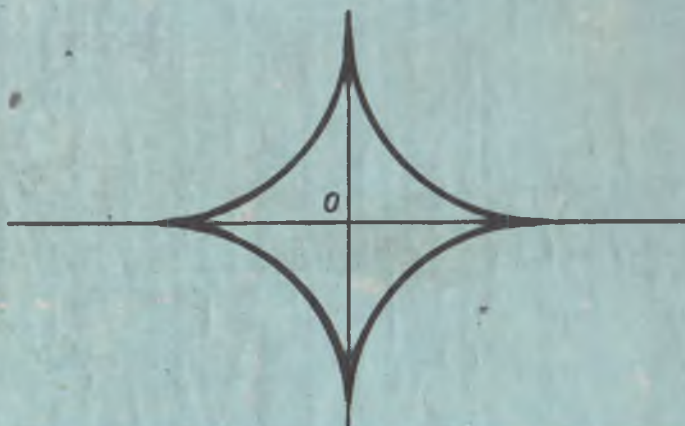


1134

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

II



ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН

„ЎЗБЕКИСТОН“

22.16 x 13

517.2

А. САЪДУЛЛАЕВ, Х. МАНСУРОВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ,

А. ВОРИСОВ, Р. ФУЛОМОВ

M 31

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

II

*Ўзбекистон Республикаси
Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
университетлар талабалари учун ўқув
қўлланма сифатида тавсия этган*

ЎЗБЕК КУТУБХОНАСИ
292383

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»

1995

ган
ла-
чи-
ци-
ар,
мас
ирт

ма-
дан
ича
ров
лик

атик
осил
шга
и ва
тиги

хис-
шшу-
рлар

дағи
нат-

22.16
M12

Тақризчилар: физика-математика фанлари доктори
Р. Р. АШУРОВ доцент Т. Т. ТҒЙЧИЕВ

ISBN 5-640-01508-x

1602070000—66
С _____ 95
M351 (04) 95

© «ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти, 1995 й.

СУЗ БОШИ

Ушбу китоб «Ўзбекистон» нашриётида чоп этилган «Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами», I жилдининг давоми бўлиб, у ўз ичига кўп ўзгарувчи функцияларнинг лимити ва узлуксизлиги, дифференциал ҳисоб, функционал кетма-кетликлар ва қаторлар, хосмас интеграллар, параметрга боғлиқ хос ҳамда хосмас интеграллар, каррали интеграллар, эгри чизиқли ва сирт интеграллари, Фурье қаторлари мавзуларини олади.

Мазкур китоб Тошкент Давлат университети математика факультети ўқитувчиларининг бир гуруҳи томонидан ёзилган бўлиб, унга математика ихтисослиги бўйича мутахассислар тайёрлаш дастури ҳамда Т. Азларов ва Х. Мансуров томонидан ёзилган икки жилдлик «Математик анализ» китоби асос қилиб олинган.

Қўлланмани ёзишда муаллифлар ҳар бир математик тушунча ва таърифни мос мисол ва масалаларни батафсил ечиш орқали таҳлил қилиб ўқувчиларга етказишга ҳаракат қилдилар. Қўлланмада 1300 га яқин мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг 250 дан ортиғи тўлиқ ечими билан берилган.

Китоб қўлёзмасини ўқиб, унинг яхшиланишига ўз хиссаларини қўшган профессорлар Ш. Ёрмуҳамедов, Р. Ашуров, доцентлар Т. Тўйчиев, М. Мамировларга муаллифлар ташаккур изҳор қиладилар.

Қўлланманинг сифатини янада яхшилаш борасидаги фикр-мулоҳазалар учун муаллифлар аввалдан ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

XII боб

KUP YZGARUVCHILI FUNKCIYALAR, ULARNING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI

1-§. R^m FAZO. R^m FAZODA KETMA-KETLIK VA UNING LIMITI

m та хақиқий сонлар тўплами R нинг ўзаро Декарт кўпайтмасидан иборат ушбу

$$R^m = R \times R \times \dots \times R = \{(x_1, x_2, \dots, x_m); x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\}$$

тўпламни қарайлик. Одатда бу тўпламнинг элементини (нуктасини) битта ҳарф билан белгиланади: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Бунда x_1, x_2, \dots, x_m сонлар x нуктанинг мос равишда биринчи, иккинчи, ..., m -координаталари дейилади.

R^m тўпламда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ нукталарни олайлик. Ушбу

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2} \end{aligned}$$

миқдор x ва y нукталар орасидаги масофа дейилади. У қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\rho(x, y) \geq 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3°. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ ($z \in R^m$).

R^m тўплам R^m фазо (m ўлчовли Евклид фазоси) деб аталади.

Хусусан, $m = 2$ бўлганда ($x_1 = x$, $x_2 = y$)

$$R^2 = R \times R = \{(x, y): x \in R, y \in R\}$$

фазога эга бўламиз. Бунда $\forall (x_1, y_1) \in R^2, \forall (x_2, y_2) \in R^2$ нукталар орасидаги масофа

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

бўлади. R^2 фазо текисликни ифодалайди.

Ушбу

$$f: N \rightarrow R^m$$

акслантиришнинг тасвирлари (образлари) дан тузилган

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots, (x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}), n \in N)$$

тўшлам R^m фазода кетма-кетлик дейилади ва у $\{(x^{(n)})\}$ каби белгиланади. Ҳар бир $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ ($n = 1, 2, \dots$) ни кетма-кетлик ҳадлари дейилади.

R^m фазода бирор $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

кетма-кетлик ва $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, ихтиёрый $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ ёки } n \rightarrow \infty \text{ да } x^{(n)} \rightarrow a$$

каби белгиланади.

Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

1-мисол. R^m фазода ушбу

$$\{x^{(n)}\} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$$

кетма-кетликнинг лимити $a = (0, 0, \dots, 0)$ эканини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Шу ε га кўра $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon} \right] + 1$ ни

топамиз. Унда $\forall n > n_0$ учун

$$\begin{aligned} \rho(x^{(n)}, a) &= \rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right), (0, 0, \dots, 0)\right) = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} - 0\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{n^2}} = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon} \right] + 1} < \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon.$$

Таърифга кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) = (0, 0, \dots, 0) = a$$

бўлади.

2-мисол. R^2 фазода ушбу

$$\{x^{(n)}\} = \{(-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}\}$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва у $a = (a_1, a_2)$ га тенг бўлсин. Унда лимит таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$, жумладан $\varepsilon = 1$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики $\forall n > n_0$ да

$$\begin{aligned} \rho((1, 1), (a_1, a_2)) &< \varepsilon, \\ \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) &< \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Бу муносабатлар ушбу

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} = \rho((-1, -1), (1, 1)) &\leq \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) + \\ &+ \rho((a_1, a_2), (1, 1)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2 \quad (\varepsilon = 1) \end{aligned}$$

зиддиятга олиб келади. Бунга сабаб берилган кетма-кетликни лимитга эга деб қарашдан иборатдир. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

1-теорема. R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ га интилиши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

учун бир йўла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$

$$\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m$$

бўлиши зарур ва етарли. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2 \\ \dots\dots\dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{cases}$$

Бу теорема R^m фазода кетма-кетликнинг лимити сонли кетма-кетликнинг лимитига келишини ифодалайди.

3-мисол. R^2 фазода ушбу

$$x^{(n)} = \left\{ n(\sqrt[n]{5} - 1), \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \right\}$$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Бу кетма-кетлик координаталаридан ташкил топган кетма-кетлик сонлар кетма-кетлиги бўлиб, улар қуйидаги-ча бўлади:

$$x_1^{(n)} = n(\sqrt[n]{5} - 1), \quad x_2^{(n)} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n.$$

Равшанки, бу кетма-кетликлар учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{5} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 5,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

бўлади. 1-теоремадан фойдаланиб берилган кетма-кетликнинг лимити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt[n]{5} - 1, \left(\frac{n+2}{n}\right)^n) = (\ln 5, e^2)$$

бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

R^2 фазода қуйидаги кетма-кетликларнинг лимити a ($a \in R^2$) эканини исботланг:

$$1. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{10}{n} \right) \right\}, \quad a = (0, 0).$$

$$2. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \right\},$$

$$3. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\frac{3n}{2n-1}, \frac{2-n}{2+n} \right) \right\},$$

$$4. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{\sin n}{n} \right) \right\},$$

$$5. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\frac{1}{n} \cdot \sin \frac{\pi n}{2}, \frac{1}{n} \right) \right\},$$

$$6. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\frac{n}{3^n}, \frac{2}{n} \right) \right\},$$

$$7. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\frac{2^n}{n!}, \frac{n}{2^n} \right) \right\},$$

$$8. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\sqrt[n]{5}, \frac{\log_5 n}{n} \right) \right\},$$

$$9. \{x^{(n)}\} = \left\{ \left(\sqrt[n]{n}, \frac{n^3}{3^n} \right) \right\},$$

R^2 фазода қуйидаги кетма-кетликларнинг
ТОПИНИ:

$$10. \{x^{(n)}\} = \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^5, \frac{n^3+27}{n^4-15} \right)$$

$$11. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}, \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n} \right)$$

$$12. \{x^{(n)}\} = \left(\sqrt[3n]{8}, \sqrt[2n]{0,5} \right)$$

$$13. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{\sqrt[n]{8} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}, 4^{\frac{n+2}{n+1}} \right)$$

$$14. \{x^{(n)}\} = \left((1+11^n)^{\frac{1}{n+2}}, a^{\frac{1}{n+p}} \right), a > 0, p > 0.$$

$$15. \{x^{(n)}\} = \left(\sqrt[n]{n^2}, \sqrt[n^2]{n} \right)$$

$$16. \{x^{(n)}\} = \left(\sqrt[n]{3n-2}, \sqrt[n]{n^3+3n} \right)$$

$$17. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{\log_5(n^2+1)}{n}, \frac{n - \lg n}{\log_2(4^n+1)} \right)$$

$$18. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{(-2)^n}{(n+2)!}, \frac{1}{(0,3)^n n!} \right)$$

$$19. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{n \cdot 3^n + 1}{n! + 1}, \frac{4^n + n^2 \cdot 2^n - 1}{n^4 + (n!)^2} \right)$$

$$20. \{x^{(n)}\} = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, \sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} \right).$$

2-§. Кўп ўзгарувчилик функция ва унинг лимити

1°. Кўп ўзгарувчилик функция тушунчаси. R^m фазода бирор M тўпламини қарайлик: $M \subset R^m$.

2-таъриф. Агар M тўпландаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон $y (y \in R)$ мос қўйилган бўлса, M тўпланда кўп ўзгарувчилик (m та ўзгарувчилик) функция берилган дейилади ва уни

$$f: (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y \text{ ёки } y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

каби белгиланади. Бунда M — функциянинг аниқланиш тўплами, x_1, x_2, \dots, x_m — функция аргументлари, y эса x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг функцияси дейилади.

Масалан, $f: R^m \rightarrow R$ — фазодаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтага шу нуқта координаталари квадратларининг йиғиндисини мос қўювчи қоида, яъни

$$f: x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

бўлсин. Бу ҳолда $y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг аниқланиш тўплами $M = R^m$ бўлади.

R^{m+1} фазонинг нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m, f(x_1, x_2, \dots, x_m))\}$$

тўпланда $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция графиги дейилади.

Масалан, икки ўзгарувчилик

$$z = x \cdot y, \quad z = x^2 + y^2$$

функцияларнинг графиги R^3 фазода гиперболоик ҳамда айланма параболоидлар бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$z = \arcsin(x + y)$$

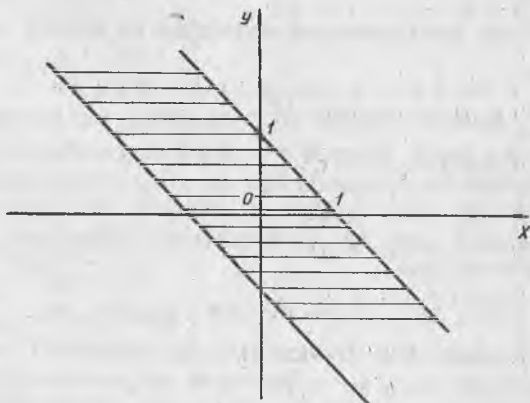
функциянинг аниқланиш тўпланини топинг.

Равшанки, x ва y аргументларнинг қийматларига кўра z нинг маънога эга бўлиши учун, x ва y лар ушбу

$$-1 \leq x + y \leq 1$$

муносабатда бўлиши лозим. Бу тенгсизликларни текширишнинг $x + y + 1 = 0$ ва $x + y - 1 = 0$ тўғри чизиқлар

орасидаги нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради. Берилган функциянинг аниқланиш тўплами 1-чизда тасвирланган



1-чизда.

5-мисол. Ушбу

$$z = \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)(\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y)}$$

функциянинг аниқланиш тўпламини топинг. Бу функция x ва y ларнинг

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0$$

бўладиган қийматларидагина аниқланган. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\sin^2 \pi x = 0 \Rightarrow x = p \quad (p \text{ — бутун сон}),$$

$$\sin^2 \pi y = 0 \Rightarrow y = q \quad (q \text{ — бутун сон}).$$

Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш тўплами

$$M = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш тўпламларини топинг:

$$21. f(x, y) = \frac{1}{x+y}.$$

22. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$.
23. $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
24. $f(x, y) = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$.
25. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
26. $f(x, y) = \arccos \frac{x^2 + y^2}{9}$.
27. $f(x, y) = \sqrt{y} \sin x$.
28. $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.
29. $f(x, y) = \ln(x + y)$.
30. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + x^2 y^2}$.
31. $f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$.
32. $f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right)$.
33. $f(x, y) = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y}$.
34. $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.
35. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1 - y^2}$.
36. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.
37. $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.
38. $f(x, y) = \ln(-x - y)$.
39. $f(x, y) = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} - 9}$.
40. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.
41. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \cdot (4 - x^2 - y^2)$.
42. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$.

2°. Каррали лимит. R^m фазода бирор $x^\circ = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктани ҳамда $\varepsilon > 0$ сонни олайлик. Ушбу

$$U_\varepsilon(x^0) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \rho((x_1, x_2, \dots, x_m), (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)) < \varepsilon\}$$

тўплам x^0 нуқтанинг атрофи дейилади.

Агар x^0 нуқтанинг ихтиёрий атрофи $U_\varepsilon(x^0)$ да ($\forall \varepsilon > 0$) M ($M \subset R^m$) тўпламнинг x^0 нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, x^0 нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.

Фараз қилайлик, R^m фазода M тўплам берилган бўлиб, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта ($a \in R^m$) унинг лимит нуқтаси бўлсин. Шу тўпламда $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x)$ функция аниқланган.

3-таъриф (Гейне таърифи). Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \neq a, n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги лимити деб аталади.

4-таъриф. (Коши таърифи. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x \in M$ нуқталарда

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги лимити деб аталади.

Функция лимитини

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ ёки } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

каби белгиланади.

Одатда функциянинг бу лимитини унинг каррали лимити деб ҳам юритилади.

Бир ўзгарувчили функцияларга ўхшаш, бу ҳолда ҳам 3— ва 4— таърифлар ўзаро эквивалентдир.

6-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{агар } x^2 + y^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2 + y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (яъни $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$) даги лимитининг нолга тенг эканини кўрсатинг.

а) Гейне таърифига кўра: $(0,0)$ нуктага интилувчи ихтиёрый (x_n, y_n) кетма-кетликни оламиз.

$$(x_n, y_n) \rightarrow (0,0) \quad (\text{яъни } x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0) \\ ((x_n, y_n) \neq (0,0), n = 1, 2, \dots)$$

Унда

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}$$

булади. Агар

$$\frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \sqrt{\frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}} \cdot \sqrt{x_n y_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_n y_n}$$

эканини эътиборга олсак, $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ да

$$\lim f(x_n, y_n) = 0$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

б) Коши таърифига кўра: $\forall \varepsilon$ сонга кўра $\delta = 2\varepsilon$ деб олинса. У холда $0 < \rho((x, y), (0,0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча, (x, y) нуктларда

$$|f(x, y) - 0| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \\ = \frac{1}{2} \rho((x, y), (0,0)) < \frac{1}{2} \delta = \varepsilon.$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

эканини билдиради.

7-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ даги лимити нолга тенг эканини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб олинса, унда $0 < \rho((x, y), (0, 0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) нукталарда

$$|f(x, y) - 0| = |x + y \sin \frac{1}{x}| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < < 2\delta = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса Коши таърифида кўра $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ да берилган функциянинг лимити 0 эканини билдиради:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

8- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

функциянинг $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ даги лимити ноль бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг лимити ноль бўлишини Коши таърифидан фойдаланиб кўрсатамиз. Бунинг учун $\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра шундай $\delta > 0$ сон мавжудлигини топиш керакки,

$$0 < \rho((x, y), (0, 0)) < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) ларда

$$|f(x, y) - 0| = |(x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| < \varepsilon$$

бўлсин. Равшанки,

$$\rho((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Энди

$$\rho((x, y), (0, 0)) < \delta$$

ва

$$|x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

тенгсизликларни эътиборга олиб,

$$|f(x, y) - 0| = \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| + |y| \leq \\ \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\rho((x, y), (0, 0)) < 2\delta = \varepsilon$$

дейилса, унда $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ бўлишини топамиз. Шундай қилиб,

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ сон топиладики, $0 < \rho((x, y), (0, 0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) ларда

$$|f(x, y) - 0| = \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлди. Бу эса

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[(x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right] = 0$$

жаканини билдиради.

5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $\rho((x, y), (0, 0)) > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) нуқталарда

$$|f(x, y) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x, y)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ даги лимити дейилади ва

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = b$$

каби белгиланади.

9-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$$

функциянинг $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ даги лимитини топинг.

Аввало берилган функцияни

$$\frac{x + y + (x^2 + y^2)2}{x^2 + y^2} = 2 + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}$$

каби ёзиб оламиз. Сўнгра

$$\frac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} - 2 = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}$$

тенгликнинг ўнг томонини баҳолаймиз:

$$\left| \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \leq 2 \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Демак,

$$\left| \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - 2 \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Равшанки,

$$\rho((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2+y^2} > \delta \quad (\delta > 0)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) нуқталарда

$$|f(x, y) - 2| = \left| \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - 2 \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{2}{\delta}$$

бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, унга кўра $\delta = \frac{2}{\varepsilon}$ деб олинса, унда $\rho((x, y), (0, 0)) > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) нуқталарда

$$\left| \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - 2 \right| < \frac{2}{\delta} = \varepsilon$$

бўлади. Юқорида келтирилган 5- таърифга кўра

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2$$

эканлиги келиб чиқади.

10- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

функциянинг $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ да лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

$(0, 0)$ нуқтага интилувчи 2 та —

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0).$$

$$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0).$$

кетма-кетлик оламиз. Унда функция қийматларидан
 иборат кетма-кетликлар

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2} = 1,$$

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4n^2 + 1}$$

бўлиб,

$$\lim f(x_n, y_n) = 1,$$

$$\lim f(x'_n, y'_n) = 0$$

бўлади. Бу эса $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ да берилган функциянинг
 лимити мавжуд эмаслигини билдиради.

11-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 3, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x \rightarrow 0, y \rightarrow 3$ даги лимитини ҳисобланг.

Агар $x^2 \cdot y = t$ дейилса, унда $x \rightarrow 0, y \rightarrow 3$ да $t \rightarrow 0$. Натижа-
 да

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot y = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin t}{t} y = 3$$

бўлади.

1-э с л а т м а. Айрим ҳолларда $x = a + r \cos \varphi, y = b +$
 $+ r \sin \varphi$ алмаштириш

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$$

қаррала лимитни топишни енгиллаштиради. Бунда

$$f(x, y) = f(a + r \cos \varphi, b + r \sin \varphi) = F(r, \varphi)$$

бўлиб,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = c \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} F(r, \varphi) = c$$

бўлади.

12- мисол. Ушбу

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$$

лимитни ҳисобланг.

Аввало

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{2 \sin^2 \frac{(x^2 + y^2)}{2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{x^2 + y^2}{2} \cdot x^2y^2}{\sin^2 \frac{x^2 + y^2}{2}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[\frac{\frac{x^2 + y^2}{2}}{\sin \frac{x^2 + y^2}{2}} \right]^2 \cdot \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2} = 2 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[\frac{\frac{x^2 + y^2}{2}}{\sin \frac{x^2 + y^2}{2}} \right]^2 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

эканини топамиз. Сўнгра $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)} = 0.$$

13- мисол. Ушбу

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$$

лимитни ҳисобланг.

Лимити ҳисобланадиган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$(1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}} = \left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2}{x^2 + xy} \cdot xy} = \left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x + y}}$$

Сўнгра $t = xy$ алмаштиришни бажарамиз. Равшанки, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 2$ да $t \rightarrow 0$. Унда, бир томондан,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

бийинчи томондан,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2y}{x+y} = 2$$

булишини ҳисобга олиб, берилган лимит

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}} = e^2$$

га тенг бўлишини топамиз.

14- м и с о л. Ушбу

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

лимит мавжудми?

Лйтайлик, (x, y) нуқта $(0, 0)$ нуқтага текисликдаги $y = kx$ тўғри чизиқ бўйича интилсин. У ҳолда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

бўлади. Демак, (x, y) нуқта турли тўғри чизиқлар бўйича $(0, 0)$ га интилганда лимитнинг қиймати турлича бўлади. Бу ҳол каралаётган лимитнинг мавжуд эмаслигини билдиради.

15- м и с о л. Ушбу

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$$

лимитни ҳисобланг.

Ушбу

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

алмаштиришни бажарамиз. Равшанки, $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ да $r \rightarrow \infty$. Натижада

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r \cos \varphi + 2r \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi - 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\cos \varphi + 2 \sin \varphi}{r(\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi + 2 \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi + 2 \sin \varphi}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}$$

бўлади. Агар $[0, 2\pi]$ да

$$\frac{\cos \varphi + 2 \sin \varphi}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}$$

функциянинг чегараланганлигини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi + 2 \sin \varphi}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = 0$$

бўлишини топамиз.

3°. Такрорий лимит. Кўп ўзгарувчилик функцияларда қаррали лимит тушунчаси билан бир қаторда такрорий лимит тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда ($M \subset R^m$) берилган бўлиб, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта шу M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ лар тайинланган бўлиб $x_i \rightarrow a_i$ да берилган функциянинг лимити (агар у мавжуд бўлса) $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади:

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

φ функцияларда ҳам шундай мулоҳаза юритиб ушбу

$$\lim_{x_m \rightarrow a_m} \lim_{x_{m-1} \rightarrow a_{m-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳосил қиламиз. Одатда бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг такрорий лимити дейилади.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аргументлари x_1, x_2, \dots, x_m лар мос равишда a_1, a_2, \dots, a_m ларга турли тартибда интилганда функциянинг турли такрорий лимитлари ҳосил бўлади.

16- м и с о л . Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{агар } x^2+y^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2+y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуқтадаги такрорий лимитларини топинг.

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Бу тенгликдан

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Шунингдек,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари бир бирига тенг бўлиб, у нолга тенг:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Бу функциянинг $(0, 0)$ нуқтада қаррали лимитининг 0 га тенг эканини 6- мисолда кўрган эдик.

17- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x-y}{x+3y}, & \text{агар } x+3y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x+3y=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуқтадаги такрорий лимитларини топиш. Бу функциянинг такрорий лимитлари қуйидагича бўлади:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-y}{x+3y} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-y}{x+3y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x-y}{x+3y} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитларидан бири $-\frac{1}{3}$ га, иккинчиси эса 2 га тенг. Бунда равшанки,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-y}{x+3y} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x-y}{x+3y}.$$

Шуни айтиш керакки, қаралаётган функциянинг $(0, 0)$ нуқтадаги қаррали лимити мавжуд эмас.

Ҳақиқатан ҳам, $(0, 0)$ нуқтага интилувчи

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0),$$

$$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$$

кетма-кетликлар учун мос равишда

$$f(x_n, y_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4},$$

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{2 \cdot \frac{5}{n} - \frac{4}{n}}{\frac{5}{n} + 3 \cdot \frac{4}{n}} = \frac{6}{17} \rightarrow \frac{6}{17}$$

бўлади ва бу берилган функциянинг каррали лимитининг мавжуд эмаслигини билдиради.

18- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктадаги такрорий лимитларини топинг.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = 0.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари бири-бирига тенг бўлиб, улар нолга тенг:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = 0.$$

Бу функциянинг $(0, 0)$ нуктада каррали лимитининг мавжуд эмаслиги 10- мисолда кўрсатилган эди.

19- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктада такрорий лимитлари мавжудми?

Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} (x + y \sin \frac{1}{x}) = x$$

бўлади. Бирок $x \rightarrow 0$ да $\sin \frac{1}{x}$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаганлиги сабабли

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right)$$

мавжуд эмас.

Демак, берилган функциянинг битта такрорий лимити мавжуд бўлиб, иккинчиси эса мавжуд эмас.

Бу функциянинг $(0, 0)$ нуктада қаррали лимитининг мавжудлиги (унинг нолга тенглиги) 7- мисолда кўрсатилган.

20- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктада такрорий лимитлари мавжудми?

$x \rightarrow 0$ да бу функциянинг лимити мавжуд эмас, чунки

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0, \quad x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0$$

кетма-кетликлар учун уларга мос равишда ҳосил бўлган кетма-кетликлар лимитлари

$$f(x_n, y) = f\left(\frac{1}{n\pi}, y\right) = \left(\frac{1}{n\pi} + y\right) \sin n\pi \sin \frac{1}{y} = 0 \rightarrow 0$$

$$f(x'_n, y) = f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}, y\right) = \left(\frac{2}{(4n+1)\pi} + y\right) \sin \frac{1}{y} \rightarrow y \sin \frac{1}{y} \quad (y \neq 0),$$

турлича бўлади. Бинобарин,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

лимит мавжуд эмас. Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

лимитнинг мавжуд эмаслиги кўрсатилади. Демак, берилган функциянинг иккала такрорий лимити ҳам мавжуд эмас.

Бу функциянинг $(0, 0)$ нуктада қаррали лимитининг мавжудлигини (ва унинг нолга тенглигини) 8- мисолда кўрган эдик.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянинг қаррали ҳамда такрорий лимитлари орасидаги муносабатлар турлича бўлар экан:

$$а) \lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y), \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y), \lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y)$$

лимитларнинг ҳар бири мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y),$$

б) $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y), \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y)$ лимитлар мавжуд ва $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y) \neq \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y)$ бўлиб, $\lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y)$ лимит

мавжуд эмас,

в) $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y), \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y)$ лимитлар мавжуд ва $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y)$ бўлиб, $\lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y)$ лимит мав-

жуд,

г) $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y), \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y)$ лимитларнинг бири мавжуд, иккинчиси мавжуд эмас, аммо $\lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y)$ лимит

мавжуд.

д) $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y), \lim_{y \rightarrow a_2} \lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y)$ лимитларнинг иккала-си ҳам мавжуд эмас, аммо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} f(x, y)$$

лимит мавжуд.

2-теорема. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a_1, |y - y_0| < a_2\}$ тўпламда берилган бўлсин.

Агар: 1) $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг қаррали лимити мавжуд:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b;$$

1 ҳар бир тайинланган x да (ҳар бир тайинланган y да)

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y))$$

лимит мавжуд бўлса, y ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \quad (\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = b \quad (\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b)$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги қаррали лимитларни ҳисобланг:

$$43. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}, \quad (a \neq 0).$$

$$44. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}$$

$$45. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$$

$$46. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

$$47. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$$

$$48. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2}$$

$$49. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$50. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy)^{2(x^2 + y^2)}$$

$$51. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{e^{x^4 + y^4} - x^4 - y^4}$$

52. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$.
53. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$.
54. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^4 y^2}}{x^2 + y^2}$.
55. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$.
56. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$.
57. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$.
58. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x + y) e^{-(x^2 + y^2)}$.
59. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{|x^3| + |y|^3}$.
60. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{|x|}$.
61. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) x^2 y^2$.
62. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Қуйндаги қаррали лимитларнинг мавжуд эмаслигини исботланг:

63. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x + y}$.
64. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y}{x + y}$.
65. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

$$66. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$67. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

$$68. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

$$69. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+y)}{y}$$

$$70. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

71. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функциянинг $(0, 0)$ нуқтада қаррали лимитининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

72. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right)^{x+y}, & \text{агар } x+y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x+y = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функциянинг $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ да қаррали лимитининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Қуйида берилган $f(x, y)$ функцияларнинг такрорий

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

лимитларини ҳисобланг.

$$73. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, & \text{агар } x \neq -y \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = -y \text{ бўлса,} \\ x_0 = 0, y_0 = 0. \end{cases}$$

$$74. f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}; \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$75. f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{2x+3y}; \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$76. f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}; \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$77. f(x, y) = \frac{\sin|x| - \sin|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$78. f(x, y) = \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 2y}{6x + 3y}; \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$79. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}; \quad x_0 = \infty, y_0 = \infty.$$

$$80. f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}; \quad x_0 = \infty, y_0 = 0.$$

$$81. f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + 3y}; \quad x_0 = \infty, y_0 = \infty.$$

$$82. f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}; \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$83. f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}; \quad x_0 = 0, y_0 = \infty.$$

$$84. f(x, y) = \log_x(x + y); \quad x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$85. f(x, y) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}; \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

86.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{|x| - |y|}, & \text{агар } |x| \neq |y| \text{ б\u00f9лса,} \\ 0, & \text{агар } |x| = |y| \text{ б\u00f9лса.} \\ x_0 = 0, y_0 = 0. \end{cases}$$

3-§. К\u00d9П \u00d9ЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ \u00d9ЗЛУКСИЗЛИГИ

1°. Функция узлуксизлиги таърифлари. R^m фазодаги M т\u00f9пламда $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция берилган б\u00f9либ, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нукта ($a \in M$) шу т\u00f9пламнинг лимит нуктаси б\u00f9лсин.

б-таъриф. Агар

$$x \rightarrow a \text{ да, яъни } x_1 \rightarrow a_1$$

.....

$$x_m \rightarrow a_m$$

да $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ функциянинг лимити мавжуд б\u00f9либ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

яъни

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_1, \dots, x_m) = f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lim_{x_m \rightarrow a_m}$$

10-таъриф. Агар $f(x)$ функция M тўпламининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу тўпланда узлуксиз дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, юқорида келтирилган таърифлар кўп ўзгарувчилик функциянинг барча ўзгарувчилари бўйича узлуксизлигини ифодалайди.

21-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг R^2 да узлуксиз эканини кўрсатинг. Бу функциянинг ихтиёрий (x_0, y_0) ($(x_0, y_0) \neq (0, 0)$) нуқтада узлуксиз бўлиши,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x_0^4 + y_0^4}{x_0^2 + y_0^2}$$

муносабатдан келиб чиқади.

Энди қаралаётган функциянинг $(0, 0)$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. Агар ўзгарувчиларни $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ дейилса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) = 0 \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0).$$

Бу эса $f(x, y)$ функциянинг $(0, 0)$ нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

22-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x + y$$

функциянинг R^2 да узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни оламиз. Унга кўра $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ дейилса, у

ҳолда $\rho((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x, y) \in R^2$ нуқталарда

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x + y - (x_0 + y_0)| \leq \\ \leq |x - x_0| + |y - y_0| \leq 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < 2\delta = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса Коши таърифига кўра $f(x, y)$ функциянинг $\nabla(x_0, y_0)$ нуктада узлуксиз бўлишини билдиради.

23- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{2x + 3}{x^2 + y^2 + 1}$$

функциянинг ихтиёрий $(x_0, y_0) \in R^2$ нуктада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

(x_0, y_0) нуктага $\Delta x, \Delta y$ орттормалар бериб, функциянинг тўлиқ орттормасини топамиз:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{2(x_0 + \Delta x) + 3}{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 1} - \frac{2x_0 + 3}{x_0^2 + y_0^2 + 1} =$$

$$= \frac{[2(x_0 + \Delta x) + 3](x_0^2 + y_0^2 + 1) - (2x_0 + 3)[(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 1]}{[(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 1](x_0^2 + y_0^2 + 1)}$$

Бу тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. 9-таърифга кўра берилган функция (x_0, y_0) нуктада узлуксиз бўлади.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпланда берилган бўлсин. Бу функциянинг бирор $x_k (k=1, 2, \dots, m)$ аргументидан бошқа барча аргументларини тайинлаб, бу x_k аргументга Δx_k ортторма берамиз. Унда функция ушбу

$$\Delta_{x_k} f = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

($k=1, 2, \dots, m$) хусусий орттормага эга бўлади.

