bo'ladi.

Oxirgi xossada f element, faqat va faqat f funksiya (19.5.11) tenglik ma'nosida nolga ekvivalent bo'lganda, nolga teng deb tushuniladi.

Yozuvni qisqartirish maqsadida, ushbu paragrafda (boshqa paragraflarda bu belgilashdan foydalanilmaydi) $E(\mathbb{R})$ simvol orqali $\mathbb{R}$ sonlar o'qida kvadrati bilan birga absolyut integrallanuvchi kompleks qiymatli funksiyalarning (19.6.1) skalyar ko'paytma bilan aniqlangan Evklid fazosini belgilaymiz.

Kiritilgan skalyar ko'paytma quyidagi

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \right)^{1/2} \quad (19.6.2)$$

normani aniqlaydi. Skalyar ko'paytmaning sanab o'tilgan xossalari-dan (19.6.2) kattalik normaning barcha xossalari-ga ega ekani kelib chiqadi. Xususan, istalgan $f \in E(\mathbb{R})$ va $g \in E(\mathbb{R})$ elementlar uchun *Koshi-Bunyakovski tengsizligi o'rinli*:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \quad (19.6.3)$$

Bu tengsizlikdan *uchburchak tengsizligi* deb ataluvchi quyidagi

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (19.6.4)$$

munosabat kelib chiqadi.

Ravshaniki, (19.6.4) tengsizlikka ko'ra,

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|. \quad (19.6.5)$$

2. Furye almashtirishi bilan bog'liq matematik tadqiqotlarda va ularning tatbiqlarida navbatdagi tasdiq muhim rol o'ynaydi.

19.6.1 - teorema. Faraz qilaylik, f va g funksiyalar $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. Agar g funksiyaning $\hat{g}$ Furye almashtirishi ham $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \quad (19.6.6)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Shartga ko'ra, $\widehat{g}(\xi)$ funksiya absolyut integrallanuvchi. Demak, Veyershtass alomatiga ko'ra,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.6.7)$$

xosmas integral sonlar o'qida biror uzluksiz va chegaralangan funksiyaga $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashadi. Integralning aynan $g(x)$ ga yaqinlashishi 19.5.1 - teorema va Abel usulining regulyar ekanidan kelib chiqadi.

Qaralayotga funksiyaning kompleks qo'shimasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{g(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi.$$

Bu integralni (19.6.6) tenglik chapidagi $\overline{g(x)}$ funksiya o'rniga qo'yib, integrallash tartibini o'zgartiramiz (teorema shartlariga ko'ra, bu almashtirish o'rinli):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

O'ng tarafdagi xosmas integralning yaqinlashishi $\widehat{f}(\xi)$ funksiyaning tekis chegaralangani hamda $\widehat{g}(\xi)$ funksiyaning, shartga ko'ra, absolyut integrallanuvchi ekanidan kelib chiqadi.



Natija (Plansherel teoremasi). Agar f funksiya va uning $\widehat{f}$ Furiye almashtirishi $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (19.6.8)$$

tenglik o'rinli.

E'tibor bering, shartga ko'ra, har ikki f va $\widehat{f}$ funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida tekis chegaralangan.

Eslatma. (19.6.8) formulani Parseval tengligi deb ham atashadi.

3. (19.6.8) formuladan shu fikrga kelish mumkinki, Parseval tengligi o'rinli bo'lishi uchun $\widehat{f}$ Furiye almashtirishning absolyut integrallanuvchiligi o'rniga, f funksiyaning o'zi va kvadrati sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ekanini, ya'ni uning yuqorida aniqlangan $E(\mathbb{R})$ Evklid fazosiga tegishli bo'lishini talab qilish yetarlidir. Haqiqatan, navbatdagi tasdiq o'rinli.

19.6.2 - teorema. Faraz qilaylik, f va uning f^2 kvadrati $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. U holda (19.6.8) Parseval tengligi o'rinli.

Isbot. f funksiyaning (19.5.1) formula bilan aniqlangan $A_\alpha f(x)$ Abel o'rtachalarini qaraymiz. O'sha formuladan qayd qilingan o'rtachalar Furiye almashtirishi uchun

$$\widehat{A_\alpha f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot e^{-\alpha|\xi|} \quad (19.6.9)$$

tenglikni olamiz.

Ravshaniki, $\alpha > 0$ bo'lgani uchun, eksponensial ravishda nolga intiluvchi ko'paytuvchi hisobiga, $\widehat{A_\alpha f}(\xi)$ funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'ladi. Shunday ekan, (19.6.8) tenglikka

ko'ra,

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{A_{\alpha}f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\alpha|\xi|} d\xi. \quad (19.6.10)$$

Agar $\alpha \rightarrow 0+0$ desak, bu tenglikning o'ng tomonidagi integral Abel usulining regularligiga ko'ra, (19.6.8) Parseval tengligining chap tarafiga intiladi (§17.2.7 ning 3^o - bandidagi mulohazalarga qarang). (19.6.10) tenglikning chap tarafida esa, (19.5.17) formula va (19.6.5) tengsizlikka ko'ra, (19.6.8) Parseval tengligining o'ng tarafiga intiladi. Shunday ekan, (19.6.10) da $\alpha \rightarrow 0+0$ deb limitga o'tsak, talab qilingan (19.6.8) tenglikka ega bo'lamiz.

■

4. Yuqoridagi §19.4 da ko'rsatilganidek, funktsiyani absolyut integrallanuvchi ikkinchi hosilasining mavjudligi uni Furiye almashtirishining absolyut yaqinlashishini kafolatlaydi (19.4.2 - tasdiqqa qarang). Plansherel teoremasi bu talabni funktsiyaning kvadrati bilan integrallanuvchi birinchi hosilasi mavjudligi bilan almashtirishga imkon beradi.

19.6.3 - teorema. Faraz qilaylik, f funktsiya $\mathbb{R}$ da absolyut integrallanuvchi bo'lib, uning f' hosilasi yuqorida kiritilgan $E(\mathbb{R})$ Evklid fazosiga tegishli bo'lsin. U holda f funktsiyaning Furiye integraliga yoyilmasi absolyut va $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Isbot. Teorema shartlari $Df(x) = f'(x)$ funktsiyaga (19.6.8) Parseval tengligini qo'llashga imkon beradi. 19.4.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\widehat{Df}(\xi) = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi).$$

Shuning uchun, Parseval tengligi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \xi^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \quad (19.6.11)$$

ko'rinishga keladi.

Endi quyidagi

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{1 + \xi^2} + \frac{\xi^2 \widehat{f}(\xi)}{1 + \xi^2} \quad (19.6.12)$$

ayniyatdan foydalanamiz. 19.1.1 - tasdiqqa ko'ra, $\widehat{f}(\xi)$ funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida uzluksiz va chegaralangan, ya'ni $|\widehat{f}(\xi)| \leq M$. Shunday ekan, (19.6.12) ning o'ng tomonidagi birinchi had integrallanuvchi funksiya bilan baholanadi:

$$\frac{|\widehat{f}(\xi)|}{1 + \xi^2} \leq \frac{M}{1 + \xi^2}.$$

Ikkinchi hadni esa, quyidagicha baholash mumkin:

$$\frac{\xi^2 |\widehat{f}(\xi)|}{1 + \xi^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\xi^4 |\widehat{f}(\xi)|^2 + 1}{1 + \xi^2} \leq \frac{1}{2} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

19.6.11) Parseval tengligiga ko'ra, bu tengsizlikning o'ng tomoni integrallanuvchi bo'lib, (19.6.12) ayniyatdan $\widehat{f}(\xi)$ funksiyaning absolyut integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. Demak, (19.1.2) Furiye integrali absolyut va $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashadi.



1 - natija. Faraz qilaylik, uzluksiz bo'lakli-silliqlik f funksiya $\mathbb{R}$ da absolyut integrallanuvchi bo'lib, chegaralangan absolyut integrallanuvchi hosilaga ega bo'lsin. U holda uning $\widehat{f}$ Furiye almashtirishi ham $\mathbb{R}$ da absolyut integrallanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, agar $|f'(\xi)| \leq M$ desak, $|f'(\xi)|^2 \leq M|f'(\xi)|$ bo'ladi. Demak, hosila kvadrati ham absolyut integrallanuvchi bo'lib, f funksiya 19.6.3 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

2 - natija. Agar 1 - natija shartlari bajarilsa, uzluksiz bo'lakli-silliqlik funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasi $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Masalan, uzluksiz bo'lakli-silliqlik $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ funksiyani Furiye integrali absolyut va tekis yaqinlashadi, chunki bu funksiya chegaralangan absolyut integrallanuvchi

$$f'(x) = -\alpha(\operatorname{sign} x)e^{-\alpha|x|}$$

hosilaga ega (buni bevosita (19.2.9) formuladan ko'rish mumkin). E'tibor bering, bu funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lmagani uchun, unga 19.4.2 - tasdiqni qo'llash mumkin emas.

Eslatma. Agar bo'lakli-silliqlik f funksiya yagona birinchi tur uzilishga ega bo'lsa, u holda bu uzilsihni

$$\phi(x) = (\operatorname{sign} x)e^{-|x|}$$

kabi funksiyani qo'shib, bartaraf qilish mumkin ((19.3.7) formulaga qarang). Masalan, agar funksiya nol nuqtada sakrashga ega bo'lib,

$$f(0+0) = A, \quad f(0-0) = -A$$

bo'lsa, u holda

$$f_1(x) = f(x) - A\phi(x) = f(x) - A(\operatorname{sign} x)e^{-|x|}$$

funksiya, bo'lakli-silliqlik bo'la turib, $x = 0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi. 2 - natijaga ko'ra, uning Furiye integraliga yoyilmasi tekis yaqinlashadi. Bu degani, istalgan bo'lakli-silliqlik f funksiya Furiye integrali uzilsih nuqta yonida o'zini $\phi(x)$ funksiya Furiye integrali kabi tutadi. Xususan, istalgan bo'lakli-silliqlik funksiya uchun uzilish nuqtasi atrofiga Gibbs hodisasi o'rinli (§19.3 ning 3 - badiga qarang).

19.7-§. Karrali Furiye integrallari

1. Ushbu paragrafda n o'lchovli $\mathbb{R}^n$ fazosida aniqlangan va kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyalar, ya'ni

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ko'rinishdagi funksiyalar qaraladi, bu yerda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ n ta haqiqiy o'zgaruvchili haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyalardir.

Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi bo'lsin. Uning Furiye almashtirishi deb

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (19.7.1)$$

xosmas integralga aytamiz. Biz $x\xi$ simvol bilan ikki vektorning skalyar ko'paytmasini belgilaymiz: $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n$.

Eslatib o'tamiz, 14.1.5 - teorema ko'ra, $\mathbb{R}^n$ fazoda integrallanuvchi har qanday funksiya $\mathbb{R}^n$ da absolyut integrallanuvchidir. Shuning uchun, ushbu paragrafda $\mathbb{R}^n$ fazoda integrallanuvchi funksiya deganda, biz bu funksiyaning absolyut integrallanuvchi ekanini nazarda tutamiz.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar Furiye almashtirishining asosiy xossalari asosan bir o'lchovli Furiye almashtirish xossalari kabidir. Masalan, istalgan integrallanuvchi funksiyaning Furiye almashtirishi $\mathbb{R}^n$ fazosida uzluksiz va chegaralangan ekan xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek isbotlanadi. Bunda, uzluksizlikni isbotlashda integrallanuvchi funksiyaning o'rtacha va o'rta kvadratik uzluksizligidan foydalaniladi (ikki o'zgaruvchilik holda 13.4.10 - teorema va unga keltirilgan eslatmaga qarang).

19.7.1 - misol. Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} = e^{-\alpha(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \prod_{k=1}^n e^{-\alpha x_k^2}$$

funksiya Furiye almashtirishi topilsin.

n karrali integralni bir o'lchovli takroriy integrallar ko'rinishida yozsak,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx = \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x_k^2 - ix_k \xi_k} dx_k$$

tenglikni olamiz.

Demak, (19.1.5) formulaga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\xi_k^2/4\alpha} = \pi^{n/2} \alpha^{-n/2} e^{-\xi^2/4\alpha}. \quad (19.7.2)$$

Ushbu paragrafda asosiy diqqat ko'p o'lchovli holda vujudga keladigan qiyinchiliklarga va (19.7.1) formulaning bir o'lchovli Furiye integralidan farqli tomonlariga qaratiladi.

Navbatdagi

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.7.3)$$

tenglikka f funksiyaning n karrali Furiye integraliga yoyilmasi deyiladi.

Ko'p o'lchovli garmonik tahlilning asosiy muammolaridan biri (19.7.3) formula o'rinli bo'lishini ta'minlovchi shartlarni topishdan iborat. Bir o'lchovli holdan farqli o'laroq, ko'p o'lchovli holda Furiye integrali yaqinlashishini qanday ma'noda tushunish imkoniyati ancha ko'p.

Odatda, Furiye integrali yaqinlashishini ta'riflash uchun bosh qiymat tushunchasi, ya'ni kengayib boruvchi o'xshash sohalar bo'yicha xos integrallar limiti asos qilib olinadi. Bir o'lchovli holda bunday sohalar sifatida faqat intervallarni olish mumkin edi, ammo ko'p o'lchovli hol bunday sohalarining turli-tumanligi bilan farq qiladi. Kengayib boruvchi shar va kublardan (ikki o'lchovli holda doira va kvadratlardan) ayniqsa ko'p foydalaniladi. Lekin parallelepipedlar, ellipsoidlar hamda murakkabroq ko'rinishdagi sohalar ham tez-tez uchrab turadi. Odatda, yaqinlashish shartlari turli kengayuvchi sohalar uchun turlicha bo'ladi.

Ammo, ba'zi muhim hollarda, yaqinlashish shartlari barcha kengayuvchi sohalar uchun bir xilda bo'ladi. Masalan, agar (19.7.3) Furiye integrali absolyut yaqinlashsa, u holda, kengayuvchi sohalar ketma-ketligini tanlanishiga bog'liqmas ravishda, u $x \in \mathbb{R}^n$ bo'yicha

tekis yaqinlashadi. Boshqa misol sifatida xosmas integrallarni klassik Abel jamlash usulini yoki shunga o'xshash boshqa jamlash usullarini olishimiz mumkin.

2. Ixtiyoriy $\alpha > 0$ uchun (19.7.3) Furiye integralining Abel o'rtachalarini

$$A_{\alpha}f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} d\xi \quad (19.7.4)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

E'tibor bering, bu o'rtachalar karrali Furiye integrallarini o'rganishga (17.5.28) o'rtachalarga nisbatan ko'proq moslashgan.

(19.7.4) integralda (19.5.3) formulani keltirib chiqarishdagiga o'xshash o'zgartirish bajaramiz. Chunonchi, integralda $\hat{f}(\xi)$ funksiya o'rniga uning (19.7.1) qiymatini qo'yamiz. Bundan so'ng integrallash tartibini o'zgartirsak,

$$A_{\alpha}f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)+i(x-y)\xi} d\xi \quad (19.7.5)$$

tenglikni olamiz.

Ichki integralni n ta bir karrali integrallar ko'paytmasi qilib yozish mumkin:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)+i(x-y)\xi} d\xi = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|\xi_k|+i(x_k-y_k)\xi_k} d\xi_k.$$

(19.5.2) tenglikka ko'ra,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_k-y_k)\xi_k-\alpha|\xi_k|} d\xi_k = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (x_k - y_k)^2}. \quad (19.7.6)$$

Agar

$$\Phi_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha}{\alpha^2 + x_k^2} \quad (19.7.7)$$

deb belgilasak, (19.7.6) ga ko'ra, (19.7.5) dagi ichki integralni

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)+i(x-y)\xi} d\xi = (2\pi)^n \Phi_\alpha(x-y)$$

ko'rinishda yozsak bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy integrallanuvchi f funksiyaning Abel o'rtachalarini

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(x-y) f(y) dy \quad (19.7.8)$$

deb, yoki o'zgaruvchilarni almashtirib,

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) f(y+x) dy \quad (19.7.9)$$

deb yozish mumkin.

Bevosita (19.7.7) formula va

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_k}{\alpha^2 + x_k^2} = 1$$

tenglikka ko'ra,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) dy = 1. \quad (19.7.10)$$

Shunday ekan, (19.7.9) dan yoyilayotga funksiya bilan Abel o'rtachalarining farqi uchun

$$A_\alpha f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) [f(x+y) - f(x)] dy \quad (19.7.11)$$

formula kelib chiqadi.

19.7.1 - teorema. Faraz qilaylik, f funksiya $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi bo'lsin. Agar f funksiya $x \in \mathbb{R}$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} A_\alpha f(x) = f(x) \quad (19.7.12)$$

tenglik bajariladi.

Isbot 19.5.1 - teorema isbotini deyarli so'zma-so'z qaytarishdan iborat. Avval istalgan $\delta > 0$ uchun

$$Q(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_k| \leq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$$

kubdan tashqarida $\Phi_\alpha(x)$ funksiyaning $\alpha \rightarrow 0$ da tekis va o'rtacha nolga yaqinlashishi ko'rsatiladi. Bu quyidagi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{x \notin Q(\delta)} \Phi_\alpha(x) = 0 \quad (19.7.13)$$

va

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q(\delta)} \Phi_\alpha(x) dx = 0 \quad (19.7.14)$$

tengliklarning bajarilishini anglatadi.

Ixtiyoriy integrallanuvchi f funksiya uchun (19.7.11), (19.7.13) va (19.7.14) larga ko'ra,

$$A_\alpha f(x) - f(x) = \int_{Q(\delta)} \Phi(y)[f(x+y) - f(x)] dy + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (19.7.15)$$

Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ sonni shunday tanlaymizki, bunda

$$|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon, \quad y \in Q(\delta)$$

tengsizlik bajarilsin.

Bu tengsizlik va (19.7.10) hamda (19.7.15) larga ko'ra,

$$|A_\alpha f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Bundan, $\alpha \rightarrow 0$ deb limitga o'tsak,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} |A_\alpha f(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

munosabatni olamiz.

Bu tengsizlikdan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan (19.7.12) tenglik kelib chiqadi.

■

Natija. Agar f funksiya va uning $\hat{f}$ Furiye almashtirishi $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasi absolyut va $x \in \mathbb{R}^n$ bo'yicha tekis yaqinlashib, (19.7.3) tenglik bajariladi.

Haqiqatan, (19.7.3) integralning absolyut va tekis yaqinlashishi bevosita taqoslash va Veyershrass alomatlaridan kelib chiqadi. Endi integralning aynan $f(x)$ ga yaqinlashishini ko'rsatish yetarli. Bu integralni $A_0 f(x)$ simvol bilan belgilab, $A_\alpha f(x)$ ni α parametrning $[0, 1]$ kesmadagi funksiyasi deb qaraymiz.

(19.7.4) integral ostidagi funksiyaning α parametrga bog'liqligini integrallanuvchi $|\hat{f}(\xi)|$ funksiya bilan baholash mumkin bo'lgani uchun, Veyershrass alomatiga ko'ra, (19.7.4) integral α parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi va shuning uchun, $0 \leq \alpha \leq 1$ kesmada α ning uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Demak,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_\alpha f(x) = A_0 f(x).$$

Bu munosabatni (19.7.12) bilan taqoslasak, talab qilingan $A_0 f(x) = f(x)$ tenglikni olamiz.

Bu natijaga ko'ra, f funksiyaning (19.7.3) Furiye integraliga yoyilishini ko'rsatish uchun uning $\hat{f}$ Furiye almashtirishi absolyut integrallanuvchi ekaniga ishonch hosil qilish yetarli.

3. 19.5.2 - teoremaning quyidagi ko'p o'lchovli ko'rinishi ham o'rinni.

19.7.2 - teorema. $\mathbb{R}^n$ da integrallanuvchi istalgan f funksiyaning (19.7.4) Abel o'rtachalari bu funksiyaga o'rtacha yaqinlashadi:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\mathbb{R}^n} |A_\alpha f(x) - f(x)| dx = 0. \quad (19.7.16)$$

Isbot (19.7.11) asosiy formuladan kelib chiquvchi quyidagi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |A_\alpha f(x) - f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)| dx$$

bahoga va (19.7.13)-(19.7.14) xossalarga asoslangan bo'lib, 19.5.2 - teorema isbotini deyarli so'zina-so'z qaytarishdan iborat.

1 - natija. Agar f funksiya Furiy almashtirishi nolga aynan teng bo'lsa, u holda funksiyaning o'zi nolga ekvivalent bo'ladi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = 0. \quad (19.7.17)$$

Bundan chiqdi, agar f funksiya uzluksiz va integrallanuvchi bo'lib, barcha $\xi \in \mathbb{R}^n$ larda

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx = 0$$

bo'lsa, u holda $f(x) \equiv 0$ bo'ladi.

Bu tasdiqdan navbatdagi yagonalik teoremasi kelib chiqadi.

2 - natija. Agar ikki funksiya Furiy almashtirishlari o'zaro teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar o'zaro ekvivalentdir (ya'ni ularning ayirmasi nolga ekvivalentdir).

Eslatma. Agar f funksiya va uning f^2 kvadrati $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda (19.7.4) Abel o'rtachalari f ga o'rta kvadratik yaqinlashadi:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |A_\alpha f(x) - f(x)|^2 dx = 0. \quad (19.7.18)$$

Bu tasdiqning isboti xuddi 19.5.3 - teorema isboti kabidir.

4. $\mathbb{R}^n$ da integrallanuvchi ikki f va g funksiyalar o'ramasi

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \quad (19.7.19)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Xuddi bir o'zgaruvchilik holdagidek, o'rama f va g ga simmetrik bog'liq:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = (g * f)(x).$$

O'rama Furiye almashtirishining navbatdagi xossasi asosiy hisoblanadi.

19.7.3 - teorema. Integrallanuvchi f funksiya va uzluksiz, chegaralangan hamda integrallanuvchi g funksiya o'ramasining Furiye almashtirishi uchun

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (19.7.20)$$

tenglik o'rinli.

Isbot 19.4.4 - tasdiq isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

19.7.2 - misol. Ixtiyoriy f funksiya va (19.7.7.) tenglik bilan aniqlangan $\Phi_\alpha(x)$ funksiya o'ramasini qaraymiz. (19.7.8) formulaga ko'ra, bu o'rama f funksiya Furiye integralining Abel o'rtachalari bilan ustma-ust tushadi:

$$A_\alpha f(x) = (\Phi_\alpha * f)(x). \quad (19.7.21)$$

(19.7.6) munosabat va (19.7.3) formuladan $\Phi_\alpha(x)$ funksiya Furiye almashtirishi uchun

$$\widehat{\Phi}_\alpha(\xi) = e^{-\alpha(|\xi_1| + |\xi_2| + \dots + |\xi_n|)}$$

tenglik kelib chiqadi.

$\Phi_\alpha(x)$ funksiyaning uzluksiz, chegaralangan va integrallanuvchi ekanini aniqlash. Shuning uchun, 19.7.3 - teorema ko'ra, istalgan integrallanuvchi f funksiya uchun

$$(\widehat{\Phi_\alpha * f})(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-\alpha(|\xi_1| + |\xi_2| + \dots + |\xi_n|)} \quad (19.7.22)$$

tenglik o'rinli.

Eslatma. (19.7.21) va (19.7.22) formulalarga ko'ra, (19.7.4) Abel o'rtachalarini Furiye almashtirishi

$$\widehat{A_\alpha f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot e^{-\alpha(|\xi_1| + |\xi_2| + \dots + |\xi_n|)} \quad (19.7.23)$$

ko'rinishda bo'lgan funksiya deb aniqlash mumkin.

4. D_j simvol bilan j nomerli o'zgaruvchi bo'yicha differensiallash operatsiyasini belgilaymiz:

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}.$$

Bu operatsiya Abel o'rtachalariga o'tish operatsiyasi bilan kommutirlanadi. Haqiqatan, (19.7.21) tenglik va o'rnaning simmetrik ekaniga ko'ra,

$$\begin{aligned} D_j A_\alpha f(x) &= D_j (\Phi_\alpha * f)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) f(x-y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) D_j f(x-y) dy = (\Phi_\alpha * D_j f)(x) = A_\alpha D_j f(x), \end{aligned}$$

ya'ni

$$D_j A_\alpha f(x) = A_\alpha D_j f(x). \quad (19.7.24)$$

Funksiya Furiye almashtirishi bilan uning hosilasi Furiye almashtirishini bog'lovchi (19.4.2) formulaga o'xshash formula o'rinli.

19.7.4 - teorema. Agar f va $D_j f$ funksiyalar $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda $D_j f$ hosila Furye almashtirishi uchun

$$\widehat{D_j f}(\xi) = (i\xi_j)\widehat{f}(\xi) \quad (19.7.25)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agarda (19.7.3) Furye integralini formal differensiallash natijasida hosil bo'lgan integral parametrga nisbatan tekis yaqinlashsa, (19.7.25) tenglik bevosita 17.2.6 - teoremdan kelib chiqadi.

Umumiy holda har qanday $\alpha > 0$ uchun $x \in \mathbb{R}^n$ bo'yicha tekis yaqinlashuvchi (19.7.4) integralni qarash kerak. Bu integralni formal ravishda differensiallasak,

$$D_j A_\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi_j) \widehat{f}(\xi) e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} e^{ix\xi} d\xi \quad (19.7.26)$$

tenglikni olamiz.

Boshqa tarafdin, Abel o'rtachalarining (19.7.4) ta'rifiga ko'ra,

$$A_\alpha D_j f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D_j f}(\xi) e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} e^{ix\xi} d\xi. \quad (19.7.27)$$

Endi (19.7.27) tenglikdan (19.7.26) tenglikni ayiraylik:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\widehat{D_j f}(\xi) - (i\xi_j) \widehat{f}(\xi)] e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} e^{ix\xi} d\xi \equiv 0.$$

Bundan chiqdi, 19.7.2 - teoremaning 1 - natijasiga asosan, integral ostidagi funksiya ham aynan nolga teng, ya'ni talab qilingan (19.7.25) tenglik bajarilar ekan.

Natija. Agar f funksiya, uning ∇_j tartibli $D_j^2 f$ hosilalari $\mathbb{R}^n$ fazosida int

Δf Laplas operatorining Furye almashtirishi uchun

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{f}(\xi) \quad (19.7.28)$$

tenglik o'rinli.

Eslatma. 19.7.4 - teoremani quyidagicha isbotlash mumkindек ko'rinadi: avval (19.7.1) integralni, x_j o'zgaruvchi bo'yicha integralni ajratib olib, takroriy integral ko'rinishida yozamiz va so'ngra unga 19.4.1 - teorema isbotidagi mulohazalarni qo'llaymiz. Ammo funksiyaning $\mathbb{R}^n$ da absolyut integrallanuvchi ekanidan alohida to'g'ri chiziq bo'yicha integralning mavjudligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$f(x, y) = e^{-x^2(1+y^2)^2}$$

funksiya $\mathbb{R}^2$ tekislikda cheksiz differensiallanuvchi, chegaralangan va integrallanuvchidir. Integrallanuvchi ekani quyidagi tenglikdan kelib chiqadi (ichki integralda $t = x(1+y^2)$ deb o'zgaruvchi almashirilgan):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2(1+y^2)^2} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \pi^{3/2}. \end{aligned}$$

Shunga qaramasdan, $x = 0$ to'g'ri chiziq bo'yicha integral mavjud emas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(0, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy = +\infty.$$

5. 19.7.4 - teorema qismaniy hosilali differensial tenglamalar yechimlarini topishda keng qo'llaniladi.

19.7.3 - misol. Istalgan integrallanuvchi f funksiya va ixtiyoriy $\alpha > 0$ parametr uchun

$$\Delta u(x) - \alpha^2 u(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (19.7.29)$$

tenglamaning u yechimi $\mathbb{R}^3$ fazoda topilsin.

Furiye almashtirishiga o'tib, so'ngra (19.7.28) formuladan foydalanib,

$$-|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) - \alpha^2 \widehat{u}(\xi) = -\widehat{f}(\xi)$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\alpha^2 + |\xi|^2}. \quad (19.7.30)$$

19.7.3 - teoremaga ko'ra, yechimni f funksiya va Furiye almashtirishi $(\alpha^2 + |\xi|^2)^{-1}$ ga teng bo'lgan $v_\alpha(x)$ funksiya o'ramasi ko'rinishida yozish mumkin.

Avval

$$v_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha|x|}}{4\pi|x|} \quad (19.7.31)$$

ekanini ko'rsataylik. Buning uchun, bu funksiya Furiye almashtirishini (r, θ, φ) sferik koordinatalarga o'tib hisoblaylik. Bu koordinatalarda $x \cdot \xi = r|\xi| \cos \theta$ bo'lgani uchun,

$$\begin{aligned} \widehat{v}_\alpha(\xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha r} dr \int_0^\pi e^{-ir|\xi| \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \left[\frac{e^{-ir|\xi| \cos \theta}}{i|\xi|} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr = \frac{1}{|\xi|} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin r|\xi| dr. \end{aligned}$$

Bundan chiqdi, (17.2.3) formuladan talab qilingan tenglikni olamiz:

$$\widehat{v}_\alpha(\xi) = \frac{1}{|\xi|} \cdot \frac{|\xi|}{\alpha^2 + |\xi|^2} = \frac{1}{\alpha^2 + |\xi|^2}. \quad (19.7.32)$$

Endi (19.7.30)-(19.7.32) formulalarni va 19.7.3 - teoremani qo'llab, yechim uchun

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy \quad (19.7.33)$$

formulaga ega bo'larniz.

1 - eslatma. (19.7.29) tenglamada α qat'iy mavhuni bo'lgan hol, ya'ni $\beta > 0$ bo'lib, $\alpha = \pm i\beta$ bo'lgan hol eng qiziqarlidir. Bunda tenglama

$$\Delta u(x) + \beta^2 u(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (19.7.34)$$

ko'rinishga keladi va *Helmholts tenglamasi* (H. Helmholtz) deb ataladi. Bu tenglama bir jinsli muhitda elektromagnit to'lqinlar tarqalish nazariyasida muhim rol o'ynaydi. Ammo bu holda yuqoridagi muvohazalarni asoslash qiyinroq bo'ladi.

Shunday bo'lsada, (19.7.33) formula bunday holda ham o'rinli. Bunga ishonch hosil qilish uchun, avval $\alpha = \varepsilon \pm i\beta$ deb faraz qilamiz, bu yerda $\varepsilon > 0$. ε kattalik elektromagnit to'lqinlar intensivligining muhit yutishi tufayli kamayish tezligini xarakterlaydi va yutilish ko'effitsienti deb ataladi. Bunday α lar uchun yuqoridagi barcha muvohazalar va (19.7.33) formulaning o'rinli ekanligini tekshirish oson. So'ngra $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ deb limitga o'tib, Helmholtz tenglamasi yechimi uchun

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\pm i\beta|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy \quad (19.7.35)$$

formulaga ega bo'larniz.

EkspONENTA oldidagi ishora o'rganilayotgan elektromagnit to'lqinning keluvchi yoki ketuvchi ekaniga qarab tanlanadi. Bayon qilingan usul eng so'ngi yutish prinsipi deyiladi (принцип предельного поглощения).

2 - eslatma. Xuddi shunga o'xshab, (19.7.33) formulada ham $\alpha \rightarrow 0$ deb limitga o'tishimiz mumkin. Natijada

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy$$

funksiyani, ya'ni

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Puasson tenglamaning yechimi bo'lgan Nyuton (yoki Kulon) potensialini olamiz.

Eslatib o'tamiz, 17.5.1 - teoremda bu natija Nyuton potentsiali-ni o'rtalashtirib olingan edi.

6. Furiye integrallarini o'rganish vositasi sifatida Parseval tengligi muhim rol o'ynaydi. Xuddi bir o'zgaruvchilik holdagidek (19.6.2 - teoreмага qarang), uning o'rinli bo'lishi uchun yoyilayotgan f funksiya va uni kvadratining integrallanuvchi bo'lishi yetarli.

19.7.5 - teorema (Parseval tengligi). Faraz qilaylik, f funksiya va uning f^2 kvadrati $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (19.7.36)$$

tenglik o'rinli.

Isbot 19.6.2 - teorema isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

Endi biz f funksiyaning tekis yaqinlashuvchi Furiye integraliga yoyilishi uchun yetarli shartlar haqidagi ushbu paragrafning asosiy natijasini isbotlashga tayyormiz.

19.7.6 - teorema. Faraz qilaylik, $m > n/2$ bo'lsin. Agar f funksiya va uning to m - tartibgacha barcha qismiy hosilalari, hamda

ularning kvadratlari $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiyaning quyidagi

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.7.37)$$

Furiye integraliga yoyilmasi absolyut va $x \in \mathbb{R}^n$ bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Isbot. Shartga ko'ra, f funksiya va uning barcha $D_j^m f$ ($j = 1, 2, \dots, n$) qisman hosilalari (19.7.36) Parseval tengligini qanoatlantiradi. 19.7.4 - teoreмага ko'ra,

$$\widehat{D_j^m f}(\xi) = (i\xi_j)^m \widehat{f}(\xi), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Shunday ekan, $D_j^m f$ funksiya uchun Parseval tengligi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_j^m f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\xi_j|^{2m} d\xi \quad (19.7.38)$$

ko'rinishga ega.

Bu tengliklarni (19.7.36) ga qo'shsak,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \xi_1^{2m} + \xi_2^{2m} + \dots + \xi_n^{2m}) d\xi = \\ & = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)|^2 + |D_1^m f(x)|^2 + |D_2^m f(x)|^2 + \dots + |D_n^m f(x)|^2) dx \end{aligned} \quad (19.7.39)$$

tenglikni olamiz.

Endi quyidagi

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \xi_1^{2m} + \dots + \xi_n^{2m}) + \frac{1}{4(1 + \xi_1^{2m} + \dots + \xi_n^{2m})} \quad (19.7.40)$$

sodda tengsizlikdan foydalanamiz. (19.7.39) ga ko'ra, bu tengsizlik o'ng tarafidagi birinchi qo'shiluvchi $\mathbb{R}^n$ fazosida integrallanuvchi.

Ikkinchi qo'shiluvchining integrallanuvchi ekani $2m > n$ shartdan kelib chiqadi. Bundan chiqdi, $|\hat{f}(\xi)|$ funksiya ham integrallanuvchi, va demak, (19.7.37) integral absolyut va tekis yaqinlashadi.



Eslatma. Isbotlangan teoremaga ko'ra, n o'zgaruvchili funksiya n karrali Furiye integraliga yoyilishi uchun bu funksiya $n/2$ dan katta tartibgacha barcha qismaniy hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalar kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lishi yetarli. E'tibor bering, hosila tartibi fazo o'lchovi o'sgan sari o'sadi. Bu hol masala mohiyati tufayli sodir bo'layotganini ko'rsatish mumkin, ya'ni agar $m \leq n/2$ bo'lsa, shunday f funksiyaning ko'rsatish mumkinki, uning to m - tartibgacha barcha qismaniy hosilalari va ularning kvadratlari integrallanuvchi bo'l-sada, lekin f funksiyaning (19.7.37) Furiye integraliga yoyilmasi biror nuqtada uzoqlashadi.

Masalan, ikki o'zgaruvchili funksiya kvadrati bilan integrallanuvchi ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsa, uning Furiye integrali absolyut va tekis yaqinlashadi. Lekin shunday ikki o'zgaruvchili funksiya topiladiki, uning birinchi hosilalari kvadratlari bilan integrallanuvchi bo'la turib, Furiye integrali uzoqlashadi.

7*. Radon almashtirishi. $\mathbb{R}^2$ tekislikda berilgan f funksiya ixtiyoriy $L \subset \mathbb{R}^2$ to'g'ri chiziq bo'yicha olingan integralni mos qo'yuvchi R akslantirishga Radon almashtirishi deyiladi:

$$Rf(L) = \int_L f(x) dl. \quad (19.7.41)$$

1⁰. Ixtiyoriy L to'g'ri chiziqni ikki $\psi \in [0, \pi)$ va $t \in \mathbb{R}$ sonli parametr yordamida quyidagicha aniqlash mumkin.

ψ burchakni $0 \leq \psi < \pi$ intervaldan shunday tanlaymizki, $n = (\cos \psi, \sin \psi)$ birlik vektor L ga perpendikulyar bo'lsin. U holda shunday yagona $t \in \mathbb{R}$ son topiladiki, tn vektor koordinatalar boshi bilan L to'g'ri chiziqni tutashtiradi. Bunday tanlovda $l =$

$(-\sin \psi, \cos \psi)$ birlik vektor L to'g'ri chiziqqa kollinear bo'ladi. Shuning uchun, $x = tn + ul$ nuqta, ya'ni

$$x = (t \cos \psi - u \sin \psi, t \sin \psi + u \cos \psi)$$

nuqta ixtiyoriy $u \in \mathbb{R}$ larda L to'g'ri chiziqda yotadi. Bundan chiqdi, Radon almashtirishini quyidagi

$$Rf(t, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \psi + u \sin \psi, -t \sin \psi + u \cos \psi) du \quad (19.7.42)$$

tenglik bilan aniqlash mumkin, bu yerda $0 \leq \psi < \pi$ va $-\infty < t < +\infty$.

Radon almashtirishi nazariyasida asosiy masala berilgan $Rf(t, \psi)$ qiymatga ko'ra $f(x)$ funksiyani topishdan iborat.

Bu masalani yechish maqsadida f funksiya Fur'ye almashtirishini qaraymiz:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Aytaylik, $\xi = s(\cos \psi, \sin \psi)$ bo'lib, $s \in \mathbb{R}$ va $\psi \in [0, \pi)$ bo'lsin. Bu integralda

$$y_1 = x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi, \quad y_2 = -x_1 \sin \psi + x_2 \cos \psi$$

yangi o'zgaruvchilarga o'tamiz.

Bu almashtirish yakobiani 1 ga teng bo'lib, teskari almashtirish

$$x_1 = y_1 \cos \psi - y_2 \sin \psi, \quad x_2 = y_1 \sin \psi + y_2 \cos \psi$$

ko'rinishga ega.

Ravshanki,

$$x\xi = (y_1 \cos \psi - y_2 \sin \psi, y_1 \sin \psi + y_2 \cos \psi) \cdot s(\cos \psi, \sin \psi) = y_1 s.$$

Shunday ekan,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy_1} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 \cos \psi - y_2 \sin \psi, y_1 \sin \psi + y_2 \cos \psi) dy_2. \quad (19.7.43)$$

Oxirgi tenglikni (19.7.42) bilan taqqoslasak,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy_1} Rf(y_1, \psi) dy_1$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, navbatdagi tasdiq o'rinli.

19.7.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya $\mathbb{R}^2$ tekislikda integrallanuvchi bo'lib,

$$g(t, \psi) = Rf(t, \psi)$$

funksiya qiymati ma'lum bo'lsin. U holda, f funksiya Furiye almash-tirishi uchun

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(t, \psi) dt \quad (19.7.44)$$

formula o'rinli. Bu formulada $\xi = t(\cos \psi, \sin \psi)$.

Demak, agar f funksiyaning Radon almash-tirishi ma'lum bo'lsa, u holda f funksiyani (19.7.44) formula va (19.7.3) Furiye integrali yordamida aniqlash mumkin.

8*. Kompuyter tomografiyasi. Kompuyter tomografiyasi ilmiy-texnik taraqqiyotning Furiye almash-tirishini qo'llashga asoslangan oxirgi sezilarli yutuqlaridandir. Kompuyter tomografiyasining usullari o'rganilayotgan muhit tarkibini, bu muhit orasidan o'tayotgan elektromagnit nur intensivligini o'lchash natijasiga ko'ra, aniqlash imkonini berdi.

Faraz qilaylik, elektromagnit nur L to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlalib, muhitning biror qatlamiga kirishda I intensivlikka ega bo'lsin. Qalinligi Δl bo'lgan qatlamdan o'tgandan so'ng uning intensivligi yutilish natijasida kirish intensivligi va qatlam qalinligiga proporsional ravishda kamayadi, ya'ni intensivlikning ΔI o'zgarishi uchun

$$\Delta I = -kI\Delta l \quad (19.7.45)$$

tenglik o'rinli.

Bu yerda $k = k(x, y, z)$ yutilish ko'rsatkichi deb ataluvchi proporsionallik koeffitsientidir. Qatlam qalinligini cheksiz kichik deb, (19.7.45) tenglamani

$$dI = -k(x, y, z)I dl$$

differensial tenglama bilan almashtiramiz.

Bu differensial tenglamani L to'g'ri chiziq bo'yicha integrallab, nur intensivligi uchun qatlamlardan chiqishda quyidagi

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_L k(x, y, z) dl \right\} \quad (19.7.46)$$

formulani olamiz, bu yerda I_0 kirishdagi nur intensivligi.

(19.7.46) formula nur intensivligini qatlamlardan o'tgandan so'ng aniqlash masalasining yechimini beradi. Teskari masala, kuchsizlashgan intensivlik qiymatini istalgan yo'nalish bo'yicha ma'lum deb hisoblab, $k(x, y, z)$ yutilish koeffitsientini topishdan iborat. (19.7.46) ga ko'ra, bu masala

$$\int_L k(x, y, z) dl = \ln \frac{I_0}{I}$$

tenglamaga teng kuchlidir; bu yerda noma'lum $k(x, y, z)$ funksiya integral ostida turibdi.

Matematik nuqtai nazardan bu masala uch o'lchovli fazoda Radon almashtirishiga teskari almashtirish topishdan iborat.

Tomografik diagnostikada bu masalani uch o'lchovli $\mathbb{R}^3$ fazoda yechish o'rniga, uni turli ikki o'lchovli $z = \text{const}$ ko'rinishdagi tekisliklarda yechishadi. Bunday parallel tekisliklarni qirquin yoki kesim deb atashadi (Yunoncha "tomos"). Ushbu holda yutilish koeffitsientini har bir qatlamda topish uchun yuqorida o'rganilgan $\mathbb{R}^2$ tekislikdagi Radon almashtirishi nazariyasi qo'llaniladi.

Tajribalar yordamida aniqlanishicha, Radon almashtirishi yordamida topilgan $k(x, y, z)$ yutilish koeffitsienti (qaysiki, umuman

aytganda, elektromagnit nurlanish chastotasiga ham bog'liq) qaralayotgan muhit tuzilishi haqida yetarlicha to'la ma'lumot manbai bo'lib hizmat qiladi.

Shuni aytish kerakki, odatda o'rganilayotgan muhit bo'lakli-silliqli bo'lgani uchun, Furiye integralini to'g'ridan-to'g'ri hisoblashda xush ko'rilmaydigan Gibbs hodisasi sodir bo'ladi. Natijada ortiqcha chiziqlar paydo bo'lib, bu hodisa noto'g'ri diagnostikaga olib keladi. Mazkur holdan qutilish maqsadida Furiye integrallarini regulyarlash-tirish usullaridan foydalaniladi. §19.5 da o'rganilgan Abel jamlash usuli ana shunday usullardan biridir.

Qayd qilish joizki, kompyuterli tomograf yordamida olingan tasvir, rentgen suratidan farqli o'laroq, integral tenglamalar sistemasi yechimining grafigidan iboratdir. Bu yechim skalyar funksiya bo'lgani sababli, yechimning turli nuqtalardagi qiymati faqat bir son bilan xarakterlanadi va natijada tasvir oq-qora rangda bo'ladi, ya'ni har bir nuqtada faqat ravshanlik darajasi ko'rsatiladi.

O'rganilayotgan integral tenglamalarni maqbul vaqt ichida faqat kompyuterlarda yechish mumkin. Aynan shu sababli "*Kompyuter tomografiyasi*" degan nom paydo bo'lgan. Bunda hisoblangan yutish koeffitsientining o'rganilayotgan qatlarni turli nuqtalaridagi qiymati har xil ravshanlikdagi yorqin nuqtalar bilan (odatda 2^8 dan 2^{10} gacha ravshanlik darajalari yordamida) ko'rsatiladi.

9. Yakuniy mulohazalar. Zamonaviy matematik tadqiqotlarda

$$Ff(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

deb, ya'ni $\widehat{f}(\xi)$ dan $(2\pi)^{-n/2}$ ko'paytuvchiga farq qiluvchi Furiye almashtirish operatori kiritiladi.

Teskari Furiye almashtirish operatori

$$F^*g(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu operatorlar funksiyalarning yetarlicha keng sinfi uchun aniqlangan bo'lib,

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \mathbf{I}$$

tengliklarni qanoatlantiradi, bu yerda $\mathbf{I}$ birlik operatoridir. Bu belgilashlarda Parseval tengligi

$$\|\mathbf{F}u\| = \|u\|$$

ko'rinishda yoziladi, bunda funksiya normasi

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx$$

kabi aniqlanadi.

Furiye integrali nazariyasi kvadrati Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar fazosida ayniqsa takomillashgan ko'rinishga ega. Bu fazoda Plansherel teoremasi quyidagicha o'qiladi: *Furiye almashtirish operatori unitardir.*

Differensial tenglamalarni ko'p yechimlarining cheksizlikda nolga intilmasligi va integrallanuvchi emasligi bunday tenglamalarni yechishda Furiye almashtirishidan keng foydalanishga to'siq bo'lib keldi. Eslatib o'tamiz, funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi uning Furiye almashtirishini aniqlash uchun zaruriy shartdir. XX asr o'rtalariga kelib taqsimotlar nazariyasining yaratilishi Furiye almashtirishini deyarli barcha funksiyalar uchun aniqlash imkonini berdi. Natijada, qisman hosilali differensial tenglamalar umumiy nazariyasida, shu bilan birga zamonaviy matematikaning boshqa bir qancha bo'limlarida ham, muhim rivojlanishga erishildi.

19.8-§. Misollar

1 - misol. Agar $b > a$ bo'lsa,

$$f(x) = \text{sign}(x - a) - \text{sign}(x - b)$$

funksiyaning Furye almashtirishini toping.

Ko'rsatma. sign x funksiyani ta'rifidan foydalanib, (19.1.1) formulani qo'llang.

2 - misol. Har qanday $a \in (0, 1)$ uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x + \cos 2x + |x|^a) \cos \lambda x}{1 + x^2} dx = 0$$

tenglikni isbotlang.

Ko'rsatma. Integral ostidagi funktsiyani $f(x) \cdot \cos \lambda x$ ko'rinishda yozib olib, $f(x)$ funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ekanini ko'rsating. So'ngra 19.1.1 - teoremaning 1 - natijasini qo'llang.

3 - misol. Agar α va β haqiqiy sonlar bo'lib, $\alpha > 0$ bo'lsa,

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x$$

funksiyaning qisman Furye integrallari limiti ko'rinishida ifoda qiling.

Ko'rsatma. Avval $f(x)$ funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi va differensiallanuvchi ekanini tekshiring. So'ngra bu funksiyani Furye almashtirishini (19.1.1) formula yordamida hisoblang. Bunda sinuslar ko'paytmasini kosinuslar yig'indisi ko'rinishda yozib olib, 19.1.1 - misoldan foydalaning. Furye almashtirish topilgandan so'ng, 19.2.2 - teoremaning qo'llang.

4 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ e^{1-x}, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

funksiyaning kosinus Furye almashtirishini toping.

Ko'rsatma. Avval $f(x)$ funksiya sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi va bo'lakli-silliqlik ekanini tekshiring. So'ngra bu funksiyaning kosinus Furiye almashtirishini (19.2.13) formula yordamida hisoblang.

5 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

bo'lakli-silliqlik funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasini toping. Furiye integrali uzilish nuqtalarida ham yaqinlashishi uchun bu nuqtalarda $f(x)$ ni qanday aniqlash kerak?

Ko'rsatma. Furiye almashtirishni hisoblayotganda sinuslar ko'paytmasini kosinuslar yig'indisiga keltiring. $f(x)$ funksiya $\pm \frac{\pi}{2}$ nuqtalarda uzilishga ega. 19.3.1 - teoremini qo'llash maqsadida, funksiyaning bu nuqtalarda (19.3.2) shartni qanoatlantiradigan qilib aniqlang.

6 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

bo'lakli-silliqlik funksiyaning va uning hosilasini Furiye integraliga yoyilmasini toping.

Ko'rsatma. Funksiyaning Furiye almashtirishini hisoblashda sinus va kosinus ko'paytmasini sinuslar yig'indisiga keltiring. Hosilaning Furiye almashtirishini 19.4.1 - tasdiq yordamida hisoblang.

7 - misol. Faraz qilaylik, f sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi funksiya bo'lib, $a > 0$ bo'lsin. Furiye almashtirishidan foydalalanib, quyidagi

$$y'' - a^2 y = -f(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

tenglamaning shunday yechimi topilsinki, uning o'zi va ikkinchi tartibgacha hosilalari $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin.

Ko'rsatma. Tenglamaning ikki tomoniga Furye almashtirishini qo'llang. So'ngra ikkinchi hosila Furye almashtirishini hisoblashda 19.4.1 - tasdiqqa keltirilgan natijadan foydalaning.

8 - misol. Agar $\frac{1}{2} < a < 1$ bo'lsa, quyidagi

$$f(x) = \frac{\sin(|x|^a)}{1+x^2}$$

funksiya Furye integraliga yoyilmasining absolyut va $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashishini ko'rsating.

Ko'rsatma. Berilgan funksiya 19.6.3 - teorema shartlarini qanoatlantirishiga ishonch hosil qilib, shu teoremani qo'llang.

9 - misol. Quyidagi

$$f(x) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_3^2}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

funksiyaning Furye almashtirishini hisoblang.

Ko'rsatma. Berilgan funktsiayni

$$f(x) = \frac{1}{1+x_1^2} \cdot \frac{1}{1+x_2^2} \cdot \frac{1}{1+x_3^2}$$

ko'rinishda yozib olib, (19.2.9) formulani qo'llang (formuladan keyingi eslatmani hisobga oling).

10 - misol. Agar $\varphi(x)$ funksiya $\mathbb{R}^n$ da absolyut integrallanuvchi va uzluksiz bo'lsa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

tenglamani va

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ funksiya topilsin.

Ko'rsatma. Tenglamada x bo'yicha Furye almashtirishga o'tib, uni t bo'yicha oddiy diferensial tenglamaga keltiring.

20-bob. Furye qatorlari

Kirish. *Trigonometrik qator* deb, odatda, quyidagi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.0.1)$$

ko'rinishda yoziladigan funksional qatorga aytiladi.

Agar (20.0.1) qator $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha tekis yaqinlashsa, u holda uning $f(x)$ yig'indisi sonlar o'qida aniqlangan va 2π davrga ega uzluksiz davriy funksiya bo'ladi:

$$f(x + 2\pi) = f(x). \quad (20.0.2)$$

Bunday holda, agar a_k va b_k ko'effitsientlarni bilsak, f funksiyani nazariy jihatdan istalgan aniqlikda topishimiz mumkin.

Fransiyalik matematik J.B. Furye istalgan 2π davrga ega funksiya (20.0.1) trigonometrik qator ko'rinishida yozish mumkin deb faraz qilib, bu qator ko'effitsiyentlarini qator yig'indisiga ko'ra topishning quyidagi usulini taklif qildi.

Avvalo shunga e'tibor beraylikki, istalgan $n = 0, 1, 2, \dots$ va $m = 1, 2, 3, \dots$ lar uchun

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \cdot \delta_{nm}$$

va

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \quad (20.0.3)$$

tengliklar o'rinli.

Bu yerda, odatdagidek, δ_{nm} Kroneker delta-simvolini anglatadi:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{agar } n = m \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } n \neq m \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Aytaylik, (20.0.1) qator $T = [-\pi, \pi]$ kesmada $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsin. U holda, $\cos nx$ ga ko'paytirilgan qator ham tekis yaqinlashadi va bunda

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos nx \quad (20.0.4)$$

tenglik bajariladi.

Tenglikning ikki tarafini $[-\pi, \pi]$ kesma bo'yicha integrallab, (20.0.3) munosabatlardan foydalanamiz. Natijada qatorning bitta hadidan tashqari barcha hadi nolga aylanadi:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx \, dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos nx \, dx = a_n \pi. \end{aligned} \quad (20.0.5)$$

Demak,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.0.6)$$

Xuddi yuqoridagidek, (20.0.1) qatorni endi $\sin nx$ ga ko'paytirib, so'ngra integrallasak, (20.0.3) ga ko'ra,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20.0.7)$$

tenglikni olamiz.

Agar (20.0.1) qator koeffitsiyentlari ixtiyoriy haqiqiy son bo'lmashdan, (20.0.6) va (20.0.7) formulalar orqali aniqlansa, u holda bunday qator f funksiyaning *Furye qatori* deb, a_k va b_k sonlarning o'zi esa, $f(x)$ funksiyaning *Furye koeffitsiyentlari* deb ataladi. Bunda

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.0.8)$$

kabi yoziladi.

Bunday simvolik yozish qator koeffitsiyentlari (20.0.6) va (20.0.7) tengliklarni qanoatlantirishini anglatadi. Lekin bundan qator yaqinlashishi yoki qator yig'indisi haqida hech qanday xulosa kelib chiqmaydi.

Furye qatorining matematik nazariyasidagi asosiy muammolardan biri qanday funksiyalar uchun (20.0.8) Furye qatori unga yaqinlashishini aniqlashdan iborat. Bu savolga javob qaysi turdagi yaqinlashish nazarda tutilayotganiga bog'liq, ya'ni $T = [-\pi, \pi]$ kesmada tekis yaqinlashishmi, bu kesmaning har bir nuqtasida yaqinlashishmi, o'rtacha yoki o'rta kvadratik yaqinlashishmi va hokazo.

J.-B. Furye uchun trigonometrik qatorlarini o'rganish asosiy maqsad bo'lmashdan, u bu qatorlarni issiqlik tarqalish jarayonlarini o'rganishga qo'lladi. Olimning bu yo'nalishdagi "Issiqlikning analitik nazariyasi" nomli monografiyasi 1806 yili nashr qilindi. Bundan qariyb 100 yil o'tib, Furye qatorlarining ko'p xossalari faqat (20.0.3) munosabatlarga bog'liq ekani va ularning, (20.0.3) ga o'xshash munosabatlarga ega bo'lgan, har qanday funksiyalar sistemasi uchun ham o'rinli ekani aniqlandi. Boshqacha aytganda, Furye nazariyasini na faqat trigonometrik qatorlarni o'rganishga, balki, (20.0.3) munosabatlarga o'xshash xossalarga ega bo'lgan, istalgan funksiyalar sistemasi bo'yicha qatorlarni o'rganishga ham qo'llash mumkin.

20.1-§. Evklid fazosidagi ortogonal qatorlar

1. (u, v) skalyar ko'paytma va unga mos $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ normaga ega bo'lgan E vektor fazo Evklid fazosi deyiladi. Ushbu paragrafda biz haqiqiy Evklid fazolarini, ya'ni haqiqiy sonlar maydoni ustidagi vektor fazolarni qaraymiz.

Skalyar ko'paytmaning asosiy xossalaridan biri Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidir:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (20.1.1)$$

Uchburchak tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (20.1.2)$$

tengsizlik (20.1.1) ning natijasi ekanini ko'rish qiyin emas.

Agar $u_n \in E$ ketma-ketlik va $u \in E$ element uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

tenglik bajarilsa, bu ketma-ketlik u ga yaqinlashadi deyiladi.

Ushbu

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

tengsizlikdan u ga yaqinlashuvchi $\{u_n\}$ ketma-ketlikning

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u\| \quad (20.1.3)$$

munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Ushbu paragrafda asosan cheksiz o'lchovli Evklid fazolari, ya'ni istalgan n nomer uchun n ta chiziqli erkli elementga ega bo'lgan Evklid fazolari qaraladi.

20.1.1 - misol. Haqiqiy qiymat qabul qiluvchi hamda $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning vektor

fazosini qaraymiz. Riman integrali xossalariga ko'ra, bunday funksiyalarning kvadrati ham $[a, b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'ladi (6.4.4 - teorema va uning natijasiga qarang).