11- т а ъ р и ф. Агар $\Delta x_k \rightarrow 0$ да функциянинг хусусий орттормаси $\Delta_{x_k} f$ ҳам нолга интилса, яъни

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_{x_k} f = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция (x_1, x_2, \dots, x_m) нуқтада x_k ўзгарувчиси бўйича узлуксиз дейилади. Одатда функциянинг бундай узлуксизлигини унинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги дейилади.

3-теорема. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада узлуксиз (барча ўзгарувчилари бўйича бир йўла узлуксиз) бўлса, функция шу нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлади.

2-эслатма. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бирор нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишидан унинг шу нуқтада узлуксиз (бир йўла узлуксиз) бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

24-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{агар } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2 + y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз, иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Равшанки,

$y \neq 0$ ва $x \rightarrow x_0 \neq 0$ бўлса

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x_0 y}{x_0^2 + y^2} = f(x_0, y).$$

$y = 0$ ва $x \rightarrow x_0 \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 = f(x_0, 0);$$

$y = 0$ ва $x \rightarrow 0$ бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$$

бўлади.

Демак,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y).$$

Бу берилган $f(x, y)$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишини кўрсатади. Худди шунга ўхшаш қаралаётган функциянинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлиши кўрсатилади.

Берилган функция $(0, 0)$ нуқтада узлуксиз (иккала

ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз) бўлмайди. Чунки $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ да

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

мавжуд эмас. Уни 14- мисолда кўрсатилган эди.

2°. Функциянинг узилиши.

12- таъриф. Агар

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \neq f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

бўлса, ёки

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \infty$$

бўлса, ёки $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг limiti мавжуд бўлмаса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция (a_1, a_2, \dots, a_m) нуктада узилишга эга дейилади.

25- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктада узилишга эга бўлишини кўрсатинг.

Равшанки,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0.$$

Бу ҳолда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 \neq f(0, 0) = 1$$

бўлади. Юқоридаги таърифга кўра берилган функция $(0, 0)$ нуктада узилишга эга бўлади.

26- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктада узилишга эга бўлишини аниқланг.

Равшанки, берилган функция R^2 тўпламда аниқланган бўлиб,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$$

бўлади. Таърифга кўра берилган функция $(0,0)$ нуктада узилишга эга.

27- м и с о л. Ушбу

$$f(x,y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$$

функциянинг узилиш нукталарини топинг.

Бу функция R^2 фазонинг

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ \sin \pi y = 0 \end{cases}$$

системани қаноатлантирувчи (x, y) нукталарида узилишга эга бўлади. Кейинги системанинг ечими

$$\{(x, y): x = n - \text{бутун сон}, y = m - \text{бутун сон}\}$$

тўпламнинг нукталаридан иборат. Демак, берилган функциянинг узилиш нукталари чексиз кўп бўлиб, улар

$$\{(n, m): n \in Z, m \in Z\}$$

тўпламни ташкил этади.

28- м и с о л. Ушбу

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y)(x + 3y)}$$

функциянинг узилиш нукталарини топинг.

Бу функция R^2 фазонинг

$$x^2 - y = 0, \text{ яъни } y = x^2$$

ҳамда

$$x + 3y = 0, \text{ яъни } y = -\frac{1}{3}x$$

тенгликларни қаноатлантирувчи нукталарида узилишга эга бўлади. Демак, берилган функциянинг узилиш

нукталари тўплами $y = x^2$ парабола ҳамда $y = -\frac{1}{3}x$

тўғри чизиқлардан иборат.

3". Функциянинг текис узлуксизлиги.
 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда ($M \subset R^m$) берилган бўлсин.

13- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, M тўпламнинг
 $\rho((x'_1, x'_2, \dots, x'_m), (x''_1, \dots, x''_m)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in M$, $(x''_1, \dots, x''_m) \in M$ нуқталарида

$$|f(x''_1, x''_2, \dots, x''_m) - f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламда текис узлуксиз дейилади.

29- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

функциянинг $M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ тўпламда текис узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра олинadиган $\delta > 0$ сонни $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ бўлсин дейлик. У ҳолда

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta.$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x_1, y_1) \in M$, $\forall (x_2, y_2) \in M$ нуқталар учун

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &= |x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2)| = \\ &= |(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)| \leq \\ &\leq 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \\ &+ 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 4\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Таърифга кўра берилган функция M тўпламда текис узлуксиз бўлади.

30- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

функциянинг $M = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ тўпламда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Бу функция M тўпламда узлуксиз. Бироқ у қаралаётган M тўпламда текис узлуксизлик таърифидagi шартни

базармайди. Бошқача айтганда $\forall \delta > 0$ учун шундай $\varepsilon > 0$ ва $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)$ нуқталар топиладики,

$$\rho((x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)) < \delta \Rightarrow |f(x'_1, y'_1) - f(x'_2, y'_2)| > \varepsilon$$

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \delta > 0$ учун $\varepsilon = 1$ деб

$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in M, (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) \in M$ нуқталарни олсак,

$n > n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{2} \delta} \right]$ бўлганда

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2} n} < \delta$$

ҳамда

$$\left| f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \right| = 3n^2 > 1 = \varepsilon$$

бўлади. Демак, қаралаётган функция M тўпلامда текис узлуксиз эмас.

4-теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпلامда ($M \subset R^m$) берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпلامда текис узлуксиз бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг, узилиш нуқталарини топинг:

$$87. f(x, y) = \frac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$88. f(x, y) = \frac{3y}{2x-y}$$

$$89. f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{агар } x^2+y^2 \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2+y^2 > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$90. f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$91. f(x, y) = \frac{2x-3}{x^2+y^2-4}$$

$$92. f(x, y) = \frac{x-y^2}{x+y^2}$$

$$93. f(x, y) = \frac{x-y}{x^3-y^3}.$$

$$94. f(x, y) = \ln(9-x^2-y^2).$$

$$95. f(x, y) = \frac{3}{x^2+y^2}.$$

$$96. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$97. f(x, y) = \frac{xy}{x+y}.$$

$$98. f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}.$$

$$99. f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}.$$

$$100. f(x, y) = \cos \frac{1}{x^2+y^2-9}.$$

101. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{агар } y \geq x^4 \text{ ёки } y \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } 0 < y < x^4 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуктада узилишга эга эканини исботланг.

102. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & \text{агар } y=0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{4-y^2}, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \neq 0, y \neq 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуктада узлуксиз бўлишини исботланг.

103. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{(xy)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{агар } x^2+y^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2+y^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуктада узлуксиз бўлишини исботланг.

104. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, & \text{агар } x + y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x + y = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктада узлуксиз бўлишини исботланг.

105. Агар $f(x, y)$ функция ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз бўлиб, бирор ўзгарувчиси бўйича монотон бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функциянинг иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз бўлишини исботланг.

Куйидаги функцияларнинг M тўпламда текис узлуксиз бўлишини исботланг:

106. $f(x, y) = x^3 - y^3$; $M = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

107. $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$; $M = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x^2 + y^2 < 25\}$.

108. $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{y}$; $M = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

109. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $M = R^2$.

Куйидаги функцияларнинг M тўпламда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг:

110. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2}$; $M = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

111. $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$; $M = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x, 0 < y < 1\}$.

112. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$; $M = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

XIII боб

ҚЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1-§. ҚЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАРИ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1°. Функциянинг хусусий ҳосилалари ва дифференциалланувчанлиги.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик M тўпламда ($M \subset R^m$) берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин. Бу функциянинг

x_k ($k=1,2,\dots, m$) координатасига шундай Δx_k ($k=1,2,\dots, m$) орттирма берайликки, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин. Унда функция

$$\Delta x_k f = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

хусусий орттирмага эга бўлади.

1-таъриф. Агар $\Delta x_k \rightarrow 0$ да ушбу $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k} =$

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_k} \text{ лимит мавжуд ва чекли}$$

бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктадаги x_k ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва

$$\frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_k}, f'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

белгиларнинг бири билан белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k} \quad (k=1,2,\dots, m).$$

Келтирилган таърифдан, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилалари бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласи каби эканлиги кўринади. Бинобарин, кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблашда бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласини ҳисоблашдаги маълум қонда ва жадваллардан тўлиқ фойдаланиш мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = e^{xy}$$

функциянинг (1.1) нуктадаги f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1,1)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(1, 1 + \Delta y) - f(1,1)}{\Delta y} \text{ бўлиб,}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1,1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{1 + \Delta x} - e}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e$$

га тенг. Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(1,1+\Delta y) - f(1,1)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{1+\Delta y} - e}{\Delta y} = e$$

бўлади.

Демак,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = e, \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = e.$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Равшанки, $(x, y) \neq (0,0)$ да

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ҳосила таърифига кўра

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

бўлади. Бирок

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

лимитлар мавжуд бўлганлиги сабабли, қаралаётган функциянинг $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд бўлмайди.

3-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

функциянинг f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Бу функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда y ни ўзгармас, y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда эса x ни ўзгарма деб қараймиз. Унда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y})'_x = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin 2 \frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\ln \operatorname{tg} \frac{x}{y})'_y = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = \frac{-2x}{y^2 \sin 2 \frac{x}{y}}$$

бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Икки ҳолни қарайлик:

1) $(x, y) \neq (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2y(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

бўлади.

2) $(x, y) = (0, 0)$ бўлсин. Бу ҳолда, ҳосила таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x \cdot 0}{\Delta x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta y \cdot 0}{\Delta y^3} = 0.$$

Демак, берилган функция ихтиёрий $(x, y) \in R^2$ нуктада хусусий ҳосилаларга эга.

5-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктада хусусий ҳосилаларини топинг.

Хусусий ҳосилалар таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Демак,

$$f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0.$$

Берилган функция $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлсада, у шу нуқтада узлуксиз бўлмайди. Чунки $(0,0)$ нуқтага интилувчи

$$\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \right\} \quad \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \rightarrow (0,0) \right)$$

кетма-кетликда функция қийматларидан иборат

$$\left\{ f \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \right\}$$

кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \neq f(0,0).$$

Бу эса $f(x, y)$ функциянинг $(0,0)$ нуқтада узилишга эга эканини билдиради.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин. M тўпламда $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуқтани олиб, функциянинг тўла орттирмаси

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

ни қараймиз.

2- таъриф. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги $\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ орттирмасини

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m +$$

$+\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ каби ифодалаш мумкин бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи дейилади (бунда A_1, A_2, \dots, A_m лар $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлмаган ўзгармаслар, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ лар эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$, да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$ ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$ бўлганда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ деб олинади).

Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, функция M тўпламда дифференциалланувчи дейилади.

Юқоридаги (1) муносабатни

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (2)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу ерда:

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}.$$

6-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

функциянинг ихтиёрий $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи эканини кўрсатинг.

Берилган функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги тўла орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) = \\ &= 2x_0 \Delta x + 2y_0 \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2. \end{aligned}$$

Агар $A_1 = 2x_0, A_2 = 2y_0, \alpha_1 = \Delta x, \alpha_2 = \Delta y$ дейилса, унда

$$\Delta f(x_0, y_0) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи эканини билдиради.

7-мисол. Агар $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтада $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилалари мавжуд ва (2) муносабатдаги A_1 ва A_2 лар учун

$$f'_x(x_0, y_0) = A_1, f'_y(x_0, y_0) = A_2$$

бўлишини исботланг.

Шартга кўра $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи. Унда таърифга биноан

$$\Delta f(x_0, y_0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \quad (3)$$

бўлади. Агар бу тенгликда $\Delta x \neq 0, \Delta y = 0$ дейилса унда

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = A_1 \Delta x + \alpha_1 \Delta x$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A_1 + \alpha_1) = A_1$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг (x_0, y_0) нуктада $f'_x(x_0, y_0)$ хусусий ҳосиласи мавжуд ва

$$f'_x(x_0, y_0) = A_1.$$

(3) муносабатда $\Delta x = 0, \Delta y \neq 0$ дейилса, унда

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = A_2 \Delta y + \alpha_2 \Delta y$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (A_2 + \alpha_2) = A_2$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг (x_0, y_0) нуктада $f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосиласи мавжуд ва

$$f'_y(x_0, y_0) = A_2.$$

8- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлмаслиги кўрсатилсин.

Берилган функциянинг $(0, 0)$ нуктадаги орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(0, 0) &= f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \end{aligned}$$

Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган функция $(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин дейлик. Унда

$$\Delta f(0, 0) = f'_x(0, 0) \Delta x + f'_y(0, 0) \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

бўлиб, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$.

Агар

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак,

$$\Delta f(0,0) = \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$$

келиб чиқади. Натижада ушбу

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликдан $\Delta x = \Delta y$ бўлганда

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} = \Delta x(\alpha_1 + \alpha_2),$$

яъни

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$ бўлишига зиддир. Зиддиятнинг келиб чиқишига берилган функциянинг $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин дейилишидир. Демак, қаралаётган функция $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмас.

1-э с л а т м а . $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлишидан унинг шу нуктада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди (қаралсин, 8-мисол).

9-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

функциянинг $(0,0)$ нуктада хусусий ҳосилаларга эга бўлишини ва шу нуктада уни дифференциалланувчи эмаслигини кўрсатинг.

Таърифдан фойдаланиб берилган функциянинг $(0,0)$ нуктадаги хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|}}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y(0,0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|}}{\Delta y} = 0. \end{aligned}$$

Демак,

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0.$$

Фараз қилайлик функция $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \\ &= \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|} \end{aligned}$$

бўлиб, бу орттирмани ушбу

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho) \\ (\rho &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

кўринишда ифодаланади.

Қуйидаги

$$\frac{\Delta f(0,0) - (A_1\Delta x + A_2\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

муносабат ихтиёрий $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ ларда нолга интилмаслигини кўриш қийин эмас. Масалан, $\Delta x = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$

$\Delta y = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ бўлганда

$$\frac{|\Delta x \Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|} \neq o(\rho).$$

Айтилганлардан, берилган функциянинг $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмаслиги келиб чиқади.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлиб, x_1, x_2, \dots, x_m ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида t_1, t_2, \dots, t_k ўзгарувчиларнинг $T \subset R^k$ тўпلامда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\
 x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Бунда $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ бўлсин. Натижада

$$f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = F(t_1, \dots, t_k)$$

мураккаб функция ҳосил бўлади.

1-теорема. Агар (4) функцияларнинг ҳар бири (t_1^0, \dots, t_k^0) нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб функция ҳам $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\
 \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

бўлади.

10- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг, бу ерда $x = t \cos t_2$, $y = t \sin t_2$.

Юқорида келтирилган (5) формулалардан фойдаланиб, берилган мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1} = (x^2 - y^2)'_x \cdot (t_1 \cos t_2)'_{t_1} + \\
 &+ (x^2 - y^2)'_y \cdot (t_1 \sin t_2)'_{t_1} = 2x \cos t_2 - 2y \sin t_2 = 2t_1 \cos t_2 \times \\
 &\times \cos t_2 - 2t_1 \sin t_2 \sin t_2 = 2t_1 \cos 2t_2, \quad \frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2} = (x^2 - y^2)'_x \cdot (t_1 \cos t_2)'_{t_2} + \\
& + (x^2 - y^2)'_y \cdot (t_1 \sin t_2)'_{t_2} = 2x(-t_1 \sin t_2) - 2y \cdot t_1 \cos t_2 = \\
& = -2t_1^2 \sin t_2 \cos t_2 - 2t_1^2 \sin t_2 \cos t_2 = -2t_1^2 \sin 2t_2.
\end{aligned}$$

Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = 2t_1 \cos 2t_2, \quad \frac{\partial f}{\partial t_2} = -2t_1^2 \sin 2t_2.$$

11-мисол. Ушбу

$$F = f(x^2 y, x^y)$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Берилган функцияни

$$F = f(u, v), \text{ бу ерда } u = x^2 y, v = x^y$$

деб қараш мумкин. Унда (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot 2xy + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} x^2 + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot x^y \ln x$$

2°. Йўналиш бўйича ҳосила. $f(x, y)$ функция очик M тўпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлсин. (x_0, y_0) тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси бўлиб, l бу нуқтадан ўтувчи бирор тўғри чизик бўлсин. Бу тўғри чизикда (x_0, y_0) нуқтага нисбатан икки йўналишдан бирини манфий йўналиш деб қабул қилайлик. l чизикнинг мусбат йўналиши билан, мос равишда, абсцисса ҳамда ордината ўқларининг мусбат йўналиши орасидаги бурчаклар α ва β бўлсин.

3-таъриф. l чизикдаги (x, y) нуқта l чизик бўйлаб (x_0, y_0) нуқтага интилганда ушбу

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\rho((x_0, y_0), (x, y))}$$

нисбатнинг limiti мавжуд бўлса, бу лимит $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласи дейилади ва

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\rho((x_0,y_0), (x,y))}$$

2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуктада ҳар қандай l йўналиши бўйича ҳосиллага эга ва

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta$$

бўлади.

12-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

функциянинг $(1, 1)$ нуктадаги l йўналиш бўйича ҳосиласини топинг, бу ерда l — $(0, 0)$ нуктадан $(1, 1)$ нуктага қараб йўналган биссектрисадан тўғри қарат.

Берилган функция $(1, 1)$ нуктада дифференциалланувчи бўлганлиги аниқ 2-теоремага кўра

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l} = \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} \cos \beta$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2}$$

ва l — биссектриса бўлганлиги сабабли $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Демак,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} = 0.$$

13-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \ln(x + y)$$

функциянинг $(\frac{9}{4}, \frac{9}{2})$ нуктадаги l йўналиш бўйича ҳосиласини топинг, бу ерда l — шу нуктадан ўтувчи абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан тўғри бурчак ташкил этадиган тўғри чизик.

Юқорида келтирилган теоремага кўра

$$\frac{\partial f\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)}{\partial l} = \frac{\partial f\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)}{\partial y} \cos \beta$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{\partial f\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)}{\partial x} = \frac{1}{x+y} \Bigg|_{\substack{x=\frac{9}{4} \\ y=\frac{9}{2}}} = \frac{4}{27},$$

$$\frac{\partial f\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)}{\partial y} = \frac{1}{x+y} \Bigg|_{\substack{x=\frac{9}{4} \\ y=\frac{9}{2}}} = \frac{4}{27}.$$

Демак,

$$\frac{\partial f\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)}{\partial l} = \frac{4}{27} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{4}{27} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{27}.$$

14-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x + |y|$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги координата ўқлари бўйи ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $(0,0)$ нуқтада OX ўқи бўйи ҳосиласи 1 га тенг, OY ўқи бўйича ҳосиласи эса мавжуд эмас.

2-эслатма. Функциянинг дифференциалланувчи бўлмаган нуқтада ҳам йўналиш бўйича ҳосила мавжуд бўлиши мумкин.

15-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада исталган йўналиш бўйи ҳосиласи мавжудлигини кўрсатинг.

Йўналиш бўйича ҳосила таърифидан фойдаланиш топамиз:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\rho((x,y), (0,0))} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial t} = 1.$$

Қаралаётган функция $(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмас, чунки

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho.$$

бўлиб, равшанки, $\rho \rightarrow 0$ да $\rho \neq 0(\rho)$.

3°. Функциянинг дифференциали.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Унда функциянинг шу нуктада орттирмаси учун

$$\begin{aligned} \Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) &= A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + 0(\rho) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m + 0(\rho) \end{aligned}$$

бўлади.

4-таъриф. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция орттирмаси $\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нинг $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга нисбатан чизиқли бош қисми

$$\begin{aligned} A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m \end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктадаги дифференциали дейилади ва df ёки $df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ каби белгиланади.

Демак,

$$df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (6)$$

$$(\Delta x_1 = dx_1, \Delta x_2 = dx_2, \dots, \Delta x_m = dx_m).$$

16-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

функциянинг дифференциалини топинг.

(6) формулага кўра

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

бўлади.

Энди функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot (y + \frac{1}{y}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} (x - \frac{x}{y^2}).$$

Демак,

$$\begin{aligned} df &= \frac{y + \frac{1}{y}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} dx + \frac{x - \frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} dy = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left[(y + \frac{1}{y}) dx + (x - \frac{x}{y^2}) dy \right]. \end{aligned}$$

17-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \arccos \frac{1}{xy}$$

функциянинг дифференциалини топинг.

(6) формулага кўра

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

бўлади.

Энди берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (\arccos \frac{1}{xy})'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \\ &= \frac{|xy|}{xy^2 \sqrt{x^2 y^2 - 1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= (\arccos \frac{1}{xy})'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2y^2}}} \cdot \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{y^2}) = \\ &= \frac{|xy|}{xy^2 \sqrt{x^2y^2-1}}.\end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned}df &= \frac{|xy|}{x^2y \sqrt{x^2y^2-1}} dx + \frac{|xy|}{xy^2 \sqrt{x^2y^2-1}} dy = \\ &= \frac{|xy|}{xy \sqrt{x^2y^2-1}} (\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy).\end{aligned}$$

18-мисол. Ушбу

$$F = f(u, v), \quad u = xy, \quad v = \frac{x}{y}$$

мураккаб функциянинг дифференциалини топинг.

Функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам унинг дифференциали

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

қўринишда бўлади. Бирок бу ҳолда du ва dv лар эркил орттирмалар бўлмасдан, улар x ва y ларга боғлиқ бўлади. Шунини эътиборга олиб топамиз:

$$du = d(xy) = (xy)'_x dx + (xy)'_y dy = y dx + x dy,$$

$$dv = d(\frac{x}{y}) = (\frac{x}{y})'_x dx + (\frac{x}{y})'_y dy = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy.$$

Демак,

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u} (y dx + x dy) + \frac{\partial f}{\partial v} (\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy).$$

4°. Такрибий формула. Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + o(\rho)$$

бўлади. $\rho \rightarrow 0$ да

$$\frac{\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)} \rightarrow 1.$$

Натижада ушбу

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \approx df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

тақрибий формулага келамиз. Уни

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m$$

каби ёзиш ҳам мумкин.

19-мисол. Ушбу

$$\alpha = 1,02^{3,01}$$

микдорнинг тақрибий қийматини топинг. Берилган микдорнинг тақрибий қийматини топиш учун

$$f(x, y) = x^y$$

функцияни қараймиз. Бу функция (1,3) нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta f(1,3) = \frac{\partial f(1,3)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(1,3)}{\partial y} \Delta y + o(\rho).$$

Энди $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,01$ дейлик: Унда

$$\Delta f(1,3) \approx \frac{\partial f(1,3)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(1,3)}{\partial y} \Delta y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1 + 0,02; 3 + 0,01) - f(1,3) \approx y \cdot x^{y-1} \cdot \Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y \Big|_{x=1, y=3, \Delta x=0,02, \Delta y=0,01} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1,02; 3,01) - f(1,3) \approx 3 \cdot 1 \cdot 0,02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0,01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,02^{3,01} - 1 \approx 0,06 \Rightarrow 1,02^{3,01} \approx 1,06.$$

Демак,

$$\alpha = 1,02^{3,01} \approx 1,06.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

$$1. f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

2. $f(x, y) = \frac{x+1}{y^2+1}$.
3. $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$.
4. $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$.
5. $f(x, y) = y\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}$.
6. $f(x, y) = x\sin(x+y)$.
7. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
8. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$.
9. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.
10. $f(x, y) = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$.
11. $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.
12. $f(x, y) = e^{\sin \frac{y}{x}}$.
13. $f(x, y) = \operatorname{Intg} \frac{y}{x}$.
14. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
15. $f(x, y) = xy \ln(xy)$.
16. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$.
17. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
18. $f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^x$.
19. $f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}$.
20. $f(x, y) = l^{-\frac{y}{x}}$.
21. $f(x, y) = \ln \sin \frac{x+1}{\sqrt{y}}$.
22. $f(x, y) = \frac{x}{y} e^{xy}$.
23. $f(x, y) = l^{\frac{x}{y}} \operatorname{tg}(x+y)$.

$$24. f(x,y) = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$25. f(x,y) = (2x)^{3y}.$$

Қуйидаги функцияларнинг (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи бўлишини исботланг:

$$26. f(x,y) = xy, \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

$$27. f(x,y) = \sqrt[3]{x} \sin y, (x_0, y_0) = (0,0).$$

$$28. f(x,y) = l^{xy}, \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

29.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x,y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x,y) = (0,0) \text{ бўлса,} \\ (x_0, y_0) = (0,0). \end{cases}$$

$$30. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x,y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x,y) = (0,0) \text{ бўлса,} \\ (x_0, y_0) = (0,0). \end{cases}$$

Қуйидаги функцияларнинг (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи эмаслигини исботланг:

$$31. f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, (x_0, y_0) = (0,0).$$

$$32. f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, (x_0, y_0) = (0,0).$$

$$33. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{агар } (x,y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x,y) = (0,0) \text{ бўлса,} \\ (x_0, y_0) = (0,0). \end{cases}$$

$$34. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x,y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x,y) = (0,0) \text{ бўлса,} \\ (x_0, y_0) = (0,0). \end{cases}$$

34,а. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M \subset R^m$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуктада узлуксиз бўлишини исботланг.

34,б. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M \subset R^m$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуктада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлишини исботланг.

35. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M \subset R^m$ нуктанинг атрофида барча ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар шу нуктада узлуксиз бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлишини исботланг.

Қуйидаги мураккаб функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

36. $f(x, y) = x^2 y^3, x = t, y = t^2.$

37. $f(x, y) = F, x = u^2 + v^2, y = u \cdot v.$

38. $f(x, y) = F, x = au, y = bv.$

39. $f(x, y) = F, x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2.$

40. $F = f(x, y), x = u \sin v, y = u^2.$

41. $f(x, y) = \frac{x}{y}, x = e^t, y = \ln t.$

42. $f(x, y) = x^y, x = \sin u, y = \cos v.$

43. $f(x, y) = x \sin y + y \sin x, x = \frac{u}{v}, y = u \cdot v.$

44. $f(x, y) = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}, x = 3t^2, y = \sqrt{t^2 + 1}.$

45. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x = t, y = t^2.$

46. $f(x, y) = e^{xy} \ln(x + y), x = t^3, y = 1 - t^3.$

47. $f(x, y) = x^y + y^x, x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2.$

48. Ушбу $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ функциянинг (1;2) нуктада Ox ўқи билан 60° ли бурчак ташкил этадиган йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

49. Ушбу $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ функциянинг (1;1) нуктада Ox ўқи билан 45° ли бурчак ташкил этадиган йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

50. Ушбу $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ функциянинг $2y^2 + x^2 = C^2$ эллипсининг ихтиёрий нуктасидаги шу нукта нормали йўналиши бўйича ҳосиласининг ноль бўлишини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг дифференциалини топинг:

51. $f(x,y) = x^m y^n$.

52. $f(x,y) = \frac{y}{x}$.

53. $f(x,y) = y^3 \sqrt{x}$.

54. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

55. $f(x,y) = l^{\frac{y}{x}}$.

56. $f(x,y) = l^{xy}$.

57. $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

58. $f(x,y) = \ln^2(x - y)$.

59. $f(x,y) = (x^2 + y^2)^3$.

60. $f(x,y) = e^{\cos(xy)}$.

61. $f(x,y) = x \ln(xy)$.

62. $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^y$.

63. $f(x,y) = \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y}$.

Қуйидаги микдорларнинг тақрибий қийматларини ҳисобланг.

64. $\alpha = (0,97)^{1,05}$.

65. $\alpha = (1,08)^{3,96}$.

66. $\alpha = 1,94^2 \cdot e^{0,12}$.

67. $\alpha = 2,68^{\sin 0,05}$.

68. $\alpha = \sin 1,59 \cdot \operatorname{tg} 3,09$.

69. $\alpha = \sin 1,49 \cdot \arctg 0,07$.

70. $\alpha = \sin 59^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$.

71. $\alpha = \ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

2-§. КўП ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари

1°. Функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилалари.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик M ($M \subset R^m$) тўпланда берилган бўлиб, унинг (x_1, x_2, \dots, x_m) нуктасида $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки, бу хусусий ҳосилалар x_1, x_2, \dots, x_m ларга боғлиқ бўлади.

5-таъриф. $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ ларнинг x_k ($k=1, 2, \dots, m$) ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилалари берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва

$$f''_{x_1 x_k}, f''_{x_2 x_k}, \dots, f''_{x_m x_k} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} = f''_{x_1 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} = f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} = f''_{x_m x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар умумий ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \quad (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, m)$$

кўринишда ёзилади. Хусусан, $i=k$ бўлганда:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

каби ёзилади. $i \neq k$ бўлганда қаралаётган иккинчи тартибли

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_k}$$

хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* дейилади.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари ҳам худди шунга ўхшаш таърифланади.

20- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2) = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2) = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Иккинчи тартибли хусусий ҳосила таърифидан фойдаланиб $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{2(x^2 + y^2 - x \cdot 2x)}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= -\frac{2y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2(x^2 + y^2 - y \cdot 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(Бу мисолда $\forall (x, y) \in R^2((x, y) \neq (0, 0))$ да

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ бўлишини кўрамиз.}$$

21- мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{агар } (x,y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x,y) = (0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг аралаш ҳосилаларини топинг.

Аввало $(x,y) \neq (0,0)$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

бўлади.

Энди $(x,y) = (0,0)$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда функциянинг ҳосилаларини таърифга кўра ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0, \Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(\Delta x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1.$$

Демак, қаралаётган функциянинг $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ нуктада аралаш ҳосилалари

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

лар мавжуд.

22 — мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (a, b — \text{ўзгармас})$$

функция Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

ни қаноатлантиришини кўрсатинг.

$f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ хусу

сий ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \times \\ &\times \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}. \end{aligned}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

бўлади.

Энди $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ларни топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) = \\ &= \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - (x-a)2(x-a)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}. \end{aligned}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

эканлиги топилади.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} + \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = \\ &= \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2 + (x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = 0. \end{aligned}$$

Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

23- мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{агар } (x,y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x,y) = (0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг аралаш ҳосилаларини топинг.

$(x,y) \neq (0,0)$ ҳамда $(x,y) = (0,0)$ бўлган ҳолларни алоҳида-алоҳида қараймиз.

Аввало $(x,y) \neq (0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - \\ &- y^2 \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y \right) = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) = \\ &= \frac{x^3}{x^2 + y^2} - 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = x - 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x - 2y \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) = \\ &= 1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x} &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)). \end{aligned}$$

Энди $(x,y) = (0,y)$ ва $y \neq 0$ бўлсин. Ҳосила таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(0,y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{\Delta x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{\Delta x}{y} - 0}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\Delta x \operatorname{arctg} \frac{y}{\Delta x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{\Delta x}{y} \cdot \frac{1}{\Delta x} \right] = -y^2 \cdot \frac{1}{y} = -y.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = y.$$

Худди шунга ўхшаш, $(x,y) = (x,0)$ ва $x \neq 0$ учун

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = x$$

бўлиши кўрсатилади. Булардан эса

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Яна ҳосила таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0,\Delta y)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(\Delta x,0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$

Демак,

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 1.$$

Шундай қилиб, берилган функция $\forall (x,y) \in R^2$ да аралаш ҳосилаларга эга бўлиб, улар $(x,y) \neq (0,0)$ да

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x},$$

$(x,y) = (0,0)$ да эса:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

2 - э с л а т м а . Юқорида келтирилган 21- ҳамда 23- мисоллардаги $f(x,y)$ функциянинг $(0,0)$ нуктадаги аралаш ҳосилаларининг бир-бирига тенг эмаслигини кўрдик. Бунга сабаб қаралаётган функция аралаш ҳосилаларининг $(0,0)$ нуктада узлуксиз эмаслигидир. 21- мисолда-

ги $f(x,y)$ функциянинг $(x,y) \neq (0,0)$ нуқтадаги аралаш ҳосилалари

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$(x,y) = (0,0)$ нуқтада эса

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 1$$

эди. Бу аралаш ҳосилаларнинг $(0,0)$ нуқтада узлуксиз эмаслигини кўрсатиш учун $(0,0)$ нуқтага яқинлашадиган $\left\{ \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ кетма-кетликни қарайлик.

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ нинг $x = \frac{2}{n}$, $y = \frac{1}{n}$ даги қийматларидан иборат кетма-кетлик

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)}{\partial x \partial y} &= \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \left(1 + 8 \cdot \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^2} \right) = \\ &= \frac{3}{5} \left(1 + 8 \cdot \frac{4}{25} \right) = \frac{171}{125} \text{ бўлиб,} \end{aligned}$$

$$\lim_{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)}{\partial x \partial y} = \frac{171}{125} \neq -1 = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$$

бўлади. Бу эса $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ нинг $(0,0)$ нуқтада узлуксиз эмаслигини билдиради.

Умумий ҳолда қуйидаги теорема ўринли:

3-теорема. $f(x,y)$ функция очик M ($M \subset \mathbb{R}^2$) тўпламда берилган бўлиб, шу тўпланда $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ҳамда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ аралаш ҳосилаларга эга бўлсин. Агар аралаш ҳосилалар $(x_0, y_0) \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу нуқтада

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$$

бўлади.