Skalyar ko'paytmani

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (20.1.4)$$

ko'rinishda aniqlab, bu vektor fazoni Evklid fazosiga aylantirish mumkin. Hosil bo'lgan Evklid fazosini $R[a, b]$ simvol bilan belgilaymiz.

Shuni qayd qilish kerakki, bu simvoldan biz faqat ushbu bobda va faqat yozuvni soddalashtirish maqsadida foydalanamiz. Kiritilgan Evklid fazosini bunday belgilashdan matematik adabiyotlarda foydalanilmaslikning sababi ushbu paragraf oxiridagi eslatmada tushuntiriladi.

Istalgan $f \in R[a, b]$ element uchun (20.1.4) skalyar ko'paytmaga mos norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (20.1.5)$$

kabi aniqlanadi.

Bu holda (20.1.1) Koshi-Bunyakovskiyy tengsizligi quyidagi

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (20.1.6)$$

ko'rinishga ega.

Skalyar ko'paytmaning muhim xossalaridan biri uning xosmasligidir, ya'ni $(f, f) = 0$ shartdan f vektor fazoning nol elementi ekani kelib chiqishi kerak. Lekin, biz kiritgan fazoda, masalan, faqat biror nuqtada noldan farqli istalgan funksiya uchun (20.1.5) skalyar kvadratning nolga tengligi aniq.

$R[a, b]$ Evklid fazosidagi skalyar ko'paytma xosmaslik xossasiga ega bo'lishiga erishish uchun, §19.5 da kiritilgan nolga ekvivalent funksiya tushunchasidan foydalanamiz. Chunonchi, agar biror $f \in R[a, b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0 \quad (20.1.7)$$

shart bajarilsa, uni *nolga ekvivalent* deymiz.

$R[a, b]$ sinfida kiritilgan bu ta'rifning (19.5.11) ta'rif bilan ustma-ust tushishini tekshirish oson.

Agar f nolga ekvivalent bo'lsa, (20.1.6) Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra, istalgan $g \in R[a, b]$ funksiya uchun

$$(f, g) \equiv \int_a^b f(x) g(x) dx = 0.$$

Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli, ya'ni, agar istalgan $g \in R[a, b]$ funksiya uchun $(f, g) = 0$ bo'lsa, f nolga ekvivalent bo'ladi. Isbotlash uchun $g = f$ deb olish yetarli.

Agar ikki $f_1 \in R[a, b]$ va $f_2 \in R[a, b]$ funksiya uchun $f_1 - f_2$ ayirma nolga ekvivalent bo'lsa, bu funksiyalarni *ekvivalent* deymiz. Ravshanki, agar f_1 va f_2 funksiyalar ekvivalent bo'lsa, istalgan $g \in R[a, b]$ funksiya uchun

$$(f_1, g) = (f_2, g)$$

tenglik o'rinli.

Bundan buyon, biz $R[a, b]$ fazosida ekvivalent funksiyalarni farqlamaymiz. Aniqrog'i, $R[a, b]$ fazo elementi deganda, biz ekvivalent funksiyalar sinfini tushunamiz. Natijada $R[a, b]$ vektor fazo Evklid fazosiga aylanadi.

E'tibor bering, agar uzluksiz funksiya nolga ekvivalent bo'lsa, u aynan nolga teng bo'ladi. Unuman, agar $R[a, b]$ dagi nolga ekvivalent funksiya biror $\Delta \subset [a, b]$ intervalda uzluksiz bo'lsa, u shu intervalning barcha nuqtasida nolga tengdir.

2. Skalyar ko'paytmaning mavjudligi tufayli, muhim bo'lgan ortogonallik tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif. Agar ikki $u \in E$ va $v \in E$ element uchun

$$(u, v) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ular **ortogonal** deyiladi.

Ikki va uch o'lchovli Evklid fazolarida ikki vektor ortogonalligi ularning perpendikulyarligini anglatadi. Shu sababli, umumiy holda ham, ortogonallik $u \perp v$ simvol bilan belgilanadi.

Ixtiyoriy Evklid fazosida Pifagor teoremasi o'rinli:

har qanday ikki ortogonal $u \in E$ va $v \in E$ element uchun

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad (20.1.8)$$

tenglik bajariladi.

Bu tenglik quyidagi

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2$$

ayniyatdan kelib chiqadi.

(20.1.8) tenglikni takroriy qo'llash natijasida Pifagor teoremasining quyidagi ko'p o'lchovli holiga kelamiz:

agar $u_1, u_2, \dots, u_n$ elementlar o'zaro ortogonal bo'lsa, ya'ni

$$(u_k, u_j) = 0, \quad k \neq j;$$

bo'lsa, u holda

$$\left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \quad (20.1.9)$$

tenglik bajariladi.

Cheksiz o'lchovli Evklid fazosida Pifagor teoremasining cheksiz o'lchovli holi ham o'rinli:

faraz qilaylik, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'zaro ortogonal elementlardan tashkil topgan bo'lsin. Agar

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

qator yaqinlashsa,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 \quad (20.1.10)$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan, shartga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow u, \quad n \rightarrow \infty.$$

U holda, (20.1.9) va (20.1.3) formulalarga asosan,

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|^2 \rightarrow \|u\|^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Agar Evklid fazosining $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ elementlari ketma-ketligidagi har bir element noldan farqli bo'lib,

$$(g_j, g_k) = 0, \quad j \neq k,$$

tengliklar bajarilsa, bu elementlar sistemasi *ortogonal sistema* tashkil qiladi deyiladi.

20.1.2 - misol. Quyidagi

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots$$

trigonometrik sistema $R[-\pi, \pi]$ Evklid fazosida ortogonal sistema tashkil qiladi.

Bu tasdiq bevosita (20.0.3) formulalardan kelib chiqadi.

20.1.3 - misol. $R[-1, 1]$ Evklid fazosida quyidagi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (20.1.11)$$

*Lejandr ko'phadi*ri sistemasini qaraylik.

Har bir Lejandr ko'phadi n -darajali ko'phad bo'lib, bunda x^n oldidagi koeffitsient noldan farqlidir. Haqiqatan, quyidagi

$$(x^2 - 1)^n = x^{2n} - nx^{2n-2} + \dots$$

Nyuton binomi formulasiga ko'ra,

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{n!} x^n - \dots$$

Shuning uchun,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \dots, \quad (20.1.12)$$

bu yerda ko'p nuqta orqali kichik darajali hadlar belgilangan.

Masalan,

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

(20.1.11) formulada hosila oldidagi koeffitsient $P_n(1) = 1$ shartni ta'minlash uchun qo'yilgan. Lejandr ko'phadlari sferik deb ataluvchi funksiyalar tarkibida qatnashadi va bu shart bunday funksiyalarda almashtirishlar bajarishni ancha soddalashtiradi.

Bo'laklab integrallash yordamida, $P_n(x)$ ko'phad barcha $k = 0, 1, \dots, n-1$ lar uchun $f(x) = x^k$ ko'rinishdagi funksiyalarga $[-1, 1]$ kesmada ortogonal ekanini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan, k marta bo'laklab integrallash natijasida, $x = \pm 1$ nuqtalarda barcha integraldan tashqari hadlar nolga teng bo'lgani sababli, quyidagi

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx =$$

$$= \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n dx = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak, $P_n(x)$ ko'phad x^k , $k < n$, darajalarning istalgan chiziqli kombinatsiyasiga va bundan chiqdi, $k < n$ da istalgan $P_k(x)$ ko'phadga ortogonaldir. Bundan, albatta, Lejandr ko'phadlari ortogonal sistema tashkil qilishi kelib chiqadi.

Ortogonal sistemadagi barcha elementlarning normalari 1 ga teng bo'lgan holda umumiy ortogonal qatorlar nazariyasidagi formulalar ayniqsa sodda ko'rinishga ega bo'ladi.

Ta'rif. Agar Evklid fazosining $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ elementlari ketma-ketligi

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} \quad (20.1.13)$$

shartni qanoatlantirsa, bu elementlar sistemasi **ortonormal (ortonormalangan) sistema** deyiladi (bu yerda δ_{jk} Kronekerning delta-simvolidir).

Ravshanki, istalgan ortogonal sistemani, har bir elementini sonli ko'paytuvchiga ko'paytirib, ortonormal sistemaga aylantirish mumkin.

20.1.4 - misol. Quyidagi

$$e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2k}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2k+1}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20.1.14)$$

funksiyalar ketma-ketligi $R[-\pi, \pi]$ da ortonormal sistema tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun (20.0.3) munosabatlardan foydalanish yetarli.

20.1.5 - misol. Lejandr ko'phadlari sistemasini qaraylik (20.1.3 - misolga qarang). Bo'laklab integrallab,

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

ekanini, ya'ni Lejandr ko'phadlarining normalari nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Quyidagi normalangan

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$$

Lejandr ko'phadlari $R[-1, 1]$ Evklid fazosida ortonormal sistema tashkil qiladi.

Aytaylik, E Evklid fazosida $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistema berilgan bo'lsin. Istalgan $f \in H$ element uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

formal yig'indi f funksiyaning shu ortonormal sistema bo'yicha *Furiye qatori*, (f, e_k) sonlar esa, *Furiye koeffitsiyentlari* deb ataladi.

f element Furiye qatorining n - qismaniy yig'indisini quyidagi

$$S_n f = \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k \quad (20.1.15)$$

ko'rinishda aniqlaymiz.

Bevosita (20.1.10) formulaga ko'ra,

$$\|S_n f\|^2 = \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2. \quad (20.1.16)$$

E'tibor bering, qismaniy yig'indining (20.1.15) ta'rifi va (20.1.13) ortogonallik shartiga asosan,

$$(S_n f, e_j) = (f, e_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (20.1.17)$$

4. Berilgan $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistema bo'yicha n -tartibli *polinom* deb birinchi n ta elementning ixtiyoriy

$$P_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \quad c_k \in \mathbb{R},$$

chiziqli kombinatsiyasiga aytamiz.

Masalan, istalgan $f \in E$ element Furrye qatorining $S_n f$ n -qisimiy yig'indisi n -tartibli polinom bo'ladi.

Navbatdagi sodda tasdiq juda muhim ahamiyatga ega.

20.1.1 - tasdiq. *Istalgan $f \in E$ element va har qanday P_n polinom uchun quyidagi*

$$f - S_n f \perp P_n \quad (20.1.18)$$

ortogonallik munosabati o'rinli.

Isbot. (20.1.18) munosabat chap qismini barcha $j = 1, 2, \dots, n$ lar uchun e_j elementlarga skalyar ko'paytiramiz. U holda, (20.1.17) ga ko'ra,

$$(f - S_n f, e_j) = (f, e_j) - (S_n f, e_j) = (f, e_j) - (f, e_j) = 0.$$

Demak, $f - S_n f$ ayirma $j = 1, 2, \dots, n$ nomerli barcha e_j elementlarga va demak, ularning chiziqli kombinatsiyasiga, ya'ni P_n polinomga ortogonaldir.

■

1 - natija. *Istalgan $f \in E$ element va har qanday P_n polinom uchun*

$$\|f - P_n\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f - P_n\|^2 \quad (20.1.19)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, quyidagi

$$f - P_n = [f - S_n f] + [S_n f - P_n] \quad (20.1.20)$$

sodda ayniyatdan foydalanaylik.

20.1.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$f - S_n f \perp S_n f - P_n$$

ortogonallik munosabati o'rinli, chunki munosabatning o'ng tarafi n -tartibli polinomdir. Demak, (20.1.20) ayniyatning o'ng tarafida turgan kvadrat qavslar ichidagi ifodalar o'zaro ortogonaldir. Shunday ekan, (20.1.8) Pifagor teoremasiga ko'ra, talab qilingan (20.1.19) tenglikka ega bo'lamiz.

2 - natija. *Istalgan $f \in E$ element uchun Bessel ayniyati deb ataluvchi*

$$\sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2 - \|f - S_n f\|^2 \quad (20.1.21)$$

tenglik o'rinli.

1-natijadagi (20.1.19) formulada P_n sifatida aynan nolga teng bo'lgan $P_n \equiv 0$ polinomni olib,

$$\|f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2$$

tenglikka kelamiz.

Endi (20.1.21) ayniyat (20.1.16) tenglikdan kelib chiqadi.

3 - natija. *Istalgan $f \in E$ element uchun Bessel tengsizligi deb ataluvchi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (20.1.22)$$

tengsizlik o'rinli.

Haqiqatan, (20.1.21) Bessel ayniyatiga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Bu tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ desak, (20.1.22) tengsizlikka ega bo'lamiz.

4 - natija. *Har qanday $f \in E$ elementning Furiye koeffitsiyentlari nolga intiladi:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f, e_k) = 0.$$

Tasdiq yaqinlashuvchi qatorning hadlari nolga intilishidan kelib chiqadi.

5 - natija. *Istalgan $f \in E$ element va har qanday P_n polinom uchun*

$$\|f - S_n f\| \leq \|f - P_n\| \quad (20.1.23)$$

tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlik (20.1.19) tengsizlikning oddiy natijasidir.

Eslatma. 5 - natija yaqinlashtirish nazariyasida (теория приближений) nihoyatda muhim rol o'ynaydi. Masalan, berilgan f elementni n -tartibli biror polinom bilan yaqinlashtirish masalasini qa-raylik:

$$f \simeq P_n.$$

Bu masalada f elementdan og'ishi eng kam bo'lgan polinom topish, ya'ni

$$\|f - P_n\|$$

xatoni minimumlashtirish talab qilinadi.

(20.1.23) formulaga ko'ra, bu minimumga $P_n = S_n f$ da erishiladi. Boshqacha aytganda, E Evklid fazosi metrikasida barcha n -tartibli polinomlar ichida f elementga eng yaqini f element Furye qatorining n -qismaniy yig'indilari bo'ladi. Shu munosabat bilan, bu qismaniy yig'in-dilar *eng yaxshi yaqinlashuvchi polinomlar* deb ataladi.

5. Agar ortonormal sistemaga hech qanday qo'shimcha shart qo'yilmasa, u holda f funksiyaning Furye qatori aynan shu funksiyaga yaqinlashmasligi mumkin.

Faraz qilaylik, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistema va $f \in E$ element berilgan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistema bo'yicha shunday P^ε polinom topilsaki, u uchun

$$\|f - P^\varepsilon\| < \varepsilon \quad (20.1.24)$$

baho o'rinli bo'lsa, f elementni $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bo'yicha polinomlar bilan ixtiyoriy aniqlikda yaqinlashtirish mumkin deyiladi.

Ta'rif. Agar E Evklid fazosining istalgan elementini $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistema bo'yicha polinomlar bilan ixtiyoriy aniqlikda yaqinlashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu sistema E fazosida **yopiq** deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar polinomlar to'plamining yopilmasi Evklid fazosi bilan ustma-ust tushsa, ortonormal sistema yopiq deyiladi.

20.1.6 - misol. Lejandr ko'phadlari sistemasi $R[-1, 1]$ Evklid fazosida yopiqdir.

Haqiqatan, bevosita (20.1.12) tenglikdan istalgan x^n darajani Lejandr ko'phadlari chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida yozish mumkinligi kelib chiqadi:

$$x^n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} P_n(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + \dots + c_1P_1(x) + c_0P_0.$$

Bu degani, n -darajali istalgan $Q_n(x)$ ko'phadni Lejandr ko'phadlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x).$$

17.1.3 - tasdiqqa ko'ra, $[-1, 1]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi istalgan f funksiyani (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan $f_h(x)$ silliq funksiyalar bilan $R[-1, 1]$ normasi bo'yicha approksimatsiyalash mumkin. Lekin, 10.6.2 - Veyershtass teoremasiga ko'ra, har bir uzluksiz $f_h(x)$ funksiyani $Q_n(x)$ ko'phadlar bilan $[-1, 1]$ kesmada tekis va demak, o'rta kvadratik approksimatsiyalash mumkin.

Bundan, ravshanki, $[-1, 1]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi istalgan funksiyani $P_n(x)$ Lejandr ko'phadlari chiziqli kombinatsiyalari bilan $R[-1, 1]$ normasi bo'yicha approksimatsiyalash mumkinligi kelib chiqadi.

20.1.2 - tasdiq. Ortonormal sistema yopiq bo'lishi uchun istalgan element Furye qatorining shu elementga yaqinlashishi zarur va yetarlidir.

Isbot. 1) Faraz qilaylik, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ yopiq ortonormal sistema va E fazosining istalgan f elementi berilgan bo'lsin. f funksiya Furye qatorining shu funksiyaga yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Qaralayotgan ortonormal sistema yopiq bo'lgani tufayli, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham biror $N = N(\varepsilon)$ -tartibli shunday P^ε polinom topiladiki, u uchun (20.1.24) tengsizlik bajariladi. E'tibor bering, har bir N -tartibli polinom $n \geq N$ bo'lganda n -tartibli ham polinom bo'ladi. Shunday ekan, 20.1.1 - tasdiqning 5 - natijasiga ko'ra ((20.1.23) formulaga qarang), istalgan $n \geq N$ uchun

$$\|f - S_n f\| \leq \|f - P^\varepsilon\|$$

baho o'rinli.

Bu baho va (20.1.24) ga ko'ra, $n \geq N$ bo'lganda,

$$\|f - S_n f\| < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

bo'ladi. Bu esa, f funksiya Furye qatori E fazo metrikasida f elementga yaqinlashishini anglatadi.

2) Faraz qilaylik, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistema shunday bo'lsinki, bunda istalgan $f \in E$ element Furye qatori shu elementga yaqinlashsin. U holda, approksimatsiyalovchi polinomlar sifatida Furye qatorining qisman yig'indilarini olib, qaralayotgan sistemaning yopiq ekaniga iqror bo'lamiz.

■

Shunday qilib, berilgan ortonormal sistema bo'yicha ixtiyoriy elementning Furye qatori aynan shu elementga yaqinlashishini ko'rsatish uchun, bu sistemaning yopiq ekanini isbotlash zarur va yetarlidir.

Furye qatorlari nazariyasida navbatdagi yopiqlik kriteriysi muhim rol o'ynaydi.

20.1.1 - teorema. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistema faqat va faqat istalgan $f \in E$ element uchun **Parseval tengligi** deb ataluvchi quyidagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2 \quad (20.1.25)$$

tenglik bajarilganda yopiq bo'ladi.

Isbot (20.1.21) Bessel ayniyati va 20.1.2 - tasdiqdan kelib chiqadi. Haqiqatan, (20.1.21) ayniyatda $n \rightarrow \infty$ desak,

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|^2 = 0$$

bo'ladi, ya'ni talab qilingan tenglik bajariladi.

Eslatma. (20.1.25) Parseval tengligi *yopiqlik tenglamasi* deb ham ataladi. E'tibor bering, Parseval tengligidan farqli o'laroq, (20.1.22) Bessel tengsizligi ixtiyoriy ortonormal sistema (ya'ni yopiq bo'lishi shart bo'lmagan) uchun o'rinli.

6. Agar $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistemadan biror elementni, masalan e_1 ni, chiqarib tashlasak, u holda qolgan elementlar tashkil qilgan $\{e_k\}_{k=2}^{\infty}$ sistema yopiq bo'lmay qoladi. Haqiqatan, $f = e_1$ element sistemaning qolgan barcha elementlariga ortogonal bo'ladi va bundan chiqdi, istalgan

$$P = \sum_{k=2}^n c_k e_k$$

polinom uchun, Pifagor teoremasiga ko'ra,

$$\|f - P\|^2 = \|e_1 - P\|^2 = \|e_1\|^2 + \|P\|^2 \geq \|e_1\|^2 = 1$$

munosabat o'rinli.

Shunday qilib, $f = e_1$ elementni $\{e_k\}_{k=2}^{\infty}$ sistema bo'yicha polinomlar bilan 1 dan kichik xatolikda approksimatsiya qilib bo'lmaz ekan.

Boshqa tarafdin, boshlang'ich ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistema ham, o'z navbatida, boshqa sistemadan biror elementni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'lmagani maqsadga muvofiqdir. Aniqrog'i, noldan farqli va $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistemaga ortogonal element bo'lmagligi kerak.

Ta'rif. Agar $f \in E$ element $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal ekanidan $f = 0$ tenglik kelib chiqsa, u holda bu sistema E Evklid fazosida to'la deyiladi.

Shunday qilib, to'la ortonormal sistemaga biror yangi element qo'shilsa, sistema ortonormallik xossasini saqlab qolmas ekan.

Eslatma. Agar biror $f \in E$ element to'la ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistemaning, bitta e_n elementidan tashqari, barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, u holda

$$f = (f, e_n)e_n$$

tenglik bajariladi, ya'ni f element e_n elementga kollinear bo'ladi.

Haqiqatan, $g = f - (f, e_n)e_n$ element qayd qilingan to'la ortonormal sistemaning barcha elementlariga ortogonal va bundan chiqdi, u nolga teng.

20.1.3 - tasdiq. Har qanday yopiq ortonormal sistema to'ladir.

Isbot. Aytaylik, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ yopiq ortonormal sistema bo'lsin. Agar f element bu sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, u holda uning barcha Furye koeffitsiyentlari nolga teng bo'ladi. Shunday ekan, (20.1.25) Parseval tengligidan $f = 0$ ekan kelib chiqadi.

Teskari tasdiq, umuman aytganda, to'g'ri emas. Lekin, agar Evklid fazosi to'la bo'lsa, u holda teskari tasdiq ham o'rinli bo'ladi.

Ta'rif. Agar Evklid fazosi elementlaridan tuzilgan har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashsa, u holda bu fazo to'la deyiladi.

Odatdagidek, agar $f_n \in E$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

bo'lsa, u fundamental deyiladi.

Koshi kriteriysiga ko'ra (11.1.2 - teorema qarang), har qanday chekli o'lchovli Evklid fazosi to'ladir.

Cheksiz o'lchovli to'la Evklid fazosi *Hilbert fazosi* deyiladi va odatda, H simvoli bilan belgilanadi.

20.1.4 - tasdiq. *Hilbert fazosida istalgan elementning har qanday to'la ortonormal sistema bo'yicha Furiy qatori shu elementga yaqinlashadi.*

Isbot. Avval istalgan element Furiy qatorining yaqinlashishini, so'ngra esa, aynan berilgan elementga yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, H Hilbert fazosi bo'lib, $\{e_k\}$ bu fazodagi to'la ortonormal sistema va f fazoning istalgan elementi bo'lsin. Qisman yig'indilarning (20.1.15) ta'riifi va (20.1.16) formulaga ko'ra, istalgan $n > m$ nomerlar uchun

$$\|S_n f - S_m f\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |(f, e_k)|^2 \quad (20.1.26)$$

tenglik o'rinli.

Bessel tengsizligiga asosan, (20.1.22) ning chap tarafidagi qator yaqinlashadi va demak, Koshi kriteriysiga ko'ra, (20.1.26) ning o'ng tarafidagi ifoda $n \rightarrow \infty$ va $m \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Bundan chiqdi, $\{S_n f\}$ qisman yig'indilar ketma-ketligi fundamental bo'lib, Hilbert fazosi to'la bo'lgani sababli, Furiy qatori biror

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

elementga yaqinlashadi.

Endi $\tilde{f} = f$ ekanini ko'rsatish yetarli. Buning uchun

$$g = f - \tilde{f} = f - \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

deylik. Bu tenglik va (20.1.13) ortogonallik shartiga ko'ra,

$$(g, e_j) = (f, e_j) - \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)(e_k, e_j) = (f, e_j) - (f, e_j) = 0.$$

Demak, istalgan j nomer uchun $(g, e_j) = 0$ tenglik o'rinli ekan. Ortonormal sistema to'la bo'lgani sababli, bundan $g = 0$ ekani, ya'ni $\tilde{f} = f$ ekani kelib chiqadi.



Natija. Hilbert fazosida har bir to'la ortonormal sistema yopiq bo'ladi.

Haqiqatan, bu bevosita 20.1.2 - va 20.1.4 - tasdiqlardan kelib chiqadi.

Shunday qilib, Hilbert fazosida yopiq va to'la ortonormal sistema tushunchalari ustma-ust tushadi.

7. Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning $R(G)$ Evklid fazosini Jordan bo'yicha o'lchovli har qanday G to'plam uchun aniqlash mumkin. Eslatib o'tamiz, agar $G \subset \mathbb{R}^n$ to'plam $n = 2$ da kvadratlanuvchi, $n \geq 3$ da esa, kublanuvchi bo'lsa, u Jordan bo'yicha o'lchovli deyiladi. $R(G)$ da skalyar ko'paytma

$$(f, g) = \int_G f(x)g(x) dx \quad (20.1.27)$$

tenglik orqali kiritiladi.

Ushbu bandeda biz ikki $G \subset \mathbb{R}^n$ va $F \subset \mathbb{R}^m$ Jordan to'plami ko'paytmasida, ya'ni

$$G \times F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in G, y \in F\} \quad (20.1.28)$$

da ortonormal sistemalarni qaraymiz.

Aytaylik, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistema $R(G)$ fazoda ortonormal, $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ sistema esa, $R(F)$ fazoda ortonormal bo'lsin. U holda

$$\Phi_{kj}(x, y) = \varphi_k(x)\psi_j(y), \quad x \in G, y \in F, \quad (20.1.29)$$

funksiyalar sistemasining $R(G \times F)$ Evklid fazosida ortonormal ekanini ko'rsatish oson.

Haqiqatan,

$$\begin{aligned} & \int_{G \times F} \Phi_{kj}(x, y) \Phi_{ml}(x, y) dx dy = \\ &= \int_G \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx \int_F \psi_j(y) \psi_l(y) dy = \delta_{km} \cdot \delta_{jl}, \end{aligned}$$

ya'ni skalyar ko'paytma faqat $k = m$ va $j = l$ da noldan farqli; bunda u 1 ga teng.

Ixtiyoriy $f \in R(G \times F)$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning (20.1.29) ortonormal sistema bo'yicha Furye qatori

$$f(x, y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} (f, \Phi_{kj}) \Phi_{kj}(x, y) \quad (20.1.30)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda Furye koeffitsiyentlari

$$(f, \Phi_{kj}) = \int_{G \times F} f(x, y) \varphi_k(x) \psi_j(y) dx dy \quad (20.1.31)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

20.1.1 - teoreмага ko'ra, (20.1.29) ortonormal sistema faqat va faqat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \Phi_{kj})|^2 = \int_F \int_G |f(x, y)|^2 dx dy \quad (20.1.32)$$

Parseval tengligi bajarilganda yopiq bo'ladi.

Navbatdagi tasdiq yopiq ortonormal sistemalar ko'paytmasi yopiq sistema tashkil qilishini ta'kidlaydi.

20.1.2 - teorema. Faraz qilaylik, G va F Jordan bo'yicha o'lchovli yopiq to'plamlar bo'lib, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal sistema $R(G)$ da va $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ ortonormal sistema esa, $R(F)$ da yopiq bo'lsin. U holda (20.1.29) funksiyalar sistemasi $R(G \times F)$ Evklid fazosida yopiq ortonormal sistema bo'ladi.

Isbot. 1) Aytaylik, f yopiq $G \times F$ sohada aniqlangan istalgan uzluksiz funksiya bo'lsin. Agar $y \in F$ ni parametri desak, f funksiyaning $\{\varphi_k\}$ sistema bo'yicha Furye koeffitsiyentlari

$$g_k(y) = \int_G f(x, y) \varphi_k(x) dx \quad (20.1.33)$$

kabi aniqlanadi.

$\{\varphi_k\}$ sistema yopiq bo'lgani sababli, Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(y)|^2 = \int_G |f(x, y)|^2 dx, \quad y \in F. \quad (20.1.34)$$

17.1.1 - teoreмага ko'ra, (20.1.34) ning chap tarafidagi qator uzluksiz funksiyalardan iborat bo'lib, uzluksiz funksiya yaqinlashadi. Dini teoremasiga asosan (10.7.5 - teoreмага qarang), bu qator tekis yaqinlashadi. Qatorni hadma-had integrallab (10.7.3 - teorema va uning natijasiga ko'ra, buni amalga oshirish mumkin),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_F |g_k(y)|^2 dy = \int_F \int_G |f(x, y)|^2 dx dy \quad (20.1.35)$$

tenglikni olamiz.

Boshqa tarafdin, har bir $g_k(y)$ funksiyaning $\{\psi_j\}$ sistema bo'yicha Furye qatoriga yoysak,

$$g_k(y) = \sum_{j=1}^{\infty} (g_k, \psi_j) \psi_j(y)$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda

$$(g_k, \psi_j) = \int_F g_k(y) \psi_j(y) dy = \int_F \psi_j(y) dy \int_G f(x, y) \varphi_k(x) dx = (f, \Phi_{kj}). \quad (20.1.36)$$

Shartga ko'ra $\{\psi_j\}$ sistema yopiq bo'lgani uchun, Parseval tengligi o'rinni:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(g_k, \psi_j)|^2 = \int_F |g_k(y)|^2 dy.$$

Bu tenglikni k bo'yicha yig'ib chiqsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(g_k, \psi_j)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_F |g_k(y)|^2 dy$$

munosabatni olamiz.

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tarafi (20.1.35) tenglikning chap tarafiga teng. Demak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(g_k, \psi_j)|^2 = \int_F \int_G |f(x, y)|^2 dx dy.$$

Bundan, (20.1.36) munosabatlarni e'tiborga olib, (20.1.32) Parseval tengligi bajarilishiga iqror bo'lamiz. Bundan chiqdi, har qanday uzluksiz funksiya Furye qatori shu funksiyaga $R(G \times F)$ fazo metrika-sida yaqinlashar ekan. Demak, istalgan uzluksiz funksiyani (20.1.29) sistema bo'yicha polinomlar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkin.

2) Endi f funksiya $R(G \times F)$ ning istalgan elementi bo'lsin. Xuddi bir o'zgaruvchili holidagidek, bunday funksiyani uzluksiz funksiyalar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkin (13.4.9 - teorema va 13.4.10 - teoremaga eslatmani qarang). Shunday ekan, yuqoridagi mulohazalardan f funksiyani (20.1.29) sistema bo'yicha polinomlar bilan yaqinlashtirish mumkinligi kelib chiqadi. Bu esa, o'z navbatida, qaralayotgan sistemaning yopiq ekanini anglatadi.



1 - eslatma. Yuqoridagi teorema matematik fizikaning ko'p o'lbaholli masalalarini o'zgaruvchilarni ajratish deb ataluvchi usul bilan yechishda muhim rol o'ynaydi. Bu usulni birinchi bo'lib J.B. Furje 1822 yilda chop qilingan "Issiqlikning analitik nazariyasi" nomli ishida asoslagan.

2 - eslatma. Ushbu paragrafda kiritilgan $R(G)$ Evklid fazosi to'la emas, ya'ni u Hilbert fazosi emas. Bunga sabab shundaki, bu fazo elementlaridan tuzilgan fundamental ketma-ketlik limiti Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiya bo'lmasligi mumkin.

Agar skalyar ko'paytmani aniqlovchi integralni Lebeg ma'nosida deb qarasak, u holda $R(G)$ fazo to'la bo'ladi va u, odatda, $L_2(G)$ orqali belgilanadi. Mana shu hol, zamonaviy matematik tahlilda qo'llanuvchi asosiy qurol sifatida aynan Lebeg integrali tanlanishida, hal qiluvchi rol o'ynagan.

$L_2(G)$ fazosining to'laligi tufayli, ortogonal sistemalar bo'yicha qatorlar asosan aynan shu fazoda o'rganiladi.

Lekin, shunga qaramasdan, Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning yuqorida kiritilgan $R(G)$ Evklid fazosi ham Furje qatorlari nazariyasi tatbiqi uchun bimalol yetarli bo'lar ekan.

20.2-§. $R[-\pi, \pi]$ dagi funksiyalarning trigonometrik Furje qatorlari

1. Asosiy xossalari. Odatda, *trigonometrik sistema* deganda quyidagi

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (20.2.1)$$

funksiyalar sistemasi tushuniladi.

Bu ortogonal sistema elementlari (20.1.14) ortonormallangan sistema elementlaridan o'zgarmas songa farq qiladi. Shuning uchun, Evklid fazosidagi istalgan ortonormal sistema bo'yicha Furiye qatorlari to'g'risida §20.1 da o'rnatilgan natijalarni (20.2.1) trigonometrik sistemaga qo'llashda aniqlik kiritish zarur.

(20.1.14) ortonormal sistema bo'yicha Furiye koeffitsiyentlarini hisoblashga ahamiyat bersak, ixtiyoriy $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiyaning 20.2.1) trigonometrik sistema bo'yicha Furiye qatori

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.2.2)$$

ko'rinishga ega ekanini ko'ramiz, bu yerda a_k va b_k Furiye koeffitsientlar

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (20.2.3)$$

kabi aniqlanadi.

Bu tengliklar bilan a_k kosinus-koeffitsientlar barcha $k \geq 0$ butun sonlar uchun, b_k sinus-koeffitsientlar esa, barcha $k \geq 1$ butun sonlar uchun aniqlangan.

Trigonometrik Furiye qatorining $S_n f(x)$ qisman yig'indisi deb quyidagi

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.2.4)$$

trigonometrik polinomga aytiladi.

Eslatma. (20.1.15) dan farqli o'laroq, (20.2.4) n -qisman yig'indi Furiye qatorining n ta mas, $(2n+1)$ ta hadini o'z ichiga oladi. Ammo bu avvalgi paragrafda olingan umumiy natijalarni qo'llashda qo'shimcha muammo tug'dirmaydi.

Eslatib o'tamiz, $R[-\pi, \pi]$ sinivol orqali $[-\pi, \pi]$ kesmada Riman

bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

skalyar ko'paytmaga va

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

normaga ega Evklid fazosini belgilagan edik.

Bundan buyon biz $R[-\pi, \pi]$ dagi har bir funksiyani $\mathbb{R}$ sonlar o'qiga 2π davr bilan davriy davom ettirilgan, deb faraz qilamiz va bunday funksiyani 2π -davriy deb ataymiz. E'tibor bering, bunday davom ettirishni faqat va faqat, *davriylik sharti* deb ataluvchi,

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad (20.2.5)$$

shart bajarilganda analga oshirish mumkin.

Shu sababli, bundan keyingi mulohazalarda har bir $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya (20.2.5) davriylik shartini qanoatlantiradi deb hisoblaymiz.

20.2.1 - misol. $(-\pi, \pi)$ intervalda

$$g(x) = x, \quad -\pi < x < \pi, \quad (20.2.6)$$

tenglik bilan berilgan g funksiyani Furje qatoriga yoyamiz.

Interval chegaraviy nuqtalarida bu funksiyani $g(-\pi) = g(\pi) = 0$ tenglik bilan aniqlaymiz va 2π davr bilan sonlar o'qiga davriy davom ettiramiz.

Funksiya Furje koeffitsiyentlarini hisoblaylik. Kosinus-koeffitsientlar, to'g'riqika ko'ra, nolga teng. Integral ostidagi funksiya juft bo'lgani sababli, sinus-koeffitsientlar uchun

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin kx - kx \cos kx}{k^2} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{k} \cos k\pi = 2 \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

tengliklar o'rinli.

Demak, qaralayotgan funksiya Furiye qatori

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi < x < \pi, \quad (20.2.7)$$

ko'rinishga ega.

20.2.1 - teorema. (20.2.1) *trigonometrik sistema* $R[-\pi, \pi]$ *Euklid fazosida yopiq.*

Isbot. Yopiq sistema ta'rifiga ko'ra, $R[-\pi, \pi]$ dagi har bir f funksiyani istalgancha aniqlikda trigonometrik polinoralar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkinligini ko'rsatish talab qilinadi.

Buning uchun 17.1.3 - tasdiqdan foydalanamiz. Bu tasdiqqa ko'ra, $[-\pi, \pi]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi 2π -davriy istalgan funksiyani $R[-\pi, \pi]$ normasida, (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan, $f_h(x)$ silliq funksiyalar bilan approksimatsiyalash mumkin. (17.1.17) ta'rifga ko'ra, har qanday $f_h(x)$ funksiya 2π -davriydir.

10.6.3 - teoreмага asosan, har qanday 2π -davriy uzluksiz $f_h(x)$ funksiyani $[-\pi, \pi]$ kesmadada tekis va demak, o'rta kvadratik, $T_n(x)$ trigonometrik polinomlar bilan approksimatsiyalash mumkin.

Shunday ekan, $[-\pi, \pi]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi har bir 2π -davriy funksiyani $R[-\pi, \pi]$ normasida $T_n(x)$ trigonometrik polinomlar bilan yaqinlashtirish mumkin.

Bundan, o'z navbatida, $R[-\pi, \pi]$ fazosida trigonometrik sistema-ning yopiqligi kelib chiqadi.



Natija. *Trigonometrik sistema* $R[-\pi, \pi]$ *Euklid fazosida to'la.*

Haqiqatan, 20.1.3 - tasdiqqa ko'ra, har qanday yopiq sistema to'ladir.

20.2.2 - teorema. $R[-\pi, \pi]$ dagi har bir funksiya-ning Furye qatori shu funksiyaga $[-\pi, \pi]$ kesmada o'rta kvadratik yaqinlashadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n f(x)|^2 dx = 0. \quad (20.2.8)$$

Teoremaning haqligi bevosita 20.2.1 - teorema va 20.1.2 - tasdiqlardan kelib chiqadi.

Natija. Agar $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya biror $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ kesmada uzluksiz bo'lib, uning Furye qatori shu kesmada tekis yaqinlashsa, u holda qator yig'indisi kesmaning har bir nuqtasida $f(x)$ ga teng bo'ladi.

Aks holda Furye qatori bu kesmada berilgan f funksiyaga o'rta kvadratik yaqinlashmas edi.

Eslatma. Bundan buyon (20.2.2) munosabatni, o'ng tarafdagi qator $R[-\pi, \pi]$ Evklid fazosi normasida yaqinlashishini hisobga olib, $R[-\pi, \pi]$ ma'nosidagi tenglik deb qarashimiz mumkin.

20.2.3 - teorema. Istalgan $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya uchun Parseval tengligi o'rinni tutadi:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (20.2.9)$$

Isbot. Parseval tengligi 20.1.1 - va 20.2.1 - teoremlardan kelib chiqadi. (20.2.9) formulada integral oldidagi koeffitsient (20.1.4) orto-normallangan sistemadan (20.2.1) ortogonal sistemaga o'tishda hosil bo'ladi.

Lekin, (20.2.9) tenglikni, (20.2.8) formulada $S_n f(x)$ qisqin yig'indi o'rniga uning (20.2.4) qiymatini qo'yib, so'ngra Furye koeffitsientlarining (20.2.3) ta'rif va (20.0.3) ortogonallik munosabatla-

ridan foydalanib ham olish mumkin. Haqiqatan,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (20.2.10)$$

E'tibor bering, (20.2.10) formula (20.1.21) Bessel ayniyatining (20.2.1) ortogonal sistema uchun yozilishidir. Bu formulada $n \rightarrow \infty$ deb, (20.2.8) ni hisobga olsak, talab qilingan (20.2.9) tenglikka kelamiz.

■

20.2.2 - misol. 20.1.1 - misoldagi (20.2.6) funksiya uchun Parseval tengligi

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

ko'rinishga ega. Bundan, integralni hisoblasak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (20.2.11)$$

tenglikni olamiz.

Eslatib o'tamiz, 9 - bobda (9.6.17) tenglik bilan biz Riman zeta-funksiyasini aniqlagan edik:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Shunday ekan, (20.2.11) tenglik $\zeta(2) = \pi^2/6$ ekanini anglatadi.

2. Differentsiallanuvchi funksiyalar Furye qatorlari. Differentsiallanuvchi funksiyalarning imkon darajada kengroq sinfini qarash va ular uchun $R[-\pi, \pi]$ dagi funksiyalarning Furye qatorlari

bo'yicha olingan natijalarni qo'llash maqsadida, $R[-\pi, \pi]$ ma'nosida (yoki umumlashgan) hosila tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Agar berilgan $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya uchun shunday $\varphi \in R[-\pi, \pi]$ funksiya topilsaki, har qanday a va b haqiqiy sonlar uchun

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (20.2.12)$$

tenglik bajarilsa, f funksiyani $R[-\pi, \pi]$ ma'nosida hosilaga ega deymiz.

Biz φ funksiyani f funksiyaning $R[-\pi, \pi]$ dagi hosilasi yoki umumlashgan hosilasi deb ataymiz va odatdagi $\varphi(x) = f'(x)$ belgilashdan foydalanamiz. Shunday qilib, umumlashgan hosilani aniqlovchi tenglikni

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx \quad (20.2.13)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

E'tibor bering, istalgan $\varphi \in R[-\pi, \pi]$ funksiya, faqat va faqat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 0 \quad (20.2.14)$$

shart bajarilganda, $R[-\pi, \pi]$ dagi biror funksiyaning umumlashgan hosilasi bo'lishi mumkin.

Haqiqatan, agar $\varphi(x) = f'(x)$ bo'lsa, (20.2.13) ta'rif va (20.2.5) davriylik shartiga ko'ra,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

tenglik o'rinli.

Aksincha, agar (20.2.14) shart bajarilsa, u holda

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$$

funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, davriylik shartini qanoatlantiradi:

$$f(\pi) - f(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0.$$

Demak, $f \in R[-\pi, \pi]$. (20.2.12) shart esa, integralning additivligidan kelib chiqadi. Shunday ekan, f funksiya φ ga teng umumlashgan hosilaga ega.

1 - eslatma. Bevosita (20.2.13) tenglik va yuqori chegarasi o'zgaruvchi Riman integralining xossasidan (6.5.4 - teoreмага qarang), $R[-\pi, \pi]$ da hosilaga ega bo'lgan har qanday funktsiyaning uzluksizligi kelib chiqadi.

2 - eslatma. Agar 2π davriy $f(x)$ funksiya sonlar o'qining har bir nuqtasida diffrensiallanuvchi bo'lib, uning $f'(x)$ oddiy hosilasi Riman bo'yicha lokal integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu hosila $R[-\pi, \pi]$ dagi hosila ham bo'ladi. Bu bevosita Nyuton-Leybnits formulasidan kelib chiqadi (6.1.1 - teoreмага qarang).

3 - eslatma. Har qanday 2π -davriy uzluksiz bo'lakli-silliqlik f funksiya $R[-\pi, \pi]$ ma'nosida hosilaga ega.

Haqiqatan, ta'rifga ko'ra, $f(x)$ funksiya istalgan $[a, b]$ kesmaning, chekli sondagi nuqtalaridan tashqari, barcha nuqtalarida oddiy $f'(x)$ hosilaga ega (§19.3 ga qarang). Endi $\varphi(x)$ deb $f'(x)$ bilan f silliq bo'lgan nuqtalarda ustma-ust tushuvchi va oddiy hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarda ixtiyoriyicha aniqlangan funktsiyani belgilaylik. Agar f funksiya silliq bo'lgan har bir $\Delta \subset [a, b]$ kesmada

Nyuton-Leybnits formulasini qo'llab, so'ngra hosil bo'lgan tengliklarni yig'ib chiqsak, (20.2.12) tenglikni olamiz.

Masalan, aytaylik, bo'lakli-silliqlik f funksiya $c \in (a, b)$ nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lsin. Agar

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x), & x \neq c, \\ 0, & x = c, \end{cases}$$

desak, bo'lakli-silliqlik funksiya ta'rifiga ko'ra, φ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi va f uzluksiz bo'lgani sababli, Nyuton-Leybnits formulasidan

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx &= \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx = \\ &= [f(c) - f(a)] + [f(b) - f(c)] = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

tenglik kelib chiqadi.

Bu, o'z navbatida, uzluksiz bo'lakli-silliqlik f funksiyaning $R[-\pi, \pi]$ ma'nosida hosilaga ega ekanini anglatadi.

4 - eslatma. $R[-\pi, \pi]$ dagi hosila xuddi oddiy hosila kabi xossalarga ega. Masalan, quyidagi

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx \quad (20.2.15)$$

bo'laklab integrallash formulasi o'rinli.

Haqiqatan, (20.2.13) ta'rifdan

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_a^b f'(x) dx \int_a^x g'(y) dy = \int_a^b f'(x)[g(x) - g(a)] dx = \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx - [f(b) - f(a)]g(a), \end{aligned} \quad (20.2.16)$$

va

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_a^b g'(y) dy \int_y^b f'(x) dx = \int_a^b g'(y)[f(b) - f(y)] dy = \\
 &= - \int_a^b f(y)g'(y) dy + f(b)[g(b) - g(a)] \quad (20.2.17)
 \end{aligned}$$

tengliklar kelib chiqadi.

I_1 va I_2 takroriy integrallar faqat integrallash tartibi bilan farq qilib, 13.5.1 - teorema ko'ra, o'zaro teng: $I_1 = I_2$. Shunday ekan, (20.2.16) va (20.2.17) formulalarning o'ng taraflarini tenglab, talab qilingan (20.2.15) tenglikka ega bo'lamiz.

5 - eslatma. Klassik hosiladan farqli o'laroq, umumlashgan hosila (20.2.13) tenglik bilan o'zaro bir qiymatli aniqlanmaydi. Masalan, biz $f'(x)$ ning qiymatini bir nuqtada o'zgartirsak, hosil bo'lgan funksiya o'sha f funksiyaning umumlashgan hosilasi bo'lib qolaveradi.

Shunday bo'lsada, quyidagi 20.2.3 - tasdiqda isbotlanganidek, bir funksiyaning ikki umumlashgan hosilasi o'zaro faqat nolga ekvivalent funksiya farq qilishi mumkin.

20.2.1 - tasdiq. Faraz qilaylik, f funksiya $R[-\pi, \pi]$ ma'nosida hosilaga ega bo'lsin. Agar f funksiya Furye qatori (20.2.2) ko'rinishga ega bo'lsa, u holda hosila Furye qatori uchun

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx) \quad (20.2.18)$$

tenglik o'rinni.

Isbot. $f'(x)$ (umumlashgan) hosilani Furye qatoriga yoyaylik:

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad (20.2.19)$$

bu yerda α_k va β_k orqali $f'(x)$ funksiya Furje koeffitsiyentlari belgilangan:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx.$$

Berilgan f funksiya va f' hosila Furje koeffitsiyentlari $k \geq 1$ da

$$\alpha_k = kb_k, \quad \beta_k = -ka_k \quad (20.2.20)$$

tengliklar bilan bog'langan ekanini ko'rsatamiz.

Birinchi tenglikni ko'rsatish uchun, (20.2.15) formula yordamida bo'laklab integrallab, (20.2.5) davriylik shartini qo'llash yetarli:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx = f(x) \cos kx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \\ &\quad + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = kb_k. \end{aligned}$$

(20.2.20) dagi ikkinchi tenglik ham xuddi shu usulda ko'rsatiladi. Bundan tashqari,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \, dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0. \quad (20.2.21)$$

Shunday ekan, koeffitsientlarning (20.2.20) va (20.2.21) qiymatlarini (20.2.19) qatorga qo'yib, talab qilingan (20.2.18) tenglikka ega bo'lamiz.

■

Eslatma. (20.2.18) qatorni yana (20.2.2) Furje qatorini formal ravishda differensiallab ham olish mumkin.

20.2.2 - tasdiq. Agar $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya $R[-\pi, \pi]$ da hosilaga ega bo'lsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \quad (20.2.22)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (20.2.19) Furye qatoriga ega bo'lgan $f'(x)$ funksiya uchun Parseval tengligi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \quad (20.2.23)$$

ko'rinishga ega.

Eslatib o'tamiz, (20.2.21) ga ko'ra, $\alpha_0 = 0$. Agar (20.2.23) ning chap tarafida α_k va β_k koeffitsientlarning (20.2.20) qiymatlarini qo'ysak, talab qilingan (20.2.22) tenglikni olamiz.

■

20.2.3 - tasdiq. $R[-\pi, \pi]$ dagi $f'(x)$ hosila nolga ekvivalent bo'lishi uchun, f funksiyaning o'zgarmas bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. (20.2.22) tenglikka va nolga ekvivalent funksiyaning (20.1.7) ta'rifiga ko'ra, $f'(x)$ hosila, faqat va faqat

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) k^2 = 0 \quad (20.2.24)$$

bo'lganda, ya'ni $k \geq 1$ da $a_k = 0$ va $b_k = 0$ bo'lganda, nolga ekvivalentdir. Bu degani, f funksiya ortonormal (20.1.14) trigonometrik sistemaning, $e_1(x) \equiv \text{const}$ elementidan tashqari, barcha elementlariga ortogonal bo'lishi kerak. Trigonometrik sistemaning to'liqligiga ko'ra (20.2.1 - teorema natijasiga qarang), bunday bo'lishi uchun $f \in R[-\pi, \pi]$ element e_1 ga kollinear bo'lishi, ya'ni $f(x) \equiv \text{const}$ bo'lishi zarur va yetarli.

Natija. Agar ikki $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiya $R[-\pi, \pi]$ da bitta $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiyaning hosilasi bo'lsa, bu ikki funksiya o'zaro ekvivalentdir.

Haqiqatan, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ ayirma aynan nolga teng funksiyaning, ya'ni o'zgarmas sonning hosilasidan iborat. Demak, u nolga ekvivalentdir.

3. Sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashish.

Yuqorida Furiye qatorlarining $R[-\pi, \pi]$ Evklid fazosi metrikasida, ya'ni o'rta kvadratik yaqinlashishi ko'rsatilgan edi (20.2.2 - teorema qarang). Ushbu bandeda absolyut va tekis yaqinlashish uchun shartlar aniqlanadi.

20.2.4 - tasdiq. Agar quyidagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty \quad (20.2.25)$$

sonli qator yaqinlashsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

funksional qator sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Isbot funksional qatorlar tekis yaqinlashishning Veyershtrass alomati (10.7.6 - teorema qarang) va

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|$$

bahodan kelib chiqadi.

20.2.4 - teorema. Hosilasi $[-\pi, \pi]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgan, istalgan 2π -davriy funksiyaning Furiye qatori sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Isbot. Ravshanki,

$$|a_k| \leq a_k^2 k^2 + \frac{1}{4k^2}, \quad |b_k| \leq b_k^2 k^2 + \frac{1}{4k^2}.$$

Demak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (20.2.26)$$

Bu yerda o'ng tarafdagi har ikki qator yaqinlashadi. Birinchi qator (20.2.22) Parseval tengligiga ko'ra, hosila kvadratidan olingan integralga yaqinlashadi, ikkinchi qator yig'indisi esa, $\pi^2/6$ ga teng ((20.2.11) formulaga qarang). Demak, chap tarafdagi qator ham yaqinlashadi, ya'ni (20.2.25) shart bajariladi. Shuning uchun, 20.2.4 - tasdiqqa ko'ra, f funksiya Furiye qatori sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi. ■

Natija. $[-\pi, \pi]$ kesmada uzluksiz, bo'lakli-silliqlik, hamda

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

shartni qanoatlantiruvchi istalgan f funksiya Furiye qatori shu funksiyaga $[-\pi, \pi]$ kesmada absolyut va tekis yaqinlashadi.

Haqiqatan, agar $[-\pi, \pi]$ kesmada uzluksiz, bo'lakli-silliqlik f funksiya davriylik shartini qanoatlantirsa, uni sonlar o'qiga 2π -davriy davom ettirish mumkin; bunda funksiya davomi uzluksiz va bo'lakli-silliqlik bo'ladi. f funksiya va uning davomi Furiye qatorlari ustma-ust tushgani uchun, talab qilingan tasdiq bevosita 20.2.4 - teoremdan kelib chiqadi.

20.2.3 - misol. $w(x)$ funksiyani $[-\pi, \pi]$ kesmada

$$w(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi; \quad (20.2.27)$$

tenglik bilan aniqlab, uni sonlar o'qiga 2π -davriy davom ettiramiz. E'tibor berib, $w(-\pi) = w(\pi) = \pi$, ya'ni (20.2.5) davriylik sharti

bajarilgani uchun bunday davom ettirish o'rinli. Bu funksiya uzluksiz va bo'lakli-silliqlik bo'lgani sababli, 20.2.4 - teorema binoan, uning Furye qatori sonlar o'qida shu funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashadi.

4. Furye qatorlarini hadma-had differensiallashtirish shartlari. Garmonik analiz tatlbiqlarida differensiallashtirgan qatorning sonlar o'qida hosilaga yaqinlashish shartlaridan foydalanishga to'g'ri keladi.

Navbatdagi yetarlilik shartida f funksiyani $R[-\pi, \pi]$ da ikkinchi hosilaga ega, deb faraz qilinadi. Bu degani, $f(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, uning $f'(x)$ birinchi hosilasi $R[-\pi, \pi]$ da $f''(x)$ hosilaga ega.

20.2.5 - teorema. Agar 2π -davriy f funksiya $R[-\pi, \pi]$ da ikkinchi hosilaga ega bo'lsa, u holda uning hadma-had differensiallashtirgan Furye qatori $f'(x)$ ga sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Isbot. Aytaylik, f funksiya Furye qatori

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.2.28)$$

ko'rinishda bo'lsin.

Agar bu qatorni formal ravishda differensiallasak, 20.2.1 - tasdiqqa ko'ra, hosila Furye qatori bilan ustma-ust tushuvchi qatorni olamiz:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k \sin kx + b_k \cos kx)k. \quad (20.2.29)$$

Shartga asosan, $f'(x)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi hosilaga ega. Shunday ekan, 20.2.4 - teorema binoan, uning (20.2.29) Furye qatori sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Natija. Faraz qilaylik, $[-\pi, \pi]$ kesmada berilgan f funksiya shu kesmada uzluksiz bo'lakli-silliqliq hosilaga ega bo'lib,

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi) \quad (20.2.30)$$

shartlarni qanoatlantirsin.

U holda f funksiyaning hadma-had differensiallangan Furiye qatori $f'(x)$ hosilaga $[-\pi, \pi]$ kesmada absolyut va tekis yaqinlashadi.

Haqiqatan, (20.2.30) shartlar bajarilganda, f funksiyaning sonlar o'qiga 2π -davriy davomi 20.2.5 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Lekin, f funksiya va uning davriy davomi Furiye qatorlari ustina-ust tushgani sababli, bundan differensiallangan Furiye qatorining $[-\pi, \pi]$ kesmada absolyut va tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

5. Furiye qatorlarini hadma-had integrallash shartlari. Shuni qayd etish kerakki, $R[-\pi, \pi]$ dagi istalgan funksiyaning har qanday $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ kesma bo'yicha hadma-had integrallangan Furiye qatori a va b parametrlarga nisbatan tekis yaqinlashadi.

Bu tasdiq bevosita Furiye qatorlarining o'rta kvadratik yaqinlashishidan kelib chiqadi va u istalgan ortonormal sistema bo'yicha yoyilmalar uchun o'rinli.

Haqiqatan, $[-\pi, \pi]$ dan olingan $a \leq b$ parametrlar bo'yicha tekis ravishda ushbu

$$\left| \int_a^b S_n f(y) dy - \int_a^b f(y) dy \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n f(y) - f(y)| dy \leq \sqrt{2\pi} \|S_n f - f\| \quad (20.2.31)$$

baho o'rinli (oxirgi qadamda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalandik). Bu baho va 20.2.2 - teoremadan Furiye qatorini qisimiy yig'indilaridan olingan integrallarning funksiya dan olingan integralga a va b parametrlar bo'yicha tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

Integrallash jarayonini boshlang'ich funksiyaning topish jarayoni deb ham hisoblash mumkin.

Aytaylik, $g \in R[-\pi, \pi]$ funksiya

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0 \quad (20.2.32)$$

shartni qanoatlantirsin. U holda uning Furiye qatori

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \quad (20.2.33)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Biz g funksiyaning *formal integrallangan Furiye qatori* deb

$$G(x) = G(x, C) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{k} \sin kx - \frac{\beta_k}{k} \cos kx \right) \quad (20.2.34)$$

trigonometrik qatorga aytamiz, bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas son-dir.