2°. Функциянинг юкори тартибли дифференциаллари. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, унинг барча n -тартибли хусусий ҳосилалари мавжуд бўлсин. Агар $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуктада бу ҳосилалар узлуксиз бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада n марта дифференциалланувчи бўлади.

Маълумки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, унинг шу нуктадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

бўлар эди.

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ нуктада икки марта дифференциалланувчи бўлсин.

6-таъриф. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг (x_1, x_2, \dots, x_m) нуктадаги дифференциали df нинг дифференциали берилган $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали дейилади ва у d^2f каби белгиланади:

$$d^2f = d(df)$$

Умуман, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ нуктада n марта дифференциалланувчи бўлганда, шу нуктадаги $(n-1)$ -тартибли дифференциали $d^{n-1}f$ нинг дифференциали берилган функциянинг n -тартибли дифференциали дейилади ва $d^n f$ каби белгиланади. Демак,

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Функциянинг n -тартибли дифференциал унинг хусусий ҳосилалари орқали символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f.$$

Хусусан, $n=2$ бўлганда:

$$\begin{aligned}
 d^2f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2 + \\
 &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \dots + \\
 &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \\
 &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} dx_2 dx_4 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_2 dx_m + \dots + \\
 &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m.
 \end{aligned}$$

24-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

функциянинг учинчи тартибли дифференциалини топинг.

Функциянинг учинчи тартибли дифференциали қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned}
 d^3f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \\
 &+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.
 \end{aligned}$$

Функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 + y^2) = \\
 &= \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + y^2), \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (2x \cdot \cos(x^2 + y^2)) = \\
 &= 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2), \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} (2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2)) = \\
 &= 12x \sin(x^2 + y^2) - 8x^3 \cos(x^2 + y^2), \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2)) = \\
 &= -4y \sin(x^2 + y^2) - 8x^2 y \cos(x^2 + y^2),
 \end{aligned}$$

шунингдек,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -12y \sin(x^2 + y^2) - 8y^3 \cos(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2} = -4x \sin(x^2 + y^2) - 8xy^2 \cos(x^2 + y^2).$$

Натижада

$$\begin{aligned} d^3 f &= [-12x \cdot \sin(x^2 + y^2) - 8x^3 \cos(x^2 + y^2)] dx^3 + \\ &- 3[-4y \sin(x^2 + y^2) - 8x^2 y \cos(x^2 + y^2)] dx^2 dy + \\ &- 3[-4x \sin(x^2 + y^2) - 8xy^2 \cos(x^2 + y^2)] dx dy^2 + \\ &- [-12y \sin(x^2 + y^2) - 8y^3 \cos(x^2 + y^2)] dy^3 = \\ &= -12 \sin(x^2 + y^2) [x dx^3 + y dx^2 dy + x dx dy^2 + \\ &+ y dy^3] - 8 \cos(x^2 + y^2) [x^3 dx^3 + 3x^2 y dx^2 dy + \\ &+ 3xy^2 dx dy^2 + y^3 dy^3] = -12 \sin(x^2 + y^2) \times \\ &\times [dx^2 (x dx + y dy) + dy^2 (x dx + y dy)] - \\ &- 8 \cos(x^2 + y^2) (x dx + y dy)^3 = -12 \sin(x^2 + y^2) \times \\ &\times (x dx + y dy)(dx^2 + dy^2) - 8 \cos(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy)^3 \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} d^3 f &= -12 \sin(x^2 + y^2) (x dx + y dy)(dx^2 + dy^2) - \\ &- 8 \cos(x^2 + y^2) (x dx + y dy)^3. \end{aligned}$$

25- м и с о л. Ушбу

$$F = f(x, y), \quad x = u^2 - v^2, \quad y = uv$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Маълумки, функциянинг биринчи тартибли дифференциали

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

иккинчи тартибли дифференциали эса

$$\begin{aligned} d^2 F &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y \end{aligned}$$

бўлади.

Аввало dx , dy , $d^2 x$, $d^2 y$ ларни топамиз:

$$dx = d(u^2 - v^2) = 2udu - 2vdv, \quad dy = d(u \cdot v) = vdu + udv,$$

$$d^2x = d(dx) = d(2udu - 2v dv) = 2du^2 - 2dv^2, \quad d^2y = \\ = d(dy) = d(vdu + udv) = dudv + dudv = 2dudv.$$

Натижада:

$$d^2F = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (2udu - 2v dv)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot (2udu - \\ - 2v dv)(vdu + udv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (vdu + udv)^2 + \\ + 2 \frac{\partial f}{\partial x} (du^2 - dv^2) + 2 \frac{\partial f}{\partial y} dudv = \\ = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (u^2 du^2 + v^2 dv^2 - 2uvdudv) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times \\ \times (uvdu^2 - v^2 v dudu + u^2 dudv - uvdv^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (2dudv)^2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x} 2(du^2 - dv^2) + \frac{\partial f}{\partial y} (2dudv) = \\ = \left(4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u^2 + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} v^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) du^2 + \\ + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} uv - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} v^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u^2 - 4 \frac{\partial f}{\partial x^2} uv + \frac{\partial f}{\partial y} \right) dudv + \\ + \left(4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} v^2 - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u^2 - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) dv^2.$$

3°. Кўп ўзгарувчи функциянинг Тейлор формуласи. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция R^m фазонинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктаси атрофида $n+1$ марта дифференциалланувчи бўлсин. Ушбу формула

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m - x_m^0) f + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m - x_m^0) \right)^2 f + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m - x_m^0) \right)^n f + R_n(f), \\ R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \right. \\ \left. + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m - x_m^0) \right)^{n+1} f$$

кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг Тейлор формуласи, $R_n(f)$ эса Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади дейилади. Бу ерда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг барча биринчи, иккинчи ва ҳоказо n - тартибли хусусий ҳосилалари (x_1^0, x_2^0, x_m^0) нуктада, барча $(n+1)$ - тартибли хусусий ҳосилалари эса

$$(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + \theta(x_m - x_m^0)) \\ (0 < \theta < 1)$$

нуктада ҳисобланган.

Хусусан, икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функциянинг Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \times \\ \times (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0) \times \right. \\ \left. \times (y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right] + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^n} \times \right. \\ \times (x - x_0)^n + C_n^1 \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-1} \partial y} (x - x_0)^{n-1} (y - y_0) + \dots + \\ \left. + \dots + \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial y^n} (y - y_0)^n \right] + R_n(f), \\ R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial^{n+1} f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))}{\partial x^{n+1}} (x - x_0)^{n+1} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{\partial^{n+1} f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))}{\partial y^{n+1}} (y - y_0)^{n+1} \right].$$

26- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = e^x$$

функциянинг $n=2$ бўлган ҳолда $(x_0, y_0) = (0, 1)$ нукта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

$n=2$ учун $f(x, y)$ функциянинг Тейлор формуласи

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0) \times \right. \\ \left. \times (y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 + R_2(f) \right]$$

бўлади. Равшанки, $f(0, 1) = 1$.

Энди $f(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ва уларнинг $(0; 1)$ нуктадаги қийматларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{x}{y}} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial f(0, 1)}{\partial x} = \frac{1}{1} e^{\frac{0}{1}} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{\frac{x}{y}} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial f(0, 1)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \right) = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial^2 f(0, 1)}{\partial x^2} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \right) = -\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^3} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial^2 f(0, 1)}{\partial x \partial y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \right) = \frac{x^2}{y^4} e^{\frac{x}{y}} + \frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = 1.$$

Натижада

$$f(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 - x(y-1) + R_2(f)$$

бўлади. Бу берилган функциянинг $n=2$ бўлган ҳолда $(0, 1)$ нуктадаги Тейлор формуласидир.

27- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = x^y$$

функциянинг $n=3$ бўлганда $(x_0, y_0) = (1, 1)$ нукта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

Бу ҳолда $f(x, y)$ функциянинг Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0) \right) f + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0) \right)^2 f + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0) \right)^3 f + R_3(f) \end{aligned}$$

Функциянинг $(1; 1)$ даги қиймати $f(1, 1) = 1$.

Энди $f(x, y) = x^y$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ва уларнинг $(1; 1)$ нуктадаги қийматларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, \quad \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^y \ln^2 x, & \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= y(y-1)(y-2)x^{y-2}, & \frac{\partial^3 f(1, 1)}{\partial x^3} &= 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x, & \frac{\partial^3 f(1, 1)}{\partial x^2 \partial y} &= 1, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= 2x^{y-1} \ln x + yx^{y-1} (\ln x)^2, & \frac{\partial^3 f(1, 1)}{\partial x \partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= x^y (\ln x)^3, & \frac{\partial^3 f(1, 1)}{\partial y^3} &= 0. \end{aligned}$$

Нагижада

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \\ &+ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3} (x - x_0)^3 + \right. \\ &\left. + 3 \cdot \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y} (x - x_0)^2 (y - y_0) + 3 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2} (x - x_0) \times \right. \\ &\left. \times (y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial y^3} (y - y_0)^3 \right] + R_3(f) = \\ &= 1 + 1(x-1) + 0 \cdot (y-1) + \frac{1}{2} [0 \cdot (x-1)^2 + \\ &+ 2 \cdot 1(x-1)(y-1) + 0 \cdot (y-1)^2] + \frac{1}{6} [0 \cdot (x-1)^3 + \\ &+ 3 \cdot 1 \cdot (x-1)^2 (y-1) + 3 \cdot 0 \cdot (x-1)(y-1)^2 + \\ &+ 0(y-1)^3] + R_3(f) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \\ &+ \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3(f) \end{aligned}$$

бўлади. Бу берилган функциянинг Тейлор формуласидир.

Мисол ва масалалар

Куйидаги функцияларнинг 2- тартибли хусусий ҳосилалари ва 2- тартибли дифференциалларини топинг:

72. $f(x, y) = xy - \frac{x}{y}$.

73. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$.
 74. $f(x, y) = x - 3 \sin y$.
 75. $f(x, y) = \frac{y}{x} e^{xy}$.
 76. $f(x, y) = \arctg xy$.
 77. $f(x, y) = y^3 \sqrt{x}$.
 78. $f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$.
 79. $f(x, y) = \sin(xy)$.
 80. $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$.
 81. $f(x, y) = 2 \cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$.
 82. $f(x, y) = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x$.
 83. $f(x, y) = \operatorname{arccctg}(x + 2y)$.

Куйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги хусусий ҳосилаларини топинг:

84. $f(x, y) = y \ln(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}$.
 85. $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
 86. $f(x, y) = x \cos y + y \sin x$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$.
 87. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$, $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^6 \partial y^4}$.
 88. $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{x+y}$, $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial x^n}$.
 89. $f(x, y) = e^x \sin y$, $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$.

Куйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги дифференциалларини топинг:

90. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$, $d^3 f$.
 91. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$, $d^3 f$.
 92. $f(x, y) = e^{xy}$, $d^{10} f$.
 93. $f(x, y) = \ln(xy)$, $d^4 f$.
 94. $f(x, y) = e^{ax} y^n$, $d^{10} f$.
 95. $f(x, y) = e^{ax} \cos by$, $d^{10} f$.

Куйидаги мураккаб функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини ҳамда иккинчи тартибли дифференциалларини топинг.

96. $F = f(x, y), x = au, y = bv.$

97. $F = f(x, y), x = u + v, y = u - v.$

98. $F = f(x, y), x = \frac{u}{v}, y = \frac{v}{u}.$

99. $F = f(x, y), x = ue^v, y = ve^u.$

100. $f(x, y) = x^y, x = \frac{u}{v}, y = u \cdot v.$

101. Ушбу

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(-2; 1)$ нукта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

102. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(0; 0)$ нукта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

103. Ушбу

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(0; 0)$ нукта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

104. Ушбу

$$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(0; 0)$ нукта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

105. Ушбу

$$f(x, y) = y^x$$

функциянинг $n=2$ бўлган ҳолда $(1; 1)$ нукта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

3-§. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМ ҚИЙМАТЛАРИ

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ бўлсин.

7- т а ь р и ф. Агар $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтанинг шундай U_δ атрофи:

$$U_\delta = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - x_k^0)^2} < \delta \right\} \subset M \quad (\delta > 0)$$

мавжуд бўлсаки, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U_\delta$ учун

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада максимумга (минимумга) эга дейилади, $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ қиймат эса $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг максимум (минимум) қиймати дейилади. Уни

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \max_{(x_1, \dots, x_m) \in U_\delta} \{f(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$$

$$(f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \min_{(x_1, \dots, x_m) \in U_\delta} \{f(x_1, x_2, \dots, x_m)\})$$

каби белгиланади.

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг экстремуми дейилади.

28- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

функциянинг $(0; 0)$ нуқтада максимумга эришишини кўрсатинг. Бу функция $M = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ да аниқланган $(0; 0)$ нуқтанинг

$$U_\delta = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 < \delta\} \quad (0 < \delta < 1)$$

атрофини олайлик. Равшанки, $U_\delta \subset M$ бўлади.

$\forall (x, y) \in U_\delta$ учун

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq 1 = f(0, 0)$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0; 0)$ нуқтада максимумга эга ва унинг максимум қиймати 1 га тенг.

4- те о р е м а. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада экстремумга эришса ва шу нуқтада

барча $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса,

у ҳолда $\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, m$ бўлади.

29- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = x \cdot y$$

функция $(0; 0)$ нуқтада экстремумга эришадими?

Равшанки, $f(0, 0) = 0$.

(0; 0) нуктанинг

$$U_\delta = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 < \delta\} \quad (0 < \delta < 1)$$

атрофини олайлик.

Бу атрофда $f(x, y) - f(0, 0)$ айирма ўз ишорасини сақлаймади. Масалан, координаталари бир хил ишорали бўлган нукталар учун бу айирма мусбат, турли хил ишорали нукталар учун манфийдир. Демак, берилган функция (0; 0) нуктада экстремумга эга эмас.

Изоҳ. 29- мисолда келтирилган функция

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$

бўлади. Демак, 4- теорема шартлари экстремум учун зарурий бўлиб, етарли эмаслигини кўрамиз.

3- э с л а т м а. Юқорида келтирилган 4- теорема кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалайди.

30- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функция (0; 0) нуктада экстремумга эга бўладими?

Равшанки,

$$f(0, 0) = 0.$$

(0; 0) нуктанинг

$$U_\delta = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

атрофини олайлик. Унда $\forall (x, y) \in U_\delta$ учун

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 = f(0, 0)$$

бўлади. Демак, берилган функция (0; 0) нуктада минимумга эришади ва

$$\min\{f(x, y)\} = 0$$

бўлади.

Қаралаётган $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функция (0; 0) нуктада хусусий ҳосилаларга эга эмас (қаранг, 3- мисол).

4- э с л а т м а. Кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $M \subset R^m$ тўпламининг:

1) барча хусусий ҳосилалари нолга айланадиган, яъни

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

тенгламаларни қаноатлантирадиган нуқталарда.

2) хусусий ҳосилалар мавжуд бўлмаган нуқталарда экстремумга эришиши мумкин.

Одатда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг барча хусусий ҳосилаларини нолга айлантирадиган нуқталар шу функциянинг *стационар нуқталари* дейилади.

5-теорема. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ нуқтанинг бирор U_δ атрофида ($\delta > 0$) берилган ва ушбу шартларни бажарсин:

1) $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция U_δ да барча ўзгарувчилари бўйича биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;

2) $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг стационар нуқтаси;

3) коэффициентлари

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

бўлган

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \sum_{i, k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k$$

квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган.

У ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада минимумга (максимумга) эришади.

Агар квадратик форма ишора сакламаса, f функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

Икки ўзгарувчили функциялар учун бу теорема қуйидагича бўлади:

$f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтанинг атрофи

$$U_\delta = \{(x, y) \in R^2: \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

($\delta > 0$) да берилган ва бу атрофда барча биринчи, иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларига эга бўлсин. (x_0, y_0) нуқта $f(x, y)$ функциянинг стационар нуқтаси

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

ва

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

бўлсин.

1°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad \text{ва} \quad a_{11} > 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада минимумга эришади.

2°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad \text{ва} \quad a_{11} < 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада максимумга эришади.

3°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришмайди.

4°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришиши ҳам, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириш талаб қилади.

31- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \quad (a \neq 0)$$

функцияни экстремумга текширинг.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 3ay,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Уларни нолга тенглаб,

$$\begin{cases} 3x^2 - 3ac = 0, \\ 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

системадан берилган функциянинг стационар нукталари $(0, 0)$ ҳамда (a, a) эканини топамиз.

Равшанки,

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -3a.$$

(a, a) нуктада

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(a, a)}{\partial x^2} = 6a, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f(a, a)}{\partial y^2} = -3a, \quad \frac{\partial^2 f(a, a)}{\partial y^2} = 6a.$$

бўлиб,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$$

бўлади.

Демак, $a > 0$ да $a_{11} > 0$ бўлиб, қаралаётган функция (a, a) нуктада минимумга, $a < 0$ да $a_{11} < 0$ бўлиб, функция (a, a) нуктада максимумга эришади.

$(0, 0)$ нуктада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 \cdot 0 - 9a^2 = -9a^2 < 0$$

бўлиб, бу нуктада функция экстремумга эришмайди.

32- м и с о л. Ушбу

$$f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^3$$

функцияни экстремумга текширинг.

Равшанки,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - x) + 3(y + 2)^2$$

ва

$$\begin{cases} 2(x - y) = 0, \\ 2(y - x) + 3(y + 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2, y = -2.$$

Демак, $(-2; -2)$ берилган функциянинг стационар нуктаси.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларининг стационар нуктадаги қийматлари

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(-2, -2)}{\partial x^2} = 2,$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 f(-2, -2)}{\partial x \partial y} = -2,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 f(-2, -2)}{\partial y^2} = 2$$

бўлиб,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлади. Демак, «шубҳали» ҳол. Бу ҳолда экстремумнинг бор-йўқлигини аниқлаш учун қуйидагича текшириш ўтказилиши керак. Стационар $(-2; -2)$ нуктадан ўтувчи $y=x$ тўғри чизик нукталарини қараймиз. Бу тўғри чизикда берилган функция

$$f(x, y)|_{y=x} = \varphi(y) = (y-y)^2 + (y+2)^3 = (y+2)^3$$

қўринишга эга бўлиб, $y < -2$ да $\varphi(y) < 0$, $y > -2$ да эса $\varphi(y) > 0$ бўлади. Берилган функция $(-2; -2)$ нукта атрофида ҳам мусбат, ҳам манфий қийматларга эга бўлганлиги сабабли у шу нуктада экстремумга эришмайди.

33- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2a^2$$

функциянинг $D = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq a^2\}$ тўпلامда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Берилган функциянинг стационар нукталарини топамиз:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2y.$$

Демак, $(0; 0)$ нукта функциянинг стационар нуктаси экан. Бу нуктада берилган функциянинг қиймати

$$f(0, 0) = 2a^2$$

бўлади.

Энди $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2a^2$ функцияни D нинг чегараси $\{x^2 + y^2 = a^2\}$ айланада қараймиз. Бунда

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

ва

$f(x, y) = f_x(x, \pm \sqrt{a^2 - x^2}) = x^2 - (a^2 - x^2) + 2a^2 = 2x^2 + a^2$ бўлади. Бу $f_x = 2x^2 + a^2$ функциянинг $[-a, a]$ даги энг катта ҳамда энг кичик қийматларини топамиз:

$$f'_x = 4x, \quad 4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f_{x=0} = 2 \cdot 0 + a^2 = a^2$$

$f_x = 2x^2 + a^2$ функциянинг $[-a, a]$ сегментнинг четки нукталаридаги қиймати $2 \cdot a^2 + a^2 = 3a^2$ бўлади.

Демак, $f(x, y)$ функция энг кичик қиймати a^2 , энг катта қиймати эса $3a^2$ бўлади. Бошқача айтганда берилган $f(x, y)$ функциянинг D тўпلام чегарасидаги энг кичик қиймати a^2 , энг катта қиймати эса $3a^2$ бўлади. Бу қийматларни $f(x, y)$ функциянинг стационар нуктадаги қиймати $(f(0, 0) =$

$=2a^2$) билан солиштириб, берилган функциянинг D тўпламдаги энг катта қиймати $3a^2$, энг кичик қиймати эса a^2 бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни экстремумга текширинг:

106. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$

107. $f(x, y) = 2xy - 2x - 4y.$

108. $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2.$

109. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$

110. $f(x, y) = xy(1 - x - y).$

111. $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 3axy.$

112. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y.$

113. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0).$

114. $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

115. $f(x, y) = (x^2 + y) \sqrt{e^y}.$

116. $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y).$

117. $f(x, y) = e^{x - y}(x^2 - 2y^2).$

118. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2).$

119. $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \cdot \sin y.$

120. $f(x, y) = xe^{y + x \sin y}.$

121. $f(x, y) = 1 - (x - 2)^{\frac{4}{5}} - y^{\frac{4}{5}}.$

122. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(ax^2 + by^2).$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган D тўпламда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

123. $f(x, y) = x - 2y - 3.$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}.$$

124. $f(x, y) = 1 + x + 2y.$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

125. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4.$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

126. $f(x, y) = x^2 - y^2.$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

127. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y).$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

128. $f(x, y) = x^2 + y^2.$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b < a\}.$$

$$129. f(x, y) = (x - y^2) \sqrt[3]{(x - 1)^2}.$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 2\}.$$

$$130. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

4-§. ОШКОРМАС ФУНКЦИЯЛАР

1°. x ва y ўзгарувчиларнинг $F(x, y)$ функцияси учун ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенгламага эга бўлайлик. Энди x ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай X тўпلامни қарайликки, бу тўпلامдан олинган ҳар бир қийматда $F(x, y) = 0$ тенглама (y га нисбатан тенглама) ягона ечимга эга бўлсин.

X тўпلامдан ихтиёрий x сонни олиб, бу сонга $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган y сонни мос қўямиз. Натижада X тўпلامдан олинган ҳар бир x га юқорида кўрсатилган қоидага кўра битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Одатда бундай аниқланган функция ошқормас кўринишда берилган функция (ошқормас функция) дейилади. Уни

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

каби белгиланади.

34- м и с о л. Ушбу

$$F(x, y) = y \sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0$$

тенглама y ни x нинг ошқормас функцияси қилиб аниқлайдими?

x ўзгарувчининг $X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ тўпلامдан олинган ҳар бир қийматида y ўзгарувчининг

$$y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

қиймати мос қўйилса, унда, равшанки,

$$F(x, y) = F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0$$

бўлади. Демак, қаралаётган тенглама ошкормас функция

$$x \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ни аниқлайди.

35- мисол. Ушбу

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$$

тенглама ошкормас функцияни аниқлайдими?

Берилган тенгламани

$$x = y - \frac{1}{2} \sin y$$

кўринишда ёзиб оламиз. Агар

$$\varphi(y) = y - \frac{1}{2} \sin y$$

дейилса, равшанки, бу функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$\varphi'(y) = 1 - \frac{1}{2} \cos y > 0$$

хосилага эга. Унда $\varphi(y)$ нинг монотонлигидан, $x = \varphi(y)$ функцияга нисбатан тескари $y = \varphi^{-1}(x)$ функция мавжуд бўлади. Энди x ўзгарувчининг $(-\infty, +\infty)$ дан олинган ҳар бир қийматига $y = \varphi^{-1}(x)$ ни мос қўямиз. Натижада, $x = \varphi(y)$ ва $y = \varphi^{-1}(x)$ эканини эътиборга олиб, $F(x, y) = F(x, \varphi^{-1}(x)) = x - y + \frac{1}{2} \sin y = x - (y - \frac{1}{2} \sin y) = x - x = 0$ бўлишини топамиз. Демак, берилган тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди.

36- мисол. Ушбу

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0 \quad (y > 0)$$

тенглама ошкормас функцияни аниқлайдими?

$y^2 - \ln y$ айирма ҳар доим мусбат бўлади:

$$y^2 - \ln y > 0.$$

Шу сабабли x ўзгарувчининг $(-\infty, +\infty)$ даги ҳеч бир қийматида

$$x^2 + y^2 - \ln y = 0$$

тенглик бажарилмайди. Бинобарин, берилган тенглама ошкормас функцияни аниқламайди.

6-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуктанинг бирор $U_{h, k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ ($h > 0, k > 0$) атрофида берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h, k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) x ўзгарувчининг $(x_0 - h, x_0 + h)$ ораликдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи;

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x_0, y_0) нуктанинг шундай

$$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи ($0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун $F(x, y) = 0$ тенглама ягона y ечимга ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланади.

2) $x = x_0$ бўлганда унга мос келган $y = y_0$ бўлади,

3) ошкормас кўринишда аниқланган

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ораликда узлуксиз бўлади.

7-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуктанинг бирор атрофи $U(x_0, y_0)$ да аниқланган бўлиб қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1°. $F(x, y)$ U да n марта узлуксиз дифференциалланувчи ($n = 1, 2, \dots$)

2°. $F(x_0, y_0) = 0$.

3°. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

У ҳолда шундай $I \subset U(x_0, y_0)$ атроф ва бу атрофда $f(x)$ функция мавжуд бўлиб,

$$(I = I_x \times I_y; I_x = \{x \in R: |x - x_0| < \alpha\},$$

$$I_y = \{y \in R: |y - y_0| < \beta\})$$

ихтиёрий $(x, y) \in I$ ларда

1) $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$

2) $f(x)$ функция I_x да n -марта узлуксиз дифференциалланувчи ва 1-тартибли ҳосила учун

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

тенглик ўринли бўлади.

37 - мисол. Ушбу

$$F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7 = 0$$

тенглама (2,0) нуқтанинг атрофида y ни x нинг ошқормас функцияси сифатида аниқлайдими?

Берилган

$$F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7$$

функцияни 7- теореманинг шартини бажаришини ёки бажармаслигини текширамиз.

Равшанки, $F(x, y)$ функция R^2 тўпламда аниқланган ва узлуксиз. Бинобарин, $y(2,0)$ нуқтанинг ихтиёрий атрофи $U_{h,k}((2,0))$ да узлуксиз. ($h > 0, k > 0$).

$F(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^y + y \sin x - x^3 + 7) = y \cos x - 3x^2,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y + y \sin x - x^3 + 7) = e^y + \sin x.$$

Демак, $F(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ лар R^2 тўпламда, жумладан $U_{h,k}((2,0))$ да узлуксиз. Сўнг

$$\frac{\partial F(2,0)}{\partial y} = e^y + \sin x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = 1 + \sin 2 \neq 0.$$

Ва ниҳоят,

$$F(2,0) = e^y + y \sin x - x^3 + 7 \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб,

$$F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7$$

функция 7- теореманинг барча шартларини бажаришини аниқладик. Шу сабабли 7-теоремага кўра

$$F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7 = 0$$

тенглама (2,0) нуқтанинг атрофида y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди:

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

Бу функция узлуксиз ҳамда унинг ҳосиласи

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{y \cos x - 3x^2}{e^y + \sin x}$$

бўлади.

38- мисол. Ушбу

$$F(x, y) = ye^x - x \ln y - 1 = 0$$

тенглама (0,1) нуқтанинг атрофида y ва x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайдимиз?

$F(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 0\}$ тўпламда аниқланган ва узлуксиз. Жумладан (0,1) нуқтанинг $U_{h,k}((0,1))$ атрофида ($0 < h < 1$, $0 < k$) узлуксиз. Унинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (ye^x - x \ln y - 1) = ye^x - \ln y,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (ye^x - x \ln y - 1) = e^x - \frac{x}{y}$$

$U_{h,k}((0,1))$ да узлуксиз ва

$$\frac{\partial F(0,1)}{\partial y} = e^x - \frac{x}{y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 1 \neq 0$$

бўлади.

Функциянинг (0,1) нуқтадаги қиймати

$$F(0,1) = ye^x - x \ln y - 1 \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0$$

бўлади.

Демак, $F(x, y)$ функция 7- теореманинг барча шартларини бажаради. Шу теоремага кўра

$$F(x, y) = ye^x - x \ln y - 1 = 0$$

тенглама (0,1) нуқтанинг атрофида

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

ошкормас функцияни аниқлайди.

Бу функция узлуксиз ва унинг ҳосиласи

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{ye^x - \ln y}{e^x - \frac{x}{y}}$$

бўлади.

39- м и с о л. Агар $F(x, y)$ функция узлуксиз иккинчи тартибли

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлса,

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ёрдамида аниқланган

$$x \rightarrow y: F(x, y) = 0$$

ошкормас функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

$F(x, y) = 0$ ни дифференциаллаб

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad (1)$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликдан эса

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги (1) муносабатни яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) y' + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0. \end{aligned}$$

Равшанки,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y',$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'.$$

Шундай қилиб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y' \right] \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан эса

$$y'' = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликда y' нинг ўрнига унинг қийматини қўйсак, унда

$$y'' = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}$$

бўлади.

2°. Икки

$$F_1 = F_1(x, y, u, v), \quad F_2 = F_2(x, y, u, v)$$

функциялар $(x_0, y_0, u_0, v_0) \in R^4$ нуктанинг бирор

$$U_{h_1, h_2, k_1, k_2} = \{ (x, y, u, v) \in R^4 : x_0 - h_1 < x < x_0 + h_1, \quad y_0 - h_2 < y < y_0 + h_2, \quad u_0 - k_1 < u < u_0 + k_1, \quad v_0 - k_2 < v < v_0 + k_2 \}$$

атрофида ($h_1 > 0, h_2 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$) берилган бўлсин.

Ушбу

$$\begin{cases} F_1 = F_1(x, y, u, v) = 0, \\ F_2 = F_2(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

тенгламалар системасини қарайлик.

8-теорема. $F_1(x, y, u, v)$ ва $F_2(x, y, u, v)$ функциялар куйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_0, y_0, u_0, v_0))$ да узлуксиз;

2) $U_{h_1, h_2, k_1, k_2}((x_0, y_0, u_0, v_0))$ да барча хусусий ҳосилаларга эга ва узлуксиз;

3) хусусий ҳосилаларнинг (x_0, y_0, u_0, v_0) нуктадаги қийматларидан тузилган ушбу детерминанти нолдан фарқли:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

4) (x_0, y_0, u_0, v_0) нуктада

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 0, \\ F_2(x_0, y_0, u_0, v_0) &= 0. \end{aligned}$$

У ҳолда (x_0, y_0, u_0, v_0) нуктанинг шундай $U_{\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2}((x_0, y_0, u_0, v_0))$ атрофи ($0 < \delta_1 < h_1$, $0 < \delta_2 < h_2$, $0 < \varepsilon_1 < k_1$, $0 < \varepsilon_2 < k_2$) топиладики, бу атрофда

1) (2) тенгламалар системаси ошқормас кўринишдаги

$$u = f_1(x, y, f_2(x, y)), \quad v = f_2(x, y)$$

функцияларни аниқлайди;

2) (x_0, y_0) нуктада, унга мос келадиган нукта

$$u_0 = f_1((x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)), \quad v_0 = f_2(x_0, y_0)$$

бўлади;

3) ошқормас кўринишда аниқланган f_1 ва f_2 функциялар

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1, y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2\}$$

тўпلامда узлуксиз ва барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

40-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} xy + uv = 1, \\ xv - yu = 3 \end{cases}$$

система (1; -1; 1; 2) нуктанинг атрофида ошқормас функцияларни аниқлайдими?

Бу ҳолда

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= xy + uv - 1, \\ F_2(x, y, u, v) &= xv - yu - 3 \end{aligned}$$

бўлади.

Равшанки, бу функциялар $(1; -1; 1; 2)$ нуктанинг атрофида узлуксиз ҳамда барча

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v} = u,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -u, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u} = -y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v} = x$$

хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиздир.

$(1; -1; 1; 2)$ нуктада

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ҳамда

$$F_1(1, -1, 1, 2) = 0,$$

$$F_2(1, -1, 1, 2) = 0$$

бўлади. Демак, 8-теоремага кўра

$$\begin{cases} xy + uv = 1, \\ xv - yu = 3 \end{cases}$$

система u ва v ларни x, y ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди. Берилган тенгламалар системасини u ва v ларга нисбатан ечиб топамиз:

$$u = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4xy - 4x^2y^2}}{2y},$$

$$v = \frac{2y(1 - xy)}{-3 + \sqrt{9 + 4xy - 4x^2y^2}}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги тенгламалар кўрсатилган нукта атрофида ошқормас функцияни аниқлайдими?

131. $F(x, y) = x^4 + xy + y^3 - 3 = 0, (1; 1)$.