20.2.6 - teorema. (20.2.32) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $g \in R[-\pi, \pi]$ funksiyaning *formal integrallangan Furiye qatori* $R[-\pi, \pi]$ da hosilasi $g(x)$ ga teng bo'lgan $G(x)$ funksiyaga *absolyut va tekis yaqinlashadi*.

Isbot. $g \in R[-\pi, \pi]$ funksiya uchun Parseval tengligi va

$$\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \leq (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + \frac{1}{2k^2}$$

bahoga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \right) < +\infty.$$

Demak, 20.2.4 - tasdiqqa binoan, (20.2.34) qator absolyut va tekis yaqinlashadi; bunda uning yig'indisi uzluksiz 2π -davriy funksi-yadan iborat bo'lib, u $R[-\pi, \pi]$ ga tegishli. Endi (20.2.33) tenglikni hadma-had integrallab, (20.2.31) tasdiq va (20.2.34) ta'rifdan foyda-lanamiz. U holda,

$$\int_a^b g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{k} [\sin kb - \sin ka] - \frac{\beta_k}{k} [\cos kb - \cos ka] \right) = G(b) - G(a)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglik, (20.2.12) ta'rifga ko'ra, $G(x)$ funksiyaning $R[-\pi, \pi]$ dagi hosilasi $g(x)$ ga tengligini anglatadi.



1 - eslatma. Eslatib o'tamiz, (20.2.32) shart g funksiyaning biror 2π -davriy funksiyaning hosilasi bo'lishining zaruriy va yetarli shartidir ((20.2.14) shartga qarang).

2 - eslatma. Formal integrallangan (20.2.34) qator tekis yaqinlashishini isbotlayotgan vaqtda, biz boshlang'ich (20.2.33) qator yaqinlashishini talab qilmadik.

20.2.4 - misol. Ushbu

$$h(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.2.35)$$

funksiyani sonlar o'qiga 2π -davriy davom ettirib, Furiye qatorini toping.

Agar $g(x)$ (20.2.6) tenglik bilan aniqlangan funksiya bo'lsa, $h(x)$ ning $R[-\pi, \pi]$ dagi hosilasi $2g(x)$ ga tengligini ko'rsatish oson. Demak, (20.2.7) ga ko'ra,

$$h'(x) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \quad (20.2.36)$$

Bu qatorni hadma-had integrallab,

$$h(x) = C + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \quad (20.2.37)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Oxirgi qator sonlar o'qida $h(x)$ funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashadi. Xususan, $x = \pi$ nuqtada (20.2.11) tenglikka asosan,

$$\pi^2 = C + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\pi}{k^2} = C + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = C + \frac{2\pi^2}{3}.$$

Demak, intergallash koeffitsienti $C = \pi^2/3$ ekan. Shunday qilib,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (20.2.38)$$

Eslatma. Agar $x = 0$ bo'lsa, (20.2.38) formulaga ko'ra,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (20.2.39)$$

6. Sinuslar va kosinuslar trigonometrik sistemalari.

1^o. Faraz qilaylik, 2π -davriy f funksiya juft bo'lsin:

$$f(-x) = f(x). \quad (20.2.40)$$

U holda uning barcha sinus koeffitsiyentlari nolga aylanib, Furje qatori

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (20.2.41)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Buning teskarisini ham ko'rsatish mumkin, ya'ni, agar biror 2π -davriy funksiyaning barcha sinus-koeffitsiyentlari nolga teng bo'lsa (ya'ni, Furje qatori (20.2.41) ko'rinishda bo'lsa), u holda bu funksiya juftdir.

Juft funksiyaning (20.0.6) integraldan iborat kosinus-koeffitsiyentlari, integral ostidagi ifoda juft bo'lgani uchun, $[0, \pi]$ bo'yicha olingan integralning ikkilanganiga teng:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2.42)$$

(20.2.41) tenglik har qanday juft funksiyaning quyidagi

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \quad (20.2.43)$$

kosinuslar sistemasi bo'yicha Furye qatoriga yoyilishi mumkinligini anglatadi.

(20.2.43) sistema $[0, \pi]$ kesmada ortogonal ekanini ko'rsatish qiyin emas:

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad n \neq m = 1, 2, 3, \dots$$

Eslatib o'tamiz, $R[0, \pi]$ simvol orqali biz $[0, \pi]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning, quyidagi

$$(f, g) = \int_0^{\pi} f(x)g(x) \, dx$$

skalyar ko'paytmaga ega bo'lgan, Evklid fazosini belgilagan edik.

Istalgan $f \in R[0, \pi]$ elementning (20.2.43) sistema bo'yicha Furye koeffitsiyentlarini (20.2.42) tenglik bilan aniqlaymiz. Bunda f element Furye qatori (20.2.41) ko'rinishga ega bo'ladi.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

20.2.7 - teorema. Kosinuslarning (20.2.43) ortogonal sistemasi $R[0, \pi]$ fazoda yopiq.

Isbot. Faraz qilaylik, $f \in R[0, \pi]$ bo'lsin, ya'ni $[0, \pi]$ da integrallanuvchi ixtiyoriy funksiya bo'lsin. Bu funktsiyani $[-\pi, 0]$ kesmaga juft qilib, ya'ni (20.2.40) formula bo'yicha davom ettiramiz va hosil bo'lgan funktsiyani yana f bilan belgilaymiz. Bu funksiya $f(-\pi) = f(\pi)$ davriylik shartini qanoatlantirishi aniq va shuning uchun, uni sonlar o'qiga davriy davom ettirish mumkin. Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, davom ettirilgan funksiya Furye qatori berilgan funktsiyaning (20.2.41) Furye qatori bilan ustma-ust tushadi.

20.2.2 - teoreмага asosan, f funksiya Furye qatori shu funktsiyaga $[-\pi, \pi]$ kesmada va demak, $[0, \pi]$ kesmada ham, o'rta kvadratik yaqinlashadi. Shunday ekan, 20.1.2 - tasdiqdan kosinuslarning (20.2.43) trigonometrik sistemasi yopiq ekani kelib chiqadi.



20.2.5 - misol. $[0, \pi]$ kesmada berilgan

$$f(x) = \pi - x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (20.2.44)$$

funksiyani (20.2.43) sistema bo'yicha Furje qatoriga yoying.

Furje koeffitsientlarni (20.2.42) formula bo'yicha, bo'laklab integrallab, hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{(\pi - x) \sin kx}{k} - \frac{\cos kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos k\pi}{k^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k^2}. \end{aligned}$$

Demak,

$$a_{2m-1} = \frac{4}{\pi(2m-1)^2}, \quad a_{2m} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Bundan tashqari,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \pi.$$

Shunday qilib,

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (20.2.45)$$

Eslatma. (20.2.45) qator f funksiyaning sonlar o'qiga 2π -davriy juft davomini beradi. Xususan, $[-\pi, \pi]$ kesmada

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.2.46)$$

tenglik o'rinli.

2⁰. Xuddi shunga o'xshash, agar 2π -davriy f funksiya toq bo'lsa, ya'ni

$$f(-x) = -f(x) \quad (20.2.47)$$

bo'lsa, u holda barcha kosinus-koeffitsientlar nolga teng bo'lib, mos Furiye qatori

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (20.2.48)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

E'tibor bering, funksiya toq bo'lgani uchun $f(0) = 0$, davriylik shartiga ko'ra esa, $f(\pi) = 0$.

(20.0.7) integral bilan aniqlangan sinus-koeffitsientlar uchun, integral ostidagi ifodaning toqligi sababli,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (20.2.49)$$

tengliklar o'rinli.

(20.2.48) tenglik har qanday toq funksiyaning quyidagi

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots \quad (20.2.50)$$

sinuslar sistemasi bo'yicha Furiye qatoriga yoyilishi mumkinligini anglatadi.

Oddiy hisoblash yordamida (20.2.50) sistemaning $[0, \pi]$ kesmada ortogonal ekanini ko'rsatish mumkin.

20.2.7 - teoremaning sinuslar uchun navbatdagi ko'rinishi o'rinli.

20.2.8 - teorema. *Sinuslarning (20.2.50) ortogonal sistemasi $R[0, \pi]$ fazoda yopiq.*

Isbot. Faraz qilaylik, $f \in R[0, \pi]$ bo'lsin, ya'ni $[0, \pi]$ kesmada integrallanuvchi ixtiyoriy funksiya bo'lsin. Bu funksiyaning avval $[-\pi, 0]$ kesmaga toq, ya'ni (20.2.47) formula bo'yicha davom ettirib, so'ngra sonlar o'qiga 2π -davriy davom ettiramiz.

Bunday davom ettirishni faqat $f(0) = f(\pi) = 0$ shart bajarilgan-da amalga oshirish mumkinligi yuqorida qayd etilgan edi. Shunday bo'lsada, ekvivalent funksiyalar $R[0, \pi]$ Evklid fazosining bir elementini anglatgani uchun, biz $f(x)$ funksiya qiymatini ikki $x = 0$ va $x = \pi$ nuqtada o'zgartirib, qayd etilgan shart bajarilishiga erishishimiz mumkin.

Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, davom ettirilgan funksiya Furiye qatori berilgan funksiyaning (20.2.48) Furiye qatori bilan ustma-ust tushadi.

20.2.2 - teoremaga asosan, f funksiya Furiye qatori shu funksiya-ga $[-\pi, \pi]$ kesmada va demak, $[0, \pi]$ kesmada ham, o'rta kvadratik yaqinlashadi. Shunday ekan, 20.1.2 - tasdiqdan sinuslarning (20.2.50) trigonometrik sistemasi yopiq ekani kelib chiqadi.



20.2.6 - misol. 20.2.5 - misolda $f(x) = \pi - x$ tenglik bilan $(0, \pi)$ intervalda aniqlangan funksiyaning (20.2.50) sistema bo'yicha Furiye qatoriga yoyamiz. Buning uchun funksiyaning chegaraviy nuqtalarda $f(0) = f(\pi) = 0$ deb aniqlaymiz.

Furiye koeffitsiyentlarini (20.2.49) formula bo'yicha, bo'laklab integrallab, hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(\pi - x) \cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\pi - x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (20.2.51)$$

Bu tenglik, xuddi (20.2.45) kabi, $R[0, \pi]$ fazosi normasida yaqinlashish ma'nosida tushuniladi (bunda (20.2.51) tenglik har bir $x \in [0, \pi]$ da o'rinli bo'lishi shart emas).

Eslatma. (20.2.51) qator f funksiyaning sonlar o'qiga 2π -davriy toq davomini beradi. Xususan, $[-\pi, \pi]$ kesmada

$$(\pi - |x|) \cdot \text{sign } x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.2.52)$$

tenglik o'rinli.

E'tibor bering, (20.2.45) qator koeffitsiyentlari (20.2.51) qator koeffitsiyentlariga nisbatan tezroq nolga intiladi. Bunga sabab shundaki, (20.2.45) qator uzluksiz bo'lakli-silliq funksiyani, (20.2.52) qator esa, nolda birinchi tur uzilishga ega bo'lgan bo'lakli-silliq funk-siyani aniqlaydi. 20.2.4 - teorema ko'ra, (20.2.45) qator koef-fitsientlari, (20.2.52) qator koeffitsiyentlaridan farqli o'laroq, absolyut yaqinlashuvchi qator tashkil qiladi.

7. Uzunligi 2π ga teng bo'lgan ixtiyoriy kesmadagi Furye qatorlari. Oddiy tekshirish ko'rsatadiki, (20.2.1) trigonometrik sistema na faqat $[-\pi, \pi]$ kesmada, balki uzunligi 2π ga teng ixtiyoriy kesmada, masalan, $[0, 2\pi]$ kesmada ortogonalkdir. Kesmani tanlash, odatda, trigonometrik qatorlar bilan yechiladigan masalaga bog'liq. Bunda Furye koeffitsiyentlari (20.2.3) ga o'xshash ko'rinishga ega bo'ladi. Masalan, $[0, 2\pi]$ kesma holida koeffitsientlar

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (20.2.53)$$

kabi aniqlanadi.

20.2.7 - misol. $(0, 2\pi)$ intervalda

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (20.2.54)$$

tenglik bilan aniqlangan $f(x)$ funksiyani qaraylik. $[0, 2\pi]$ kesma chekkalarida uni $f(0) = f(2\pi) = \pi$ deb aniqlab, sonlar o'qiga 2π -

davriy davom ettiramiz. Ravshanki, hosil bo'lgan funksiya bo'laklilisilliqlik bo'lib, $c_n = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ nuqtalarda birinchi tur uzilishga ega.

Davom ettirilgan funksiya Furje koeffitsiyentlari quyidagicha hisoblanadi:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = 2\pi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = -\frac{2}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Demak, qaralayotgan funksiya Furje qatori

$$x = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (20.2.55)$$

ko'rinishga ega. Bu yerda tenglik $R[0, 2\pi]$ normasida yaqinlashish ma'nosida tushuniladi.

E'tibor bering, bu qator xuddi shu funksiyaning $[-\pi, \pi]$ kesmadagi yoyilmasidan farq qiladi ((20.2.7) formulaga qarang).

8. $[-l, l]$ kesmada Furje qatorlari. Ko'p muhim amaliy masalalarni yechishda, 2π dan farqli biror T davrga ega bo'lgan, davriy funksiyalarni qarashga to'g'ri keladi. Shu munosabat bilan,

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{3\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots \quad (20.2.56)$$

funksiyalar ketma-ketligini olaylik. Bu funksiyalardan har biri davriy bo'lib, davri $T = 2l$ ga teng.

Agar $t = \frac{\pi x}{l}$ almashtirish bajarsak, bu sistema $[-\pi, \pi]$ kesmada ortogonal bo'lgan (20.2.1) sistemaga keladi. Bundan chiqdi, (20.2.56) sistema $[-l, l]$ kesmada ortogonal bo'lib, $R[-l, l]$ Evklid fazosida topiqdir.

Istalgan $f \in R[-l, l]$ funksiya Furiye qatori

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (20.2.57)$$

ko'rishga ega bo'lib, Furiye koeffitsientlar uchun

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (20.2.58)$$

tengliklar o'rinli.

20.2.8 - misol. $(-l, l)$ intervalda

$$f(x) = x, \quad -l < x < l, \quad (20.2.59)$$

tenglik bilan aniqlangan $f(x)$ funksiyani qaraymiz. $[-l, l]$ kesmaning chekkalarida uni $f(-l) = f(l) = 0$ deb aniqlab, sonlar o'qiga $2l$ davr bilan davriy davom ettiramiz. (20.2.58) formula bo'yicha Furiye koeffitsiyentlarini hisoblab, davom ettirilgan funksiyaning Furiye qatorini olamiz:

$$x = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (20.2.60)$$

Eslatma. Bundan buyon biz trigonometrik qatorlarni $[-\pi, \pi]$ kesmada qaraymiz. Bunda olingan natijalarni, koordinatalarni surish va cho'zish yordamida, ixtiyoriy kesma uchun ko'chirish mumkin.

20.3-§. Furye qatorlari yaqinlashishining lokal shartlari

1. Dirixle yadrosi. Yuqorida Furye qatorlarining sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashishi uchun yetarli shartlar o'rnatildi. Ushbu paragrafda ixtiyoriy nuqtada yaqinlashish uchun, shu nuqtaning istalgancha kichik atrofidagi funksiya silliqqligiga bog'liq bo'lgan, shartlar olamiz. Buning uchun biz avval qisman yig'indilarni, argumentlar ayirmasiga bog'liq maxsus yadrolik, integral operator ko'rinishida yozib olamiz.

Shu maqsadda *Dirixle yadrosi* deb ataluvchi,

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \quad (20.3.1)$$

funksiyani kiritaylik.

Bu tenglikda x ni $x-y$ ga o'zgartirib, ikki argument ayirmasining kosinusi uchun formulani qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} D_n(x-y) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-y) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky). \end{aligned}$$

Endi oxirgi tenglikning ikki tarafini $f(y)$ ga ko'paytirib, $[-\pi, \pi]$ kesma bo'yicha integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \\ + \sum_{k=1}^n \left(\cos kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ky dy + \sin kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ky dy \right) &= \end{aligned}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = S_n f(x)$$

Uz Furiye koefitsiyentlari uchun (20.2.3) formuladan foydalandik).

Shunday qilib, Furiye qatori qisimiy yig'indilari uchun quyidagi

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy \quad (20.3.2)$$

integral ko'rinishga ega bo'ldik.

Dirixle yadrosini soddaroq ko'rinishga keltirish maqsadida, istalgan $z \neq 1$ kompleks son uchun o'rinli bo'lgan,

$$\sum_{k=1}^n z^{k-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

ayniyatdan foydalanamiz. Agar $z = e^{i\varphi} \neq 1$ desak, ayniyat

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\varphi} = \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

ko'rinishga keladi.

Bundan, haqiqiy qismni ajratib, quyidagi muhim munosabatni olamiz:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\varphi = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Chap taraf, (20.3.1) ta'rifga binoan, Dirixle yadrosidir. Demak,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad 0 < |x| \leq \pi. \quad (20.3.3)$$

E'tibor bering, bevosita (20.3.1) ta'rifdan $D_n(0) = n + 1/2$ va

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1 \quad (20.3.4)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Agar (20.3.3) formulani tahlil qilsak, Dirixle yadrosini $n \rightarrow \infty$ dagi asimptotasining bosh qismi xuddi Furye almashtirishdagi yadro kabi ekanini ko'rish mumkin ((19.2.3) formulaga qarang).

20.3.1 - tasdiq. *Dirixle yadrosi* $0 < |x| \leq \pi$ da

$$D_n(x) = \frac{\sin nx}{x} + \psi(x) \sin nx + \frac{1}{2} \cos nx \quad (20.3.5)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda $\psi(x)$ $[-\pi, \pi]$ kesmada uzluksiz biror funksiyadir.

Isbot. (20.3.3) dagi qavsni ochib, yig'indi sinusi formulasidan foydalansak,

$$D_n(x) = \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2} + \cos nx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sin nx + \frac{1}{2} \cos nx$$

tenglikka kelamiz.

Talab qilingan (20.3.5) tenglikni olish uchun quyidagi

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{x}, \quad 0 < |x| \leq \pi,$$

belgilashni kiritib, $\psi(0) = 0$ deb aniqlash yetarli.

Endi bu funksiya uzluksizligini ko'rsatish qoldi. Trigonometrik funksiyalari xossalariidan ψ ning $[-\pi, 0)$ va $(0, \pi]$ yarim intervallarda cheksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi. Shunday ekan, ψ ni $x = 0$ nuqtada uzluksizlikka tekshirish yetarli.

Kotangensni kasr ko'rinishda yozib, surat va maxrajga Teylor formulasini qo'llaymiz:

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + O(x^2)}{2 \left[\frac{x}{2} + O(x^3) \right]} = \frac{1}{x} [1 + O(x^2)] = \frac{1}{x} + O(x).$$

Demak, $\psi(x) = O(x)$, ya'ni bu funksiya nolga uzluksiz va bundan chiqdi, $[-\pi, \pi]$ kesmada ham uzluksizdir.

1 - eslatma. Teylor yoyilmasida ko'proq had olib, $\psi(x)$ funksiya nolda istalgan tartibli hosilaga egaligini ko'rsatish mumkin. Demak, qaralayotgan funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada cheksiz differensiallanuvchi bo'lar ekan.

2 - eslatma. (20.3.5) formuladan foydalanish maqsadida, 20.3.2) integral ko'rinishda $y - x = t$ almashtirish bajarish qulay bo'ladi. Qizig'i shundaki, bunda integrallash oralig'i o'zgarmaydi. Chunonchi, quyidagi sodda tasdiq o'rinli:

istalgan $x \in \mathbb{R}$ va har qanday $g \in R[-\pi, \pi]$ funksiya uchun

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \quad (20.3.6)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, integralning to'plam funksiyasi sifatida additivligiga ko'ra (6.2.2 - teoremaga qarang),

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(y) dy = \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(y) dy + \int_{-\pi}^{\pi} g(y) dy + \int_{\pi}^{\pi+x} g(y) dy.$$

(20.3.6) tenglikni olish uchun birinchi va uchinchi integrallar ishorasi bilan farq qilishini ko'rsatish yetarli. Birinchi integralda $z = y + 2\pi$ almashtirish bajarib, g funksiyaning 2π -davriyligini hisobga olsak, talab qilingan tenglikni olamiz:

$$\int_{-\pi+x}^{-\pi} g(y) dy = \int_{\pi+x}^{\pi} g(z - 2\pi) dz = \int_{\pi+x}^{\pi} g(z) dz = - \int_{\pi}^{\pi+x} g(z) dz.$$

Endi (20.3.2) integralda $y - x = t$ almashtirish bajarib, (20.3.6) formulani qo'llasak,

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt \quad (20.3.7)$$

tenglikka kelimiz.

2. Riman lokallashtirish prinsipi. Ushbu bandda (20.2.5) davriylik shartini qanoatlantiruvchi va $[-\pi, \pi]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning Furiye qatorlari o'rganiladi.

Bunda bizning asosiy qurolimiz (20.3.7) integral ko'rinish bo'ladi. Yaqinlashish bo'yicha natijalar olish uchun bizga, integral ostidagi funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmadagi biror nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lsa ham, trigonometrik integrallarning nolga intilishi haqidagi 19.1.4 - tasdiq (Riman-Lebeg lemmasi) kerak bo'ladi. Bunday funksiyadan olingan integral ikkinchi tur xosmas integral ma'nosida tushuniladi (§6.6 ga qarang). 19.1.4 - tasdiq o'rinli bo'lgan funksiyaga misol sifatida

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha-1}, & 0 < |x| \leq \pi, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

funksiyani olish mumkin, bu yerda $0 < \alpha < 1$.

Biz bu tasdiqning quyidagi kuchliroq holidan ham foydalanamiz.

20.3.2 - tasdiq (Riman-Lebeg lemmasi). Faraz qilaylik, ψ funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo'lsin. U holda, shu kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi ixtiyoriy 2π -davriy f funksiya uchun, $x \in [-\pi, \pi]$ bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\psi(t) \cos nt \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\psi(t) \sin nt \, dt = 0 \quad (20.3.11)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot. Har ikkala integral uchun tasdiq bir xilda isbotlanadi. Masalan, birinchisini isbotlaylik. Buning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\psi(t) \cos nt \, dt \right| = 0$$

tenglikni ko'rsatish yetarli.

Agar bu tenglik bajarilmasa, shunday $\varepsilon_0 > 0$ son va n_k va $x_k \in [-\pi, \pi]$ ketma-ketliklar topiladiki, ular uchun

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x_k + t)\psi(t) \cos n_k t dt \right| \geq \varepsilon_0 \quad (20.3.12)$$

baho o'rinli bo'ladi. Boltsano-Veyershtross teoremasiga ko'ra, x_k ketma-ketlik biror $x_0 \in [-\pi, \pi]$ songa yaqinlashadi deyish mumkin.

Endi

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_k + t)\psi(t) \cos n_k t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t)\psi(t) \cos n_k t dt + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_k + t) - f(x_0 + t)]\psi(t) \cos n_k t dt \end{aligned}$$

desak, shartga ko'ra ψ chegaralangan bo'lgani uchun, ya'ni $|\psi(t)| \leq M$ munosabatga ko'ra,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x_k + t)\psi(t) \cos n_k t dt \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t)\psi(t) \cos n_k t dt \right| + \\ &+ M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_k + t) - f(x_0 + t)| dt. \end{aligned}$$

O'ng tarafdagi birinchi integral $k \rightarrow \infty$ da, 19.1.4 - tasdiqqa asosan, nolga intiladi, ikkinchi integral esa, 19.1.2 - tasdiqqa ko'ra (bu tasdiqni qo'llashdan avval f funksiyani $[-2\pi, 2\pi]$ kesmadan tashqariga nolga teng qilib davom ettirish kerak), nolga intiladi. Shunday qilib, chap tarafdagi integral nolga intilar ekan, bu esa, o'z navbatida, (20.3.12) tengsizlikka ziddir.

Riman-Lebeg lemmasi yordamida qisman yig'indilarning (20.3.2) formulasini tadqiq uchun qulayroq ko'rinishga keltirish mumkin.

20.3.3 - tasdiq. Faraz qilaylik, 2π -davriy f funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. U holda f funksiya Furye qatorining qisman yig'indisi uchun $x \in [-\pi, \pi]$ bo'yicha tekis ravishda

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (20.3.13)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (20.3.7) integral ko'rinishdan foydalanamiz. 20.3.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \psi(t) \sin nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nt dt. \end{aligned}$$

Endi oxirgi ikki integral, Riman-Lebeg lemmasiga binoan, nolga intilishini qayd etish yetarli.

■

Yana Riman-Lebeg lemmasi yordamida (20.3.13) formuladagi $[-\pi, \pi]$ integrallash oralig'ini istalgancha kichik $[-\delta, \delta]$ kesmaga almashtirish mumkin.

20.3.4 - tasdiq. Faraz qilaylik, 2π -davriy f funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, δ esa, $0 < \delta < \pi$ intervaldagi ixtiyoriy son bo'lsin. U holda f funksiya Furye qatorining qisman

g'indisi uchun $x \in [-\pi, \pi]$ bo'yicha tekis ravishda

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (20.3.14)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Agar

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } |t| \leq \delta \text{ bo'lsa,} \\ 1/t, & \text{agar } \delta < |x| \leq \pi \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani kiritsak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \psi(t) \sin nt dt = \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt$$

tenglik bajarilib, (20.3.13) munosabat

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \psi(t) \sin nt dt + o(1)$$

ko'rinishga keladi.

Bu yerda $\psi(t)$ chegaralangan va shuning uchun, o'ng tarafdagi ikkinchi integral $n \rightarrow \infty$ da nolga tekis yaqinlashadi, ya'ni (20.3.14) formula bajariladi.

■

1 - natija. Faraz qilaylik, 2π -davriy f funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, biror $\Delta \subset [-\pi, \pi]$ intervalda nolga aylansin. U holda istalgan $[a, b] \subset \Delta$ kesmada x bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, f) = 0$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, bunday funksiya uchun (20.3.14) formuladagi integral yetarlicha kichik $\delta > 0$ larda barcha $x \in [a, b]$ lar uchun nolga teng.

2 - natija (Riman lokallashtirish prinsipi). Faraz qilaylik, 2π -davriy $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[-\pi, \pi]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. Agar biror $\Delta \subset [-\pi, \pi]$ intervalda bu funksiyalar o'zaro teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar Furiye qatorlarining qisman yig'indilari uchun ixtiyoriy $[a, b] \subset \Delta$ kesmada x bo'yicha tekis ravishda

$$S_n(x, f_1) - S_n(x, f_2) = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

munosabat o'rinli.

Bunga ishonch hosil qilish uchun $f = f_1 - f_2$ ayirmaga 1 - natirjani qo'llash yetarli.

Lokallashtirish prinsipi quyidagini anglatadi: Furiye qatori qisman yig'indilarining biror nuqta atrofida o'zini qanday tutishi berilgan funksiyaning shu nuqtani istalgancha kichik atrofidagi silliqligiga bog'liq. Boshqacha aytganda, biz funksiyaning absolyut integrallanuvchiligini saqlab qolgan holda, ko'rsatilgan atrofdan tashqarida istalgancha o'zgartirsak ham, qisman yig'indilarning shu nuqtadagi asimptotasi cheksiz kichik miqdor aniqligida o'zgarmay qoladi.

3. Berilgan nuqtada Furiye qatori yaqinlashishining Holder sharti. Aytaylik, f funksiya 2π -davriy bo'lib, $[-\pi, \pi]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. Bunday funksiya Furiye qatorining biror $x \in [-\pi, \pi]$ nuqtada yaqinlashish masalasini o'rganayotganda (20.3.14) formula asosiy rolni o'ynaydi. E'tibor berib, bu formula Furiye integrallari qisman yig'indilari uchun o'rnatilgan (19.2.4) formulaning aynan o'zidir. Bu formulalar o'ng taraflarini ustma-ust tushishi Furiye integrallari yaqinlashishi haqidagi natijalarni Furiye qatorlariga o'tkazish imkonini beradi. Shunday bo'lsada, Furiye integrallari va Furiye qatorlari haqidagi boblarni bog'liqsiz ravishda o'qishni ta'minlash maqsadida, Furiye qatorlari yaqinlashishining yetarli shartlarini quyida asoslab beramiz.

Avvalo shuni aytish kerakki, (20.3.14) formuladan qisman yig'indilar va berilgan funksiya farqi uchun, $x \in [-\pi, \pi]$ bo'yicha tekis ravishda bajariluvchi, quyidagi

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin nt \, dt + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (20.3.15)$$

asosiy formula kelib chiqadi.

Asosiy formula, xuddi (19.2.5) formula holdagidek, ixtiyoriy tayinlangan $\delta > 0$ uchun o'rinli bo'lgan quyidagi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin u}{u} \, du = 1 + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

munosabatning natijasidir.

E'tibor bering, (20.3.15) tenglik sonlar o'qining barcha nuqtasida aniqlangan 2π -davriy hamda $[-\pi, \pi]$ kesmada integrallanuvchi istalgan f funksiya va sonlar o'qining har qanday x nuqtasi uchun o'rinli.

Eslatib o'tamiz, agar shunday M , α va δ musbat sonlar topilsaki, $|t| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha t lar uchun

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^\alpha \quad (20.3.16)$$

baho bajarilsa, biz f funksiyani $x \in \mathbb{R}$ nuqtada Holder shartini qanoatlantiradi degan edik.

20.3.1 - teorema. Agar 2π -davriy f funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada absolyut integrallanuvchi bo'lib, $x \in [-\pi, \pi]$ nuqtada Holder shartini qanoatlantirsa, u holda bu funksiya Furje qatori shu nuqtada funksiyaning o'ziga yaqinlashadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x). \quad (20.3.17)$$

Isbot. Faraz qilaylik, f funksiya $x \in [-\pi, \pi]$ nuqtada (20.3.16) Holder shartini qanoatlantirsin. (20.3.15) formuladan foydalanish maqsadida, $g(t)$ funksiyani $|t| < \delta$ lar uchun

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

tenglik bilan va $\delta \leq |t| \leq \pi$ da esa, nolga teng deb aniqlaymiz. U holda (20.3.15) tenglik

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} g(t) \sin nt \, dt + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (20.3.18)$$

ko'rinishga keladi.

(20.3.16) shartga ko'ra,

$$|g(t)| \leq M \cdot |t|^{\alpha-1}, \quad |t| < \delta,$$

ya'ni $g(t)$ funksiya nolda integrallanuvchi maxsuslikka ega. Shunday ekan, Riman-Lebeg lemmasiga ko'ra (19.1.4 - tasdiqqa qarang), (20.3.18) ning o'ng tarafidagi integral nolga intiladi.

■

20.3.1 - misol. $[-\pi, \pi]$ kesmada

$$f_{\alpha}(x) = (\pi^2 - x^2)^{\alpha}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.3.19)$$

ko'rinishga ega bo'lgan 2π -davriy $f_{\alpha}(x)$ funksiyani qaraylik.

Agar $0 < \alpha < 1$ bo'lsa, bu funksiya har bir nuqtada α ko'rsatkich bilan Holder shartini qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, 20.3.1 - teorema binoan, f_{α} funksiya Furye qatori sonlar o'qining har bir nuqtasida funksiyaning o'ziga yaqinlashadi.

4. Bo'lakli-silliq funksiyalar Furye qatorlarining yaqinlashishi. Bo'lakli-silliq funksiyalar Furye qatorlarini o'rganishning

muhimligi shundaki, bunday funksiyalar garmonik tahlil tadqiqqlarida asosiy rolni o'ynaydi

Agar 2π -davriy f funksiya berilib, shunday

$$P = \{-\pi = c_0 < c_1 < \dots < c_m = \pi\}$$

bo'linish topilsaki, bunda f funksiya har bir (c_{k-1}, c_k) intervalda, $[c_{k-1}, c_k]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan, biror funksiya bilan ustma-ust tushsa, u holda bu funksiya bo'lakli-silliq deyiladi.

Shunday qilib, bo'lakli-silliq funksiya har bir intervalda chekli sondagi uzilish nuqtaga ega bo'lishi mumkin va bunda barcha uzilish nuqtalari birinchi turdir. Chunonchi, har bir uzilish nuqtasida funksiyaning ham va uning hosilasining ham bir taraffi limitlari mavjud.

E'tibor berib, agar $f \in R[-\pi, \pi]$ bo'lakli-silliq funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda, 20.2.4 - teoremaga ko'ra, uning Furiye qatori sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi. Demak, lokallashtirish prinsipiga asosan, navbatdagi tasdiq o'rinni.

20.3.2 - teorema. *Har qanday 2π -davriy bo'lakli-silliq funksiya Furiye qatori uzluksizlik intervalidagi ixtiyoriy kesmada funksiya qiyamatiga tekis yaqinlashadi.*

Isbot. Aytaylik, $[a, b]$ kesma f funksiya uzluksiz bo'lgan biror (a_1, b_1) intervalda yotsin. Bu funksiyani (a_1, b_1) intervaldan tashqarida o'zgartirib (masalan, chiziqli ravishda), uni 2π -davriy uzluksiz bo'lakli-silliq funksiya, ya'ni Furiye qatori $\mathbb{R}$ sonlar o'qida, xususan, $[a, b]$ kesmada ham, absolyut va tekis yaqinlashuvchi funksiya, aylantirishimiz mumkin. O'zgartirilgan funksiya (a_1, b_1) intervalda f ga teng bo'lgani sababli, lokallashtirish prinsipiga ko'ra, f funksiya Furiye qatori ham $[a, b] \subset (a_1, b_1)$ kesmada tekis yaqinlashadi.



E'tibor berib, 20.3.2 - teoremada Furiye qatorini bo'lakli-silliq funksiyaning uzilish nuqtalarida yaqinlashish masalasi ochiq qolgan. Navbatdagi mulohazalarda aslida bu nuqtalarda ham Furiye qatori yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Eslatib o'tamiz, har bir $c \in [-\pi, \pi]$ uzilish nuqtasida bir taraffi limitlar mavjud:

$$f(c \pm 0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} f(c \pm h), \quad f'(c \pm 0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} f'(c \pm h). \quad (20.3.20)$$

Agar $t > h > 0$ kattaliklar yetarlicha kichik bo'lsa, u holda f funksiya $[c+h, c+t]$ kesmada differensiallanuvchi bo'ladi va Lagranj formulasiga ko'ra, biror $\xi \in [c+h, c+t]$ uchun

$$f(c+t) - f(c+h) = f'(\xi)(t-h)$$

tenglik bajariladi.

Bundan chiqdi, $|f'(\xi)| \leq M$ tengsizlikka ko'ra,

$$|f(c+t) - f(c+h)| \leq Mt.$$

Endi ikki tarafni t ga bo'lib, $h \rightarrow 0+0$ desak, quyidagi

$$\left| \frac{f(c+t) - f(c+0)}{t} \right| \leq M, \quad t > 0, \quad (20.3.21)$$

muhim bahoni olamiz.

Xuddi shu usulda navbatdagi

$$\left| \frac{f(c+t) - f(c-0)}{t} \right| \leq M, \quad t < 0, \quad (20.3.22)$$

bahoni ham isbotlash mumkin.

(20.3.21) va (20.3.22) baholar bo'lakli-silliqlik funksiya Furiye qatorining uzilish nuqtalarida yaqinlashishini ko'rsatish imkonini beradi. Isbot navbatdagi sodda lemmaga asoslanadi.

20.3.1 - lemma. Agar x bo'lakli-silliqlik funksiya uzilish nuqtasi bo'lsa, istalgan $\delta > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt = \frac{1}{2} f(x+0) \quad (20.3.23)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Dirixle ko'paytuvchisi uchun (17.2.48) tenglikdan foydalanib,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nt}{t} dt &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n\delta} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu munosabatga ko'ra,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin nt dt &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt - \frac{1}{2} f(x+0) + o(1). \end{aligned}$$

Chap taraf, (20.3.21) bahoga asosan, chegaralangan funksiyaning sinus-koeffitsientidan iborat va Riman-Lebeg lemmasiga ko'ra, $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Demak, o'ng taraf ham nolga intiladi va bundan chiqdi, (20.3.23) tenglik bajarilar ekan.

■

Eslatma. Xuddi shu singari, (20.3.22) bahodan foydalanib, bo'lakli-silliq funksiya uzilish nuqtasida

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt = \frac{1}{2} f(x-0) \quad (20.3.24)$$

tenglik bajarilishini ko'rsatish mumkin.

20.3.3 - teorema. *Istalgan bo'lakli-silliqlik 2π -davriy f funksiyasi Furiye qatori har bir $x \in \mathbb{R}$ uzilish nuqtasida yaqinlashadi va bunda*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (20.3.25)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. (20.3.14) tenglikni ikki integral yig'indisi qilib yozamiz:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

O'ng tarafdagi integrallar mos ravishda (20.3.23) va (20.3.24) ga teng limitlarga ega. Demak, (20.3.25) tenglik o'rinli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Eslatma. Odatda, bo'lakli-silliqlik funksiyasi uzilish nuqtasida aniqlanmagan bo'lib, o'rganilayotgan masalaga qarab aniqlanishi mumkin. Masalan, funksiya qiymatini c uzilish nuqtasida $f(c+0)$ ga (bu holda funksiya o'ngdan uzluksiz deyiladi) yoki $f(c-0)$ ga teng qilib (bunda funksiya chapdan uzluksiz deyiladi) aniqlash mumkin.

20.3.3 - teorema funksiyani uzilish nuqtasida aniqlashning garmonik tahlil nuqtai nazaridan eng yaxshi usulini beradi. Chunonchi,

$$f(c) \approx \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2} \quad (20.3.26)$$

desak, 20.3.2 - va 20.3.3 - teoremlardan navbatdagi tasdiq kelib chiqadi:

agar 2π davriy bo'lakli-silliqlik f funksiyasi uzilish nuqtalarida (20.3.26) shartni qanoatlantirsa, uning Furiye qatori sonlar o'qining

har bir nuqtasida shu funksiyaga yaqinlashadi va bunda uzilish nuqtalarini o'z ichiga olmagan istalgan kesmada yaqinlashish tekisdir.

20.3.2 - misol. $[-\pi, \pi]$ kesmada 2π -davriy $\phi(x)$ funksiya

$$\phi(x) = \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right) \operatorname{sign} x = \frac{1}{\pi} (\pi - |x|) \cdot \operatorname{sign} x \quad (20.3.27)$$

tenglik bilan aniqlangan bo'lsin.

Uning Furiye qatori, (20.2.52) formulaga ko'ra, quyidagi ko'rinishga ega:

$$\left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right) \operatorname{sign} x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (20.2.28)$$

ϕ funksiya bo'lakli-silliqlik bo'lib, $x = 0$ uzilish nuqtasida (20.3.26) shartni qanoatlantiradi. 20.3.3 - teorema ko'ra, (20.2.28) qator $\phi(x)$ funksiyaga sonlar o'qining har bir nuqtasida yaqinlashadi va bunda $x_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, nuqtalarga ega bo'lmagan har bir kesmada yaqinlashish tekisdir.

(20.2.28) qatorning

$$S_n \phi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$$

qisman yig'indilarini batafsilroq o'rganamiz.

Agar $D_n(x)$ (20.3.1) tenglik bilan aniqlangan Dirixle yadrosi bo'lsa, u holda

$$\frac{d}{dx} S_n \phi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{2}{\pi} D_n(x) - \frac{1}{\pi}$$

tenglik o'rinli. Tenglikni integrallasak, ravshanki, quyidagi

$$S_n \phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x D_n(y) dy - \frac{x}{\pi}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Demak, 20.3.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$S_n \phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin ny}{y} dy + O(x).$$

O'zgaruvchini almashtirsak, bu munosabat

$$S_n \phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t} dt + O(x) \quad (20.3.29)$$

ko'rinishga keladi.

(20.3.29) va (19.3.12) formulalarni taqqoslab, (20.3.27) bo'lakli-silliqlik funksiya Furiye qatorining qisman yig'indilari va (19.3.7) bo'lakli-silliqlik funksiya Furiye integralining qisman integrallari $x = 0$ uzilish nuqtasi atrofida o'zini bir xil tutishini ko'rishimiz mumkin. Bundan chiqdi, Furiye integrallari kabi, bo'lakli-silliqlik funksiya Furiye qatori uchun ham uzilish nuqtasi atrofida *Gibbs hodisasi* o'rinni ((19.3.15) formulaga qarang). Bu degani, yoyilayotgan funksiya $|\phi(x)| \leq 1$ shartni qanoatlantirsada, uning Furiye qatorining qisman yig'indilari $x_n = \pi/n$ da "sakrashga" ega:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \phi\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > 1. \quad (20.3.30)$$

Shuni aytish kerakki, ushbu hodisa avval aynan Furiye qatorlari uchun aniqlangan edi. Bu hodisaning to'la tavsifi ingliz matematigi Henri Uilbraxam maqolasida keltirilgan bo'lib (1848), ellik yildan so'ng Amerikalik matematik J. Gibbs tomonidan qayta kashf qilingan.

Eslatma. 1872 yilda nemis matematigi P. Dyubua-Reymon Furiye qatori biror nuqtada uzoqlashuvchi bo'lgan uzluksiz funksiyaga misol keltirdi. Ammo yana ancha vaqtgacha bunday nuqtalar to'plami qanchalik katta bo'lishi no'malum bo'lib qoldi.

1915 yilda Rossiyalik matematik N.N. Luzin kvadrati bilan Lebeg bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiya Furiye qatori shu funksiyaga, o'lchovi nolga teng to'plamdan tashqari, barcha joyda yaqinlashadi degan gipotezani o'rtaq tashladi. Eslatib o'tamiz, agar $E \subset \mathbb{R}$ to'plam umumiy uzunligini istalgancha kichik qilish mumkin bo'lgan sanoqli sondagi intervallar oilasi bilan qoplangan bo'lsa, uning o'lchovi nolga teng deyiladi.

1966 yilda Shvedsiyalik matematik L. Karleson Luzin gipotezasi to'g'ri ekanini isbotladi. Karleson teoremasidan, xususan, istalgan uzluksiz funksiya Furiye qatori unga deyarli barcha nuqtalarda yaqinlashishi kelib chiqadi, ya'ni Furiye qatori uzoqlashadigan nuqtalar to'plami, oshib borsa, o'lchovi nolga teng to'plam bo'ladi.

20.4-§. Furiye qatorlarining regulyar usullar bilan jamlanishi

1. O'rta arifmetiklar yoki Chezaro usuli. Yuqorida uzluksiz funksiya Furiye qatori ba'zi nuqtalarda uzoqlashishi mumkinligi qayd etilgandi. Boshqacha aytganda, ba'zi nuqtalarda funksiyani yaqinlashuvchi Furiye qatori ko'rinishida yozish mumkin emas. Ammo, matematik fizikaning ko'pgina masalalarini Furiye taklif qilgan usul bilan yechishda, funksiyaning Furiye qatoriga yoyilmasi bo'yicha uning har bir nuqtadagi qiymatini aniqlash muhimdir. Bu masalaning istalgan 2π -davriy uzluksiz funksiya uchun yechimini o'rta arifmetiklar usuli beradi.

f funksiya Furiye qatorining birinchi $(n+1)$ ta qismiy yig'indilari-ning o'rta arifmetik qiymatini

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x) \quad (20.4.1)$$

simvol bilan belgilaymiz.

(20.4.1) o'rtachalar *birinchi tartibli Chezaro o'rtachalari* deb ham ataladi.

(20.4.1) o'rtachalar uchun integral ko'rinish topamiz. Buning uchun Dirixle yadrolari o'rta arifmetiklarini

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) \quad (20.4.2)$$

ko'rinishda belgilaymiz.

(20.4.2) o'rtachalar *Feyer yadrosi* deb ataladi. (20.4.2) ta'rif va (20.3.2) tenglikka ko'ra,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-y) f(y) dy &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x-y) f(y) dy = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x) = \sigma_n(x, f). \end{aligned}$$

Shunday qilib, (20.4.1) o'rta arifmetiklar uchun quyidagi

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-y) f(y) dy \quad (20.4.3)$$

integral ko'rinishga ega bo'lamiz.

E'tibor bering, (20.3.4) tenglikka ko'ra,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1. \quad (20.4.4)$$

(20.4.2) Feyer yadrosini qulayroq ko'rinishga keltirish uchun. (20.3.3) tenglik va undan kelib chiquvchi quyidagi

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot D_k(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x = \cos kx - \cos(k+1)x$$

ayniyatdan foydalanamiz.

Agar bu tengliklarni k bo'yicha noldan n gacha yig'ib chiqsak, o'ng tarafdagi hadlar o'zaro qisqaradi:

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sum_{k=0}^n D_k(x) = 1 - \cos(n+1)x = 2 \sin^2 \frac{(n+1)x}{2}.$$

Bu tenglikni (20.4.2) ta'rif bilan taqqoslab,

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2 \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (20.4.5)$$

tenglikni olamiz.

20.4.1 - tasdiq. *Feyer yadrosi 2π -davriy uzluksiz funksiya bo'lib, u quyidagi xossalarga ega:*

1) *istalgan $x \in \mathbb{R}$ uchun*

$$F_n(x) \geq 0; \quad (20.4.6)$$

2) *quyidagi tenglik o'rinli:*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 1; \quad (20.4.7)$$

3) $0 < \alpha < \pi$ intervaldagi istalgan α uchun, $E_\alpha = \{x : \alpha \leq |x| \leq \pi\}$ to'plamda tekis ravishda,

$$F_n(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (20.4.8)$$

munosabat o'rinli.

Isbot. 1) va 2) shartlar bevosita (20.4.5) va (20.4.4) formulalaridan kelib chiqadi.

Agar $\alpha \leq |x| \leq \pi$ bo'lsa, (20.4.5) ga ko'ra,

$$F_n(x) \leq \frac{C(\alpha)}{n+1}, \quad \text{bu yerda} \quad C(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (20.4.9)$$

Demak, 3) shart ham bajarilar ekan.

Natija. *Feyer yadrolari delta-simon ketma-ketlik tashkil qiladi (10.6 - paragrafning 1 - bandidagi ta'rifga qarang).*

Navbatdagi tasdiq uzluksiz funksiyalarning trigonometrik Furiye qatorlarini jamlash nazariyasida asosiy rolni o'ynaydi.

20.4.1 - teorema (Feyer). *Istalgan uzluksiz 2π -davriy f funksiya uchun, $x \in [-\pi, \pi]$ bo'yicha tekis ravishda,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x) = f(x) \quad (20.4.10)$$

tenglik o'rinni.

Isbot bevosita 10.6.1 - teorema va Feyer yadrolari delta-simon ketma-ketlik ekanidan kelib chiqadi.

Eslatma. Chezaro o'rtachalari ma'lum Furiye qatori bo'yicha funksiya qiymatlarini tiklashda muvaffaqiyatli foydalaniladi. E'tibor bering, (20.4.3) integral ko'rinish va Feyer yadrosi musbat bo'lganidan,

$$\min_{-\pi \leq x \leq \pi} f(x) \leq \sigma_n(x, f) \leq \max_{-\pi \leq x \leq \pi} f(x)$$

baho kelib chiqadi. Bu bahodan ko'rinib turibdiki, o'rta arifmetiklar usuli Gibbs hodisasini va u sababli hosil bo'ladigan Furiye qatori tatbiqlaridagi xatoliklarni bartaraf qiladi.

2*. Abel usuli. Furiye qatorlarini jamlashning yana bir usuli N. Abel nomi bilan bog'liq bo'lib, u quyidagi

$$A_0 f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k$$

limitni hisoblashdan iborat.

$[-\pi, \pi]$ kesmada integrallanuvchi istalgan 2π -davriy f funksiya uchun uni Furiye qatorining *Abel o'rtachalarini* kiritamiz:

$$A_r f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k. \quad (20.4.11)$$

Abel o'rtachalari uchun integral ko'rinish topish maqsadida

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \quad (20.4.12)$$

tenglikdan foydalanamiz.

Istalgan $0 < r < 1$ va barcha $x \in \mathbb{R}$ uchun o'rinli bo'lgan bu tenglik 9 - bobda isbotlangan edi ((9.1.15) formulaga qarang).

(20.4.12) tenglikning o'ng tarafidagi funksiya *Puasson yadrosi* deb ataladi va

$$P(r, x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \quad (20.4.13)$$

deb belgilanadi.

(20.4.12) formulada x ni $x - y$ ga o'zgartirib, ayirma kosinusi formulasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} P(r, x - y) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(x - y) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky), \quad 0 < r < 1. \end{aligned}$$

E'tibor bering, $0 < r < 1$ da oxirgi qator x va y parametrlar bo'yicha tekis va absolyut yaqinlashadi. Shunday ekan, tenglik ikki tarafini $f(y)$ ga ko'paytirib, $[-\pi, \pi]$ kesma bo'yicha integrallaymiz:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, x - y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\cos kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky \, dy + \sin kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky \, dy \right) = \\
& = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k = A_r f(x).
\end{aligned}$$

Bundan chiqdi, Abel o'rtachalari uchun quyidagi integral ko'rinish o'rinli ekan:

$$A_r f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, x-y) f(y) \, dy.$$

Agar $y - x = t$ almashtirish bajarib, f funksiya davriyligini va $P(r, t)$ yadroning t o'zgaruvchi bo'yicha juftligini hisobga olsak.

$$A_r f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) f(x+t) \, dt \quad (20.4.14)$$

tenglikni olamiz.

20.4.1 - lemma. *Istiyoriy $r \in \mathbb{R}$ va $-\pi \leq t \leq \pi$ uchun*

$$1 - 2r \cos t + r^2 \geq \frac{t^2}{\pi^2} \quad (20.4.15)$$

baho o'rinli.

Isbot. Chap tarafdagi ifodani $q(r, t)$ bilan belgilaylik. Agar $\pi/2 \leq |t| \leq \pi$ bo'lsa, $\cos t \leq 0$ tengsizlik o'rinli. Demak, t ning bunday qiymatlari uchun (20.4.15) baho o'z-o'zidan ko'rinib turibdi:

$$q(r, t) = 1 + 2r|\cos t| + r^2 \geq 1 \geq \frac{t^2}{\pi^2}.$$

Agarda $|t| \leq \pi/2$ bo'lsa, (20.4.15) baho quyidagicha ko'rsatiladi:

$$q(r, t) = (r - \cos t)^2 + \sin^2 t \geq \sin^2 t \geq \left(\frac{2t}{\pi} \right)^2 \geq \frac{t^2}{\pi^2}.$$

Abel o'rtachalarini o'rganayotganda navbatdagi tasdiq asosiy rolni o'ynaydi.

20.4.2 - tasdiq. (20.4.13) Puasson yadrosi uzluksiz 2π -davriy funksiya bo'lib, u quyidagi xossalarga ega:

1) ixtiyoriy $t \in \mathbb{R}$ va $0 < r < 1$ uchun

$$P(r, t) > 0; \quad (20.4.16)$$

2) quyidagi tenglik o'rinli:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1; \quad (20.4.17)$$

3) $0 < \alpha < \pi$ intervaldagi ixtiyoriy α uchun, $E_\alpha = \{t : \alpha \leq |t| \leq \pi\}$ to'plamda tekis ravishda,

$$P(r, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (20.4.18)$$

munosabat o'rinli.

Isbot. 1) (20.4.16) tengsizlik bevosita (20.4.13) formuladan kelib chiqadi.

2) Agar $f(x) \equiv 1$ bo'lsa, (20.4.11) ta'rifga ko'ra, $A_r f(x) \equiv 1$. Shunday ekan, (20.4.14) da $f(x) \equiv 1$ deb, talab qilingan (20.4.17) tenglikni olamiz.

3) (20.4.13) ta'rif va (20.4.15) bahoga ko'ra,

$$P(r, t) = \frac{(1+r)(1-r)}{1-2r \cos t + r^2} \leq \pi^2 \frac{2(1-r)}{t^2}.$$

Demak, $\alpha \leq |t| \leq \pi$ va $0 < r < 1$ lar uchun

$$P(r, x) \leq C_\alpha (1-r), \quad \text{bu yerda} \quad C_\alpha = \frac{2\pi^2}{\alpha^2}. \quad (20.4.19)$$

Bundan (20.4.18) shartning $t \in E_\alpha$ bo'yicha tekis bajarilishi kelib chiqadi.



Eslatma. 20.4.2 - tasdiq, aslida, $P(r, x)$ Puasson yadrosi $r \rightarrow 1 - 0$ da delta-simon oilani tashkil qilishini anglatadi. Bundan 2π -davriy ixtiyoriy uzluksiz funksiyani o'z Furiye qatorining Abel o'rtachalari bilan tekis yaqinlashtirish mumkinligi darhol kelib chiqadi. Bunda biz, xuddi 20.4.1 - teorema isbotidagi singari, 10.6.1 - teoremani qo'llab, $r_k \rightarrow 1 - 0$ da tekis yaqinlashishga ega bo'lamiz, so'ngra, limit qiymatning Koshi va Heine ta'riflari teng kuchli bo'lgani sababli (11.2.2 - teoremaga qarang), $r \rightarrow 1 - 0$ da talab qilingan tekis yaqinlashishni olamiz. Shunday bo'lsada, Abel o'rtachalarining tekis yaqinlashishi haqidagi teoremani to'g'ridan to'g'ri isbotlash ham qiyin bo'lmagani sababli, biz bu isbotni to'la keltiramiz.

20.4.2 - teorema. 2π -davriy istalgan uzluksiz f funksiya uchun $x \in [-\pi, \pi]$ bo'yicha tekis ravishda

$$\frac{a_0}{2} + \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k = f(x) \quad (20.4.20)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Faraz qilaylik, f uzluksiz 2π -davriy funksiya bo'lsin. Bu degani, f $[-\pi, \pi]$ kesmada uzluksiz bo'lib, $f(\pi) = f(-\pi)$ davriylik shartini qanoatlantirsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilishini ko'rsatishimiz kerakki, bunda $1 - \delta < r < 1$ dagi r lar va barcha $x \in [-\pi, \pi]$ lar uchun

$$|A_r f(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (20.4.21)$$

baho bajarilsin.

(20.4.14) formula va (20.4.17) tenglikdan funksiya bilan Furiye qatorining Abel o'rtachalari orasidagi farq uchun

$$A_r f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) [f(x+t) - f(x)] dt \quad (20.4.22)$$

munosabat kelib chiqadi.

Demak,

$$|A_r f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) |f(x+t) - f(x)| dt. \quad (20.4.23)$$

f funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada tekis uzluksiz bo'lgani sababli, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $0 < \alpha < \pi$ intervaldan shunday α son topiladiki, $|t| < \alpha$ bo'lganda

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (20.4.24)$$

tengsizlik bajariladi.

(20.4.23) integralni ikki integral yig'indisi, ya'ni $[-\alpha, \alpha]$ kesma bo'yicha va qolgan to'plam bo'yicha integral ko'rinishida yozamiz. Birinchi integralni (20.4.24) baho va (20.4.17) tenglik yordamida baholaymiz:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} P(r, t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (20.4.25)$$

Ikkinchi integralni baholash uchun (20.4.19) tengsizlikdan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} P(r, t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq \\ & \leq C_{\alpha}(1-r) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dt \leq 4MC_{\alpha}(1-r). \end{aligned} \quad (20.4.26)$$

Bunda biz $[-\pi, \pi]$ kesmada uzluksiz funksiya chegaralanganligini e'tiborga oldik: $|f(x)| \leq M$ va demak, $|f(x+t) - f(x)| \leq 2M$.

(20.4.26) tengsizlikdan ko'rinib turibdiki, $\{\alpha \leq |t| \leq \pi\}$ to'plam bo'yicha integralni ham, r soni 1 ga yetarlicha yaqin bo'lganda, $\varepsilon/2$

dan kichik qilish mumkin. Buning uchun $r < 1$ sonni $(1 - r) < \delta$ shartdan, δ sonni esa, $\delta < \varepsilon(8MC_\alpha)^{-1}$ tengsizlikdan tanlab olish yetarli.