132. $F(x, y) = (x - 1)(x + y - 1) = 0, (1; 0)$.

133. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0, (a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$.

134. $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2), (0, 0)$.

Қуйидаги тенгламалар системаси ошқормас функцияларни аниқлайдими?

$$135. \begin{cases} x + y = u + v, \\ xy + yv = 1. \end{cases}$$

$$136. \begin{cases} xu + yv = 4, \\ yu - v = 0. \end{cases}$$

$$137. \begin{cases} x + y = u + v, \\ y \sin u - x \sin v = 0. \end{cases}$$

Қуйидаги ошқормас кўринишда берилган функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг:

$$138. F(x, y) = x - y + \ln y = 0.$$

$$139. F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

$$140. F(x, y) = 1 - y + y^x = 0.$$

$$141. F(x, y) = xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0.$$

$$142. F(x, y) = e^y + ax^2e^{-y} - 2bx = 0.$$

$$143. F(x, y) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} - \arctg \frac{y}{x} = 0.$$

$$144. F(x, y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0.$$

$$145. F(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

$$146. F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - a \arctg \frac{y}{x}, (a \neq 0).$$

XIV боб

ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИҚЛАР ВА ҚАТОРЛАР

1-§. ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИК ВА ҚАТОРЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

Фараз қилайлик, ҳар бир натурал $n \in N$ сонга X тўпламда аниқланган $f_n(x)$ функция мос келсин. У ҳолда

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлиб, бу кетма-кетлик функционал кетма-кетлик дейилади. Функционал кетма-кетлик $\{f_n(x)\}$, унинг умумий ҳади эса $f_n(x)$ каби белгиланади.

1-мисол. φ — ҳар бир натурал n сонга $\sin \frac{\sqrt{x}}{n}$ функцияни мос кўювчи акслантириш бўлсин:

$$\varphi: n \rightarrow \sin \frac{\sqrt{x}}{n}.$$

Бу акслантиришдан

$$\sin \frac{\sqrt{x}}{1}, \sin \frac{\sqrt{x}}{n}, \dots, \sin \frac{\sqrt{x}}{n} \dots$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади. $У [0, +\infty)$ да берилган бўлиб, умумий ҳади $f_n(x) = \sin \frac{\sqrt{x}}{n}$ бўлади.

2-мисол. φ — ҳар бир натурал n сонга $nx^n(1-x)$ функцияни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$\varphi: n \rightarrow nx^n(1-x).$$

Бу ҳолда

$$x(1-x), 2x^2(1-x), \dots, nx^n(1-x), \dots$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади. Кетма-кетлик $X = R$ да берилган бўлиб, унинг умумий ҳади

$$f_n(x) = nx^n(1-x)$$

бўлади. X тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, $x_0 \in X$ бўлсин.

1-таъриф. Агар $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади, x_0 нуқта эса бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.

$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш нуқталаридан иборат тўпلام кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси дейилади. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси M да аниқланган ушбу

$$f: x \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in M)$$

функция, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функцияси дейилади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in M).$$

3-мисол. Ушбу

$$f_n(x) = n \sin \frac{\sqrt{x}}{n}$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.

Бу функционал кетма-кетлик $X=[0, +\infty)$ да берилган. Унинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\sqrt{x}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

бўлади.

4-мисол. Куйидаги

$$f_n(x) = x^n$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.

Бу функционал кетма-кетлик $X=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Равшанки,

$$\forall x \in (1, +\infty) \text{ да } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty,$$

$$\forall x \in (-1, 1) \text{ да } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

$$x = 1 \text{ да } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

бўлиб, $\forall x \in (-\infty, -1]$ да $f_n(x) = x^n$ функционал кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмас. Демак, $f_n(x) = x^n$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-1, 1]$, лимит функцияси эса

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -1 < x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$f_n(x) = \left(\frac{x+n}{2x+n} \right)^{2(x+n)}$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси куйидаги топилди:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+n}{2x+n} \right)^{2(x+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+n}{2x+n} - 1 \right)^{2(x+n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-x)}{2x+n} \right)^{\frac{2x+n}{-x} \cdot \frac{(-x)}{2x+n} \cdot 2(x+n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{2x+n} \right)^{\frac{2x+n}{-x} \cdot (-2x) \cdot \frac{1+\frac{x}{r}}{\frac{x}{n}+1}} = e^{-2x} \end{aligned}$$

Демак, лимит функция

$$f(x) = e^{-2x}$$

бўлади.

6-мисол. Ушбу

$$f_n(x) = n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), \quad (x > 0)$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}} (x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} \cdot x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n^2+n}} - 1}{\frac{1}{n^2+n}} = \ln x. \end{aligned}$$

Демак, $f(x) = \ln x$.

2-§. ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

Бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, M эса бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси ва $f(x)$ лимит функцияси бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in M).$$

2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топилсаки, ихтиёрый $n > n_0$ учун бир йўла ҳамма $x \in M$ лар учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $f(x)$ га текис яқинлашади (функционал кетма-кетлик текис яқинлашувчи) дейилади.

Демак, бу ҳолда таърифдаги n_0 натурал сон фақат ε га боғлиқ бўлиб, x ларга боғлиқ бўлмайди.

Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун ҳамма x лар учун умумий n_0 топиш мумкин бўлмаса, яъни $\forall n \in \mathbb{N}$ олинганда ҳам шундай ε_0 ва $x_0 \in M$ топилсаки,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилмаса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $f(x)$ га нотекис яқинлашади дейилади.

Бу ҳолда n_0 натурал сон ε га боғлиқ бўлиши билан бирга қаралаётган x га ҳам боғлиқ бўлади.

$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ га текис яқинлашувчилиги

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (x \in M)$$

каби белгиланади.

7-мисол. Ушбу

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

функционал кетма-кетликни $M = (-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

бўлиб, у $M = (-\infty, +\infty)$ да яқинлашувчи бўлади.

Энди яқинлашиш характерини аниқлаймиз. $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ дейилса, унда барча $n > n_0$ ва $\forall x \in M$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Юқоридаги таърифга биноан $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ кетма-кетлик лимит функция $f(x) = 0$ га текис яқинлашади:

$$\frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0 \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

(Юқорида айтилганлардан кўринадики, n_0 натурал сон фақат ε гагина боғлиқ: $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$).

8- м и с о л. Ушбу

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Аввало бу кетма-кетликнинг лимит функциясини топамиз:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} = x.$$

Энди $f_n(x)$ кетма-кетликнинг лимит функция $f(x) = x$ га яқинлашиш характерини аниқлаймиз. $\forall \varepsilon > 0$ сонни ($\varepsilon < 1$) олиб, n_0 натурал сон сифатида

$$n_0 = \left[(1 + x_0) \left(\frac{x_0}{\varepsilon} - 1 \right) \right]$$

ни олсак, унда $\forall n > n_0$, $x_0 \in [0, 1]$ учун

$$\begin{aligned} |f_n(x_0) - f(x_0)| &= \left| \frac{nx_0}{1+n+x_0} - x_0 \right| = \frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0} \leq \\ &\leq \frac{x_0(1+x_0)}{2+n_0+x_0} < \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Юқорида n_0 ни олинишидан унинг ε га ва x_0 нуқтага боғлиқлиги кўринади. Бирок, \bar{n}_0 деб

$$\begin{aligned} \bar{n}_0 &= \max_{0 \leq x \leq 1} n_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} \left[(1+x) \left(\frac{x}{\varepsilon} - 1 \right) \right] = \\ &= \left[2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

олинса, унда $\forall n > \bar{n}_0$ ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг $M = [0, 1]$ да лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради.

9- м и с о л. Қуйидаги

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

бўлади.

Энди берилган кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)=0$ га яқинлашиш характерини аниқлаймиз. $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам n_0 натурал сон сифатида

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon x} \right] \quad (x \neq 0)$$

олинса, унда $\forall n > n_0$ учун

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \\ &= \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{(n_0+1)x} < \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади.

(Равшанки, $x=0$ да $\forall n$ учун $f_n(0)=f(0)=0$.) Бу ҳолда n_0 нинг x га боғлиқлиги эвазига, ихтиёрий натурал n сон учун $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ ва $x = \frac{1}{n} \in (0, 1]$ қилиб олсак,

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади. Бу эса берилган $f_n(x)$ функционал кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)=0$ га нотекис яқинлашишни билдиради.

1-теорема. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг M тўпламда лимит функция $f(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

10-мисол. Ушбу

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Аввало бу кетма-кетликнинг лимит функциясини топамиз:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|,$$

сўнгра $|f_n(x) - f(x)|$ ни қараймиз:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \left| \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right) \right| = \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \right| = \\ &= \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x| \right)} \end{aligned}$$

Равшанки, $x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x| \right)} = \frac{1}{n}.$$

Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

булиши келиб чиқади. Юқоридаги 1-теоремага кўра берилган функционал кетма-кетлик $(-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

II- мисол. Ушбу

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} = 1$$

бўлади. Энди

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} - 1 \right| = \left| \frac{nx}{x^2 + n^2} \right| = \frac{nx}{x^2 + n^2}$$

нинг супремумини топамиз. Равшанки, $[0, 1]$ да

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = \sup \frac{nx}{x^2 + n^2} = \max \frac{nx}{x^2 + n^2}$$

бўлади. Агар $x \in [0, 1]$ ва $n > 1$ да

$$\left(\frac{nx}{x^2 + n^2} \right)' = \frac{n(x^2 + n^2) - nx \cdot 2x}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{n^3 - nx^2}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{n(n^2 - x^2)}{(x^2 + n^2)^2} > 0$$

эканлигини эътиборга олсак, унда $[0, 1]$ да $\frac{nx}{x^2 + n^2}$ нинг

ўсувчи бўлишини ва у $[0, 1]$ да ўзининг энг катта қийматини $x=1$ да қабул қилишини аниқлаймиз.

Демак,

$$\max \frac{nx}{x^2 + n^2} = \frac{n}{1 + n^2}$$

Шундай қилиб, берилган кетма-кетлик учун

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{1 + n^2}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган кетма-кетлик $[0, 1]$ да текис яқинлашувчи.

12- м и с о л. Ушбу

$$f_n(x) = nx^n(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки, $x=1$ да $f_n(1)=0$ ва $0 \leq x < 1$ да эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx^n(1-x) = 0$$

бўлади. Демак, берилган функционал кетма-кетлик $[0, 1]$ да яқинлашувчи, унинг лимит функцияси $f(x)=0$ бўлади. Бу яқинлашишнинг характерини аниқлаймиз.

$$|f_n(x) - f(x)| = |nx^n(1-x) - 0| = nx^n(1-x),$$

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{0 \leq x \leq 1} nx^n(1-x) = \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} nx^n(1-x). \end{aligned}$$

Энди $nx^n(1-x)$ функциянинг $[0, 1]$ даги максимум қийматини топамиз. Равшанки,

$$(nx^n(1-x))' = n^2x^{n-1}(1-x) - nx^n = n^2x^{n-1} - n(n+1)x^n$$

ва

$$n^2x^{n-1} - n(n+1)x^n = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{n}{n+1}.$$

$nx^n(1-x)$ функция $x = \frac{n}{n+1}$ да ўзининг максимум қийматига эришади. Бу максимум қиймат

$$n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

га тенг бўлади. Натижада

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}$$

бўлади. Демак, берилган кетма-кетлик $[0, 1]$ да нотекис яқинлашади.

Фараз қилайлик, X тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

3- т а ў р и ф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сон топилсаки, $n > n_0$, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X$ учун бир йўла

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X да фундаментал кетма-кетлик дейилади.

2- теорема (Коши теоремаси). $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун у X да фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

13- мисол. Ушбу

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчилигини Коши теоремасидан фойдаланиб кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг $[0, 1]$ да фундаментал бўлишини кўрсатамиз.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |x^n - x^{n+1} - (x^m - x^{m+1})| \leq \\ &\leq |x^n - x^{n+1}| + |x^m - x^{m+1}| = (x^n - x^{n+1}) + \\ &\quad + (x^m - x^{m+1}) \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} (x^n - x^{n+1}) + \\ &\quad + \sup_{0 \leq x \leq 1} (x^m - x^{m+1}) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра натурал n_0 сонни

$$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$$

деб олинса, у ҳолда барча $n > n_0$ ва барча $m > n_0$ учун

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал сон мавжудки, $n > n_0$, $m > n_0$ ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса берилган $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ функционал кетма-кетликнинг $[0, 1]$ да фундаментал эканини билдиради. Коши теоремасига кўра кетма-кетлик $[0, 1]$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол ва масалалар

Куйидаги функционал кетма-кетликларнинг лимит функцияларини топинг:

1. $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n}$, $-\infty < x < +\infty$.
2. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \leq x \leq 1$.
3. $f_n(x) = nx^2 \sin \frac{x}{n}$, $-\infty < x < +\infty$.
4. $f_n(x) = \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$, $-\infty < x < +\infty$.
5. $f_n(x) = \frac{1 + x^{2n}}{2 + x^{4n}}$, $-\infty < x < +\infty$.
6. $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$.

7. $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$.
8. $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$, $-\infty < x < +\infty$.
9. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $-\infty < x < +\infty$.
10. $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$, $0 < x < +\infty$.
11. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $1 \leq x \leq 2$.
12. $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $1 \leq x < +\infty$.
13. $f_n(x) = (x-1)\operatorname{arctg} x^n$, $0 < x < +\infty$.
14. $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $0 \leq x \leq 1$.
15. $f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n-x}\right)^n$, $-\infty < x < +\infty$.
16. $f_n(x) = \left(\frac{\sqrt[n]{x} + 1}{2}\right)^n$, $0 < x < +\infty$.
17. $f_n(x) = n[\ln(x+n) - \ln n]$.
18. $f_n(x) = \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.
19. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $0 \leq x < +\infty$.

20. Агар $f_0(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x) = 0$ эканини исботланг.

Қуйидаги функционал кетма-кетликларнинг текис яқинлашувчилигини исботланг:

21. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $-\infty < x < +\infty$.
22. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$, $1 \leq x < +\infty$.
23. $f_n(x) = xe^{-nx}$, $0 \leq x < +\infty$.
24. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.
25. $f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)$, $1 \leq x < +\infty$.

$$26. f_n(x) = \arcsin \frac{x^n}{1+x^n}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

27. Агар $[0, 1]$ сегментда $f_0(x) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$f_n(x) = \sqrt{x \cdot f_{n-1}(x)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

функционал кетма-кетликнинг $[0, 1]$ да текис яқинлашувчилигини исботланг.

28. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлса,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

функционал кетма-кетликнинг $[0, 1]$ да $f(x)$ га текис яқинлашишини исботланг.

29. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлса, ушбу

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left[1 - \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^n$$

функционал кетма-кетликнинг $(0, 1)$ да $f(x)$ га текис яқинлашишини исботланг.

30. Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган узлуксиз ҳамда 2π даврли функция бўлса, у ҳолда

$$f_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right) dt$$

функционал кетма-кетликнинг $(-\infty, +\infty)$ да $f(x)$ га текис яқинлашишини исботланг.

Қуйидаги функционал кетма-кетликларни текис ҳамда нотекис яқинлашишга текширинг:

$$31. f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \quad 0 < x < 1.$$

$$32. f_n(x) = \sqrt[n]{x \cdot \sin x}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$33. f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$34. f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

$$35. f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, \quad 0 < x < 1.$$

$$36. f_n(x) = x^n - x^{2n}, 0 \leq x \leq 1.$$

$$37. f_n(x) = nxe^{-nx^2}, 0 \leq x \leq 1.$$

$$38. f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} n^2 x}{\sqrt[3]{n+x}}, 0 \leq x < +\infty.$$

$$39. f_n(x) = \frac{\ln n^2 x}{n^2 x}, 1 < x < +\infty.$$

$$40. f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x^n\right), 0 < x < \frac{1}{2}.$$

3-§. ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИКЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

M тўпламда ($M \subset R$) бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in M)$$

1°. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ҳади M тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал кетма-кетлик M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

2°. Агар $x \rightarrow x_0$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади чекли

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

лимитга эга бўлиб, бу кетма-кетлик M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи, унинг лимити a ($a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$) эса $f(x)$ нинг $x \rightarrow x_0$ даги

лимитига тенг:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Бу ифодани

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

шаклда ҳам ёзиш мумкин.

3°. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx, \dots, \int_a^b f_n(x)dx, \dots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи, унинг limiti эса $\int_a^b f(x)dx$ га тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Кейинги тенгликни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$

каби ёзиш ҳам мумкин.

4°. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f'_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ҳосилага эга бўлиб бу ҳосилалардан тузилган

$$f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда лимит функция $f(x)$ шу $[a, b]$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\{f'_n(x)\}$ кетма-кетликнинг limiti $f'(x)$ га тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dx} f_n(x) \right] = f'(x) = \frac{d}{dx} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right].$$

Мисол ва масалалар

41. Ушбу

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

функционал кетма-кетлик учун $x=0$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dx} f_n(x) \right] \neq \frac{d}{dx} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]$$

эканини кўрсатинг.

42. Қуйидаги

$$f_n(x) = x^n$$

функционал кетма-кетлик $[0, 1]$ да лимит функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

га нотекис яқинлашса ҳам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$

бўлишини кўрсатинг.

43. Ушбу

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n \quad (0 \leq x \leq 1)$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)$ $[0, 1]$ да узлуксиз бўлса ҳам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx$$

бўлишини кўрсатинг.

44. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ да узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k (1-x)^{n-k}$$

функционал кетма-кетлик учун

$$\frac{d}{dx} f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$$

бўлишини исботланг.

45. $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз, 2π даврли функция бўлиб, у узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда ушбу

$$f_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right) dt$$

функционал кетма-кетлик учун

$$\frac{d}{dx} f_n(x) \rightrightarrows f(x)$$

бўлишини исботланг.

**4-§. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР ВА
УЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ**

X тўпламда ($X \subset R$) бирор

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ифода *функционал қатор* дейилади ва у $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

4- т а ь р и ф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ ($x_0 \in X$) сонли қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади, x_0 нуқта эса функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг барча яқинлашиш нуқталаридан иборат тўплам бу функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси дейилади.

(1) функционал қаторнинг дастлабки хадларидан тузилган ушбу

$$\begin{aligned} S_1(x) &= u_1(x), \\ S_2(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ &\dots \\ S_n(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

йигиндилар функционал қаторнинг қисмий йигиндилари дейилади. (1) функционал қаторнинг қисмий йигиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг лимити $S(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

функционал қаторнинг йигиндисиди дейилади. Агар ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)| \quad (x_0 \in X)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуктада *абсолют яқинлашувчи* дейилади. Функционал қаторнинг барча абсолют яқинлашадиган нукталаридан иборат тўпلام қаторнинг *абсолют яқинлашиш соҳаси* дейилади.

14- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < +\infty)$$

қаторнинг йиғиндисини топинг.

Аввало берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \dots + \\ &+ \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{nx+1}. \end{aligned}$$

энди $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1.$$

Демак, берилган функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x) = 1$ бўлади.

15- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ n+1, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Унда

$$\forall x \in (-1, 1) \text{ учун } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\forall x \in [1, +\infty) \text{ учун } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty,$$

$\forall x \in (-\infty, -1]$ учун $\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-1, 1)$ интервалдан иборат экан.

16- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} + \dots$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг. Бу қаторга Даламбер аломатини қўллаймиз (бунда x ни параметр деб ҳисоблаймиз). Равшанки,

$$u_n(x) = \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}, u_{n+1}(x) = \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}$$

бўлиб,

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left| \frac{2(n+1)x^{2n+1}}{(2n-1)x^{2n-1}} \right| = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{x^2}.$$

Маълумки, $\frac{1}{x^2} < 1$ бўлганда, яъни $|x| > 1$ бўлганда қатор

яқинлашувчи бўлади, $\frac{1}{x^2} > 1$, яъни $|x| < 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади. Энди $x=1$ ва $x=-1$ ҳолларни қараймиз. $x=-1$ бўлганда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1},$$

$x=1$ бўлганда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

сонли қаторлар ҳосил бўлади. Равшанки, бу қаторлар узоқлашувчидир.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ эканлигини топамиз.

17- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

функционал қаторнинг яқинлашиш ҳамда абсолют яқинлашиш соҳаларини топинг.

Равшанки, x нинг

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1$$

муносабатни қаноатлантирадиган қийматларида, Даламбер аломатига кўра, берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. Шунини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{(-1)^{n+1} (1-x)^{n+1}}{2n+1} \right| : \right. \\ &\left. \left| \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n-1} \right| \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \\ &= \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 &\Rightarrow -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x > 0, \text{ яъни } M = (0, +\infty) \end{aligned}$$

тўпلامда берилган функционал қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

$x=0$ да берилган функционал қатор

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-1} + \dots \quad (2)$$

сонли қаторга айланади. Бу қатор Лейбниц теоремасига кўра яқинлашувчи бўлади. Бироқ унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

қатор узоқлашувчи бўлганлиги сабабли (2) қатор шартли яқинлашувчидир. $(-\infty, 0)$ ораликда қатор узоқлашувчи экани равшан. Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[0, +\infty)$, абсолют яқинлашиш соҳаси эса $(0, +\infty)$ дан иборат.

5-§. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРНИНГ ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

X тўпلامда $(X \subset R)$ бирор яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

5- т а ʼ р и ф. Агар X тўпламда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал

қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик қатор йиғиндиси $S(x)$ га текис яқинлашса, у ҳолда бу функционал қатор X да текис яқинлашувчи дейилади.

$\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик X да $S(x)$ га нотекис яқинлашса, унда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор X да нотекис яқинлашувчи дейилади.

3- те о р е м а. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор X да $S(x)$ га

текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

1- э с л а т м а. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| \neq 0 \quad (x \in X)$$

бўлса, унда берилган қатор X да нотекис яқинлашувчи бўлади.

18- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатинг. Берилган қаторнинг йиғиндисини топамиз:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots \\ &+ \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Демак,

$$S(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Натижада

$$S_n(x) - S(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+n+1}$$

бўлиб,

$$\sup_{x \in (0, \infty)} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{n+1}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Юқоридаги 3-теоремага кўра берилган функционал қатор $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

19- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$$

функционал қаторнинг $(0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Авалло бу қаторнинг йигиндисини топамиз:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \dots + \\ &+ \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)} = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2x} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{1+3x} \right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x} \right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)x}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)x} \right) = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Демак,

$$S(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Унда

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in (0, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \\ &= \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)x} - \frac{1}{1+x} \right| = \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{1}{1+(n+1)x} \end{aligned}$$

бўлиб, $x = \frac{1}{n+1}$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0, +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{2} \neq 0$$

бўлади. Демак, берилган қатор $(0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчи. Вейерштрасс аломати. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ҳади X тўпланда

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

тенгсизликни қаноатлантиса ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор X да текис яқинлашувчи бўлади.

20- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} = \frac{\sin 1^2 x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \dots$$

функционал қаторни Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб текис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Берилган қаторнинг ҳар бир

$$u_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ҳади учун

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin n^2 x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

бўлади ва равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сонли қатор яқинлашувчи. Вейерштрасс аломатига кўра берилган функционал қатор $(-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

21- мисол. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг ва текис яқинлашишга текширинг.

x ўзгарувчини параметр ҳисоблаб, Коши аломатидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right) = x^2.$$

Демак, берилган қатор $x^2 < 1$, яъни $(-1, 1)$ да яқинлашувчи, $|x| > 1$ да узоқлашувчи. $x = \pm 1$ да

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

сонли қаторга эга бўламиз. Бу қаторнинг умумий ҳади учун, $n \rightarrow \infty$ да

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \neq 0$$

бўлганлиги сабабли у узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-1, 1)$ интервалдан иборат экан.

Ушбу $0 < a < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий a сонини олиб, $[-a, a]$ сегментни қараймиз. Равшанки, $[-a, a] \subset (-1, 1)$. Унда $\forall x \in [-a, a]$ учун

$$\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(a^2 + \frac{1}{n}\right)^n$$

бўлади. Натурал n_0 сонни шундай танлаб олиш мумкинки,

$$a^2 + \frac{1}{n} \leq b, n \geq n_0 (a^2 < b < 1)$$

бўлади. Натижада берилган функционал қаторнинг ҳар бир $\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n (n=1, 2, \dots)$ ҳади учун $\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \leq b^n$

бўлишини ва $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ қаторнинг яқинлашувчилигини аниқлаймиз. Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб, берилган

функционал қаторнинг $[-a, a]$ да $(0 < a < 1)$ текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Берилган қаторни $(-1, 1)$ ораликда нотекис яқинлашувчилигини кўрсатишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

22- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

функционал қаторнинг, Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб, $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Бу қаторнинг ҳадлари учун

$$x=0 \text{ да } u_n(0)=0, \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$x>0 \text{ да } u_n(x)>0, \quad (n=1, 2, \dots)$$

бўлади. Равшанки,

$$u'_n(x) = 2xe^{-nx} - x^2 ne^{-nx} = xe^{-nx}(2 - nx) = nxe^{-nx}\left(\frac{2}{n} - x\right)$$

бўлиб, $x = \frac{2}{n}$ да $u'_n\left(\frac{2}{n}\right) = 0$,

$$0 < x < \frac{2}{n} \text{ да } u'_n(x) > 0,$$

$$\frac{2}{n} < x < \infty \text{ да } u'_n(x) < 0$$

бўлади. Демак, $u_n(x)$ функция $x = \frac{2}{n}$ да максимумга эришади:

$$\max_{0 < x < +\infty} u_n(x) = u_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-n \cdot \frac{2}{n}} = \frac{4}{n^2} e^{-2}.$$

Демак, берилган функционал қаторнинг ҳар бир ҳади учун

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{4}{e^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

бўлади. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

қаторнинг яқинлашувчи эканини эътиборга олсак, унда Вейерштрасс аломатига кўра, берилган функционал

қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлишини топамиз.

4-теорема (Коши теоремаси). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

функционал қаторнинг X да текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг X да фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топинг:

$$46. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}.$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^n.$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}.$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} x e^{nx}.$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2)^n}.$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}.$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt[3]{\sin^n x}.$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} (5-x^2)^n.$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}.$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}.$$

Қуйидаги функционал қаторларнинг абсолют яқинлашиш соҳаларини топинг:

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi x}{n}.$$

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2x-3}{4} \right)^n.$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}.$$

$$62. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}.$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}.$$

$$63. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n} + x \right)^n.$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2}.$$

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}.$$

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}.$$

$$65. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{3} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right]^n.$$

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган ораликларда текис яқинлашувчилигини исботланг:

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, X=(-\infty, +\infty).$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}, X=(1, +\infty).$$

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}, X=[0, +\infty).$$

$$69. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, X=(-\infty, +\infty).$$

$$70. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{\sqrt{n}}, X=[0,1].$$

$$71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}, X=(-\infty, +\infty).$$

$$72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}, X=(-1,1).$$

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}, X=[0, +\infty).$$

$$74. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \arctg \frac{2x}{x^2+n^2}, X=(-\infty, +\infty).$$

$$75. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{nx^2}{2+n^3x^2} \right), X=(-\infty, +\infty).$$

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган ораликларда нотекис яқинлашувчилигини исботланг:

$$76. \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-(n-1)^2x} - e^{-n^2x}), X=[0,1].$$

$$77. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{1+nx}, X=(0, +\infty). \quad 78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x \cdot \sqrt{n}}, X=(0,1).$$

$$79. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, X=(-\infty, +\infty).$$

$$80. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2} \cdot \sin nx, X=[0,1].$$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{2^n}, X = (-2, 2).$ 82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3x}}, X = (0, 1].$
83. $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} \frac{x}{n})^2, X = (-\infty, +\infty).$
84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2} \cdot \sin \frac{x}{n}, X = (1, +\infty).$
85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+x}{n}, X = (1, +\infty).$

Куйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган ораликларда текис яқинлашувчилигини Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб исботланг:

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, X = [-1, 1].$
87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, X = (-2, +\infty).$
88. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, X = [1, +\infty).$
89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, X = (-\infty, +\infty).$
90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, X = [0, +\infty).$
91. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, X = (-\infty, +\infty).$
92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}, X = [-1, 3].$
93. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{1+n^2x}, X = [0, +\infty).$
94. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+nx^3} \right)^3, X = [0, +\infty).$
95. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(1+nx)}{x^n}, X = (2, +\infty).$

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган ораликларда текис ёки нотекис яқинлашувчилигини аниқланг:

96. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, X=[0, 2\pi].$

97. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}, X=(-\infty, +\infty).$

98. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+nx)^4}, X=[0, +\infty).$

99. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^3x^3}, X=[0, +\infty).$

100. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^3x^3}, X=[0, +\infty).$

101. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(x^n+1)}, X=[1, +\infty).$

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right), X=[0, +\infty).$

103. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \operatorname{tg} x}, X=(0, \frac{\pi}{2}).$

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+\sin x}, X=(-\infty, +\infty)$

105. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \operatorname{arctg} \frac{x}{2^n}, X=[-2, 2]$

106. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлишини исботланг.

107. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

функционал қаторнинг ҳам шу $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлишини исботланг.

108. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлишини исботланг.

6-§. ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

X тўпламда ($X \subset R$) яқинлашувчи $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, унинг йигиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in X).$$

1°. Функционал қатор йигиндисининг узлуксизлиги. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳадлари X тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор X да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йигиндиси $S(x)$ ҳам X да узлуксиз бўлади.

2°. Функционал қаторларда ҳадлаб лимитга ўтиш. Агар $x \rightarrow x_0$ да $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ҳади чекли

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = c_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

лимитга эга бўлиб, бу қатор X да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

қатор ҳам яқинлашувчи, унинг йигиндиси C эса $S(x)$ нинг $x \rightarrow x_0$ даги лимити

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$$

га тенг бўлади:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

3°. Функционал қаторни ҳадлаб интеграллаш. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир

$u_n(x)$ ($n=1,2,\dots$) ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи, унинг йигиндиси эса $\int_a^b S(x) dx$

га тенг бўлади:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = C$$

га тенг бўлади.

4°. Функционал қаторни ҳадлаб дифференциаллаш. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг

ҳар бир $u_n(x)$ ҳади ($n=1,2,\dots$) $[a, b]$ сегментда узлуксиз $u'_n(x)$ ($n=1,2,\dots$) ҳосиллага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ функционал қатор $[a, b]$ да текис

яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган функционал қаторнинг йигиндиси $S(x)$ шу $[a, b]$ да $s'(x)$ ҳосиллага эга ва

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

бўлади:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x).$$

23- м и с о л. Юқоридаги хоссалардан фойдаланиб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

функционал қаторнинг йиғиндисини топинг.

Маълумки (18- мисол),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

функционал қатор $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи, унинг

йиғиндиси $S(x) = \frac{1}{1+x}$ га тенг:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

(18- мисолга қаранг). Иккинчи томондан, бу қаторнинг ҳар бир ҳади қаралаётган ораликда узлуксиз. Демак, уни ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)}$$

Равшанки,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x),$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)} &= \int_0^x \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+t} \right) dt = \\ &= \ln(n+t) \Big|_0^x - \ln(n+1+t) \Big|_0^x = \\ &= \ln(n+x) - \ln n - \ln(n+1+x) + \ln(n+1) = \\ &= \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} = \ln(1+x).$$

24- мисол. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \cdot \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ қатор

$(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигидан, унинг йиғиндиси $s(x)$ нинг $x \rightarrow 0$ да лимити

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x} \cdot \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

эканлигини топамиз.

25- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x < 1)$$

функционал қаторнинг йигиндисини топинг.

Берилган функционал қаторнинг ҳар бир ҳади дифференциалланувчи бўлиб, уларнинг ҳосилаларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

қатор $[-a, a]$ ($0 < a < 1$) да текис яқинлашувчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Демак, берилган қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Кейинги тенгликни интеграллаб топамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 < x < 1).$$

26- м и с о л. Ушбу

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+x^2}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{n}}$$

функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз бўладими?

Бу функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $(0, +\infty)$ да узлуксизлиги равшан. Агар функционал қаторнинг $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатсак, унда

$f(x)$ функция (қатор йигиндиси сифатида) шу $(0, +\infty)$ да рузлуксиз бўлади.