Bundan chiqdi, talab qilingan (20.4.21) baho (20.4.23), (20.4.25) va (20.4.26) munosabatlardan kelib chiqadi.

■

Eslatma. 20.4.2 - teorema, aslida, 20.4.1 - teoremadan ham kelib chiqadi. Buning uchun Abel usuli Chezaro usulidan kuchli ekanini eslash yetarli. Ammo, shuni qayd qilish kerakki, teoremaning yuqorida keltirilgan isbotidan ko'p o'lchovli holda ham foydalanish mumkin.

20.4.1 - misol. Faraz qilaylik, Ω ixtiyoriy ikki o'lchovli soha bo'lib, u $\partial\Omega$ Jordan egri chizig'i bilan chegaralangan bo'lsin. Bu sohada, matematik fizikada nihoyatda muhim rol o'ynovchi, *Dirixle masalasini* qaraymiz. Bu masala, Ω ochiq sohada garmonik va $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohada uzluksiz bo'lgan, shunday $u(x)$ funksiyani topishdan iboratki, bu funksiya chegarada $f(s)$ qiymatni qabul qilsin. ya'ni

$$\Delta u(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in \Omega; \quad u(s) = f(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (20.4.27)$$

Berilgan f chegaraviy funksiya $\partial\Omega$ egri chiziqda uzluksiz deb faraz qilinadi.

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ birlik doira bo'lgan maxsus holda Dirixle masalasini yechishning sxemasini keltiramiz.

Ravshanki, (r, φ) qutb koordinatalarida f chegaraviy funksiya φ burchakning 2π -davriy uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani Furiye qatoriga yoyamiz:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (20.4.28)$$

Ω birlik doirada $u(r, \varphi)$ funksiyani

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (20.4.29)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

E'tibor bering, bu funksiya f chegaraviy funksiya Furiye qatori-ning Abel o'rtachalari bilan ustma-ust tushadi.

(20.4.29) qatorning har bir hadi garmonik funksiya bo'lib, ikki marta differensiallangan qator $r < 1$ da tekis yaqinlashishini ko'rsatish qiyin emas. Demak, u funksiya Ω doirada garmonik, ya'ni bu doira ichida Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

20.4.2 - teoremdan esa, bu funksiyaning doira chegarasidagi limit qiymati $f(\varphi)$ ga teng ekani kelib chiqadi. Shuning uchun u funksiyaning, uzluksizligini saqlagan holda, Ω ochiq sohadan $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq doiraga davom ettirish mumkin. Demak, (20.4.29) tenglik bilan aniqlangan u funksiya birlik doirada (20.4.27) Dirixle masalasini yechimidir.

Eslatma. Qaralgan misolda maxsus soha sifatida doira tanlanishi bejiz emas. Chunki kompleks argumentli funksiyalar nazariyasida isbotlanganidek, Jordan egri chizig'i bilan chegaralangan har qanday yassi sohani birlik doiraga shunday homeomorf akslantirish mumkin-ki, bunda har bir garmonik funksiya yangi o'zgaruvchilarda ham garmonik bo'lib qoladi. Dirixle masalasini doirada yechib, teskari akslantirish qo'llasak, biz masala yechimini boshlang'ich sohada olamiz. Bundan chiqdi, birlik doirada Dirixle masalasini yechilishi bu masalaning yassi sohalarining keng sinfi uchun ham yechilishiga olib keladi.

20.5-§. Furiye qatorlarining kompleks shakli

1. Ushbu paragrafda biz sonlar o'qida aniqlangan 2π -davriy va kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyalarni, ya'ni $f(x) = f_1(x) +$

$if_2(x)$ ko'rinishdagi funksiyalarni qaraymiz, bu yerda $f_k(x)$ funksiyalar $R[-\pi, \pi]$ fazoga tegishli. Skalyar ko'paytmani

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (20.5.1)$$

tenglik bilan aniqlaymiz. Bu skalyar ko'paytmaga mos norma

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ko'rinishga ega.

(20.5.1) skalyar ko'paytma tashkil etgan kompleks Evklid fazosini, haqiqiy qiymatli funksiyalar holidagidek, $R[-\pi, \pi]$ simvol bilan belgi-laymiz. Bunda kompleks yoki haqiqiy fazo haqida gap borayotgani mulohazalarimizdan ko'rinib turadi.

Kompleks Evklid fazosidagi ortonormal sistemalar odatdagidek belgilanadi; bunda biz sistema elementlarini faqat natural sonlar bilan emas, balki ixtiyoriy butun sonlar bilan nomerlaymiz.

Navbatdagi

$$e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20.5.2)$$

funksiyalarning cheksiz ketma-ketligi $R[-\pi, \pi]$ da ortonormal sistema tashkil qiladi. Haqiqatan,

$$(e_k, e_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ijx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx = \delta_{kj}.$$

Istalgan $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya Furiye qatorini quyidagicha yozamiz:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (20.5.3)$$

bunda c_k sonlar Furiye koeffitsiyentlari deb atalib,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (20.5.4)$$

ko'rinishga ega.

Eslatma. Agar $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya faqat haqiqiy qiymat qabul qilsa ham, uning

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.5.5)$$

Furiye qatorini (20.5.3) kompleks shaklda yozish mumkin. Haqiqatan, sinus va kosinuslar uchun Eyler formulasidan ((10.9.37) formulaga qarang) foydalanib,

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \\ &= \frac{i}{2} (a_k - ib_k) e^{ikx} + \frac{i}{2} (a_k + ib_k) e^{-ikx} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (20.5.6)$$

deb yozishimiz mumkin, bunda kompleks ko'rinishdagi Furiye koeffitsientlari

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k \geq 1), \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (20.5.7)$$

kabi aniqlanadi.

Teskarisi ham o'rinni: (20.5.6) tengliklar

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad (20.5.8)$$

formulalar yordamida haqiqiy funksiya Furiye qatorining kompleks shaklidan oddiy (20.5.5) shaklga o'tish imkonini beradi.

(20.2.4) ta'rifga o'xshash, (20.5.3) Furiye qatori *qisman yig'indilari* deb quyidagi

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (20.5.9)$$

yig'indiga aytamiz.

Xuddi (20.2.4) formula kabi, (20.5.9) n -qisman yig'indiga ham ortonormal sistemaning $(2n+1)$ ta elementi kiradi.

20.5.1 - tasdiq. (20.5.2) *ortonormal sistema* $R[-\pi, \pi]$ *Evklid fazosida yopiq.*

Isbot. Aytaylik, $f = f_1 + if_2 \in R[-\pi, \pi]$ bo'lsin. 20.2.1 - teorema-ga ko'ra, $f_1(x)$ funksiyani $P_1(x)$ trigonometrik polinomlar bilan, $f_2(x)$ funksiyani esa, $P_2(x)$ trigonometrik polinomlar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkin. Bundan $f = f_1 + if_2$ funksiyani $P = P_1 + iP_2$ polinomlar bilan yaqinlashtirish mumkinligi kelib chiqadi. Bu esa, (20.5.2) sistemaning $R[-\pi, \pi]$ kompleks Evklid fazo-sida yopiq va to'la ekanini anglatadi.

■

Har qanday yopiq sistema kabi, bu sistema uchun ham Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (20.5.10)$$

2. Trigonometrik sistemaning kompleks shakli Furiye qatorlari-ni absolyut yaqinlashishini o'rganish uchun qulaydir. Bunda nav-batdagi tasdiq muhim rol o'ynaydi.

20.5.2 - tasdiq. *Istalgan* $f \in R[-\pi, \pi]$ *funksiya va har qanday* $h > 0$ *uchun*

$$4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \sin^2 \frac{kh}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \quad (20.5.11)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Agar (20.5.3) f funksiyaning Furiye qatori bo'lsa, $f_h(x) = f(x+h)$ funksiyaning Furiye qatori

$$f(x+h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx+ikh}$$

ko'rinishga ega.

Demak,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} (e^{ikh} - 1).$$

Bu ayirmaga (20.5.10) Parseval tengligini qo'llasak,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 |e^{ikh} - 1|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \quad (20.5.12)$$

munosabatni olamiz. Endi, agar,

$$e^{ikh} - 1 = e^{ikh/2} (e^{ikh/2} - e^{-ikh/2}) = 2ie^{ikh/2} \cdot \sin \frac{kh}{2}$$

ekanini hisobga olsak, $|e^{ikh} - 1|^2 = 4 \sin^2 \frac{kh}{2}$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu ifodani (20.5.12) ning chap tarafiga qo'ysak, talab qilingan (20.5.11) tenglikni olamiz.

■

Tartibi $0 < \alpha < 1$ bo'lgan $C^\alpha[-\pi, \pi]$ Holder fazosini kiritamiz. Agar 2π -davriy f funksiya biror M o'zgarmas son bilan barcha $x \in \mathbb{R}$ va $y \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \quad (20.5.13)$$

shartni qanoatlantirsa, biz bu funktsiyani $C^\alpha[-\pi, \pi]$ fazoga tegishli deyimiz.

20.5.1 - teorema. Agar $f \in C^\alpha[-\pi, \pi]$ bo'lib, $0 < \alpha < 1$ bo'lsa, u holda istalgan $\beta < \alpha$ uchun quyidagi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 |k|^{2\beta} < \infty \quad (20.5.14)$$

sonli qator yaqinlashadi.

Isbot. Shartga ko'ra, f funktsiya uchun (20.5.13) baho o'rinli. Shuning uchun $|f(x+h) - f(x)| \leq Mh^\alpha$ va demak,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq M^2 h^{2\alpha}.$$

Bu baho va (20.5.11) tenglikka ko'ra,

$$4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \sin^2 \frac{kh}{2} \leq M^2 h^{2\alpha}.$$

Shunday ekan, istalgan n nomer uchun

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \sin^2 \frac{kh}{2} \leq \frac{M^2}{4} h^{2\alpha}.$$

Bu tengsizlik ikki tarafini $h^{1+2\beta}$ ga bo'lib, h bo'yicha 0 dan 1 gacha integrallaymiz:

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \int_0^1 \sin^2 kh \frac{dh}{h^{1+2\beta}} \leq \frac{M^2}{4} \int_0^1 h^{2\alpha-2\beta-1} dh = \frac{M^2}{8(\alpha-\beta)}. \quad (20.5.15)$$

Ravshanki,

$$\int_0^1 \sin^2 kh \frac{dh}{h^{1+2\beta}} = |k|^{2\beta} \int_0^1 \sin^2 t \frac{dt}{t^{1+2\beta}} \geq |k|^{2\beta} \int_0^1 \sin^2 t \frac{dt}{t^{1+2\beta}}.$$

Oxirgi integral $\beta < 1$ da biror musbat songa yaqinlashadi. Bundan chiqdi, bu tengsizlik yordamida (20.5.15) ning chap tarafini quyidan baholasak,

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 |k|^{2\beta} \leq C$$

tengsizlikni olamiz. Bu baho, ravshanki, (20.5.14) qator yaqinlashishini anglatadi.

■

Eslatma. (20.5.14) baho yoyilayotgan funksiya qanchalik silliq bo'lsa, uning Furiy koeffitsiyentlari shunchalik tez nolga yaqinlashishini anglatadi.

20.5.2 - teorema. Agar $\alpha > 1/2$ bo'lsa, istalgan $f \in C^\alpha[-\pi, \pi]$ funksiyaning Furiy qatori $\mathbb{R}$ sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Isbot. Aytaylik, f funksiya $C^\alpha[-\pi, \pi]$ sinfga tegishli bo'lib, $\alpha > 1/2$ bo'lsin. Furiy koeffitsiyentlaridan iborat qatorning absolyut yaqinlashishini, ya'ni

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < +\infty \quad (20.5.16)$$

ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun β sonini $1/2 < \beta < \alpha$ shartdan tanlab, quyidagi

$$|c_k| = |c_k| \cdot |k|^\beta \cdot |k|^{-\beta} \leq |c_k|^2 |k|^{2\beta} + 4|k|^{-2\beta}$$

sodda tengsizlikdan foydalanamiz.

Agar bu tengsizlikni barcha butun $k \neq 0$ lar bo'yicha yig'ib chiqsak,

$$\sum_{k \neq 0} |c_k| \leq \sum_{k \neq 0} |c_k|^2 |k|^{2\beta} + 4 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^{2\beta}}$$

bahoni olamiz.

20.5.1 - teorema ko'ra, o'ng tarafdagi birinchi qator yaqinlashadi, ikkinchi qator esa, Koshi-Maklorenning integral alomatiga ko'ra yaqinlashadi (9.2.5 - teorema qarang). Demak, (20.5.16) qator ham yaqinlashadi.



Natija. Agar $\alpha > 1/2$ bo'lsa, $C^\alpha[-\pi, \pi]$ Holder fazosiga tegishli istalgan haqiqiy funksiyani (20.5.5) Furiye qatori sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Haqiqatan, (20.5.8) formulaga ko'ra,

$$|a_k| \leq |c_k| + |c_{-k}|, \quad |b_k| \leq |c_k| + |c_{-k}|.$$

Demak, c_k koeffitsientlardan tuzilgan qatorning absolyut yaqinlashishidan (20.2.25) qatorning va 20.2.4 - tasdiqqa ko'ra, (20.5.5) Furiye qatorining absolyut va tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

Eslatma. 20.5.2 - teorema $\alpha = 1/2$ da o'z kuchini yo'qotadi. Chunonchi, $C^{1/2}[-\pi, \pi]$ Holder fazosida Furiye qatori absolyut uzoqlashuvchi bo'lgan funksiya mavjud.

3. Ushbu bandda funksiya va uni hosilasining kompleks shakldagi Furiye qatorlari o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganamiz. Bunda, c_k lar f funksiyaning Furiye koeffitsiyentlari ekaniga urg'u berish maqsadida, ularni $c_k(f)$ simvol bilan belgilaymiz.

Aytaylik, 2π -davriy $f(x)$ funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Hosilaning $c_k(f')$ Furiye koeffitsientlarini bo'laklab integrallash yordamida hisoblaymiz (davriylik shartiga ko'ra, integraldan tashqari hadlar nolga aylanadi):

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = ik c_k(f). \quad (20.5.17)$$

Bu jarayonni davom ettirib, navbatdagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

20.5.3 - tasdiq. Faraz qilaylik, $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya $R[-\pi, \pi]$ ga tegishli m -tartibli hosilaga ega bo'lsin. U holda, istalgan $k \in \mathbb{Z}$ uchun

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f) \quad (20.5.18)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Shartga ko'ra, f funksiya va uning barcha $m-1$ tartibga-cha hosilalari 2π -davriy uzluksiz funksiyalardir. Demak, bu funksiyalar davriylik shartini qanoatlantiradi:

$$f^{(j)}(\pi) = f^{(j)}(-\pi), \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (20.5.19)$$

Shunday ekan, xuddi (20.5.17) formuladagi kabi bo'laklab integ-rallab, talab qilingan (20.5.18) munosabatni olamiz.

■

Natija. 20.5.3 - tasdiq shartlari ostida quyidagi Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 |k|^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(x)|^2 dx. \quad (20.5.20)$$

(20.5.20) tenglik funksiya silliqligi oshgan sari uning Furiy koef-fitsientlari tezroq nolga intilishini anglatadi. Qandaydir ma'noda bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli ekanini, ya'ni Furiy koeffitsientlar qanchalik tez nolga intilsa, funksiya shuncha silliq bo'lishini ko'rsa-tish mumkin.

20.5.4 - tasdiq. Faraz qilaylik, $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiya Furiy koeffitsiyentlari biror natural m da

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \cdot |k|^m < +\infty \quad (20.5.21)$$

shartni qanoatlantirsin.

U holda f funksiya $\mathbb{R}$ sonlar o'qida m marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Isbot. (20.5.21) shart chap tarafdagi sonli qatorning yaqinlashishini anglatadi. Bundan chiqdi, Veyershtrass alomatiga asosan,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^m c_k e^{ikx} \quad (20.5.22)$$

funksional qator sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi. 20.5.3 - tasdiqqa ko'ra, (20.5.22) qator f funksiya Furye qatorini m marta formal ravishda differensiallash natijasidir. Bu qator yaqinlashgani sababli, 10.7.4 - teorema ko'ra, f funksiya m -tartibli uzluksiz hosilaga ega.



Eslatma. Odatda, 20.5.4 - tasdiq (20.5.20) tenglik bilan birgalikda qo'llaniladi. Buni navbatdagi misolda ko'rishimiz mumkin.

20.5.1 - misol. Kompleks sonlarning $\{\mu_k\}$ chegaralangan ketma-ketligi berilgan bo'lsin, bu yerda $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Har bir $f \in R[-\pi, \pi]$ funksiyaga, Furye qatori

$$Bf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k c_k(f) e^{ikx} \quad (20.5.23)$$

ko'rinishga ega bo'lib, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan, Bf funksiyani mos qo'yuvchi B akslantirishni qaraymiz. Boshqacha aytganda, barcha k indekslar uchun $c_k(Bf) = \mu_k c_k(f)$ tenglik bajarilsin.

Imkon darajada shunday eng katta $W[-\pi, \pi]$ sinf topilishi talab qilinadiki, bunda istalgan $f \in W[-\pi, \pi]$ uchun Bf funksiya mavjud va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.

20.5.4 - tasdiq va (20.5.20) tenglikka ko'ra, bunday sinf sifatida uchinchi tartibli hosilasi $R[-\pi, \pi]$ ga tegishli bo'lgan barcha funksiyalar sinfini olish mumkin. Haqiqatan, har bir bunday f funksiya

uchun

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 k^6 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'''(x)|^2 dx$$

tenglik o'rinli. Bu tenglik va

$$|c_k(f)|k^2 = |c_k(f)||k|^3 \cdot \frac{1}{|k|} \leq |c_k(f)|^2 k^6 + \frac{4}{k^2}$$

bahoga ko'ra,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| \cdot k^2 < +\infty.$$

Boshqa tarafdin, $\{\mu_k\}$ ketma-ketlik chegaralanganligi sababli, $|c_k(Bf)| \leq M|c_k(f)|$. Demak,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(Bf)| < +\infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(Bf)| \cdot |k|^2 < +\infty. \quad (20.5.24)$$

(20.5.24) dagi birinchi qator yaqinlashgani sababli, (20.5.23) qator yig'indisi korrekt aniqlangan va u 2π -davriy uzluksiz funksiyadir. Ikkinchi qator yaqinlashishidan esa, 20.5.4 - tasdiqqa ko'ra, (20.5.23) funksiyaning ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi ekanini kelib chiqadi.

$\{\mu_k\}$ ketma-ketlikka misol sifatida

$$\mu_k(t) = e^{itk^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ketma-ketlikni olaylik. Ravshanki, $|\mu_k| \leq 1$. Shunday ekan, uchinchi tartibli hosilasi $R[-\pi, \pi]$ ga tegishli ixtiyoriy f uchun

$$\psi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{itk^2 + ikx} \quad (20.5.25)$$

funksiya $x \in \mathbb{R}$ bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchidir. Bu funksiyaning $t \in \mathbb{R}$ bo'yicha ham bir marta uzluksiz differensiallanuvchi ekanini ko'rish oson. Oddiy hisoblash ko'rsatadiki, t bo'yicha birinchi hosila va x bo'yicha ikkinchi hosila

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (20.5.26)$$

tenglik bilan bog'langan. Bundan tashqari, $\psi(x, 0) = f(x)$.

Shuni aytish joizki, (20.5.26) munosabat kvant mexanikasining asosiy tenglamasi bo'lgan Shredinger tenglamasining sodda variantidir.

Eslatma. Agar 20.5.2 - teoremadan foydalanilsa, 20.5.1 - misoldagi f ga qo'yilgan shartlarni ozgina kamaytirish mumkin. Chunki, f funksiyaning ikkinchi hosilasi $\alpha > 1/2$ ko'rsatgich bilan Holder shartini qanoatlantirishi yetarli. Bu tasdiq xuddi yuqoridagidek isbotlanadi.

20.6-§. Karrali Furiye qatorlari

1. Ushbu paragrafda ko'p o'lchovli $\mathbb{R}^n$ fazosidagi trigonometrik Furiye qatorlari haqida umumiy ma'lumotlar beriladi. Asosiy o'rganiladigan objekt har bir argumenti bo'yicha 2π -davriy va n o'lchovli

$$\mathbb{T}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : -\pi \leq x_j \leq \pi\}$$

kubda Riman bo'yicha integrallanuvchi kompleks qiymatli funksiyalardir.

$R(\mathbb{T}^n)$ simvol bilan bunday funksiyalarning quyidagi

$$(f, g) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$$

skalyar ko'paytmaga ega bo'lgan Evklid fazosini belgilaymiz. Bu skalyar ko'paytmaga mos norma

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (20.6.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Eslatib o'tamiz, barcha butun sonlar to'plamini $\mathbb{Z}$ bilan belgilangan edik. $\mathbb{Z}^n$ simvol bilan $\mathbb{R}^n$ dagi butun sonli panjarani belgilaymiz, ya'ni $k \in \mathbb{Z}^n$ degani $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ bo'lib, $k_j \in \mathbb{Z}$ ekanini anglatadi.

Odatdagidek, $k \in \mathbb{Z}^n$ va $x \in \mathbb{R}^n$ elementlarning skalyar ko'paytmasi

$$kx = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Har bir argumenti bo'yicha 2π -davriy bo'lgan

$$e_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{ikx} \quad (20.6.2)$$

funksiyalar oilasi $R(\mathbb{T}^n)$ Evklid fazosida ortonormal sistema tashkil qiladi.

Ixtiyoriy $f \in R(\mathbb{T}^n)$ funksiyaning (20.6.2) sistema bo'yicha *Furiye qatori*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx} \quad (20.6.3)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda f_k *Furiye koeffitsiyentlari*

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx \quad (20.6.4)$$

kabi aniqlanadi.

20.6.1 - teorema. (20.6.2) ortonormal sistema $R(\mathbb{T}^n)$ fazosida yopiqdir.

Isbot. Teorema tasdig'i (20.5.2) sistemaning yopiqligi va 20.1.2 - teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatan, (20.6.2) funksiyalarni ko'paytma ko'rinishida yozib olamiz:

$$(2\pi)^{-n/2} e^{ikx} = \frac{e^{ik_1x_1}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{ik_2x_2}}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{e^{ik_nx_n}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Har bir ko'paytuvchi, 20.3.1 - tasdiqqa binoan, $R(\mathbb{T})$ da yopiq ortonormal sistema tashkil qiladi, bundan chiqdi, 20.1.2 - teoremag'a

asosan, ularning ko'paytmasi $R(\mathbb{T}^n)$ da yopiq ortonormal sistema tashkil qiladi.

1 - natija. *Istalgan $f \in R(\mathbb{T}^n)$ funksiya Furiye qatori unga (20.6.1) norma bo'yicha, ya'ni o'rta kvadratik yaqinlashadi.*

2 - natija. *Istalgan $f \in R(\mathbb{T}^n)$ funksiya uchun Parseval tengligi o'rinli:*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx. \quad (20.6.5)$$

2. Karrali Furiye qatorlarining navbatdagi xossasi qisman hosilali differensial tenglamalarni yechishda qo'llaniladi.

20.6.2 - teorema. *Agar $f \in R(\mathbb{T}^n)$ funksiyaning $D_j f \in R(\mathbb{T}^n)$ hosilasi Ox_j o'qqa parallel bo'lgan ixtiyoriy kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda ularning Furiye koeffitsiyentlari*

$$(D_j f)_k = (ik_j) f_k \quad (20.6.6)$$

tenglik bilan bog'langan.

Isbot. Agar x_j dan boshqa o'zgaruvchilarni tayinlab, $-\pi \leq x_j \leq \pi$ kesmada bo'laklab integrallasak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_j f(x) e^{-ik_j x_j} dx_j = f(x) e^{-ik_j x_j} \Big|_{x_j=-\pi}^{x_j=\pi} + ik_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ik_j x_j} dx_j$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikni boshqa o'zgaruvchilar bo'yicha integrallasak, integraldan tashqari hadlar nolga aylangani sababli, talab qilingan tenglikni olamiz:

$$(D_j f)_k = \int_{\mathbb{T}^n} D_j f(x) e^{-ikx} dx = ik_j \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx = ik_j f_k.$$

1 - natija. Agar 2π -davriy f funksiya $\mathbb{T}^n$ yopiq kubda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda quyidagi Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla f(x)|^2 dx. \quad (20.6.7)$$

Eslatma. $\mathbb{T}^n$ yopiq kubda 2π -davriy f funksiyaning uzluksiz differensiallanuvchiligi barcha $D_j f$ hosilalarning kub ichida uzluksiz bo'lib, chegarada esa, $D_j f$ hosilaning kub ichidan limit qiymatiga teng bo'lgan bir taraffi hosilalar mavjudligini anglatadi. Bunday ta'rifda, funksiyaning o'zi har bir x_m o'zgaruvchi bo'yicha

$$f(x)|_{x_m=-\pi} = f(x)|_{x_m=\pi}, \quad j, m = 1, 2, \dots, n. \quad (20.6.8)$$

davriylik shartlarini qanoatlantirsada, ammo $D_j f$ hosilalar bu shartlarni qanoatlantirmasligi mumkin.

2 - natija. Agar 2π -davriy f funksiya $\mathbb{R}^n$ fazoda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $\mathbb{T}^n$ yopiq kubda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda unga Laplas operatori ta'sirining Furiye qatori

$$\Delta f(x) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^2 f_k e^{ikx} \quad (20.6.9)$$

ko'rinishga ega. Bunda quyidagi Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^4 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\Delta f(x)|^2 dx. \quad (20.6.10)$$

Eslatma. Agar 2π -davriy f funksiya $\mathbb{R}^n$ fazoda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u $\mathbb{T}^n$ kub chegarasida ham differensiallanuvchi bo'ladi. Bundan chiqdi, har bir x_m o'zgaruvchi bo'yicha davriylik sharti bajariladi:

$$D_j f(x)|_{x_m=-\pi} = D_j f(x)|_{x_m=\pi}, \quad j, m = 1, 2, \dots, n. \quad (20.6.11)$$

Lekin, 2 - natija shartida ikkinchi hosilalar T^n chegarasida bir tomonli ma'noda tushunilgani uchun, ular davriylik shartini qanoatlantirishi shart emas.

3. Ko'p o'zgaruvchili holda istalgan funksiya Furiye qatorining yaqinlashish muammosi bir o'zgaruvchili holga nisbatan ancha murakkabdir. Bu murakkablik karrali qatorlar qismaniy yig'indilarini tashlashda xilma-xillikning ko'pligidanoq seziladi. Eng ko'p uchraydigan qismaniy yig'indilar to'g'ri to'rtburchakli va sferik qismaniy yig'indilardir.

To'g'ri to'rtburchakli qismaniy yig'indilar $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ vektor bilan aniqlanib,

$$S_m f(x) = \sum_{|k_1| \leq m_1} \sum_{|k_2| \leq m_2} \dots \sum_{|k_n| \leq m_n} f_{k_1 k_2 \dots k_n} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} \quad (20.6.12)$$

ko'rinishga ega, bu yerda m_j lar natural sonlardir.

Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday N topilsaki,

$$m_1 \geq N, m_2 \geq N, \dots, m_n \geq N$$

shartlarni qanoatlantiruvchi barcha m vektorlar uchun

$$|S_m f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (20.6.3) Furiye qatori $f(x)$ ga *to'g'ri to'rtburchaklar* bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Doiraviy yoki *sferik* qismaniy yig'indilar $R > 0$ haqiqiy son bilan aniqlanib,

$$S_R f(x) = \sum_{|k| < R} f_k e^{ikx} \quad (20.6.13)$$

ko'rinishga ega.

Agar

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} S_R f(x) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, (20.6.3) Furiye qatori $f(x)$ ga *doiralalar bo'yicha* (yoki *sferalar bo'yicha*) yaqinlashadi deyiladi.