Энди $x > 0$ да

$$\sqrt[4]{n+x^2} \geq \sqrt[4]{n}, \quad |\sin x| < x \quad 0 < \arctg x < x$$

эканлигини эътиборга олиб,

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \left| \frac{1}{\sqrt[4]{n+x^2}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \arctg \sqrt{\frac{x}{n}} \right| < \\ &< \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{nx}} \cdot \sqrt{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n^{5/4}} \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Равшанки, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ қатор яқинла-

шувчи. Вейерштрасс аломатига кўра қаралаётган қатор текис яқинлашувчи бўлади. Демак, $f(x)$ функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функционал қаторлар йигиндисини узлуксизликка текширинг:

109. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(1+x^{2n})}$

110. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

111. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2 x^2}$

112. $\sum_{n=1}^{\infty} [\arctg nx - \arctg(n-1)x], \quad 0 \leq x \leq 1.$

113. $\frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1+(n+1)x][1+nx]}$

114. $x + \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1} - x^n), \quad 0 \leq x \leq 1.$

115. $\frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n} \right), \quad 0 \leq x \leq 1.$

Куйидаги функционал қаторларни яқинлашиш соҳаларида ҳадлаб интеграллаш мумкинми?

$$116. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}.$$

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n};$$

$$117. \sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e^{-n^2 x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2}]. \quad 119. \sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n} - x^{2n-2}).$$

Куйидаги функционал қаторларни яқинлашиш соҳасида ҳадлаб дифференциаллаш мумкинми?

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}.$$

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2 x^2} - e^{-n^2 x^2}].$$

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n \pi x}{3^n}.$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}.$$

Куйидаги лимитларни топинг:

$$124. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}.$$

$$127. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1} - x).$$

$$125. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2^{n-1}}.$$

$$128. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

$$126. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(n+1)x}{\sqrt{n+1}} \right). \quad 129. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}.$$

130. Ушбу

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

функциянинг $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз ҳосилага эга эканини исботланг.

131. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

функционал қатор йиғиндиси $[0, +\infty)$ да узлуксиз, $(0, +\infty)$ да эса дифференциалланувчи эканини исботланг.

132. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n+1}} \right).$$

функционал қаторни $[0,1]$ да ҳадлаб, интеграллаш мумкинлигини кўрсатинг.

7-§. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

ёки умумийроқ

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + \\ + a_n (x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

қаторлар (бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ва x_0 — ўзгармас ҳақиқий сонлар) даражали қаторлар дейилади. Равшанки, даражали қаторлар функционал қаторларнинг хусусий ҳоли ($u_n(x) = a_n x^n$ ёки $u_n(x) = a_n (x - x_0)^n$; $n = 1, 2, \dots$).

5-теорема (Абель теоремаси). Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x нинг $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) қийматида

яқинлашувчи бўлса, x нинг

$$|x| < |x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

6-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x нинг

баъзи ($x \neq 0$) қийматларида яқинлашувчи, баъзи қийматларида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ягона r ($r > 0$) сон топиладики, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x нинг

$|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади.

6-таъриф. 6-теоремадаги r сони $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даража-

ли қаторнинг яқинлашиш радиуси, $(-r, r)$ интервал эса даражали қаторнинг яқинлашиш интервали дейилади.

Берилган даражали қатор ҳамма ($x \neq 0$) нукта-

ларда узоқлашса, унда $r=0$ деб олинади, қатор ҳамма x ларда яқинлашса, унда $r=\infty$ деб олинади.

2-эслатма. $x = \pm r$ нуқталарда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор яқинлашиши ҳам мумкин, узоқлашиши ҳам мумкин.

7-теорема (Коши — Адамар теоремаси).

Берилган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (3)$$

бўлади.

3-эслатма. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ бўлса, $r = +\infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ бўлса, $r = 0$ бўлади.

Даражали қатор $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ нинг яқинлашиш радиусини

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

формула ёрдамида ҳам (агар бу лимит мавжуд бўлса) аниқлаш мумкин.

4-эслатма. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(x_0 - r, x_0 + r)$ бўлади. Бунда r ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ қаторнинг яқинлашиш радиуси.

27-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}} + \dots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \dots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини, яқинлашиш интервалини ҳамда яқинлашиш соҳасини топинг.

Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (3) формулага кўра топамиз:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2 \sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=1$, яқинлашиш интервали эса $(-1,1)$ бўлади. $x = \pm 1$ да даражали қатор мос равишда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \sqrt{n}}$$

сонли қаторларга айланади. Бу қаторларнинг яқинлашувчилиги равшан. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1,1]$ сегментдан иборат.

28-мисол. Ушбу

$$1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)5^n} + \dots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини, яқинлашиш интервалини ҳамда яқинлашиш соҳасини топинг. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (*) формулага биноан топамиз:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)5^n} : \frac{1}{(n+2)5^{n+1}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 5. \end{aligned}$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=5$, яқинлашиш интервали $(-5,5)$ бўлади. $x = -5$ да

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

сонли қатор ҳосил бўлади ва у яқинлашувчи.
 $x=5$ да эса

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у узоқлашувчи бўлади.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-5, 5]$ ярим интервалдан иборат.

29-мисол. Ушбу

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{x^4}{2^2} + \dots + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} + \dots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини, яқинлашиш интервалини ҳамда яқинлашиш соҳасини топинг.

Даламбер аломатидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}} \right)}{\left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} \right)} \right| &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(n+1)^4}{n^2(n+2)^2} = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Демак, $\frac{x^2}{2} < 1$, яъни $x^2 < 2$ бўлганда қатор яқинлашувчи ва $x^2 > 2$ да қатор узоқлашувчи бўлади. Бундан берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = \sqrt{2}$, яқинлашиш интервали эса $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ бўлиши

келиб чиқади. $x = \pm \sqrt{2}$ да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}$ қатор хосил бўлиб, унинг умумий ҳади учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \neq 0$$

бўлганлиги сабабли, қатор узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси ҳам $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ интервалдан иборат экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси, яқинлашиш интервали ҳамда яқинлашиш соҳаларини топинг:

133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

135. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

134. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \cdot x^{2n}$

136. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

137. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.
138. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$.
139. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) x^n$.
140. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+4)^n}{5n+7} \right) x^n$.
141. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.
142. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.
143. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
144. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n x^n$.
145. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$.
146. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln n} \cdot x^n$.
147. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^{2n}} x^n$.
148. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.
149. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.
150. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)} x^{n-1}$.
151. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) (x-1)^n$.
152. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n} \right)^n$.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топинг:

153. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.
154. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$.
155. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx}$.
156. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos^n x$.
157. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$.

8-§. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (4)$$

берилган бўлсин.

1°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси $r (r > 0)$ бўлса, у ҳолда бу қатор $[-c, c]$ ($0 < c < r$) да текис яқинлашувчи бўлади.

2°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, у ҳолда бу қаторнинг

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

йиғиндиси $(-r, r)$ да узлуксиз функция бўлади.

3°. Агар (4) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлиб, бу қатор $x = r$ ($x = -r$) нуқталарда яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $x = r$ ($x = -r$) нуқтада чапдан (ўнгдан) узлуксиз бўлади.

4°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, бу қаторни $[a, b]$ ($[a, b] \subset (-r, r)$) ораликда ҳадлаб интеграллаш мумкин.

5°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, бу қаторни $(-r, r)$ да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.

30-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

функционал қаторнинг йиғиндисини топинг.

Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

даражали қатор $(-1, 1)$ да яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{x}{1-x}$ га тенг:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Бу қаторни ҳадлаб дифференциаллаб топамиз:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

31-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$$

тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

Равшанки, $(-1, 1)$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Кейинги тенгликни $[0, x]$ оралик $(0 < x < 1)$ буйича интеграллаб топамиз:

$$\begin{aligned} & \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right] dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \ln(1+t) \Big|_0^x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x). \end{aligned}$$

32-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

даражали каторнинг йигиндисини топинг ва ундан фойдаланиб

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

бўлишини кўрсатинг.

Равшанки, $(-1, 1)$ да

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликни $[0, x]$ $(0 < x < 1)$ оралик буйича интеграллаб топамиз:

$$\begin{aligned} & \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \arctg x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctg x. \end{aligned}$$

$x=1$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

сонли қаторга айланади. Бу қатор (ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор) Лейбниц теоремасига кўра яқинлашувчи бўлади. Унда $x=1$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги даражали қаторларнинг йигиндиларини ҳадлаб дифференциаллаш ва интеграллаш ёрдамида топинг:

$$158. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$162. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

$$159. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$163. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}.$$

$$160. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$164. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}.$$

$$161. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Қуйидаги қаторларнинг йигиндиларини топинг:

$$165. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$

$$166. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}.$$

$$167. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

168. Ушбу

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

функция

$$f^{(IV)}(x) = f(x)$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

169. Ушбу

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

функция

$$xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

9-§. ТЕЙЛОР ҚАТОРИ. ФУНКЦИЯЛАРНИ ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАРГА ЁЙИШ

$f(x)$ функция $x_0 (x_0 \in R)$ нуқтанинг бирор $U_\delta(x_0) = \{x \in R: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\}$ атрофида берилган бўлиб, шу атрофда исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлсин. Ушбу

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

даражали қатор $f(x)$ функциянинг *Тейлор қатори* дейилади. Хусусан, $x_0 = 0$ да қатор куйидагича бўлади:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

(одатда бу қаторни *Маклорен қатори* ҳам дейилади).

8-теорема. $f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ ($r > 0$) ораликда исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлиб, унинг $x=0$ нуқтадаги Тейлор қатори

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

бўлсин. Бу қатор $(-r, r)$ да $f(x)$ га яқинлашиши учун $f(x)$ функция Тейлор формуласи

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

нинг қолдиқ ҳади барча $x \in (-r, r)$ да нолга интилиши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

зарур ва етарли.

Маълумки, бу ҳолда Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади:

а) Лагранж кўринишида

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (c = \theta x, 0 < \theta < 1);$$

б) Коши кўринишида

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}(1-\theta)^n \quad (c = \theta x, 0 < \theta < 1);$$

в) Пеано кўринишида

$$r_n(x) = o(x^n)$$

бўлади.

Агар

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилган дейилади.

9-теорема. $f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ ораликда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Агар шундай ўзгармас $M > 0$ сони топилсаки, барча $x \in (-r, r)$ ҳамда барча $n (n = 1, 2, \dots)$ учун

$$|f^{(n)}(x)| < M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $(-r, r)$ ораликда $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади, яъни

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

бўлади.

Қуйида баъзи содда функцияларнинг Тейлор қаторларини келтирамиз:

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (5)$$

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (6)$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (7)$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (8)$$

$$5. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (|x| < 1). \quad (9)$$

33- м и с о л. Ушбу

$$f(x) = \operatorname{ch} x$$

функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Берилган функциянинг n -тартибли ($n=1,2,\dots$) ҳосиласи қуйидагича бўлади:

$$\operatorname{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \operatorname{sh} x, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса.} \end{cases}$$

Бундан:

$$\operatorname{ch}^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса} \end{cases}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функциянинг Тейлор қатори

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (10)$$

бўлади. Бу қаторнинг яқинлашиш интервалини топамиз. Даламбер аломатига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

бўлганлиги сабабли қаралаётган қаторнинг яқинлашиш интервали $(-\infty, +\infty)$ бўлишини аниқлаймиз. $f(x) = \operatorname{ch} x$ функция Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади (Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳад)

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{ch} \theta x, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{ch} \theta x, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса} \end{cases}$$

$(0 < \theta < 1)$ бўлади.

Агар

$$|\operatorname{sh} \theta x| = \left| \frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2} \right| \leq e^{|\theta x|},$$

$$|\operatorname{ch} \theta x| = \left| \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2} \right| \leq e^{|\theta x|}$$

ҳамда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

экани келиб чиқади. Демак, (10) қаторнинг йигиндиси $\operatorname{ch} x$ га тенг:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

34-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

Маълумки, $x \in (-1, 1]$ да

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

бўлади. Бунда x ни $-x$ га алмаштириб, топамиз:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Натижада

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^2}{3} + \dots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

бўлади. Кейинги қаторнинг $(-1, 1)$ да яқинлашувчилиги равшан. Демак,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^2}{3} + \dots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

35- мисол. Ушбу

$$f(x) = \sin^4 x$$

функцияни $x_0 = \frac{\pi}{4}$ нукта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

Аввало $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ эканини эътиборга олиб,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \end{aligned}$$

бўлишини тонамиз. Сўнгра $x = t + \frac{\pi}{4}$ алмаштиришни ба-
жарамиз:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8} \cos 4\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{8} \cos 4t \end{aligned}$$

Энди $\sin x$ ҳамда $\cos x$ ларнинг ёйилмаларинан фойдаланиб, ушбу

$$\begin{aligned} \sin 2t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \\ \cos 4t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} t^{2n} \end{aligned}$$

тенгликларга эга бўламиз. Натижада

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

36- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$$

йигиндини ҳисобланг.

Равшанки,

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = 2 \left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \right]$$

Унда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

бўлади. Агар (31, 32- мисолларга қаранг)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(1+1) = \ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{\pi}{2} - \ln 2$$

эканини топамиз.

37- мисол. Ушбу

$$\alpha = \sqrt[3]{130}$$

миқдорни 0,0001 аниқликда ҳисобланг.

Буни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125 \left(1 + \frac{5}{125}\right)} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Энди, бизга маълумки, ушбу

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$(-1 < x < 1)$ тенгликда $x = \frac{1}{25}$, $m = \frac{1}{3}$ дейилса, унда

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{2}{3^2 \cdot 25^4} + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 315^6} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4! \cdot 5^8} + \dots$$

ҳосил бўлади. Бу ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор бўлиб, Лейбниц теоремасига кўра

$$5 \cdot \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{2}{3^2 \cdot 2! \cdot 5^4}\right)$$

нинг хатоси кейинги ҳадидан, яъни $\frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 4! \cdot 5^6}$ дан кичик бўлади. Агар

$$\frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 5^6} = \frac{1}{81 \cdot 625} < 0,0001$$

ҳамда

$$5 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{2}{3^2 \cdot 2! \cdot 5^4}\right) = 5 + 0,06667 - 0,00089 = 5,06578$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда

$$\alpha = \sqrt[3]{130} \approx 5,06578$$

эканини топамиз.

38- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$$

интегрални тақрибий ҳисобланг.

Маълумки, $(-\infty, +\infty)$ да

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

бўлади. Бунда x ни $-x^2$ га алмаштириб, топамиз:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Кейинги тенгликни $[0, \frac{1}{4}]$ оралик бўйича интегралласак,

унда

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} + \frac{1}{4^5 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{1}{4^7 \cdot 3! \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

бўлади. Учта ҳаддини олиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} + \frac{1}{4^5 \cdot 2! \cdot 5} = \\ &= 0,25 - 0,0052 + 0,00009 = 0,24489. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx 0,24489.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исботланг:

$$170. a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \quad (a > 0).$$

$$171. \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$172. \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (-1 < x < 1).$$

$$173. \operatorname{arc} \sin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

$$174. \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

Юқоридаги (5) — (9) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидаги функцияларни x нинг даражалари бўйича даражали қаторга ёйинг:

$$175. e^{-x^2} \quad 176. \frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}.$$

177. $\sin \frac{x^2}{3}$.
178. $e^{2x} + 2e^{-x}$.
179. $\arccos x$.
180. $\cos^2 x$.
181. $x \cos^3 2x$.
182. $\ln(12 - x - x^2)$.
183. $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
184. $\frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.
185. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.
186. $\frac{x}{9+x^2}$.
187. $\frac{1}{(x^2+2)^2}$.
188. $\frac{1}{1+x+x^2}$.
189. $2x \arctg x - \ln(1+x^2)$.

Қуйидаги функцияларни кўрсатилган нукта а графида Тейлор қаторларига ёйинг ва бу қаторларнинг яқинлашиш радиусларини топинг:

190. $f(x) = \cos^4 x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.
191. $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$, $x_0 = -1$.
192. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, $x_0 = 1$.
193. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$, $x_0 = 2$.
194. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$.
195. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
196. $f(x) = e^x$, $x_0 = -2$.
197. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

Қуйидаги функцияларни турли усуллардан фойдаланиб, Маклорен қаторларига ёйинг ва бу қаторларнинг яқинлашиш радиусларини топинг:

198. $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

203. $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

199. $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

204. $f(x) = \arccos(1-2x^2)$.

200. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$.

205. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

201. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

206. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

202. $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$.

207. $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

208. Ушбу

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

функция

$$f'(x) - xf(x) = 0$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

209. Ушбу

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

функция

$$xf'(x) = (x+1) \cdot f(x)$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

210. Ушбу

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

тенгликлар маълум бўлган ҳолда

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

тенгликларни исботланг.

Қуйидаги қаторларнинг йиғиндиларини топинг:

$$211. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{2^n n!}.$$

$$212. \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n.$$

$$213. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}.$$

$$214. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$215. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n.$$

$$216. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

Микдорларни кўрсатилган аниқликда ҳисобланг:

$$217. \alpha = \sqrt[5]{250}, \quad 0,001.$$

$$220. \alpha = \arctg 0,2, \quad 0,0001.$$

$$218. \alpha = \sin 18^\circ, \quad 0,001.$$

$$219. \alpha = \ln 3, \quad 0,0001.$$

$$221. \alpha = \frac{1}{e}, \quad 0,0001.$$

Интеграл остидаги функцияларни даражали каторларга ёйиб, интегралларни кўрсатилган аниқликда ҳисобланг:

$$222. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad 0,001.$$

$$225. \int_0^1 \sin x^2 dx, \quad 0,001.$$

$$223. \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad 0,001.$$

$$226. \int_0^1 x^x dx, \quad 0,001.$$

$$224. \int_0^1 \cos x^2 dx, \quad 0,001.$$

XV боб

ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. ЧЕКСИЗ ОРАЛИҚ БҮЙИЧА ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ТУШУНЧАЛАРИ

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) қисмида интегралланувчи, яъни ихтиёрий $t(t > a)$ учун ушбу

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин.

1-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функциянинг limiti мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интеграл дейилади ва

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx. \quad (1)$$

2-таъриф. Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функциянинг limiti мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (1) хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса чексиз $[a, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи дейилади.

Агар $t \rightarrow +\infty$ да $F(t)$ функциянинг limiti чексиз бўлса ёки лимит мавжуд бўлмаса, (1) хосмас интеграл узоқлашувчи дейилади.

$f(x)$ функциянинг $(-\infty, a]$ ва $(-\infty, +\infty)$ ораликлар бўйича хосмас интеграллари, уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги ҳам юқоридаги каби таърифланади:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int_{t'}^t f(x)dx.$$

1-эслатма. Агар $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграллар мавжуд бўлса, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегрални қуйидагича ҳам таърифласа бўлади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

1-мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t xe^{-x^2}dx$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t xe^{-x^2}dx = \int_0^t e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2} dx^2 = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^t = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-t^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

бўлганлигидан эса

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

2- мисол. Ушбу

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \int_{t'}^t \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

бўлади. Агар

$$\begin{aligned} F(t, t') &= \int_{t'}^t \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int_{t'}^t \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{t'}^t = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2t'+1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} F(t, t') &= \lim_{\substack{t' \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2t'+1}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчи ва у

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

эканини топамиз.

3- мисол. Ушбу

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

хосмас интегрални яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки, $[a, t]$ ораликда ($a > 0$) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функция узлуксиз, демак $\int_a^t \frac{dx}{x^\alpha}$ интеграл мавжуд.

а) $\alpha > 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

бўлади. Демак, $\alpha > 1$ бўлганда берилган интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1};$$

б) $\alpha < 1$ ва $\alpha = 1$ бўлганда, мос равишда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty$$

бўлади. Демак, $\alpha \leq 1$ бўлганда берилган интеграл узоқлашувчи бўлади.

4- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x \sin x \, dx$$

хосмас интегрални узоқлашувчи эканини кўрсатинг. Таърифга кўра

$$\int_0^{+\infty} x \sin x \, dx$$

интеграл $t \rightarrow +\infty$ да

$$F(t) = \int_0^t x \sin x \, dx$$

функциянинг лимитидир. Равшанки,

$$F(t) = \int_0^t x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^t + \int_0^t \cos x dx = \\ = -t \cos t + \sin t$$

ва $t \rightarrow +\infty$ да бу функциянинг лимити мавжуд эмас. Демак, берилган интеграл узоқлашувчи.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчи эканини аниқланг ва қийматини топинг:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^2}$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

3. $\int_1^{+\infty} e^{-3x} dx$

4. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}$

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

9. $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

Қуйидаги хосмас интегралларнинг узоқлашувчи эканини исботланг:

11. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

13. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

12. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x}$

14. $\int_0^{+\infty} \sin x dx$

$$15. \int_{-\infty}^0 \frac{x+1}{x^2+1} dx.$$

$$16. \int_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx.$$

$$17. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x} dx.$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1}.$$

$$19. \int_1^{+\infty} x \cdot \cos x dx.$$

$$20. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

2-§. ЯҚИНЛАШУВЧИ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ. АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР

1°. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ хосмас интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx$$

хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx \pm \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади, бунда α, β — ўзгармас сонлар.

2°. Агар $\forall x \in [a, +\infty)$ учун $f(x) \leq g(x)$ бўлиб,

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи

бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

бўлади.

3°. Ньютон-Лейбниц формуласи. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда узлуксиз бўлиб, $F(x)$ эса унинг шу ораликдаги бошланғич функцияси бўлсин ($F'(x) = f(x)$).

Унда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) \quad (2)$$

бўлади. Бу ерда

$$F(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

(Одатда (2) ни ҳам Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.)

4°. Ўзгарувчини алмаштириш формуласи. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз, $\varphi(t)$ функция эса $[\alpha, \beta)$ да узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлиб,

$$a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = +\infty$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

бўлади.

5°. Бўлак лаб интеграллаш формуласи. Агар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ да узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u \cdot v)$ мавжуд бўлса,

у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} u dv = uv \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v du$$

бўлади. Бу ерда

$$u \cdot v \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (u \cdot v) - u(a)v(a).$$

5-мисол. Ушбу

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

интегрални ҳисобланг. Равшанки

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

бўлиб,

$$F(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2}$$

функция унинг бошланғич функциясидир. Унда Ньютон-Лейбниц формуласига кўра топамиз:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{3} \ln 2$$

6- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало бу интегрални куйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2\right)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx, \end{aligned}$$

сўнгра $t = x - \frac{1}{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Натигада

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

бўлиши келиб чиқади.

7- мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз. Берилган интегралда

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = \frac{1}{x^2} dx$$

дейилса, у ҳолда

$$du = \frac{1}{x^2+1} dx, \quad v = -\frac{1}{x}$$

бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_1^{+\infty} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

8- мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x} \quad (e \leq x < +\infty)$$

чизик ҳамда Ox ўқи билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Бундай шаклнинг юзи

$$S = \int_e^{+\infty} f(x) dx = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$$

бўлади. Интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_e^{+\infty} \ln^{-3} x d(\ln x) = \frac{\ln^{-2} x}{-2} \Big|_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$S = \frac{1}{2}.$$

9- мисол. Ушбу

$$0 < \int_{10}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x+1} dx < 0,1$$

Равшанки, тенгсизликни исботланг.

$$[10, +\infty) \text{ да } 0 < \frac{x^2}{x^4+x+1} < \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликни интеграллаб топамиз:

$$0 < \int_{10}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x+1} < \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Агар

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{10}^{+\infty} = 0,1$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$0 < \int_{10}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x+1} < 0,1$$

тенгсизликка келамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

21. $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx.$

24. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} dx.$

22. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{x})}.$

25. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx.$

23. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

26. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$

$$27. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \sqrt{e^x}}.$$

$$28. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 12}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$29. \int_0^{+\infty} x^{10} \cdot e^{-x} dx.$$

$$30. \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

$$31. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$32. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

$$33. \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos 3x dx.$$

$$34. \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 3x dx.$$

Куйидаги функция графиклари ва абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклларнинг юзини топинг:

$$35. f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$36. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

$$37. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}, \quad 1 \leq x < +\infty.$$

$$38. f(x) = x^4 e^{-x}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

$$39. f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$40. f(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Куйидаги тенгсизликларни исботланг:

$$41. 0,25 < \int_1^{+\infty} \frac{x^6+1}{x^{11}+1} dx < 0,35.$$

$$42. \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+4} dx \right| < \frac{\pi}{4}.$$

$$43. 0 < \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1} dx < \frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

$$44. 0 < \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 0,01.$$

$$45. 0 < \int_{10}^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{5 \cdot 2^{102}}.$$

**3-§. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ
ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМАЛАР.
ИНТЕГРАЛНИНГ АБСОЛЮТ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ**

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, ихтиёрый $x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \leq 0$ бўлсин.

1-теорема. $f(x)$ функция хосмас интегрални

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ нинг яқинлашувчи бўлиши учун, } \forall t \in (a, +\infty)$$

да $F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq C$ ($C = \text{const}$) бўлиши зарур ва етарли.

2-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in [a, +\infty)$ да

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

бўлсин. У ҳолда $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ яқинлашувчи бўлса,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ ҳам яқинлашувчи бўлади; } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ узоқла-}$$

шувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

3-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ да $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 \leq k \leq +\infty)$$

бўлсин. Агар $k < +\infty$ ва $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ интеграл яқинла-

шувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $k > 0$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграл узоқлашувчи

бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

Демак, агар $0 < k < +\infty$ бўлса, юқоридаги интеграллар бир вақтда яқинлашади ёки узоқлашади.

4-теорема. Агар x нинг етарли катта қийматларида ($x > x_0 > a$)

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$$

бўлса, у ҳолда $\forall x > x_0$ учун $\varphi(x) \leq C < +\infty$ ва $\alpha >$

> 1 бўлганда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geq$

$\geq C > 0$ ва $\alpha \leq 1$ бўлганда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл узоқла-

шувчи бўлади.

5-теорема. Агар $x \rightarrow +\infty$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{x}$ га нисбатан $\alpha (\alpha > 0)$ тартибли чексиз кичик бўлса, у ҳолда

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \leq$

≤ 1 бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда берилган бўлсин.

6-теорема (Коши теоремаси.) Қуйидаги

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0 (t_0 > a)$ сон топилиб, $t' > t_0$, $t'' > t_0$ бўлган ихтиёрий t' , t'' лар учун

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_a^{t''} f(x) dx - \int_a^{t'} f(x) dx \right| =$$

$$= \left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

7-теорема. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

3-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ абсолют яқинлашувчи интеграл дейилади, $f(x)$ функция эса $[a, +\infty)$ да абсолют интегралланувчи функция дейилади.

4-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ шартли яқинлашувчи интеграл дейилади.

8-теорема (Дирихле аломати). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ ораликда берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ да узлуксиз ва унинг шу ораликдаги бошланғич $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) функцияси чегараланган,

2) $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ да $g'(x)$ ҳосилага эга ва у узлуксиз функция,

3) $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ да камаювчи,

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

10- м и с о л. Ушбу

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Бу интеграл учун

$$F(t) = \int_{\frac{2}{\pi}}^t \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{t}$$

бўлиб, $\forall t \in \left[\frac{2}{\pi}, +\infty \right)$ да

$$F(t) = \cos \frac{1}{t} \leq 1$$

бўлади. Унда 1-теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

11- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Равшанки, $\forall x \geq 1$ учун

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

бўлади. Унда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

нинг яқинлашувчи бўлишини эътиборга олиб, 2-теоремага биноан

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

нинг ҳам яқинлашувчи эканини топамиз. Равшанки,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

12- м и с о л. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x + \ln x}}$$

интегрални яқинлашувчиликка текширинг. Бу хосмас интеграл билан бирга

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

интегрални қараймиз. Кейинги интегралнинг узоқлашувчи экани равшан.

Энди

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{4x + \ln x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{\ln x}{x}}} = \frac{1}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб, 3- теоремадан фойдаланиб, берилган хосмас интегралнинг узоқлашувчи эканини топамиз.

13- м и с о л. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + x}}$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{x \sqrt[3]{x^2 + x}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}}$$

бўлиб, $x \rightarrow +\infty$ да $y \sim 0\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right)$, яъни

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2+x}} = 0\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right)$$

бўлади. 5- теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

14- м и с о л. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини исботланг.

Интеграл остидаги функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} = \sin x \cdot \frac{1}{x^\alpha} = f(x) \cdot g(x).$$

Бу ерда

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Бу $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар 8- теореманинг (Дирихле аломати) барча шартларини қаноатлантиради:

1) $f(x) = \sin x$ функция $[1, +\infty)$ ораликда узлуксиз ва бошлангич функция $F(x) = -\cos x$ чегараланган,

2) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функция $[1, +\infty)$ да $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}$ хосилага эга ва у узлуксиз,

3) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) функция $[1, +\infty)$ ораликда камаювчи,

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Демак, 8- теоремага кўра берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

15- м и с о л. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

хосмас интегралнинг шартли яқинлашувчилигини кўрсатинг. Бу интегралнинг яқинлашувчилиги юқорида келтирилган 14- мисолдан келиб чиқади.

Энди

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx,$$

интегрални қараймиз. Равшанки,

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Унда ихтиёрий $t > 1$ учун

$$\int_1^t \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{2} \int_1^t \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx. \quad (3)$$

Маълумки,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Агар $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ нинг узоқлашувчилигини, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ нинг

эса яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда (3) тенгликда $x \rightarrow +\infty$ да лимитга ўтиб, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ хосмас

интегралнинг узоқлашувчилигини топамиз.

Демак, қаралаётган интеграл шартли яқинлашувчи.

16- м и с о л. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

интегралнинг абсолют яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Интеграл остидаги функция учун ихтиёрий $x \in [1, +\infty)$ да

$$\left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

бўлади. Равшанки,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

яқинлашувчи интегралдир. Унда 1-теоремага биноан

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. 7-теоремадан эса

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

нинг яқинлашувчилиги келиб чиқади. Демак, берилган интеграл абсолют яқинлашувчи.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни яқинлашувчилигини исботланг:

46. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx.$

51. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}.$

47. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} dx.$

52. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$

48. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

53. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$

49. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$

54. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg 2x}{x\sqrt{x}} dx.$

50. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}.$

55. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}} dx.$

Қуйидаги интегралларнинг шартли яқинлашувчилигини исботланг:

56. $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx.$

57. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^3+1} dx.$

$$58. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$62. \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} \sin x}{\ln x} dx.$$

$$59. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x} + \ln x} dx.$$

$$63. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$60. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$$

$$64. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$$

$$61. \int_2^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \ln x} dx.$$

$$65. \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{x^{2/3}} dx.$$

Қуйидаги интегралларнинг абсолют яқинлашувчилиги-
ни исботланг:

$$66. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

$$69. \int_1^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x dx.$$

$$67. \int_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x} - \ln x)^3} dx.$$

$$70. \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^3} \sin x^3 dx.$$

$$68. \int_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x} - \ln x)^3} dx.$$

$$71. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x\sqrt{x}} dx.$$

Қуйидаги интегралларни абсолют ва шартли яқинла-
шувчиликка текширинг.

$$72. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0).$$

$$75. \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sin \frac{1}{x}\right)}{x^\alpha} dx.$$

$$73. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^\alpha} \sin x dx.$$

$$76. \int_0^{+\infty} x^\alpha \sin x^2 dx.$$

$$74. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(2x - \cos(\ln x))^\alpha}.$$

$$77. \int_2^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)}.$$

$f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ ораликда берилган бўлиб,
бу оралиқнинг исталган $[t', t]$ $(-\infty < t' < t < +\infty)$ қис-
мида интеграланувчи бўлсин:

$$F(t', t) = \int_{t'}^t f(x) dx.$$

5-таъриф. Агар $t' = -t$ бўлиб, $t \rightarrow +\infty$ да $F(t', t) =$

$= \int_{t'}^t f(x) dx$ функциянинг limiti mavjud va chekli бўлса,
 у ҳолда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъноси-
 да яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$$

лимит эса $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати
 дейилади.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош
 қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бирок

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида

яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар
 доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$$

хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи:

$$\forall t > 0 \text{ учун } \int_{-t}^t \sin x dx \approx 0 \text{ ва, демак,}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \sin x \, dx = 0.$$

Бирок $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$ интеграл яқинлашувчи эмас.

17- м и с о л. Куйидаги

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \, dx$$

интегрални топинг.

Таърифга кўра

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{1+x}{1+x^2} \, dx$$

бўлади. Энди $\int_{-t}^t \frac{1+x}{1+x^2} \, dx$ ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_{-t}^t \frac{1+x}{1+x^2} \, dx &= \int_{-t}^t \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \right) \, dx = \int_{-t}^t \frac{dx}{1+x^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-t}^t \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}(-t) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Унда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{1+x}{1+x^2} \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}(-t)) = \pi$$

бўлади. Демак,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \, dx = \pi.$$

Куйидаги интегралларни топинг:

$$78. V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx.$$

$$80. V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$79. V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx.$$

$$81. V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx.$$

4-§. ЧЕГАРАЛАНМАГАН ФУНКЦИЯНИНГ ХОСМАС
ИНТЕГРАЛЛАРИ ВА УЛАРНИНГ
ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ТУШУНЧАЛАРИ

$f(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган бўлиб, b шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция $[a, b)$ ярим интервалнинг исталган $[a, t]$ ($a < t < b$) қисмида интегралланувчи, яъни ихтиёрий t ($a < t < b$) учун ушбу

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин.

Агар $t \rightarrow b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити

$$\lim_{t \rightarrow b-0} F(t)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a, b)$ бўйича хосмас интеграл дейилади ва

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-0} F(t) = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx \quad (*)$$

6-таъриф. Агар $t \rightarrow b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (2) хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади. $f(x)$ эса $[a, b)$ ва интегралланувчи функция дейилади.

Агар $t \rightarrow b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса ёки лимит мавжуд бўлмаса, (*) хосмас интеграл узоқлашувчи дейилади.

Худди юкоридагидек, a нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлганда $(a, b]$ оралиқ бўйича хосмас интеграл, a ва b нуқталар функциянинг махсус нуқталари бўлганда (a, b) оралиқ бўйича хосмас интеграл таърифланади:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{t \rightarrow a+0 \\ v \rightarrow b-0}} \int_t^v f(x) dx.$$

18-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +0} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

бўлиб,

$$F(t) = \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(1 + \sqrt{t})$$

бўлишидан эса

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = \lim_{t \rightarrow +0} 2(1 - \sqrt{t}) = 2$$

келиб чиқади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

19- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ v \rightarrow 1-0}} \int_t^v \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

бўлади. Агар

$$\begin{aligned} \int_t^v \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \arcsin(2x-1) \Big|_t^v = \\ &= \arcsin(2v-1) - \arcsin(2t-1) \end{aligned}$$

ва

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ v \rightarrow 1-0}} |\arcsin(2v-1) - \arcsin(2t-1)| = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини ҳамда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$

эканини топамиз.

20- мисол. Ушбу

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad J_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интегралларни яқинлашувчиликка текширинг.

Хосмас интеграл таърифидан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow a+0} \left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \Big|_t^b = \\ &= \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{1}{1-\alpha} [(b-a)^{1-\alpha} - (t-a)^{1-\alpha}] \quad (\alpha \neq 1). \end{aligned}$$

Бу лимит $\alpha < 1$ бўлганда чекли, демак I_1 хосмас интеграл яқинлашувчи, $\alpha > 1$ бўлганда эса чексиз, I_1 хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади. $\alpha = 1$ бўлганда

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t \rightarrow a+0} [\ln(x-a)] \Big|_t^b$$

бўлиб I_1 интеграл узоқлашувчи бўлади.

Демак,

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда узоқлашувчидир.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки,

$$I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

21- мисол. Ушбу

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлишини исботланг ва қийматини топинг.

Равшанки, бу интеграл 20- мисолга кўра $(\alpha = \frac{2}{3})$ яқинлашувчи. Энди унинг қийматини топамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, \\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \lim_{t \rightarrow 1-0} \int_{-1}^t \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t \rightarrow 1-0} (3\sqrt[3]{x-1}) \Big|_{-1}^t = \\ &= 3 \lim_{t \rightarrow 1-0} (\sqrt[3]{t-1} - \sqrt[3]{-2}) = 3\sqrt[3]{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \lim_{t \rightarrow 1+0} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t \rightarrow 1+0} (3\sqrt[3]{x-1}) \Big|_t^2 = \\ &= 3 \lim_{t \rightarrow 1+0} (\sqrt[3]{2-1} - \sqrt[3]{t-1}) = 3. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3(\sqrt[3]{2} + 1).$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг ва қийматини топинг:

82. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

84. $\int_0^1 \ln x dx$.

83. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

85. $\int_0^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

$$86. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$87. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$88. \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$89. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$90. \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$$

$$91. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

Қуйидаги хосмас интегралларнинг узоқлашувчи эканини исботланг:

$$92. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$$

$$93. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$94. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$$

$$95. \int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2-1}$$

$$96. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$97. \int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$$

$$98. \int_0^e \frac{dx}{e^x-1}$$

$$99. \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3}$$

5-§. ЯҚИНЛАШУВЧИ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ. АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b)$ да берилган бўлиб, b нукта шу функцияларнинг махсус нуктаси бўлсин.

1°. Агар $\int_a^b f(x) dx$ ва $\int_a^b g(x) dx$ хосмас интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)] dx$$

хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx$$

бўлади, бу ерда α, β — ўзгармас сонлар.

2°. Агар $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \leq g(x)$ бўлиб, $\int_a^b f(x) dx$

ва $\int_a^b g(x) dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

бўлади.

3°. Ньютон — Лейбниц формуласи. $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлиб, $F(x)$ эса унинг шу ораликдаги бошланғич функцияси бўлсин ($F'(x) = f(x)$). Унда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a) \quad (4)$$

бўлади. (Одатда (4) Ньютон-Лейбниц формуласи дейилди). Бу ерда

$$F(b-0) = \lim_{t \rightarrow b-0} F(t)$$

4°. Ўзгарувчини алмаштириш формуласи. $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз, $\varphi(t)$ функция эса $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлиб,

$$a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < \lim_{t \rightarrow b-0} \varphi(t) = b$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

бўлади.

5°. Бўлаклар интеграллаш формуласи. Агар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $\lim_{t \rightarrow b-0} (u \cdot v)$ мавжуд бўлса,

у ҳолда

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

бўлади. Бу ерда

$$u \cdot v \Big|_a^b = \lim_{t \rightarrow b-0} u(t)v(t) - u(a)v(a).$$

22- мисол. Ушбу

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$$

интегрални ҳисобланг. Равшанки,

$$f(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}$$

функциянинг (1, 2] ораликдаги бошланғич функцияси

$$F(x) = 2 \cdot \sqrt{\ln x}$$

бўлади. Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = (2 \sqrt{\ln x}) \Big|_{1-0}^2 = 2 \ln 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{\ln t} = 2 \ln 2.$$

23- мисол. Ушбу

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамыз: $x = 2 \sin t$. Бунда $x \in (0, 2)$ бўлганда $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

бўлиб, $dx = 2 \cos t dt$ бўлади. Натижада берилган интеграл қуйидагича ёзилади:

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\cos t} dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt$$

Кейинги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = (\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{2}{3}.$$

Демак,

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{16}{3}.$$

24- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

интегрални ҳисобланг. Бўлак-лаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб тонамиз. Берилган интегралда

$$u = \ln x, \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

дейилса, у ҳолда

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = 2\sqrt{2}$$

бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} \ln x \Big|_{+0}^1 - 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} \Big|_{+0}^1 = -4. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

100. $\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} dx.$

104. $\int_0^1 \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx.$

101. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}}.$

105. $\int_{-1}^1 \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} dx.$

102. $\int_{-2}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

106. $\int_{-0.5}^{-0.25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$

103. $\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}} dx.$

107. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx.$

$$108. \int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 109. \int_a^k \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \quad (a, b \in \mathbb{R}, a < b).$$

6-§. ХОСМАС ИНТЕГРАЛНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ҲАҚИДА
ТЕОРЕМАЛАР. ИНТЕГРАЛНИНГ АБСОЛЮТ
ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, b шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

9-теорема. $[a, b]$ да манфий бўлмаган $f(x)$ функциянинг $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall t \in (a, b)$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

10-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да берилган бўлиб, b шу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин. Агар $\forall x \in [a, b]$ да

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

бўлса, у ҳолда $\int_a^b g(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчили-

гидан $\int_a^b f(x) dx$ нинг яқинлашувчилиги; $\int_a^b f(x) dx$ интег-

ралнинг узоқлашувчилигидан $\int_a^b g(x) dx$ нинг узоқлашув-

чилиги келиб чиқади.

11-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $[a, b]$ да аниқланган, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 \leq k \leq +\infty)$$

бўлсин. Агар $k < +\infty$ ва $\int_a^b g(x) dx$ яқинлашувчи бўлса,

$\int_a^b f(x) dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади. Агар $k > 0$ ва

$\int_a^b g(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

12-теорема. Агар x нинг b га етарли яқин қийматларида

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha} (\alpha > 0)$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x) \leq C < +\infty$ ва $\alpha < 1$ бўлганда

$\int_a^b f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geq C > 0$ ва $\alpha \geq$

≥ 1 бўлганда $\int_a^b f(x)dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

13-теорема. Агар $x \rightarrow b - 0$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{b-x}$ га нисбатан $\alpha (\alpha > 0)$ тартибли чексиз катта бўлса,

у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи,

$\alpha \geq 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

14-теорема (Коши теоремаси). Қуйидаги

$$\int_a^b f(x)dx$$

хосмас интегралнинг (b — махсус нуқта) яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, $b - \delta < t' < b$, $b - \delta < t'' < b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий t' ва t'' лар учун

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_a^{t''} f(x)dx - \int_a^{t'} f(x)dx \right| = \left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

15-теорема (Дирихле аломати). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз ва унинг шу ораликдаги бошланғич $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) функцияси чегараланган,

2) $g(x)$ функция $[a, b]$ да $g'(x)$ ҳосилага эга ва у узлуксиз функция,

3) $g(x)$ функция $[a, b]$ да камаювчи,

4) $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x) g(x) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

16-теорема. Агар $\int_b^a |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи

чи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи

бўлади.

7-таъриф. Агар $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи

бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ абсолют яқинлашувчи интеграл

деб аталади, $f(x)$ функция эса $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи функция дейилади.

25-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Агар

$$F(t) = \int_0^t \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \int_0^t \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} (\arcsin t)^2$$

ва $\forall t \in [0, 1)$ да

$$F(t) = \frac{1}{2} (\arcsin t)^2 \leq \frac{\pi^2}{8}$$

эканлигини эътиборга олсак, 9-теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлишини топамиз.

26- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Равшанки, $\forall x \in (0,1)$ да

$$\frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$$

бўлади. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, 10-теоремадан фойдаланиб,

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

интегралнинг яқинлашувчи эканини топамиз.

27- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x} dx$$

хосмас интегралнинг узоқлашувчилигини кўрсатинг.

Маълумки, $\forall x \in (0,1]$ да $e^x > 1$ бўлади. Демак,

$$\frac{e^x}{\sin^2 x} > \frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in (0,1])$$

Энди $\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x} dx$ интегрални қараймиз. Таърифга кўра

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x} dx &= \lim_{t \rightarrow +0} \int_t^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} (-\operatorname{ctg} x)|_t^1 = \operatorname{ctg} 1 + \lim_{t \rightarrow +0} \operatorname{ctg} t = +\infty \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$ хосмас интеграл узоқлашувчи ва

10-теоремага биноан

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x} dx$$

интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

28- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\ln x} dx$$

интегрални яқинлашувчиликка текширинг. Бу хосмас интеграл билан бирга

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

яқинлашувчи интегрални қараймиз. Равшанки,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x \cdot \ln x} = 0.$$

11- теоремага кўра

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\ln x} dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

29- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Интеграл остидаги функция учун

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$$

бўлиб, $x \rightarrow 1-0$ да

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = 0 \left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}} \right)$$

бўлади. 13- теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчидир.

30- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг, қийматини топинг.

Равшанки, $0 < \alpha < 1$ бўлганда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{x}{\sin x} x^\alpha \cos x \right) = 0$$

бўлади.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

яқинлашувчи бўлгани учун 11- теоремага кўра қаралаётган интеграл яқинлашувчи бўлади. Энди бу интегралнинг қийматини топамиз:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt, \quad \left(t = \frac{x}{2}\right).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \quad \left(t = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

Демак,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

бўлиши келиб чиқади.

31- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

интегралнинг абсолют яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Аввало

$$\left| \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

бўлишини аниқлаймиз. Равшанки,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи. Унда 10- теоремадан

$$\int_0^1 \left| \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчилиги келиб чиқади. Бу эса берилган интегралнинг абсолют яқинлашувчилигини билдиради.

32- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{dx}{1-x}$$

интегрални абсолют ва шартли яқинлашувчиликка текширинг.

Интеграл остидаги функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{1-x} = f(x) \cdot g(x).$$

Бу ерда

$$f(x) = \sin \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}, \quad g(x) = 1-x.$$

Бу $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар 15-теореманинг (Дирихле аломати) барча шартларини қаноатлантиради.

1) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sin \frac{1}{1-x}$ функция $[0,1)$ да узлуксиз

ва унинг бошланғич функцияси $F(x) = -\cos \frac{1}{1-x}$ чегра-
раланган;

2) $g(x) = 1-x$ функция $[0,1)$ да $g'(x) = -1$ ҳосилага эга ва у узлуксиз функция;

3) $g(x) = 1-x$ функция $[0,1)$ да камаювчи,

4) $\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) = 0$.

Демак, 15-теоремага кўра берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

Равшанки,

$$\left| \frac{1}{1-x} \cdot \sin \frac{1}{1-x} \right| \geq \frac{1}{1-x} \sin^2 \frac{1}{1-x}. \quad (5)$$

Энди

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \cdot \sin^2 \frac{1}{1-x} dx$$

интегралнинг узоқлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $\delta > 0$ сонни олайлик. Агар $\varepsilon = \frac{1}{4}$, t' ва t'' лар сифатида $1 - \delta < t' < 1$, $1 - \delta < t'' < 1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи

$$t' = 1 - \frac{1}{n\pi}, \quad t'' = 1 - \frac{1}{2n\pi}$$

лар олинса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \left| \int_{t'}^{t''} \sin^2 \frac{1}{1-x} \cdot \frac{dx}{1-x} \right| &= \left| \int_{1-\frac{1}{n\pi}}^{1-\frac{1}{2n\pi}} \sin^2 \frac{1}{1-x} \cdot \frac{dx}{1-x} \right| = \\ &= \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt > \frac{1}{2n\pi} \int_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2n\pi} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Бу эса, Коши теоремасига мувофиқ,

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \sin^2 \frac{1}{1-x} dx$$

интегралнинг узоқлашувчилигини билдиради.

Юқоридаги (5) муносабатдан ва 10-теоремадан фойдаланиб,

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{1-x} \sin \frac{1}{1-x} \right| dx$$

интегралнинг узоқлашувчи бўлишини топамиз.

Демак,

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \sin \frac{1}{1-x} dx$$

хосмас интеграл шартли яқинлашувчи экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни яқинлашувчилигини исботланг:

$$110. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$$

$$115. \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}.$$

$$111. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}.$$

$$116. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}.$$

$$112. \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$117. \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

$$113. \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx.$$

$$118. \int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$114. \int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^2}{16-x^2}} dx.$$

$$119. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx.$$

Қуйидаги интегралларнинг узоқлашувчилигини исботланг:

$$120. \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

$$123. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$$

$$121. \int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3 - 2x^2 + 4}.$$

$$124. \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

$$122. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$$

$$125. \int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{x \sqrt{\sin x}} dx.$$

Қуйидаги хосмас интегралларни яқинлашувчиликка текширинг:

$$126. \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos x}{x \sqrt{x}} dx.$$

$$129. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x - \sqrt{x}} dx.$$

$$127. \int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}.$$

$$130. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}.$$

$$128. \int_0^1 x^2 \ln^2 \frac{1}{x} dx.$$

$$131. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}.$$

$$132. \int_0^1 \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \ln^2(1+x)} dx. \quad 134. \int_0^1 \frac{t}{x \sqrt{x}} \cos \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$133. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^2+x^2} - e^{\cos x}}{x^2} dx. \quad 135. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + \arctg x}}.$$

Қуйидаги хосмас интегралларни абсолют яқинлашувчиликка текширинг:

$$136. \int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^2+1} \sin \frac{1}{x} dx. \quad 139. \int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x-1} \sin \frac{1}{x} dx.$$

$$137. \int_0^{0.5} \frac{\cos^3 \ln x}{x \ln x} dx. \quad 140. \int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^2} dx.$$

$$138. \int_0^{0.5} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \cos \frac{1}{\alpha^2} dx. \quad 141. \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{(\sqrt{x-x})^\alpha} dx.$$

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a, c - \eta_1)$ ва $[c + \eta_2, b)$ ($\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$) оралиқларда интегралланувчи бўлиб, c нукта функциянинг махсус нуктаси бўлсин:

Маълумки, $\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0$ да ушбу

$$F(\eta_1, \eta_2) = \int_a^{c-\eta_1} f(x) dx + \int_{c+\eta_2}^b f(x) dx$$

функциянинг лимити $f(x)$ функциянинг (a, b) даги хосмас интегралли дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow 0 \\ \eta_2 \rightarrow 0}} F(\eta_1, \eta_2) = \int_a^b f(x) dx \quad (6)$$

Агар $F(\eta_1, \eta_2)$ функциянинг лимити чекли бўлса, (4) хосмас интеграл яқинлашувчи, акс ҳолда интеграл узоқлашувчи дейилади.

8- т а ъ р и ф. Агар $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ ва $\eta \rightarrow 0$ да

$$F_0(\eta, \eta) = \int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta}^b f(x) dx$$

функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F_0(\eta, \eta).$$

лимит эса $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати дейилади. Уни

$$V.P. \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади:

$$V.P. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta}^b f(x) dx \right].$$

$\int_a^b f(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бирок $\int_a^b f(x) dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишдан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи:

$$V.P. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\eta} \frac{1}{x} dx + \int_{\eta}^1 \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$-\lim_{\eta \rightarrow 0} [\ln|x| |_{-1}^{-\eta} + \ln|x| |_{\eta}^1] = 0.$$

Бирок $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ хосмас интеграл яқинлашувчи эмас.

Қуйидаги интегралларни топинг:

$$142. \quad \text{V.P.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b).$$

$$144. \quad \text{V.P.} \int_0^{\pi} x \operatorname{tg} x dx.$$

$$143. \quad \text{V.P.} \int_{0.5}^4 \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$145. \quad \text{V.P.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-5\sin x}.$$

XVI боб

ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

$f(x, y)$ функция R^2 фазодаги бирор

$$D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E \subset R\}$$

тўпламда берилган бўлсин. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайинланган қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ ораликда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1)$$

Одатда (1) интеграл *параметрга боғлиқ интеграл*, y ўзгарувчи эса *параметр* дейилади. Параметрга боғлиқ интегралларда $I(y)$ функциянинг бир қатор хоссалари (лимити, узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги, интегралланувчилиги ва х.к.) ўрганилади. Бу хоссаларни ўрганишда $f(x, y)$ функциянинг y бўйича limiti ва унга интилиш характери муҳим роль ўйнайди.

$f(x, y)$ функция D тўпламда берилган, y_0 эса E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $(\forall x \in [a, b])$ учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсаки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b]$$

бўлса, y ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функциянинг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси дейилади.

$f(x, y)$ функция D тўпланда берилган бўлиб, ∞ E тўпланинг лимит нуқтаси бўлсин.

2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $(x \in [a, b])$ учун шундай $\Delta = \Delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсаки, $|y| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, y ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функциянинг $y \rightarrow \infty$ даги лимит функцияси дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x \sin y$$

функцияни $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$ тўпланда қарайлик. $y \rightarrow \frac{\pi}{2}$ даги лимит функция x эканлигини кўрсатинг.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ га кўра, $\delta = \varepsilon$ деб олинса, унда $|y - y_0| = \left| y - \frac{\pi}{2} \right| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in \mathbb{R}$ ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$\begin{aligned} |f(x, y) - \varphi(x)| &= |x \sin y - x| = |x| |\sin y - 1| = \\ &= |x| \left| \sin y - \sin \frac{\pi}{2} \right| = |x| \left| 2 \sin \frac{y - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{y + \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| y - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $y \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да $f(x, y) = x \sin y$ функциянинг лимит функцияси

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin y = x$$

бўлади.

2- мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \frac{yx}{1+y^2x^2}$$

функция $D = \{(x,y) \in R^2: 0 \leq x \leq 1, y \in R\}$ тўпламда берилган бўлсин. $y \rightarrow \infty$ даги лимит функцияни топинг.

$\varphi(x) = 0$ эканлигини кўрсатамиз.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\Delta = \frac{1}{x\varepsilon}$ деб олинса, унда $|y| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in R$ учун

$$|f(x,y) - \varphi(x)| = \left| \frac{yx}{1+y^2x^2} - 0 \right| < \frac{1}{yx} < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $0 < x \leq 1$ учун $y \rightarrow \infty$ да $f(x,y) = \frac{yx}{1+y^2x^2}$ функциянинг лимит функцияси $\varphi(x) = 0$ бўлади.

$x = 0$ да $\varphi(0) = 0$ эканлиги равшандир.

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида, лимит функция таърифидаги $\delta = \varepsilon$ бўлиб, у фақат ε гагина боғлиқ, иккинчисида эса $\Delta = \frac{1}{x\varepsilon}$ бўлиб, у берилган $\varepsilon > 0$ билан бирга қаралаётган x нуқтага ҳам боғлиқ эканлигини кўрамиз.

Лимит функция таърифидаги $\delta > 0$ нинг фақат $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ қилиб танланиши мумкин бўлган ҳол муҳимдир.

3- таъриф. D тўпламда берилган $f(x,y)$ функциянинг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ топилсаки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ ва $\forall x \in [a,b]$ учун

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x,y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x)$ га $[a,b]$ да текис яқинлашади дейилади.

4- таъриф. D тўпламда берилган $f(x,y)$ функциянинг $y \rightarrow y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин.

$\forall \delta > 0$ олинганда ҳам шундай $\varepsilon_0 > 0$, $x_0 \in [a,b]$ ва $|y_1 - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y_1 \in E$ топилсаки, ушбу

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, y ҳолда $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ га нотекис яқинлашади дейилади.

Юқорида келтирилган 1- мисолда $f(x, y) = x \sin y$ функция $y \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да ўз лимит функцияси x га текис яқинлашиши равшандир. 2- мисолда эса $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2y^2}$ функция $y \rightarrow \infty$ да лимит функция $\varphi(x) = 0$ га нотекис яқинлашади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \Delta > 0$ сонни олайлик. Агар $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, y_1 сифатида $|y_1| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий y_1 ни ва $x_0 = \frac{1}{y_1}$ деб олсак, y ҳолда

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x)| = \frac{y_1 \cdot \frac{1}{y_1}}{1 + y_1^2 \cdot \frac{1}{y_1^2}} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 = \frac{1}{3}$$

бўлиб, бу 4- таърифга кўра $y \rightarrow \infty$ да $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2y^2}$ функция ўз лимит функциясига нотекис яқинлашишини билдиради.

3- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y}$$

функция $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x \leq 1, 0 < y < +\infty\}$ тўпламда қаралаётган бўлсин. $y \rightarrow +\infty$ да лимит функцияни топинг ва яқинлашиш характери текширинг.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y} = \frac{1}{1 + e^x}$$

эканини кўриш қийин эмас.

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = \left| \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y} - \frac{1}{1 + e^x} \right| = \frac{\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \right|}{\left[1 + \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \right] (1 + e^x)}$$

Агар $a = e^{\ln a}$ ва $x > 0$ ларда $\ln(1+x) < x$ эканлигини эътиборга олсак, y холда $|f(x,y) - \varphi(x)|$

$$\begin{aligned} < \frac{\left| e^x - e^{y \left(\frac{x - x^2}{2y^2} \right)} \right|}{4} = \frac{\left| e^x - e^{x - \frac{x^2}{2y}} \right|}{4} = \\ = \frac{e^x \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2y}} \right)}{4} < \frac{e}{4} \left(1 - e^{-\frac{1}{2y}} \right). \end{aligned}$$

$\frac{e}{4} \left(1 - e^{-\frac{1}{2y}} \right) < \varepsilon$ тенгсизликни ечиб топамиз:

$$y > \frac{1}{2 \ln \left(1 - \frac{4\varepsilon}{e} \right)}$$

Агар $\Delta = \frac{1}{2 \ln \left(1 - \frac{4\varepsilon}{e} \right)}$ десак, y холда $\forall \varepsilon > 0$ га кўра

$$\Delta = \frac{1}{2 \ln \left(1 - \frac{4\varepsilon}{e} \right)}, \quad y > \Delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y$ лар учун ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$|f(x,y) - \varphi(x)| = \left| \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{y} \right)^y} - \frac{1}{1 + e^x} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса 3-таърифга кўра берилган $f(x,y)$ функцияни $y \rightarrow +\infty$ да лимит функция $\varphi(x)$ га текис яқинлашишини билдиради.

4-мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \sin \frac{x}{y}$$

функция $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 < y < +\infty\}$ тўпلامда берилган бўлсин. $y \rightarrow +\infty$ да лимит функцияни топинг ва интилиши характерини текширинг.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sin \frac{x}{y} = 0 \quad \text{эканини кўриш}$$

қийин эмас: $\varphi(x) = 0$

$$|f(x,y) - \varphi(x)| = \left| \sin \frac{x}{y} \right| \leq \left| \frac{x}{y} \right| < \varepsilon \Rightarrow y > \frac{|x|}{\varepsilon}$$

$\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\Delta = \frac{|x|}{\varepsilon}$ десак, у ҳолда $|y| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y$ учун $|\sin \frac{x}{y}| < \varepsilon$ бўлади.

Бу ерда $\Delta = \frac{|x|}{\varepsilon}$ фақатгина ε га боғлиқ бўлмай x га ҳам боғлиқдир. Δ ни x га боғлиқмас қилиб олиб бўлмаслигини кўрсатишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

Демак, қаралаётган функция ўз лимит функциясига 4- таърифга кўра нотекис яқинлашади.

Т е о р е м а. $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да лимит функция $\varphi(x)$ га эга бўлиб, унга текис яқинлашиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $x(x \in [a, b])$ га боғлиқ бўлмаган шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, $|y - y_0| < \delta$, $|y' - y_0| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\forall y, y' \in E$ ҳамда $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

2-§. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ФУНКЦИОНАЛ ХОССАЛАРИ

1-теорема. $f(x, y)$ функция y нинг E тўпладан олинган ҳар. бир тайин қийматида x нинг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бўлса ва унга текис яқинлашса, у ҳолда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (2)$$

бўлади.

2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

3-теорема. $f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган ва y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар

$f(x, y)$ функция D тўпламда $f_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга бўлиб, y D да узлуксиз бўлса, y ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c, d]$ ораликда $I'(y)$ ҳосилага эга ва ушбу

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx \quad (3)$$

муносабат ўринлидир.

4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция 2-теорема шартларини қаноатлантирса, y ҳолда $\int_c^d I(y) dy$ интеграл мавжуд

ва

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (4)$$

муносабат ўринлидир.

$f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг $[c, d]$ ораликдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлсин.

$x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да берилган ва $\forall y \in [c, d]$ учун

$$a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b \quad (5)$$

бўлсин. U ҳолда

$$\tilde{I}(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \quad (1)$$

интеграл мавжудлиги ва y параметр y га боғлиқлиги равшандир.

5-теорема. $f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда узлуксиз, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функциялар $[c, d]$ да узлуксиз ва (5) шартни қаноатлантирсин. U ҳолда

$$\tilde{I}(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

функция ҳам $[c, d]$ ораликда узлуксиз бўлади.

6-теорема. $f(x,y)$ функция $D = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ тўпланда узлуксиз, $f'_y(x,y)$ хусусий ҳосилага эга ва D да узлуксиз, $\alpha(y), \beta(y)$ функциялар $\alpha'(y), \beta'(y)$ ҳосилаларга эга ва улар (5) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c,d]$ ораликда ҳосилага эга ва

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y) \quad (6)$$

муносабат ўринлидир.

5-теорема шартлари бажарилган ҳолда $I(y)$ функциянинг $[c,d]$ ораликда интегралланувчи эканлиги келиб чиқади.

5-мисол. Ушбу

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$ ни топинг. Интеграл остидаги $f(x,\alpha) = x^2 \cos \alpha x$ функция $x \in [0,2], \alpha \in R$ ларда узлуксиз экани равшандир. Жумладан, у $D = \{(x,y) \in R^2 : x \in [0,2], \alpha \in [0,2]\}$ тўпланда узлуксиз.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x,\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} x^2 \cos \alpha x = x^2,$$

$$\begin{aligned} |f(x,\alpha) - x^2| &= |x^2 \cos \alpha x - x^2| = |x^2(\cos \alpha x - 1)| = x^2 |\cos \alpha x - 1| = x^2 |1 - \cos \alpha x| = \\ &= x^2 \left| 2 \sin^2 \frac{\alpha x}{2} \right| \leq 2x^2 \cdot \frac{|\alpha x|}{2} \cdot \frac{|\alpha x|}{2} = \frac{\alpha^2 x^4}{2} \leq 8\alpha^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}}$ десак,

$|f(x,\alpha) - x^2| < \varepsilon$ бўлади. Бу эса $\alpha \rightarrow 0$ да $f(x,\alpha) = x^2 \cos \alpha x$ функциянинг лимит функция x^2 га текис яқинлашишини билдиради. 1-теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx = \int_0^2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} x^2 \cos \alpha x dx = \int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

6-мисол. Ушбу $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$ ни топинг.

Юқорида келтирилган 3- мисолга кўра интеграл остидаги

$f(x, n) = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$ функция $n \rightarrow \infty$ да лимит функция $\frac{1}{1 + e^x}$ га текис яқинлашади. Демак, 1- теоремага кўра интеграл остида лимитга ўтиш мумкин, яъни

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} = \int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = - \int_0^1 \frac{d(e^{-x} + 1)}{e^{-x} + 1} = \end{aligned}$$

бўлади.

7- мисол. Ушбу

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$$

интегралда лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкинми?

Фараз қилайлик, лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкин бўлсин. Лопиталь қоидасини қўллаш

билан $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}} = 0$ эканини кўриш қийин эмас. Демак,

$$\int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = 0$$

бўлади.

Энди интегрални қийматини ҳисоблаб, сўнгра лимитга ўтамыз:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Демак, лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкин эмас экан.

Нега? Шарҳлаб беринг!

8- м и с о л. Ушбу

$$I(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

функциянинг $y=0$ нуктадаги ҳосиласининг мавжудлигини ҳамда (3) формула ўринлилигини текширинг.

Фараз қилайлик, $I(y)$ функциянинг $y_0 \neq 0$ нуктада ҳосиласи мавжуд бўлиб, (3) формула ўринли бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^1 \frac{y_0 dx}{x^2 + y_0^2} = \int_0^1 \frac{y_0 dx}{\left(\left(\frac{x}{y_0}\right)^2 + 1\right) y_0^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{y_0}\right)}{1 + \left(\frac{x}{y_0}\right)^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{y_0} \end{aligned}$$

бўлади.

Энди берилган интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб, бевосита ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} I(y) &= x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx = \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + \int_0^1 \frac{y^2 dx}{x^2 + y^2} = \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_{x=0}^{x=1} = \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

$I(0) = -1$ бўлгани учун

$$I'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{I(y) - I(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \sqrt{1 + y^2}}{y} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right) = \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

Интеграл остидаги функциянинг y бўйича ҳосиласи $\frac{y}{x^2+y^2}$ бўлиб, $y=0$ нуктада нолга тенг.

Демак, қаралаётган интеграл учун (3) формула ўринли эмас. Маълумки, (3) формула ўринли бўлишининг асосий шартларидан бири $f'_a(x, a) = \frac{y}{x^2+y^2}$ функциянинг узлуксизлигидир. Бу функциянинг $(0,0)$ нуктада узлуксиз эмаслиги равшандир.

9- м и с о л. Ушбу

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(atgx)}{\operatorname{tg}x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Фараз қилайлик, $x \neq a \geq \varepsilon > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$f(x, a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(atgx)}{\operatorname{tg}x}, & \text{агар } x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ a, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=\frac{\pi}{2} \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция ҳамда

$$f'_a(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & \text{агар } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = \frac{\pi}{2} \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциялар $D = \{(x, a) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 < \varepsilon \leq a\}$ тўртбurchакда узлуксиз экани равшандир.

Демак, (3) формулани қўллаш мумкин.

Натижада

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

бўлади.

Бу интегралда $\operatorname{tg}x = t$ алмаштиришни бажариш натижасида

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$$

интегралга келамиз.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} &= \frac{1}{1-a^2} \int_0^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{a}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{d(at)}{1+t^2a^2} = \\ &= \frac{1}{1-a^2} \operatorname{arctg}t \Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{a^2-1} \operatorname{arctg}(at) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}. \end{aligned}$$

Энди

$$I'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a} \text{ ифодани интеграллаб, топамиз:}$$

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C, \text{ бу ерда } C \text{ — ихтиёрий ўзгармас}$$

сон.

$A \rightarrow +0$ да лимитга ўтиб, охириги муносабатдан куйидагини оламиз:

$$\lim_{a \rightarrow +0} I(a) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 + C,$$

яъни:

$$C = \lim_{a \rightarrow +0} I(a).$$

Интеграл остидаги функция узлуксиз бўлгани учун 2-теоремадан фойдаланиб

$$I(0) = \lim_{a \rightarrow +0} I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x} dx = 0$$

эканини, яъни $C=0$ эканини топамиз.