Absolyut yaqinlashmaydigan qatorlar uchun to'g'ri to'rtburchakli va sferik qisimiy yig'indilar o'zlarini turlicha tutishadi va shu sababli, ular uchun yaqinlashish shartlari ham turlichadir.

Ammo karrali qatorlarning absolyut yaqinlashish shartlari qisimiy yig'indilarni tanlashga bog'liqmas va eng sodda yetarli shartlar nav-batdagi lemnaga asoslanadi.

20.6.1 - lemma. *Faraz qilaylik, $f \in R(\mathbb{T}^n)$ funksiya $\mathbb{R}^n$ fazosida m marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda uning Furiy koeffitsiyentlari uchun*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 (1 + |k|^{2m}) \leq C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2 \quad (20.6.14)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Eslatib o'tamiz, ixtiyoriy α multiindeks uchun $D^\alpha f(x)$ qisimiy hosilalar (12.2.36) tenglik bilan, (20.6.14) ning o'ng tarafidagi norma esa, (20.6.1) formula bilan aniqlanadi.

(20.6.14) bahoning isboti m sonining toq yoki juftligiga bog'liq.

Agar $m = 2l$ bo'lsa, biz (20.6.10) formulada f funksiyani uning $\Delta^{l-1} f = \Delta^{m/2-1} f$ takroriy Laplasianiga almashtirib, (20.6.9) tenglikdan kelib chiqadigan $(\Delta^{m/2-1} f)_k = (-|k|^2)^{m/2-1} f_k$ munosabatdan foydalanamiz. Natijada (e'tibor berib, oxirgi tengsizlikni olishda takroriy Laplasianni koordinatalarga yoyishimiz kerak)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^{2m} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx \leq C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2 \quad (20.6.15)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Agar $m = 2l+1$ bo'lsa, (20.6.7) formulada f o'rniga uning $\Delta^l f = \Delta^{(m-1)/2} f$ takroriy Laplasianlarini qo'yib, $(\Delta^l f)_k = (-|k|^2)^l f_k$ munosabatdan foydalanamiz:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^{2m} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\text{grad} [\Delta^{(m-1)/2} f(x)]|^2 dx \leq C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2. \quad (20.6.16)$$

(20.6.5) Parseval tengligiga juft m larda (20.6.15) tengsizlikni, toq m larda esa, (20.6.16) tengsizlikni qo'shib,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 (1 + |k|^{2m}) \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|f\|^2 + C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2$$

bahoni olamiz. Ravshanki, bu baho talab qilingan (20.6.14) bahoga teng kuchlidir.

■

20.6.3 - teorema. Faraz qilaylik, har bir argumenti bo'yicha 2π -davriy f funksiya $\mathbb{R}^n$ fazosida m marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar $m > n/2$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya Furye qatori absolyut va $x \in \mathbb{R}^n$ bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Isbot. Teorema shartini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya Furye koeffitsiyentlari absolyut yaqinlashuvchi qator tashkil qilishini, ya'ni

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k| < +\infty \quad (20.6.17)$$

ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun quyidagi sodda

$$\begin{aligned} |f_k| &= |f_k| (1 + |k|^2)^{m/2} \cdot \frac{1}{(1 + |k|^2)^{m/2}} \leq \\ &\leq |f_k|^2 (1 + |k|^2)^m + \frac{1}{4(1 + |k|^2)^m} \end{aligned}$$

tengsizlikka ahamiyat beraylik.

Ravshanki, o'ng tarafdagi har ikki had (bunda birinchisi 20.6.1 - lemmaga ko'ra, ikkinchisi esa, 14.1.7 - misolga ko'ra) yaqinlashuvchi qatorlar hadlaridir. Bundan (20.6.17) qatorning va demak, (20.6.3) Furye qatorining absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi. Furye qatorining tekis yaqinlashishi Veyershtass alomatining natijasidir.

■

1 - eslatma. Agar 2π -davriy f funksiya 20.6.3 - teorema shartlarini qanoatlantirsa, u $\mathbb{T}^n$ kub chegarasida ham m marta differensiallanuvchi bo'ladi. Bundan chiqdi, har bir x_j o'zgaruvchi bo'yicha $|\alpha| \leq m$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan α multiindeks uchun

$$D^\alpha f(x)|_{x_j=-\pi} = D^\alpha f(x)|_{x_j=\pi}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (20.6.18)$$

davriylik shartlari bajariladi.

Ammo bevosita isbotdan ko'rinib turibdiki, (20.6.18) davriylik shartlari $|\alpha| \leq m - 1$ uchun bajarilganida ham, teorema o'rinli bo'lib qoladi. Bunda, m -qisman hosilalar $\mathbb{T}^n$ chegarasida bir tomonli ma'nosida tushunilib, ularning davriylik shartini qanoatlantirishi shart emas.

2 - eslatma. n karrali Furye qatori absolyut yaqinlashishining $m > n/2$ yetarli shartini kuchsizlantirish mumkin emas. Chunonchi, agar $m \leq n/2$ bo'lsa, shunday 2π -davriy va $\mathbb{R}^n$ fazoda m marta uzluksiz differensiallanuvchi f funksiya topiladiki, uning Furye qatori absolyut uzoqlashadi.

4. Karrali Furye qatorlarining tatbiqi sifatida davriy muhitda issiqlik tarqalish masalasini qaraylik.

20.6.1 - misol. Navbatdagi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad t > 0, \quad (20.6.19)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining 2π -davriy va $u(x, 0) = \varphi(x)$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechimni, aniqlanishi talab qilinadigan $c_k(t)$ koeffitsientli, $x \in \mathbb{T}^n$ o'zgaruvchi bo'yicha Furye qator ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(t) e^{ikx}. \quad (20.6.20)$$

Bu tenglikni t bo'yicha formal ravishda differensiallasak,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c'_k(t) e^{ikx}$$

tenglikni olamiz.

Endi x bo'yicha formal ravishda differensiallasak,

$$\Delta u(x, t) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^2 c_k(t) e^{ikx}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan chiqdi, (20.6.20) funktsiya (20.6.19) tenglamani yechimi bo'lishi uchun

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} [c'_k(t) + a^2 |k|^2 c_k(t)] e^{ikx} = 0$$

tenglik bajarilishi zarur.

Demak, har qanday butun koordinatali k vektor uchun

$$c'_k(t) + a^2 |k|^2 c_k(t) = 0$$

bo'lishi kerak.

Bu tenglik oddiy differensial tenglama bo'lib, uning umumiy yechimi

$$c_k(t) = C_k e^{-a^2 |k|^2 t}$$

ko'rinishga ega, bu yerda C_k koeffitsient t ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmasdir. Shunday qilib, issiqlik tarqalish tenglamasining x bo'yicha 2π -davriy yechimini karrali trigonometrik qator ko'rinishida yozish mumkin:

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} C_k e^{ikx - a^2 |k|^2 t}. \quad (20.6.21)$$

Biz $t = 0$ da $\varphi(x)$ funktsiyaga teng yechimni qidirayapmiz. Bu funktsiyani Furiye qatoriga yoyaylik:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k e^{ikx}. \quad (20.6.22)$$

$u(x, 0) = \varphi(x)$ bo'lgani uchun, (20.6.21) va (20.6.22) ga ko'ra, $C_k = \varphi_k$. Demak, o'rganilayotgan masalaning yechimi

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k e^{ikx - a^2 |k|^2 t}$$

ko'rinishga ega.

Eslatma. Yuqoridagi mulohazalarni xuddi 20.4.2 - teorema isbotida keltirilgan argumentlar bilan asoslash mumkin.

Xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, har bir x_j o'zgaruvchi bo'yicha juft funksiyalar quyidagi

$$\varphi_k(x) = \cos k_1 x_1 \cdot \cos k_2 x_2 \cdots \cos k_n x_n \quad (20.6.23)$$

kosinuslar sistemasi bo'yicha yoyilishi mumkin.

Agar

$$\mathbb{T}_+^n = [0, \pi]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, n\}$$

deb belgilasak, (20.6.23) ortonormal sistema $R(\mathbb{T}_+^n)$ Evklid fazosida yopiq va to'ladir.

Bu tasdiq bir karrali kosinuslar sistemasi yopiqligi haqidagi 20.2.7 - teorema va yopiq sistemalar ko'paytmasi yopiqligi haqidagi 20.1.2 - teoremlardan kelib chiqadi.

Har bir x_j o'zgaruvchi bo'yicha toq funksiyalar quyidagi

$$\psi_k(x) = \sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n \quad (20.6.24)$$

sinuslar sistemasi bo'yicha yoyilishi mumkin.

Bu ortonormal sistemaning $R(\mathbb{T}_+^n)$ Evklid fazosida yopiqligi 20.2.8 - va 20.1.2 - teoremlardan kelib chiqadi.

Navbatdagi misolda issiqlik tarqalish tenglamasining davriy bo'lishi shart bo'lmagan yechimlari qidiriladi.

20.6.2 - misol. $t > 0$ da $\mathbb{T}_+^n$ kub ichida (20.6.19) issiqlik tarqalish tenglamasining, kub chegarasida nolga teng va $u(x, 0) = \varphi(x)$ bosh-lang'ich shartni qanoatlantiruvchi, yechimi topilsin.

Yechimni (20.6.24) sinuslar sistemasi bo'yicha Furiye qator ko'rinishida qidiramiz. Bunda chegarada nolga tenglik shartlari o'z-o'zidan bajariladi.

Avval boshlang'ich funksiyani bu sistema bo'yicha qatorga yoyaylik:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, k_j \geq 1} \varphi_k \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n.$$

Endi 20.6.1 - misolda keltirilgan mulohazalarni takrorlasak, yechim uchun

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, k_j \geq 1} \varphi_k e^{-a^2 |k|^2 t} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n \quad (20.6.25)$$

formulani olamiz.

Eslatma. Birinchi marta uch o'lchovli kubning sovish masalasi J.B. Furey tomonidan ikki yuz yil avval o'rganilgan edi. Furey aniqlagan va keyinchalik uning klassik "Issiqlikning analitik nazariyasi" (1822) nomli monografiyasida keltirilgan yechim

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{klm} e^{-a^2(k^2+l^2+m^2)t} \sin kx \sin ly \sin mz$$

ko'rinishga ega edi ((20.6.25) formula bilan taqqoslang).

Bu formuladan vaqtning katta qiymatlaridagi asimptotikaning bosh qismini aniqlash mumkin:

$$u(x, t) = e^{-3a^2 t} \sin x \sin y \sin z [\varphi_{111} + o(1)], \quad t \rightarrow +\infty.$$

Oxirgi ikki asr davomida matematik tahlilning eng sermahsul tarmoqlaridan biri bo'lib kelayotgan garmonik tahlilning rivojlanishiga yuqoridagi monografiya katta turtki bo'lib xizmat qildi.

20.7-§. Misollar

1 - misol. Rademaxer sistemasi deb ataluvchi

$$\psi_k(x) = \text{sign}(\sin(2\pi \cdot 2^k \cdot x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

funksiyalar sistemasini grafigini chizing va $R[0, 1]$ da ortonormal ekanini ko'rsating.

Ko'rsatma. Har bir navbatdagi funksiya avvalgisi 1 ga yoki -1 ga teng kesma yarmida 1 ga va qolgan yarmida esa, -1 ga teng ekanidan foydalaning.

2 - misol. Ixtiyoriy $k = 0, 1, \dots$ va $j = 1, 2, 4, \dots, 2^k$ lar uchun $[0, 1]$ kesmada Xaar sistemi deb ataluvchi

$$\chi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{j}{2^k} - \frac{1}{2^k} \leq x < \frac{j}{2^k} - \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{j}{2^k} - \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \leq x < \frac{j}{2^k}, \\ 0, & \text{boshqa } x \text{ larda,} \end{cases}$$

funksiyalar sistemi berilgan bo'lsin. Bu sistemaning $R[0, 1]$ da ortogonal ekanini ko'rsating va uni ortonormalashtiring. $\chi_k^{(j)}(x)$ funksiyalar grafigini chizing.

Ko'rsatma. Bu sistemadagi har bir funksiya tashuvchisi bosh-qasining tashuvchisi bilan yoki kesishmaydi, yoki yuqoridagi misolga keltirilgan ko'rsatmadagi hol yuz beradi.

3 - misol. Quyidagi

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi x}{b-a}, \sin \frac{2\pi x}{b-a}, \dots, \cos \frac{2\pi nx}{b-a}, \sin \frac{2\pi nx}{b-a}, \dots$$

trigonometrik sistemaning na faqat $[a, b]$ kesmada, balki ixtiyoriy $[A, A + b - a]$ kesmada ham ortogonal ekanini ko'rsating.

Ko'rsatma. $[a, b]$ kesmada ortogonallikni oddiy hisoblash orqali tekshiring. $[A, A + b - a]$ kesmada ortogonallikni tekshirishda, davri $b - a$ ga teng bo'lgan har qanday uzluksiz davriy $f(x)$ funksiya uchun istalgan A son olganda ham

$$\int_A^{A+b-a} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

tenglik bajarilishidan foydalaning.

4 - misol. $[-\pi, \pi]$ kesmada quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

funksiyaning Furye qatorini toping va uni yaqinlashishga tekshiring. Furye qator yordamida

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

tenglikni isbotlang.

Ko'rsatma. Furye koeffitsiyentlarini (20.2.3) formula bo'yicha hisoblang. Berilgan funksiya barcha $x \neq k\pi$ larda differensiallanuvchi bo'lgani sababli, bu nuqталarda 20.3.1 - teoremani qo'llash mumkin. Furye qatorida $x = \frac{\pi}{2}$ desak, talab qilingan tenglikni olamiz.

5 - misol. $[-\pi, \pi]$ kesmada $f(x) = \cos ax$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning a parametr butun va butun emas bo'lganda Furye qatorini toping. Parametr butun bo'lmaganda hosil bo'lgan qatorni yaqinlashishga tekshiring va mos Parseval tengligini yozing.

Ko'rsatma. Parametr butun bo'lganda trigonometrik sistemaning ortogonallik shartidan foydalaning. Parametr butun bo'lmaganda qatorni yaqinlashishga tekshurish uchun 20.3.1 - teoremani qo'llang. (20.2.9) Parseval tengligida o'ng va chap tomonlarni berilgan funksiya uchun hisoblang.

6 - misol. $[0, 2]$ kesmada quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning sonlar o'qiga davriy davom ettirib, hosil bo'lgan funksiyaning Furye qatorini toping va yaqinlashishga tekshiring.

Ko'rsatma. $f(x)$ funksiyani sonlar o'qiga davriy davom ettirish natijasida hosil bo'lgan funksiyani $\tilde{f}(x)$ deb belgilaylik. Bu funksiya davriy bo'lakli-silliqlik juft funksiya bo'lib, uning davri 2 ga teng. Bundan chiqdi, $\tilde{f}(x)$ ning Furiye qatorida faqat cosinuslar ishtirok etadi. Furiye qatorini yaqinlashishga tekshirish uchun 20.3.2 - teoremdan foydalaning.

7 - misol. 4 - misoldagi $f(x)$ funksiya Furiye qatori yordamida quyidagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

tenglikni isbotlang ((20.2.11) tenglik bilan solishtiring).

Ko'rsatma. Agar $0 \leq x \leq \pi$ bo'lsa, 4 - misoldagi funksiya Furiye qatorini $\frac{\pi}{2}$ dan x gacha integrallang (20.2.6 - teoremdan foydalaning). Hosil bo'lgan ifodada $x = 0$ deyish yetarli.

8 - misol. $[-\pi, \pi]$ kesmada aniqlangan quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

funksiya Furiye ko'effitsiyentlarini hisoblamasdan turib, uning Furiye qatori $x = 0$ nuqtada $\frac{1}{2}$ qiymatga yaqinlashishini ko'rsating.

Ko'rsatma. $f(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada chap hosilaga ega bo'lib, bu nuqtadan o'ngda $\alpha = \frac{1}{2}$ ko'rsatgich bilan (20.3.16) Holder shartini qanoatlantirishini ko'rsating. So'ngra 20.3.1 - teoremdan foydalaning.

9 - misol. Shunday λ sonlarni va $[0, l]$ kesmada aniqlangan hamda aynan noldan farqli shunday $y(x)$ funksiyalarni topingki, ular

$$-y''(x) = \lambda y(x)$$

tenglamani va

$$y(0) = y(l) = 0$$

chegaraviy shartni qanoatlantirsin. Bu masalaning $y(x)$ yechimlari to'plami $R[0, l]$ da ortogonal trigonometrik sistema tashkil qilishini isbotlang. Hosil bo'lgan yechimlar sistemasini ortonormallashtiring.

Ko'rsatma. Masalani yechishda uchta: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ va $\lambda > 0$ holni alohida o'rganing. Birinchi ikki holda faqat nol yechim mavjud ekaniga ishonch hosil qiling. Uchinchi holda esa, istalgan $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, son uchun masalaning aynan noldan farqli yechimi mavjud ekanini ko'rsating.

10 - misol. Navbatdagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad t > 0,$$

to'lqin tenglamasining 2π -davriy va $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Ko'rsatma. Yechimni, aniqlanishi talab qilinadigan $c_k(t)$ koef-fitsientli, $x \in \mathbb{T}^n$ o'zgaruvchi bo'yicha quyidagi

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(t) e^{ikx}$$

Furje qator ko'rinishida qidiring. Bu yechimni tenglamaga qo'yib, $c_k(t)$ koeffitsientlarni aniqlash uchun ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama oling. Umumiy yechimdagi ikki o'zgarmasni aniqlash uchun ikkita boshlang'ich shartdan foydalaning.

ALIFBOLI KO'RSATMA

- Abel jamlash usuli 525
Abel o'rtachalari 526
Absolyut yaqinlashuvchi xosmas integral 278
Amper 617
Aralash ko'paytma 451, 583

Bessel ayniyati 721
Bessel tengsizligi 721
Beta - funksiya 532
Bio - Savar qonuni 626
Bir bog'lamli soha 204
Bir yoqli sirt 447
Birinchi differensial formasining invariantligi 81
Birinchi kvadratik forma 406
Birinchi tartibli Chezaro o'rtachalari 775
Birinchi tur egri chiziqli integral 316, 321
Birinchi tur sirt integrali 441
Birinchi tur xosmas integral 495
Birlik normal vektor 392
Bog'langan to'plam 26
Bog'liq va bog'liqmas funksiyalar 118
Bo'lakli silliq 651
Bo'linish diametri 397,162
Bolsano - Veyershtass teoremasi 19
Bonne formulasi 493
Bosh egriliklar 435
Bosh normal 435
Bosh normal kesim 422

Bosh yo'nalish 435
Chegaralangan ketma-ketlik 18
Chegaraviy nuqta 20
Chiziqli forma 406
Chiziqning nuqtadagi egriligi 427

Darbu ma'nosida integrallanuvchi funksiya 172
Darbu yuqori yig'indilarining limiti 172
Davriylik sharti 734
Diffeomorfizm 117
Differensial 80
Differensiallanuvchi funksiya 63
Dirixle ko'paytuvchisi 529
Dirixle masalasi 784
Dirixle yadrosi 758
Divergensiya 586

Egrilik markazi 424
Egrilik radiusi 424
Elektr zaryadining saqlanish qonuni 622
Elektrodinamika 624
Elektromagnit maydon 620
Elektrostatika 624
Evklid fazosi 14
Eyler egriligi 436

Faradey qonuni 620
Feyer yadrosi 776

- Fundamental ketma-ketlik 18
 Funksiya grafigi 35
 Funksiya limit qiymati 37
 Funksiyalar o'ramasi 665
 Furiye almashtirishi 631
 Furiye integrali 630
 Furiye koeffitsiyentlari 711, 719
 Furiye qatori 719

 Gamma - funksiya 532
 Garmonik funksiya 611
 Garmonik maydon 619
 Garmonik tebranish 630
 Gauss absalyut birliklari 621
 Gauss egriligi 437
 Gauss-Ostrogradskiy formulasi 468, 591
 Gibbs hodisasi 658
 Gradient 65, 578
 Grin formulasi 360

 Hajra potentsiali 617
 Helmholtz 618
 Helmholtz tenglamasi 697
 Henrix Herts 623
 Hevisayd funksiyasi 490
 Hessian 86
 Hilbert fazosi 727
 Holder fazosi 789
 Holder sharti 645
 Homeomorfizm 49

 Ichki nuqta 20
 Ichki normal 348, 449
 Ikki karrali Riman integrali 163
 Ikki yoqli sirt 447
 Ikkinchi (va yuqori) tartibli qismaniy hosila 74, 80
 Ikkinchi kvadratlik forma 415
 Ikkinchi o'rta qiymat formulasi 493

 Ikkinchi tur egri chiziqli integral 324
 Ikkinchi tur sirt integrali 450
 Ikkinchi tur xosmas integral 519
 Integral operator 562
 Integral operator yadrosi 562
 Integral ostidagi funksiya 163
 Integral yig'indi limiti 163, 232
 Integrallash sohasi 163
 Izometrik akslantirish 580

 Jism hajmi 250
 Jordan egri chizig'i 346

 Kantor teoremasi 45
 Karleson L. 646, 775
 Karrali Furiye integrali 686
 Ketma-ketlik limiti 16
 Kompakt to'plam 30
 Kompuyter tomografiyasi 702
 Kontur 347
 Konturning manfiy yo'nalishi 349
 Konturning musbat yo'nalishi 349
 Koshi ketma-ketligi 17
 Koshi kriteriyasi 18
 Koshi ma'nosida yaqinlashish 300
 Koshi masalasi 663
 Koshi tengsizligi 15
 Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi 713
 Kosinus Furiye almashtirishi 649
 Kosinuslar sistemasi 751
 Kroneker delta-simvoli 710
 Kublanuvchi to'plam 230
 Kulon potentsiali 565
 Kulon qonuni kvadratlanuvchi shakl 621

- Lagranj funksiyasi 134
 Lamé koetsientlari 597
 Laplas operatori 610
 Laplas usuli 545
 Lejandr ko'phadlari 716
 Limit nuqta 23
 Lokal integrallanuvchi
 funksiya 268
 Lokal maksimum 128
 Lorens kuchi 620
 Luzin N.N. 774

 Magnitostatika 624
 Maksvell 621
 Maxsus nuqta 316
 Maykl Faradey 620
 m-tartibli differensial 89

 Nolga ekvivalent funksiya 673
 n karrali Riman integrali 252
 n-tartibli polinom 719
 Nuqtada uzluksiz funksiya 38
 Nuqtaga nisbatan yulduzli
 soha 371
 Nuqtaning sirtidagi atrofi 381
 Nyuton potentsiali 565, 617

 Ochiq to'plam 22
 Ombilik nuqta 440
 Orientirlangan sirt 448
 O'rtacha egrilik 436
 Ortogonal elementlar 15
 Ortogonal sistema 716
 Ortogonal vektorlar 15
 Ortonormal (ortonormallangan)
 sistema 718
 Oshkormas funksiya 97

 Parametrga bog'liq integral 476
 Parseval tengligi 724
 Plansherel teoremasi 680
 Popov A. S. 623

 Potensial maydon 614
 Potensial zichligi 617
 Puasson yadrosi 779

 Qavariq to'plam 25
 Qamrab oluvchi sohalar ketma-
 ketligi 270
 Qisman hosila, ikki
 o'zgaruvchilik holda 60
 Qisman hosila, n o'zgaruvchili
 holda qisman yig'indi 62

 Radon almashtirishi 700
 Regulyar jamlash usuli 527
 Regulyar kontur 359
 Riman lokallashtirish
 prinsipi 644
 Riman-Lebeg lemmasi 641, 766
 Riss o'rtachalari 531
 Riss usuli 531
 Rotor (uyurma) 589

 Sfera (doira) bo'yicha
 yaqinlashish 800
 Sferik qisman yig'indilar 800
 Shakl bo'linishi 162
 Shakl yuzi 149
 Shartli ekstremum nuqtasi 138
 Shartli maksimum 132
 Silliqlik egri chiziq 316
 Silliqlik sirt 385
 Silliqlik sodda sirtning yuzi 398
 Singulyar integral 302
 Siniqlik chiziq 27
 Sinus Furye almashtirishi 649
 Sinuslar sistemasi 753
 Sirt 381
 Sirt chekkasi 382
 Sirtning elliptik nuqtasi 437
 Sirtning hiperbolik nuqtasi 437
 Sirtning maxsus nuqtasi 391
 Sirtning parabolik nuqtasi 437

- Skalyar ko'paytma 14
 Skalyar maydon 577
 Sodda funksiya 164
 Sodda sirt 384
 Soha 27
 Solenoidal maydon 615
 Statsionar nuqta 130
 Stirling formulasi 555
 Stoks formulasi 462
 Stoks teoremasi 594, 593

 Tabiiy parametrlash 316
 Taqqoslashning umumiy
 alomati 275
 Taqqoslashning xususiy
 alomati 275
 Tashqi normal 449
 Tekis silliq akslantirish 396
 Tekis uzluksiz funksiya 45
 Tekis yaqinlashishning Abel -
 Dirixle alomati 498
 Tekis yaqinlashishning
 Veyershtrass alomati 497
 Teskari Furiye almashtirishi 631
 Teskarilanuvchi vektor-
 funksiya 46
 To'g'ri to'rtburchaklar bo'yicha
 yaqinlashish 800
 To'g'ri to'rtburchakli qismaniy
 yig'indilar 800
 To'la differensial 463
 To'la egrilik 437
 To'la fazo 726
 To'la sistema 726

 To'liq tenglamasi 622
 To'plam yopilmasi 23
 To'plamning quyi va yuqori
 hajmi 230
 Trigonometrik qator 709
 Trigonometrik sistema 732

 Uch karrali Riman
 integrali 232
 Uchburchak tengsizligi 679
 Umumlashgan hosila 738
 Urinma 328
 Urinma tekislik 392

 Vektor funksiya 46, 577
 Vektor ko'paytma 582
 Vektor maydon 577
 Veyershtrass teoremlari 44

 Xosmas integralning bosh
 qiymati 301
 Xosmas integralning parametrlar
 bo'yicha tekis yaqinlashishi 496

 Yakobi determinanti 109
 Yakobian 108
 Yaqinlashuvchi xosmas integral
 271, 272
 Yassilanish nuqtasi 437
 Yo'nalish bo'yicha hosila 71
 Yo'naltiruvchi kosinuslar 331
 Yopiq sirt 382
 Yopiq sistema 723
 Yopiq to'plam 22

Alimov Shavkat Orifjonovich
Ashurov Ravshan Rajabovich

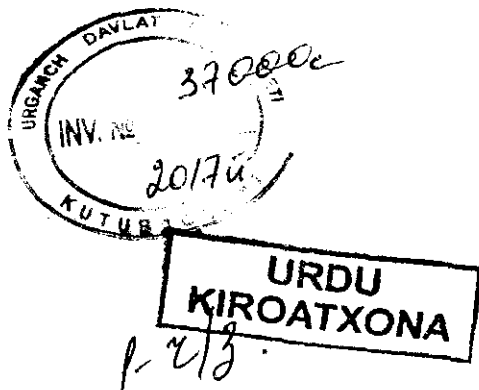
MATEMATIK TAHLIL

2-qism

O'quv qo'llanma

Toshkent – «TURON-IQBOL»– 2017

Muharrir f.-m.f.n., dotsent *Yu. E. Fayziyev*
Badiiy muharrir *A. J. Xudoyberdiyeva*
Musahhih *S. Abdunabiyeva*
Sahifalovchi *Sh. N. Sheraliev, E. Muratov*



Nashriyot litsenziyasi AI №223, 16.11.12
Bosishga 6.04.2017 yilda ruxsat etildi.
Bichimi 60x90^{1/16}. Garnitura «School».
Ofset usulida bosildi. Shartli b.t. 51,5. Nashr t. 51,0.
Adadi 500 nusxa. 21-sonli buyurtma.

«TURON-MATBAA» bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Olmazor tum., Talabalar ko'chasi, 2.

TURON
IQBOL
nashriyoti

ISBN 978-9943-14-427-9



9 789943 144279