Шундай қилиб, $a > 0$ ларда

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$$

бўлади.

Худди юқоридагига ўхшаш $a < 0$ бўлганда

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1 - a)$$

эканини кўрсатиш қийин эмас. Демак, қаралаётган интеграл $\forall a$ да

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + |a|)$$

га тенг.

10- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $x > 0$ да

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

бўлади.

$$\text{Демак, } I = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

Интеграл остидаги $f(x, y) = x^y$ — функция $D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 1], y \in [a, b]\}$ тўпламда узлуксизлигидан (4) формулани қўллаш натижасида топамиз:

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

Шундай қилиб, қаралаётган интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{1+b}{1+a}$$

экан.

11- мисол. Ушбу

$$F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

интеграл учун $F'(\alpha)$ ни топинг.

Юқорида келтирилган 6- теорема шартларини текшира-
рамыз.

$f(x, \alpha) = \frac{\sin \alpha x}{x}$ функция $x \neq 0$ ларда узлуксиз,

$f'(x, \alpha) = \cos \alpha x$ эса R да узлуксиздир.

$(a + \alpha)' = (b + \alpha)' = 1$.

(6) формулани қўллаб, топамиз:

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \cos \alpha x \, dx + \frac{\sin \alpha(b+\alpha)}{b+\alpha} - \frac{\sin \alpha(a+\alpha)}{a+\alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha(b+\alpha)}{\alpha} - \frac{\sin \alpha(a+\alpha)}{\alpha} + \frac{\sin \alpha(b+\alpha)}{b+\alpha} - \frac{\sin \alpha(a+\alpha)}{a+\alpha} = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha} \right) \sin \alpha(b+\alpha) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha} \right) \sin \alpha(a+\alpha). \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг берилган тўпلامда лимит
функцияларини топинг:

1. $f(x, y) = x^4 \cos \frac{1}{xy}$;

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}, y_0 = +\infty.$$

2. $f(x, y) = (x-1) \arctg x^y$;

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}, y_0 = +\infty.$$

3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\sqrt{y}}}$;

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x \in R, 0 < y < +\infty\}, y_0 = +\infty.$$

4. $f(x, y) = x^y$;

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, y_0 = 0.$$

5. $f(x, y) = x^2 \sin y$;

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x \in R, 0 < y < \pi\}, y_0 = \frac{\pi}{3}.$$

6. $f(x, n) = \sqrt[n]{1+x^n}$,

$$D = \{(x, n) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, n \in N\}, n_0 = \infty.$$

7. $f(x, n) = n \arctg n x^2$,

$$D = \{(x, n) \in R^2 : 0 \leq x < +\infty, n \in N\}, n_0 = \infty.$$

$$8. f(x, n) = n^3 x^2 e^{-nx},$$

$$D = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < +\infty, n \in \mathbb{N}\}, n_0 = \infty.$$

$$9. f(x, n) = \sqrt{n} \sin \frac{x}{n\sqrt{n}};$$

$$D = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < +\infty, n \in \mathbb{N}\}.$$

$$10. f(x, n) = \ln \left(1 + \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}} \right);$$

$$D = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < +\infty, n \in \mathbb{N}\}, n_0 = \infty.$$

Қуйидаги функцияларнинг берилган тўпلامда лимит функцияларини топинг ва уни текис яқинлашишини исботланг:

$$11. f(x, y) = e^{-yx^2},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x < +\infty, 0 < y < +\infty\}, y_0 = +\infty.$$

$$12. f(x, y) = \sqrt{y} \sin \frac{x}{y\sqrt{y}},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^2, 0 < y < +\infty\}, y_0 = +\infty.$$

$$13. f(x, n) = x^{2n},$$

$$D = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \delta, 0 < \delta < 1, n \in \mathbb{N}\}, n_0 = \infty.$$

$$14. f(x, n) = \frac{nx}{1+n^3x^2},$$

$$D = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x < +\infty, n \in \mathbb{N}\}, n_0 = \infty.$$

$$15. f(x, n) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^4} \sin \frac{x^2}{\sqrt{n}},$$

$$D = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x < +\infty, n \in \mathbb{N}\}, n_0 = \infty.$$

Қуйидаги функцияларнинг берилган тўпلامда лимит функцияларини топинг ва уни текис яқинлашишга текширинг:

$$16. f(x, n) = \frac{\cos \sqrt{nx}}{\sqrt{n+2x}},$$

$$x \in [0, +\infty), n \in \mathbb{N}, n_0 = \infty.$$

$$17. f(x, n) = \frac{\ln nx}{nx^2}, x \in [1, +\infty),$$

$$n \in \mathbb{N}, n_0 = \infty.$$

$$18. f(x, n) = n^{\frac{3}{2}} \left(1 - \cos \frac{\sqrt[4]{x}}{n} \right), \quad x \in [0, +\infty)$$

$$n \in N, \quad n_0 = \infty.$$

$$19. f(x, n) = n \int_0^x \sin \frac{\pi t^n}{2} dt,$$

$$x \in [0, 2], \quad 0 < \alpha < 1, \quad n \in N, \quad n_0 = \infty.$$

$$20. f(x, y) = \frac{1}{x^3} \cos \frac{x}{y}, \quad 0 < x < 1,$$

$$0 < y < +\infty, \quad y_0 = \infty.$$

21. Ушбу.

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx, \quad f(x) \in C[0, 1], \quad f(x) \geq 0.$$

Функцияни узлуксизликка текширинг.

22. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$a) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$$

$$б) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

$$23. F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

$$24. F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$25. F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx.$$

$$26. F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx.$$

$$27. F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.$$

28. $F'(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$, $f(x)$ — дифференциалланувчи функция бўлса, $F''(x)$ ни топинг.

29. $F(x) = \int_a^b f(y)|x-y|dy$, $a < b$, $f(y) \in C[a,b]$ $F''(x)$ ни топинг.

30. $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt$, $F^{(n)}(x)$ ни топинг.

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$31. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

$$32. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

$$33. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1).$$

$$34. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Қўрсатма: $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$ муносабатдан фойдаланинг.

$$35. \text{ а) } \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx; \quad a > 0, \quad b > 0$$

$$\text{ б) } \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

3-§. ПАРАМЕТРГА БОГЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

$f(x,y)$ функция $D = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган бўлиб, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ ораликда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x,y) dx, (y \in E)$$

хосмас интеграл мавжуд ва чекли бўлсин. Бу интеграл y нинг қийматига боғлиқ бўлиб,

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx$$

интеграл параметрга боғлиқ (чегараси чексиз) хосмас интеграл деб аталади.

Ушбу

$$\int_{-\infty}^a f(x,y) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$$

параметрга боғлиқ хосмас интеграллар ҳам юқоридагидек киритилади.

$f(x,y)$ функция $D = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a,b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, b — махсус нукта бўлиб, E тўпламдан олинган y нинг ҳар бир тайин қийматида $[a,b]$ ораликда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^b f(x,y) dx (y \in E)$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин.

Бу интеграл ҳам y нинг қийматига боғлиқ бўлиб,

$$I(y) = \int_a^b f(x,y) dx$$

интеграл параметрга боғлиқ, чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли деб аталади.

a нукта махсус, a ва b нуқталар махсус, умуман параметрга боғлиқ чегараланмаган, чегараси чексиз

хосмас интеграллар тушунчаси ҳам юқоридаги каби киритилади.

Масалан,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, (\alpha > 0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 + x^2} dx, a \in R$$

интеграллар параметрга боғлиқ хосмас интеграллардир.

$f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ ораликда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда чегараси чексиз бўлган хосмас интеграл таърифи-га кўра ихтиёрий $[a, A]$ да ($a < A < +\infty$)

$$I(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx \quad (7)$$

интеграл мавжуд ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A, y). \quad (8)$$

Демак, $I(y)$ ва $I(A, y)$ функциялар (8) ва (7) интеграллар орқали аниқланган бўлиб, $I(y)$ $I(A, y)$ функциянинг $A \rightarrow +\infty$ даги лимит функциясидир.

5-таъриф. Агар $A \rightarrow +\infty$ да $I(A, y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E тўпламда текис яқинлашса, y ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи деб аталади.

6-таъриф. Агар $A \rightarrow +\infty$ да $I(A, y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E тўпламда нотекис яқинлашса, y ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпламда нотекис яқинлашувчи деб аталади.

(8) интегралнинг E тўпланда текис яқинлашувчи бўлиши қуйидагидан иборатдир:

$$1) \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ хосмас интеграл } y \text{ ўзгарувчининг}$$

E тўпландан олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи,

2) $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall A > \Delta$ ва $y \in E$ учун

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ интеграл } E \text{ тўпланда яқинлашувчи, аммо}$$

у шу тўпланда нотекис яқинлашувчилиги эса қуйидагидан иборатдир:

$$1) \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ интеграл } y \text{ ўзгарувчининг } E \text{ тўпландан}$$

олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи.

2) $\forall \Delta > 0$ олинганда ҳам шундай $\varepsilon_0 > 0$, $y_0 \in E$ топилсаки,

$$\left| \int_{A_1}^{+\infty} f(x,y)dx \right| \geq \varepsilon_0$$

бўлади.

12- м и с о л. Ушбу

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx, \quad y \in (0, +\infty)$$

интегралнинг яқинлашиш характерини текширинг.

Аввало

$$I(A,y) = \int_0^A ye^{-xy}dx \quad (0 \leq A < +\infty)$$

интегрални қараймиз.

$$I(A,y) = \int_0^A ye^{-xy}dx = -e^{-xy} \Big|_{x=0}^{x=A} = 1 - e^{-Ay}.$$

Сўнгра

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A, y) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-Ay}) = 1$$

бўлишини топамиз.

Демак, қаралаётган интеграл таърифга кўра яқинлашувчи.

Энди интегрални текис яқинлашувчиликка текширамиз.

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-xy} d(xy) \right| = e^{-Ay} \text{ эканини ҳисобга олинган ҳолда}$$

$\forall \Delta > 0$ деб олиб $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, $A_0 > \Delta$ тенгсизликни қаноатлан-

тирувчи $\forall A_0$ учун $y_0 = \frac{1}{A_0}$ деб олсак, у ҳолда

$$\left| \int_{A_0}^{+\infty} y_0 e^{-xy_0} dy \right| = e^{-A_0 y_0} = e^{-1} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0$$

бўлади.

Бу эса $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ интеграл $(0, +\infty)$ ораликда

нотекис яқинлашувчилигини билдиради.

E тўплам сифатида $(a, +\infty) \subset (0, +\infty)$ ораликни қарайлик (бунда a — ихтиёрий мусбат сон), у ҳолда барча $y \in [a, +\infty)$ ларда

$$\int_A^{+\infty} e^{-xy} d(xy) = e^{-Ay} = \frac{1}{e^{Ay}} < \frac{1}{e^{aA}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Унда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $(0 < \varepsilon < 1)$ $\Delta = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ дейилса, $\forall A > \Delta$ ва $\forall y \in [a, +\infty)$ учун

$$\left| \int_A^{+\infty} ye^{-xy} dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Демак, $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ интеграл $[a, +\infty) \subset (0, +\infty)$

оралиқда текис яқинлашувчи.

$f(x,y)$ функция $D = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx \quad (8)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

7-теорема (Коши теоремаси). (8) интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $A' > \Delta$, $A'' > \Delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи A' , A'' ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y) dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Бу теоремадан мисол ва масалалар ечишда фойдаланиш мураккаброқ бўлгани сабабли текис яқинлашишга текшириш учун қулайроқ аломатларни келтирамыз.

Вейерштрасс аломати: $f(x,y)$ функция $D = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган.

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx$$

интеграл мавжуд бўлсин.

Агар шундай $\varphi(x)$ функция топилиб ($x \in [a, +\infty)$),

1) $\forall x \in [a, +\infty)$ ва $\forall y \in E$ учун $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$ бўлса,

2) $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса,

у ҳолда

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

13-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg xy}{1+x^2} dx, \quad y \in R$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} xy}{1+x^2} \right| \leq \frac{\pi}{2(1+x^2)}$$

эканини ҳисобга олсак ва $\varphi(x) = \frac{\pi}{2(1+x^2)}$ дейилса, у ҳолда

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

бўлгани учун Вейерштрасс аломатига кўра берилган интеграл R да текис яқинлашувчи бўлади.

14- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin xy dx, \quad y \in R$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$|f(x, y)| = |x e^{-x^2} \sin xy| \leq x e^{-x^2}$$

эканини эътиборга олсак, $\varphi(x) = x e^{-x^2}$ дейилса; у ҳолда

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

яқинлашувчилигидан, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган интегралнинг текис яқинлашувчилигини топамиз.

А б е л ь а л о м а т и. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар $D = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпланда берилган, y ўзгарувчининг E тўпландан олинган ҳар бир тайин қийматида $g(x, y)$ функция x нинг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да монотон функция бўлсин.

Агар

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпланда текис яқинлашувчи ва $\forall (x, y) \in D$ учун

$$|g(x, y)| \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлса, у холда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

14- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} xy \cdot \operatorname{arctg} xy^2}{1+x^2} e^{-xy} dx, y \in [0, +\infty)$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy \cdot \operatorname{arctg} xy^2}{1+x^2}, g(x, y) = e^{-xy}$$

деб олинса,

$$|f(x, y)| \leq \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

теңсизликдан фойдаланиб,

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} xy \cdot \operatorname{arctg} xy^2}{1+x^2} dx$$

интегралнинг Вейерштрасс аломатига кўра текис яқинлашувчи эканини топамиз.

$g(x, y) = e^{-xy}$ ва y нинг $[0, +\infty)$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида x нинг камаювчи функцияси бўлиб, $\forall x \in [0, +\infty)$ ва $\forall y \in [0, +\infty)$ ларда

$$|g(x, y)| = e^{-xy} \leq 1$$

бўлади. Демак, Абель аломатига кўра, берилган интеграл $[0, +\infty)$ ораликда текис яқинлашувчи.

Дирихле аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар D тўпланда берилган бўлиб, $\forall A \geq a$ ҳамда $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_a^A f(x, y) dx \right| \leq C \quad (C = \text{const})$$

бўлса ва $g(x, y)$ x бўйича монотон, $x \rightarrow +\infty$ да ўз лимит функцияси $\varphi(y)$ га текис яқинлашса, у холда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

15- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha, \beta \in [a, b], 0 < a < b)$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$f(x, \alpha, \beta) = \sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$g(x, y) = \frac{1}{x}$ деб олинса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x, \alpha, \beta) dx &= \frac{1}{2} \int_0^A [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)x}{\alpha - \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{\alpha + \beta} \right] \Big|_0^A = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)A}{\alpha - \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)A}{\alpha + \beta} \right] \end{aligned}$$

бўлиб, $\forall A > 0, \forall \alpha, \beta \in [a, b]$ лар учун

$$\left| \int_0^A f(x, \alpha, \beta) dx \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sin(\alpha - \beta)A}{\alpha - \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)A}{\alpha + \beta} \right| \leq \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

бўлади. $x \rightarrow +\infty$ да $g(x, y) = \frac{1}{x}$ функция $[a, b]$ ораликда

нолга текис яқинлашади. Демак, Дирихле аломатига кўра, каралаётган интеграл $[a, b]$ ораликда текис яқинлашувчи.

Чегараланмаган функция хосмас интегралнинг текис (нотекис) яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам юқоридагидек кiritилади.

4-§. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ФУНКЦИОНАЛ ХОССАЛАРИ

$f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, +\infty), y \in E \cap \mathbb{R}\}$ тўпلامда берилган $y_0 \in E$ тўпلامнинг лимит нуктаси бўлсин.

8- теорема. $f(x, y)$ функция

1) y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тийин

қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да узлуксиз,

2) $y \rightarrow y_0$ да $\forall |a, A| (a < A < +\infty)$ ораликда $\varphi(x)$ лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл E тўпلامда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y \rightarrow y_0$ да $I(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

муносабат ўринли.

$f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, d]\}$ тўпلامда берилган.

9-теорема. $f(x, y)$ функция D тўпلامда узлуксиз ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ ораликда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I(y)$ $[c, d]$ ораликда узлуксиз бўлади.

10-теорема. $f(x, y)$ функция D тўпلامда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга ва у ҳам D да узлуксиз бўлиб, $y \in [c, d]$ да

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c, d]$ ораликда $I'(y)$ ҳосилага эга бўлади ва

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

муносабат ўринли.

11-теорема. $f(x, y)$ функция D тўпламда узлуксиз ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

интеграл $[c, d]$ ораликда текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $I(y)$ функция $[c, d]$ ораликда интегралланувчи ва

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

муносабат ўринли.

$f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, +\infty), y \in (c, +\infty)\}$ тўпламда берилган бўлсин.

12-теорема. $f(x, y)$ функция D тўпламда узлуксиз

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ интеграллар мос равишда

$[c, +\infty)$, $[a, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$\int_c^{+\infty} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| dy \text{ (ёки)} \int_a^{+\infty} \left| \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} \left| \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| dx \text{ (ёки)} \int_c^{+\infty} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| dy$$

интеграллар яқинлашувчи ва ўзаро тенг бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx \quad (0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty)$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар $f(x, \alpha) = \sin x$, $g(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$ дейилса, у ҳолда $\forall A > 0$, $\forall \alpha \in [\alpha_0, +\infty)$ учун

$$\left| \int_0^A \sin x dx \right| = |\cos x|_0^A = |1 - \cos A| \leq 2$$

бўлади.

Равшанки, $x \rightarrow +\infty$ да

$$g(x, \alpha) \rightarrow 0.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\Delta = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha_0}$ дейилса, $\forall x > \Delta$ ларда

$$|g(x, \alpha)| = \left| \frac{1}{e^{\alpha x}} \right| < \varepsilon$$

бўлади.

Шундай қилиб, $g(x, \alpha)$ $x \rightarrow +\infty$ да ўз лимит функцияси нолга текис яқинлашади. Бу эса, Дирихле аломатига кўра, берилган интегрални текис яқинлашувчилигини билдиради.

17- м и с о л. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x \sqrt{x}} dx \quad (0 \leq p \leq 10)$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар $0 \leq p \leq 10$ тенгсизликни эътиборга олсак, у ҳолда

$$f(x, p) = \frac{\ln^p x}{x \sqrt{x}} \leq \frac{\ln^{10} x}{x \sqrt{x}}$$

муносабат ўринли бўлишини топамиз.

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^{10} x}{x \sqrt{x}} dx$ интеграл эса яқинлашувчи бўлади, чунки

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^{10} x}{x \sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{10}}{e^{\frac{t}{2}}} dt < \infty \quad (t = \ln x).$$

Демак, қаралаётган интеграл, Вейерштрасс аломатига кўра, текис яқинлашувчидир.

18- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, \quad p \geq p_0 > 0$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Ушбу $x = e^{-t} (t < 0)$ алмаштириш натижасида интеграл $\int_0^{+\infty} t^q \cdot e^{-pt} dt$ кўринишга келади.

$$|t^q \cdot e^{-pt}| \leq \frac{t^q}{e^{p_0 t}}$$

бўлиб, $\int_0^{+\infty} \frac{t^q}{e^{p_0 t}} dt$ интегралга яқинлашувчи эканини кўриш

қийин эмас. Демак, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган интеграл текис яқинлашувчи.

19- м и с о л. Агар $f(x)$ функция $(0, +\infty)$ да интегралланувчи бўлса, ушбу

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

муносабатни исботланг.

Қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx;$$

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ яқинлашувчи бўлгани учун $\forall \varepsilon > 0$ га кўра

$\exists \Delta > 0$ топилиб, $\forall A' > \Delta, A'' > \Delta$ лар учун $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon$ бўлади.

Равшанки, $e^{-\alpha x} - 1$ функция $x \geq 0$ ларда монотон ва чегараланган. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{A'}^{A''} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx = (e^{-\alpha x_0} - 1) \int_{A'}^{A''} f(x) dx,$$

$$\left| \int_{A'}^{A''} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Демак, $\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx$ интеграл текис яқинлашувчи.

Бундан, таърифга кўра, етарлича катта A учун

$$\left| \int_A^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

эканини топамиз.

Энди берилган $\varepsilon > 0$ га кўра, A нинг тайинланган қийматида α ни шундай танлаймизки,

$$\left| \int_0^A (e^{-\alpha x} - 1)f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлсин.

У ҳолда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx \right| &= \left| \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1)f(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_0^A (e^{-\alpha x} - 1)f(x) dx + \int_A^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1)f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^A (e^{-\alpha x} - 1)f(x) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1)f(x) dx \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлади.

20- м и с о л. Агар $f(x)$ функция $[0, +\infty)$ ораликда узулуксиз ва чегараланган бўлса, ушбу

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0)$$

муносабатни исботланг.

Аввало $x = ty$ алмаштиришни бажарамиз ($t > 0, y > 0$), у ҳолда

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{1 + t^2} dt.$$

$$\text{Энди } \left| \frac{f(ty)}{1 + t^2} \right| \leq \frac{M}{1 + t^2} \text{ ва } \int_0^{+\infty} \frac{M}{1 + t^2} dt = \frac{\pi M}{2}$$

бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра,

$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx$ интеграл текис яқинлашувчидир.

Равшанки,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(ty)}{1+t^2} = \frac{f(0)}{1+t^2}$$

$\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\delta > 0$, $\forall |y| < \delta$ учун ва $\forall t \in (a, b)$ ларда

$$\left| \frac{f(ty)}{1+t^2} - \frac{f(0)}{1+t^2} \right| = \left| \frac{f(ty) - f(0)}{1+t^2} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринлидир.

8- теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(ty)}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2} dt = \\ &= f(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = f(0) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = f(0). \end{aligned}$$

21- мисол. Ушбу

$$F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

$f(x, \alpha) = \frac{\cos x}{x^\alpha}$ функцияни

$$D_\alpha = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x < +\infty, \alpha \geq \varepsilon > 0\}$$

тўпламда узлуксиз экани равшан.

Энди интегрални текис яқинлашишга текшираамиз.

$$\int_1^A \cos x dx = \sin x \Big|_1^A = \sin A - \sin 1 \text{ бўлиб,}$$

$$\left| \int_1^A \cos x dx \right| \leq 2 \text{ бўлади. } \forall \varepsilon > 0 \text{ учун } \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) >$$

> 0 топиладики $\forall |x|$, $\forall \alpha \geq \varepsilon > 0$ лар учун $\frac{1}{x^\alpha} < \varepsilon$ бўла-

ди $(\Delta(\varepsilon) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon}$ қилиб олсак бўлади). Бу эса $\frac{1}{x^\alpha}$ функцияни $x \rightarrow +\infty$ да лимит функция 0 га текис яқинлашишини билдиради. Дирихле аломатига кўра берилган интеграл текис яқинлашувчи бўлиб, 9-теоремага асосан $F(\alpha)$ функцияни узлуксизлиги келиб чиқади.

22-ми с о л. Агар $f(x) [0, +\infty)$ ораликда узлуксиз ва

$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

Фруллани формуласини исботланг.

Фараз қилайлик,

$$F(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx$$

бўлсин, у ҳолда $A > 0$ учун

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{aA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = F(+\infty) - F(aA)$$

ва

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = F(+\infty) - F(Ab)$$

бўлади. Демак,

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = F(Ab) - F(Aa) = \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx.$$

Охириги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб, функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{aA}^{bA} \frac{f(x) dx}{x} = f(c) \int_{aA}^{bA} \frac{dx}{x} = \\ &= f(c) \ln \frac{b}{a} \quad (aA \leq c \leq Ab) \end{aligned}$$

$$\lim_{A \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

Шундай қилиб,
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

23- м и с о л. Фруллани формуласидан фойдаланиб, ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Қаралаётган интегралда $f(x) = \cos x$ бўлиб, $f(0) = 1$ га тенг. Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

24- м и с о л. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

$$I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx$$

интегралга нисбатан 10-теорема шартлари бажарилишини текширамыз:

$$f(x, m) = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx,$$

$x=0$ да $f(0, m) = 0$ десак, $f(x, m)$ функция $D = \{(x, m) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < +\infty, m \in \mathbb{R}\}$ тўпламда узлуксиз бўлади.

$$f'_m(x, m) = (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx$$

бўлиб, бу функциянинг D тўпламда узлуксизлиги равшан-дир.

Энди

$$\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx \, dx$$

интегрални текис яқинлашишга текшираимиз:

$$|(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx| \leq e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} \text{ бўлиб,}$$

$$\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) dx = \left(\frac{e^{-\beta x}}{\beta} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

бўлади. Бу эса Вейерштрасс аломатига кўра

$$\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx \, dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчилигини билдиради.

Демак,

$$I'_m(m) = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + m^2}.$$

Бундан:

$$I(m) = \arctg \frac{m}{\alpha} - \arctg \frac{m}{\beta} + C.$$

(C — ихтиёрий ўзгармас сон) экани келиб чиқиб, $0 = I(0) = C$ муносабатдан $C = 0$ дир. Демак,

$$I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx = \arctg \frac{m(\beta - \alpha)}{\alpha\beta - m^2}.$$

25-м и с о л. Ушбу

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geq 0)$$

Агар

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ \beta, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

десак, $f(x, \alpha)$ функция чекли $\alpha \geq 0$ ва $0 \leq x < +\infty$ ларда узлуксиз бўлади. Худди 19-мисолдагидек, қаралаётган интегралнинг текис яқинлашувчилиги кўрсатилади.

Энди

$$I_{\beta} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx$$

интегрални қараймиз.

$$|e^{-\alpha x} \cos \beta x| \leq e^{-\alpha x}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \, dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра, $I_{\beta} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx$ интеграл текис яқинлашувчи. У ҳолда, 10-теоремадан фойдаланиб, топамиз:

$$I'_{\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha).$$

$I(\alpha, 0) = 0$ бўлгани учун $C(\alpha) = 0$ бўлиб,

$I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$ бўлади. Берилган интеграл текис яқинлашувчи, интеграл остидаги функция эса узлуксиз бўлгани учун 8-теоремадан

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow +0} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx$$

ҳисобликни ва

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$$

эқанини ҳисобга олсак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$$

га эга бўламиз.

Ошанда $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx$ интеграл *Дирихле интеграл* дейилади.

26-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x \, dx \quad (\alpha, \beta > 0)$$

интегрални ҳисобланг:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x \, dx = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} \, dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} \, dx \right\} \end{aligned}$$

муносабатдан ва Дирихле интегралининг қийматидан фойдаланиб толамиз:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{агар } \beta < \alpha \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{4}, & \text{агар } \alpha = \beta \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \beta > \alpha \text{ бўлса.} \end{cases}$$

27-мисол. Ушбу

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} \, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x}{x^2} \, dx$$

интегралга бўлаклар интеграллаш формуласини қўллаб толамиз

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left\{ [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_0^{+\infty} + \right. \\ & \left. + \int_0^{+\infty} \frac{(\beta - \alpha) \sin(\alpha - \beta)x}{x} \, dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta)x}{x} \, dx \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} dx + \frac{(\alpha + \beta)}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \beta, & \text{агар } \beta \leq \alpha \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{2} \alpha, & \text{агар } \beta \geq \alpha \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \beta, & \text{агар } \beta \leq \alpha \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{2} \alpha, & \text{агар } \beta \geq \alpha \text{ бўлса.} \end{cases}$$

28- мисол. Ушбу

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

интегрални ҳисобланг:

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx + (a-b) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx.$$

$I_1(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx$ интегрални бўлак-лаб интеграллаймиз:

$$I_1(a, b) = (e^{-ax} - e^{-bx}) \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{be^{-bx} - ae^{-ax}}{x} dx =$$

$$= b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx - a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x} dx + (b-a).$$

$$I(a, b) = a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx - b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx + b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx -$$

$$- a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x} dx + (b-a) = a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx + (b-a).$$

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ Фруллани интеграли бўлиб, у $\ln \frac{a}{b}$ га

тенг.

Демак,

$$I(a, b) = (b - a) + a \ln \frac{a}{b}.$$

29- мисол. Ушбу

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$a < 1$ да $x=0$ махсус нукта бўлади.

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \\ &= I_1(a) + I_2(a). \end{aligned}$$

$\int_0^1 x^{a-1} dx$ интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да узоклашувчи, $0 < x < 1$ да

$$\frac{1}{2} x^{a-1} < \frac{x^{a-1}}{1+x} < x^{a-1}$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$I_1(a) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да узоклашувчи бўлади.

$x \geq 1$ да эса

$$\frac{1}{2} x^{a-2} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} < x^{a-2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$I_2(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интеграл $a < 1$ да яқинлашувчи, $a \geq 1$ да узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган интеграл $0 < a < 1$ да яқинлашувчи.

Энди $I(a)$ интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, $0 < x < 1$ да

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{a+k-1}$$

бўлиб, бу қатор $[a_0, b_0]$ ($0 < a_0 \leq x \leq b_0 < 1$) да текис яқинлашувчи бўлади.

Бу қаторнинг хусусий йигиндиси

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{a+k-1} = \frac{x^{a-1}[1 - (-x)^{n+1}]}{1+x}$$

бўлиб, $\forall n \in \mathbb{N}$ ва $\forall x \in (0, 1)$ лар учун

$$\frac{x^{a-1}[1 - (-x)^{n+1}]}{1+x} < x^{a-1}$$

тенгсизлик ўринлидир.

$0 < a < 1$ ларда $\int_0^1 x^{a-1} dx$ интеграл яқинлашувчи

бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра, $\int_0^1 s_n(x) dx$

интеграл текис яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 s_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

бўлиб, бу тенгликдан

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[\int_0^1 (-1)^k x^{a+k-1} dx \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^1 (-1)^k x^{a+k-1} dx \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k} \end{aligned}$$

эканини топамиз.

Шундай қилиб,

$$I_1(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Агар

$$I_2(a) = \int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

интегралда $x = \frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарсак, у холда

$$I_2(a) = \int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-a)-1}}{1+t} dt$$

бўлади. Худди юқоридагига ўхшаш

$$I_2(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k}$$

бўлишини тонамиз. Демак,

$$I(a) = I_1(a) + I_2(a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right).$$

Энди $f(x) = \cos ax$ ($0 < a < 1$) функцияни Фурье қаторига ёямиз

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = 2 \frac{\sin a\pi}{a\pi} a_n = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cdot \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(a+n)x + \cos(a-n)x) dx = (-1)^n \cdot \\ &\quad \cdot \frac{2a}{a^2 - n^2} \cdot \frac{\sin a\pi}{\pi}; \quad b_n = 0 \end{aligned}$$

($\cos ax$ — жуфт функция бўлгани учун)

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \cos kx.$$

Бу тенгликда $x=0$ десак,

$$1 = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}$$

булиб,

$$1 = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}$$

яъни

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \right]$$

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}$$

ёки

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right)$$

булади. Бундан эса

$$I(a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

экани келиб чиқади.

Демак,

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1)$$

30- м и с о л. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos a_1 x + A_2 \cos a_2 x + \dots + A_k \cos a_k x}{x} dx$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_k > 0, A_1 + A_2 + \dots + A_k = 0)$$

интегрални ҳисобланг.

$A_1 + A_2 + \dots + A_k = 0$ муносабатдан A_k ни топамиз.

Натижада

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos a_1 x - A_1 \cos a_k x + \dots + A_{k-1} \cos a_{k-1} x - A_{k-1} \cos a_k x}{x} dx$$

булиб,

$$\int_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos a_1 x - A_1 \cos a_k x}{x} dx$$

интегралга Фруллани формуласини қўллаб, топамиз:

$$\int_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos a_1 x - A_1 \cos a_k x}{x} dx = -A_1 \ln \frac{a_1}{a_k} = -A_1 \ln a_1 + A_1 \ln a_k.$$

Худди шунга ўхшаш қолган интегралларни ҳисоблаб,

$$I = -(A_1 \ln a_1 + A_2 \ln a_2 + \dots + A_k \ln a_k)$$

га эга бўламиз.

31- мисол. Ушбу

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \text{ ва } I_2 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

Френель интегралларини ҳисобланг.

$x^2 = t$ алмаштириш натижасида бу интеграллар қуйидаги кўринишга келади:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx$$

тенгликни ҳисобга олиб, қуйидаги интегралга келамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-kt} dt \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(k+x^2)t} \sin t dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(k^2+x^2)^2} \end{aligned}$$

Охирги муносабатда $k \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз (25- мисолга қаранг).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

I_2 нинг қиймати ҳам I_1 га тенг бўлади.

32- мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x^2 = t$ алмаштириш бажариш натижасида у қуйидаги $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ кўринишга келади. Бу эса

Дирихле интегралли бўлиб, унинг қиймати $\frac{\pi}{4}$ га тенг. Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

33- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Дирихле интегралидан фойдаланамиз:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (y > 0).$$

Энди $\int_a^b \frac{\sin xy}{x} dy = \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ эканини ҳисобга олсак у

ҳолда

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{\sin xy}{x} dy = \int_a^b dx \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dy = \frac{\pi}{2} (b - a) =$$

$= \frac{\pi}{2}(b-a)$ бўлади. (Интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкинлигини асослашни ўқувчига ҳавола қиламиз).

Мисол ва масалалар

36. Параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг хосмас интегрални учун текис яқинлашиш тушунчасини келтиринг.

37. Параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг хосмас интегрални учун:

- а) Коши критерияси;
- б) Интеграл белгиси остида лимитга ўтиш ҳақидаги теорема;
- в) Интегралнинг параметр бўйича узлуксизлиги ҳақидаги теорема;
- г) Интегрални параметр бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теорема;
- д) Интегрални параметр бўйича интеграллаш ҳақидаги теоремаларни келтиринг.

Қуйидаги интегралларни текис яқинлашишга текширинг:

$$38. \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\alpha x} dx, \quad 0 \leq \alpha < +\infty.$$

$$39. \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx, \quad (a \leq \alpha \leq b).$$

$$40. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$41. \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty, p > 0 \text{ тайинланган}).$$

$$42. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1} \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

$$43. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$44. \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$45. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx, (p \geq 0).$$

$$46. \int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, (p > 0, q > -1).$$

$$47. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx, (0 \leq n < +\infty).$$

$$48. \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n}, 0 < n < 2.$$

$$49. \int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, (|\alpha| < \frac{1}{2}).$$

$$50. \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx, (0 \leq \alpha \leq 1).$$

51. $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ муносабатда лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкинми?

52. $f(x)$ функция $(0, +\infty)$ да абсолют интегралланувчи бўлса,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$$

эканини исботланг.

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1} \text{ ни топинг.}$$

54. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ функциянинг узлуксизлигини исботланг.

55. $f(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$ функциянинг $0 < \alpha < 1$ да узлуксизлигини исботланг.

56. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x} dx$ функцияни узлуксизликка

текширинг ва графигини чизинг.

Куйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг:

57. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^\alpha}, (\alpha > 2).$

58. $F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} dx, (0 < \alpha < 2).$

59. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx, (0 < \alpha < 1).$

60. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x^2} dx, \alpha \in R.$

61. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$ функция $-\infty < \alpha < +\infty$

да узлуксиз ва дифференциалланувчилигини исботланг.

Куйидаги интегралларни ҳисобланг:

62. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx, (a > 0, b > 0).$

63. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx, (a > 0, b > 0).$

64. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx, (\alpha > 0, \beta > 0).$

65. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, (\alpha > 0, \beta > 0).$

66. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx, (\alpha > 0, \beta > 0).$

67. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx, (|\alpha| \leq 1).$
68. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, (|\alpha| \leq 1).$
69. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx.$
70. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2} dx.$
71. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx.$
72. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx.$
73. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx, (a > 0, ac - b^2 > 0).$
74. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx, (a > 0).$
75. $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx, (a > 0).$
76. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, (\alpha > 0, \beta > 0).$
77. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx, (a > 0).$
78. $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx, (a > 0).$
79. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx, (n \in \mathbb{N}).$

80. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx.$
81. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx.$
82. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx.$
83. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx.$
84. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$
85. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx.$
86. $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x}{x^2} dx, (k \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0).$
87. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$
88. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx.$
89. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$
90. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$
91. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx (a \neq 0).$
92. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx.$

$$93. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax \, dx.$$

$$94. \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 - x^2} dx.$$

$$95. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2 - x^2} dx.$$

$$96. \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$97. \int_0^{+\infty} e^{a \cos x} \sin(ax \sin x) \frac{dx}{x}.$$

$$98. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \cos bx - e^{-a_1 x} \cos b_1 x}{x} dx. \quad (a, a_1 > 0).$$

$$99. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \frac{\alpha^2}{x^2} dx.$$

$$100. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} dx.$$

$$101. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

тенгликни исботланг.

$$102. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{1+x^2} dx = \int_k^{+\infty} \frac{\sin(x-k)}{x} dx \quad (k > 0).$$

тенгликни ис-

ботланг.

$$103. \alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ ва } \alpha, \beta, \gamma \text{ лар ичида } \gamma \text{ катта бўлса,}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot \sin \gamma x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{агар } \alpha < \beta + \gamma \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{\gamma}, & \text{агар } \alpha = \beta + \gamma \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \alpha > \beta + \gamma \text{ бўлса} \end{cases}$$

тенгликни исботланг.

104. Агар $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ лар мусбат бўлиб, $\alpha > \sum_{i=1}^n \alpha_i$ бўлса,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdot \dots \cdot \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$$

тенгликни исботланг.

105. $\int_0^{+\infty} (\sin ax - \sin bx)^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} |a - b|$

эқанини исботланг.

5-§. ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРИ

1. Бета функция (I тур Эйлер интегралли).

Ушбу $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ ($a > 0, b > 0$) интеграл бета функция ёки I тур Эйлер интегралли деб аталади.

Бета функциянинг хоссалари:

1. $B(a, b) = B(b, a)$.
2. $B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$ ($b > 1$).
- 2'. $B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a+1} B(a, 1)$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ ($0 < a < 1$).
4. $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

II. Гамма функция (II тур Эйлер интегралли). Ушбу

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (a > 0)$$

интеграл гамма функция ёки II тур Эйлер интегралли деб аталади.

Гамма функциянинг хоссалари:

1. $\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1) \dots (a+n-1)}$
2. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

2. $\Gamma(n+1) = n!$.

3. $\Gamma(a)$ ($0 < a < +\infty$) да узлуксиз ва барча тартибдаги узлуксиз ҳосилаларга эга ва

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (n=1,2,\dots).$$

4. $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

5. $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

Хусусан, $a = \frac{1}{2}$ да ($0 < a < 1$).

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

6. $\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a)$ (Лежандр формуласи).

34- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

$x^2 = t$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Юқоридаги (5) муносабатдан фойдаланиб $I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

эканини топамиз. Демак,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

35- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$$

интегрални ҳисобланг.

$\sin x = \sqrt{t}$ ($t > 0$) алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^3 (1 - \sin^2 x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \cdot t^{\frac{5}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{5}{2}-1} t^{\frac{7}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \cdot \frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{120} = \frac{3\pi}{512}. \end{aligned}$$

36- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

интегрални ҳисобланг.

$x = \sqrt{t}$ ($t > 0$) алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \cdot \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} = \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

(Бу ерда $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ учун Лежандр формуласидан фойдаландик).

37- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^{q-1}}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^{p+q}} dx$$

$$(\alpha, \beta \geq 0, \gamma, p, q > 0)$$

интегрални Эйлер интеграллари орқали ифодаланг.

$\frac{(\alpha + \gamma)x}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = t$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{1}{(\alpha + \gamma)^p (\beta + \gamma)^q} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt =$$

$$= \frac{B(p, q)}{(\alpha + \gamma)^p (\beta + \gamma)^q}$$

38- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x \, dx \quad (a > 0, b > 0).$$

интегрални Эйлер интеграллари орқали ифодаланг.

$\sin x = t$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$I = \int_0^1 t^{a-1} (1-t^2)^{\frac{b}{2}-1} dt.$$

Бу интегралда эса $t^2 = y$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{b}{2}-1} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{a}{2}-1} \cdot$$

$$(1-y)^{\frac{b}{2}-1} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

бўлади.

Хусусан, агар $b = 1$ бўлса,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} t \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \text{ бўлади.}$$

Агар $a = 1 + \alpha$, $b = 1 - \alpha$ ($|\alpha| < 1$) бўлса, у ҳолда

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} x \cdot \cos^{b-1} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x \cdot \cos^{-\alpha} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x \, dx$$

бўлиб,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1+\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\alpha \pi}{2}}$$

бўлади.
Демак,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\alpha \pi}{2}}$$

39- мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx \quad (0 < p < 1,)$$

$$0 \leq q < 1$$

интегрални ҳисобланг.

$$I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x) \ln x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx.$$

$$I^{(1)}(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x) \ln x} dx,$$

$$I^{(2)}(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx$$

бўлсин, у ҳолда:

$$(I^{(1)}(p, q))'_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = B(p, 1-p).$$

Худди шунга ўхшаш

$$(I^{(2)}(p, q))'_q = \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x} dx = B(q, 1-q)$$

бўлиб,

$$I(p, q) = \pi \int \frac{dp}{\sin \pi p} - \pi \int \frac{dq}{\sin \pi q} + c =$$

$$= \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2}} \right| + C \text{ га эга бўламиз.}$$

$p = q$ учун $I(p, q) = 0$ муносабатдан $C = 0$ экани келиб чиқади.

Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx = \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2}} \right| \quad (0 < p < 1, 0 < q < 1).$$

40- мисол. Ушбу

$$\rho^4 = \sin^3 \varphi \cos \varphi$$

эгри чизик билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

Маълумки, изланаётган юза

$$s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \text{ бўлиб,}$$

берилган чизик биринчи ва учинчи чоракларда иккита япроқни ифодалайди. Шунинг учун

$$s = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi d\varphi$$

изланаётган юзани аниқлайди.

38- мисолдан фойдалансак,

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8} \Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4}) =$$

$$= \frac{\pi \sqrt{2}}{3} \text{ (кв.бирлик) га эга бўламиз.}$$

Демак,

$$s = \frac{\pi \sqrt{2}}{3}.$$

Мисол ва масалалар

Эйлер интегралларидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$106. \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx.$$

$$107. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a > 0).$$

$$108. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

$$109. \int_0^1 \frac{dx}{n \sqrt{1-x^n}} \quad (n > 1).$$

$$110. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

$$111. \int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}.$$

$$112. \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1+x^2} dx \quad (0 < n < 1).$$

$$113. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^a}.$$

$$114. \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1-k \cos x)^n} dx \quad (1 < k < 0, n > 0).$$

$$115. \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx, \quad (0 < a < 1).$$

$$116. \int_0^{+\infty} \frac{x^a \ln^2 x}{1+x^2} dx \quad (a^2 < 1).$$

$$117. \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$118. \int_0^{+\infty} \frac{x^{\rho-1} \ln x}{1+x} dx.$$

$$119. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu x}{\operatorname{ch} \nu x} dx \quad (\nu > \mu > 0).$$

$$120. \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx.$$

121. $x^n + y^n = a^n$ ($x > 0, y > 0, n > 0$) эгри чизик билан чегараланган юзани ҳисобланг.

122. $x^n + y^n + z^n = a^n$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) сирт билан чегараланган ҳажми ҳисобланг.

Куйидаги тенгликларни исботланг:

$$123. \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

$$124. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$125. \int_0^{+\infty} x^{\rho-1} \cos ax dx = \frac{1}{a^\rho} \Gamma(\rho) \cos \frac{\pi\rho}{2} \quad (0 < \rho < 1).$$

$$126. \int_0^{+\infty} x^{\rho-1} \sin ax dx = \frac{1}{a^\rho} \Gamma(\rho) \sin \frac{\pi\rho}{2} \quad (-1 < \rho < 1).$$

$$127. \int_0^{+\infty} \frac{x^{\rho-\frac{3}{2}}}{(x^2+ax+b)^\rho} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a(a+2\sqrt{b})}} \frac{\Gamma(\rho-\frac{1}{2})}{\Gamma(\rho)}$$

$$(b > 0, a + 2\sqrt{b} > 0, \rho > \frac{1}{2}).$$

$$128. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$129. \int_{-\infty}^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{3} \int_1^{\infty} (x^3-1)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

$$130. \Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{n})\dots\Gamma(a+\frac{n-1}{n}) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{na-1}{2}}} \Gamma(na)$$

$$(n \in \mathbb{N}).$$

XVII боб

ҚАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. ИККИ ҚАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1. Икки қаррали интеграл таърифлари. Бирор чегараланган $(D) \subset R^2$ соҳа берилган бўлсин. Бу соҳани бўлақларга ажратувчи чекли сондаги l чизиқлар системаси $\{l: l \subset (D)\}$ (D) соҳанинг бўлиниши деб аталади ва у $P = \{l: l \subset (D)\}$ каби белгиланади. (D) соҳани бўлақларга ажратувчи ҳар бир l чизиқ, P бўлинишнинг бўлувчи чизиги, (D) соҳанинг бўлаги эса P бўлинишнинг бўлаги дейилади. P бўлиниш бўлақлари диаметрининг энг каттаси унинг диаметри деб аталади ва у λ_p каби белгиланади. (D) соҳанинг бўлинишлар тўпламини $\mathcal{P} = \{p\}$ орқали белгилаймиз.

$f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлсин. Бу соҳанинг $P \in \mathcal{P}$ бўлиниши ва бу бўлинишларнинг ҳар бир квадратланувчи (D_k) ($k=1, 2, \dots, n$) бўлагиди ихтиёрий (ξ_k, η_k) нукта олиб,

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k \quad (1)$$

йигиндини тузайлик, бунда D_k — (D_k) соҳанинг юзи.

Одатда (1) $f(x, y)$ функциянинг интеграл йигиндиси ёки Риман йигиндиси деб аталади.

1-таъриф. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши ҳамда ҳар бир (D_k) бўлақдаги ихтиёрий (ξ_k, η_k) нукталар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда функция интегралланувчи ва I сонга $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки қаррали интегралли (Риман интегралли) дейилади ва у

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD \quad \left(\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \right)$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

$f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ соҳада берилган ва чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг бирор P бўлинишини қарайлик.

$$m_k = \inf_{(x, y) \in D_k} \{f(x, y)\}, \quad M_k = \sup_{(x, y) \in D_k} \{f(x, y)\}$$

лар ёрдамида

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k, \quad S = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

йигиндиларни тузамиз. Одатда бу йигиндилар мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йигиндилари деб аталади. (D) соҳанинг ҳар бир бўлинишига нисбатан $\{s\}, \{S\}$ тўпламларнинг чегараланганлигини ва $s \leq \sigma \leq S$ муносабат ўринлилигини кўриш қийин эмас.

2- т а ъ р и ф.

$$\sup\{s\} = I, \quad \inf\{S\} = \bar{I}$$

миқдорлар мос равишда $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги қуйи икки каррала ҳамда юқори икки каррала интегралари деб аталади.

3- т а ъ р и ф. Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада қуйи ҳамда юқори икки каррала интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи, уларнинг умумий қиймати

$$I = \underline{I} = \bar{I}$$

$f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги икки каррала интегралари (Риман интегралари) дейилади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

каби белгиланади.

2. Икки каррала интегралнинг мавжудлиги. Интегралланувчи функциялар синфи.

1- теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиши учун, $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлинишга нисбатан Дарбу йигиндилари

$$S(f) - s(f) < \epsilon$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёпик $(D) \subset \mathbb{R}^2$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.

3-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаги ноль юзали чизикларида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлса, функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.

Икки қаррали интеграллар ёрдамида текис шаклнинг юзи, жисмнинг ҳажмларини топиш мумкин. Интеграл таърифидан бевосита (D) шаклнинг юзи

$$D = \iint_{(D)} dx dy$$

бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} xy dD, \quad (D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

интегрални 1-таъриф ёрдамида ҳисобланг.

Равшанки, $f(x, y) = xy$ функция (D) да узлуксиз, демак, 2-теоремага кўра, у (D) да интегралланувчи бўлади. (D) соҳани $x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n}$ ($i, j = \overline{1, n-1}$) чизиклар ёрдамида бўлақларга ажратамиз ва ҳар бир (D_{ij}) да $(\xi_i, \eta_j) = (\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ деб қараймиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_j) D_{ij} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i \sum_{j=0}^{n-1} j = \\ &= \frac{1}{n^4} \frac{n(n-1)}{2} \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

бўлади.

Бундан эса $n \rightarrow \infty$ да $\lambda \rightarrow 0$ бўлса, $\sigma \rightarrow \frac{1}{4}$.

Демак,

$$\iint_{(D)} xy dD = \frac{1}{4}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} xy dD$$

интегрални 3- таъриф ёрдамида ҳисобланг, бунда $D = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$

(D) соҳани $x = 1 + \frac{i}{n}, y = 1 + \frac{2j}{n}$ ($i = 1, n-1$) чизиқлар ёрдамида бўлақларга ажратамиз.

$$(D_{ij}) = \left\{ (x, y) \in R^2: \frac{n+i-1}{n} \leq x \leq \frac{n+i}{n}, \frac{n+2(j-1)}{n} \leq y \leq \frac{n+2j}{n} \right\}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{n^2};$$

$$M_{ij} = \sup_{(x, y) \in (D_{ij})} (x \cdot y) = \left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(1 + \frac{2j}{n}\right);$$

$$m_{ij} = \inf_{(x, y) \in (D_{ij})} (x \cdot y) = \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) \left(1 + \frac{2(j-1)}{n}\right);$$

$$S(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(1 + \frac{2j}{n}\right) \cdot \frac{2}{n^2} =$$

$$= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) [n +$$

$$+ \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}] = \frac{2(2n+1)}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) =$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n^2} \left(n + \frac{n(n+1)}{2n}\right) = \frac{(2n+1)(3n+1)}{n^2};$$

$$s(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) \left(1 + \frac{2(j-1)}{n}\right) \cdot \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) \cdot$$

$$\sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{2(j-1)}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) \left(n + \frac{2n(n-1)}{2n}\right) =$$

$$= \frac{2}{n^2} (2n-1) \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) = \frac{2}{n^2} (2n-1) \left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2n-1)(3n-1)}{n^2};$$

$$\sup\{s(f)\} = 6,$$

$$\inf\{S(f)\} = 6$$

$$\iint_{(D)} xy dD = 6$$

муносабатга эга бўламиз.

3 Икки каррала интегралнинг хоссалари. Икки каррала интегралларни ҳисоблаш.

1°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг (D) соҳага тегишли бўлган ноль юзали L чизикдаги ($L \subset (D)$) қийматларинигина ўзгартиришдан ҳосил бўлган $F(x, y)$ функция ҳам (D) соҳада интегралланувчи бўлиб,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} F(x, y) dD$$

бўлади.

2°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, (D) соҳа ноль юзали L чизик билан (D_1) ва (D_2) соҳаларга ажралган бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у (D_1) ва (D_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D_1)} f(x, y) dD_1 + \iint_{(D_2)} f(x, y) dD_2$$

муносабат ўринли. (Бу хоссанинг тескариси ҳам ўринлидир).

3°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у холда $c \cdot f(x, y)$ ($c = \text{const}$) ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint_{(D)} c \cdot f(x, y) dD = c \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

формула ўринли.

4°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у холда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint_{(D)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD \pm \iint_{(D)} g(x, y) dD$$

формула ўринли.

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geq 0$ бўлса, у холда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD \geq 0$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left| \iint_{(D)} f(x, y) dD \right| \leq \iint_{(D)} |f(x, y)| dD$$

тенгсизлик ўринли.

7°. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас сон

$$\mu (m \leq \mu \leq M, M = \sup_{(x, y) \in (D)} \{f(x, y)\}, m = \inf_{(x, y) \in (D)} \{f(x, y)\})$$

мавжудки,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \mu D$$

формула ўринли, бу ерда D (D) соҳанинг юзи.

Натижа. Агар $f(x, y)$ функция ёпиқ (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ топиладики,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = f(a, b) D$$

бўлади.

8°. Ўрта қиймат ҳақидаги умумлашган теорема. Агар $g(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, у шу соҳада ўз ишорасини сақласа ва $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ топиладики,

$$\iint_{(D)} f(x, y) g(x, y) dD = f(a, b) \iint_{(D)} g(x, y) dD$$

бўлади.

$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функция (D) соҳанинг юзага эга бўлган ҳар қандай (d) қисмида интегралланувчи ва

$$\iint_{(d)} f(x, y) dD$$

интеграл d га боғлиқ бўлади.

Одатда бу

$$\Phi((d)) = \iint_{(d)} f(x, y) dD$$

функция *соҳанинг функцияси* деб аталади. (D) соҳада бирор (x_0, y_0) нуқтани олайлик. (d) эса шу нуқтани ўз ичига олган $(d) \subset (D)$ соҳа бўлсин.

Агар $\lambda \rightarrow 0$ да $\frac{\Phi((d))}{d}$ нисбатнинг лимити $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi((d))}{d}$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги *соҳа бўйича ҳосиласи* деб аталади. (Бу ерда $d - (d)$ соҳанинг юзи, λ эса унинг диаметри).

Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги соҳа бўйича ҳосиласи $f(x_0, y_0)$ га тенг бўлади.

4-теорема. $f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин.

Агар $x \in [a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

ўринли.

5-теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x \in [a, b]$ ўзгарувчининг ҳар

бир тайин қийматида $\int_c^d f(x, y) dy$ интеграл мавжуд бўлса,

$y \in [c, d]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int_a^b f(x, y) dx$ интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

интеграллар ҳам мавжуд ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^a f(x, y) dy \right] dx = \int_c^a \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

формула ўринли.

Энди (D) соҳа ушбу

$$(D) = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

$$(\varphi_i(x) \in C[a, b], i = 1, 2)$$

кўринишда бўлсин.

6-теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x \in [a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

ўринли.

Қуйидаги 3—5 мисолларда $f(x, y)$ функция 6-теорема шартларини қаноатлантиради, деб қаралади.

3-мисол. Ушбу

$$(D) = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + (y+4)^2 > 25\}$$

кўринишда бўлса,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

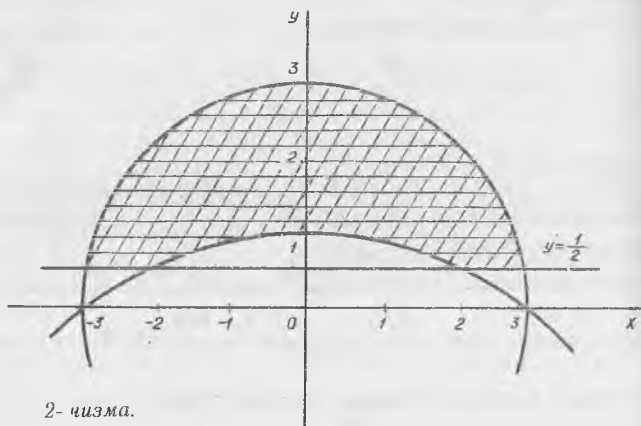
интегрални такрорий интегралга келтиринг ва интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

6-теоремадан фойдаланиб, топамиз:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_{-3}^3 dx \int_{\sqrt{25-x^2}-4}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy.$$

Интеграллаш тартибини ўзгартириш учун (D) соҳани қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$(D) = (D_1) \cup (D_2) \cup (D_3), \text{ (2-чизмага қаранг)}$$



2- чизма.

$$(D_1) = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq y \leq 3, -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}\},$$

$$(D_2) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 1, \\ -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq -\sqrt{9-8y-y^2}\},$$

$$(D_3) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{9-8y-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}\}.$$

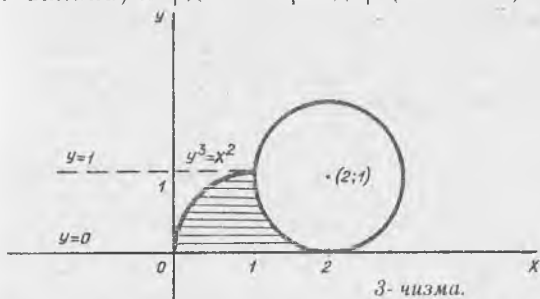
6- теоремадан ва икки қаррали интеграл хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} f(x, y) dD &= \int_1^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{9-8y-y^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{9-8y-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

4- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy$$

интегралда интеграллаш тартибини ўзгартиринг. Қарала-
 стан соҳаларни чегаралаб турган эгри чизиклар $y^3 =$
 x^2 (Oy ўқига нисбатан симметрик кубик парабола) ва
 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ (маркази $(2, 1)$ нуктада радиуси
 1 га тенг айлана) лардан иборатдир (3- чизма).



Чизмадан кўринадики, y 0 дан 1 гача ўзгарганда
 x ўзгарувчи $x = y^{3/2}$ дан $x = 2 - \sqrt{2y - y^2}$ гача ўзгаради.
 Демак,

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^{3/2}}^{2 - \sqrt{2y - y^2}} f(x, y) dx.$$

5- м и с о л. Агар

$$(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

кўринишда бўлса,

$\iint_{(D)} f(x, y) dD$ интегрални такрорий интегралга келти-

ринг ва интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

Интеграллаш соҳасини координата ўқларига нисбатан
 симметрик эканлигини кўриш қийин эмас (4- чизма).

$$(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 + |x| \leq y \leq 1 - |x|\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, -1 + |y| \leq x \leq 1 - |y|\}.$$

Демак,

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} f(x, y) dD &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1+|x|}^{1-|x|} f(x, y) dy = \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_{-1+|y|}^{1-|y|} f(x, y) dx \end{aligned}$$

6- мисол. Ушбу

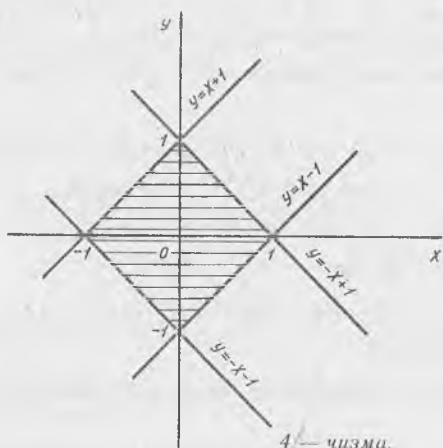
$$\iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy$$

интегрални ҳисобланг. Бу ерда (D) томонлари $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$ ($a > 0$) бўлган параллеллограмм.

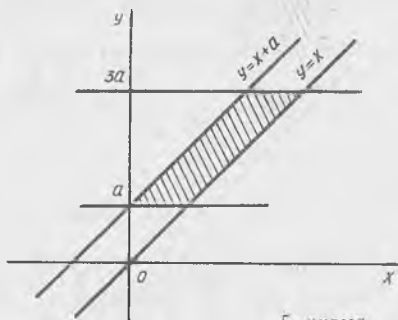
Чизмадан кўринадики, интегрални такрорий интегралга келтиришда, уни

$$\int_c^d \Psi_2(y) \int_{\Psi_1(y)} f(x, y) dx dy$$

кўринишда ифодалаш мақсадга мувофиқдир (5- чизма).



4- чизма.



5- чизма.

Демак,

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx = \\ &= \int_a^{3a} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{(y-a)^3}{3} + y^3 - y^2(y-a) \right] dy = \frac{81a^4}{12} - \frac{16a^4}{12} + \\ &+ \frac{27a^4}{3} - \frac{a^4}{12} - \frac{a^4}{3} = \frac{168}{12} a^4 = 14 a^4 \end{aligned}$$

7- мисол. Ушбу

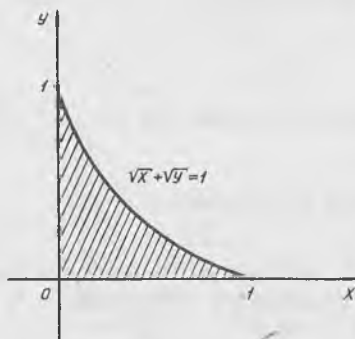
$$I = \iint_{(D)} xy dx dy$$

интегрални ҳисобланг. Бу ерда (D) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ парабола ва координата ўқлари билан чегараланган соҳа.

Чизмадан интегрални

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

кўринишда ҳисоблаш мақсадга мувофиқ эканлигини кўрамиз (6- чизма).



6- чизма.

Демак,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^4 dx = \frac{1}{280}$$

4. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш.

Oxy ҳамда Ouv координаталар системасида мос равишда (D) ва (Δ) соҳаларни қарайлик. Бу соҳаларнинг чегаралари содда, бўлакли-силлиқ чизиқлардан иборат бўлсин.

$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва унинг чекли каррали интегралли

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

мавжуд бўлсин. Бу интегралда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \Delta \in R^2. \quad (2)$$

(2) акслантириш қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1°. (Δ) ни (D) га ўзаро бир қийматли акслантиради.

2°. $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ функциялар (Δ) соҳада узлуксиз, барча хусусий ҳосилаларга эга ва бу хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиз.

$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, (2) акслантириш 1° — 2° шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv \quad (3)$$

формула ўринли, бу ерда $I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

(2) системанинг Якобианидир.

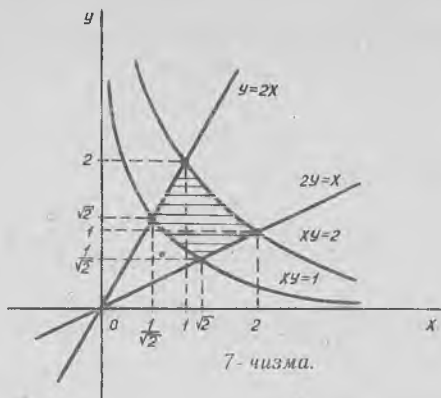
(3) формула икки каррали интегралларда ўзгарувчини алмаштириш формуласи дейилади.

8- м и с о л. Ушбу

$$I = \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy$$

интегрални ҳисобланг.

Бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq xy \leq 2, 0 \leq x \leq 2y \leq 4x\}$ интеграллаш соҳасини чизмада ифодалаймиз (7- чизма).



$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}, \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада берилган соҳанинг образи

$$(\Delta) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2\}$$

бўлиб, Якобиан эса

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

га тенг бўлади.

Демак,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{u}{v} + uv \right) \frac{1}{2v} du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 u du \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{v^2} + 1 \right) dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{15}{4} \right) u du = \frac{63}{16}. \end{aligned}$$

9- мисол. Ушбу

$$I = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

интегралда кутб координаталари системасига ўтиб, уни такрорий интегралга келтиринг.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

алмаштириш натижасида топамиз:

$$I(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho.$$

10- мисол. Ушбу

$$I = \iint_{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

интегрални ҳисобланг.

9- мисолдан фойдаланган ҳолда, интеграллаш соҳаси ҳалқа эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$I = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \rho \sin \rho d\rho = 2\pi \left(\rho \cos \rho \Big|_{2\pi}^{\pi} + \int_{2\pi}^{\pi} \cos \rho d\rho \right) = -6\pi^2$$

11- мисол. Ушбу

$$I = \iint_{(D)} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{3/2} - \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right] dx dy,$$

интегрални ҳисобланг. Бу ерда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2: x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x}{a} \right)^{3/2} + \left(\frac{y}{b} \right)^3 \leq 1\}.$$

Куйидаги

$$\frac{x}{a} = u^{2/3}, \quad \frac{y}{b} = v^{1/3}$$

алмаштириш ажарамиз. Қаралаётган соҳанинг образи куйидагича бўлади:

$$(\Delta) = \{(u, v) \in R^2: u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}.$$

бўлади. Якобиан эса:

$$I(u, v) = \frac{2ab}{9} u^{1/3} v^{-2/3}$$

бўлади.

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{(D)} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{y}{b}\right)^3\right) dx dy = \iint_{(\Delta)} \frac{2ab}{9} (1 - u - \\
 &- v) u^{-1/3} v^{-2/3} du dv = \frac{2ab}{9} \int_0^1 u^{-1/3} du \int_0^{1-u} (1 - u - \\
 &- v) v^{-2/3} dv = \frac{2}{9} ab \int_0^1 \frac{9}{4} (1-u)^{4/3} u^{-1/3} du = \\
 &= \frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi ab.
 \end{aligned}$$

12- м и с о л. Ушбу

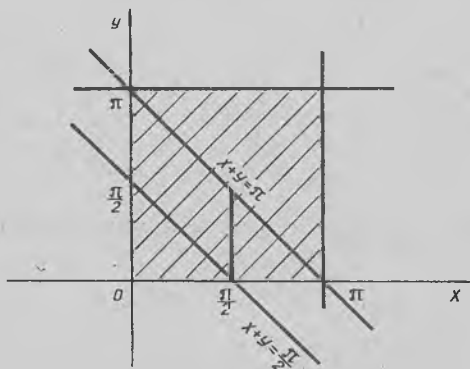
$$I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} [\cos(x+y)] dx dy$$

интегрални хисобланг.

Интеграл остидаги функциянинг хоссасидан фойдаланиб, интегрални қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$I = 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi - x}} |\cos(x+y)| dx dy.$$

Бу интегралда қаралаётган соҳани $x + y = \frac{\pi}{2}$ чизиқ ёрдамида икки бўлакка ажратамиз, уларнинг бирида $\cos(x+y)$ мусбат, иккинчисиди эса манфий бўлади (8- чизма).



8- чизма.

Демак,

$$I = 2 \left(\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi-x} \cos(x+y) dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi-x} \cos(x+y) dy \right) = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx + \int_0^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx = 2\pi.$$

13- мисол. Ушбу

$$\iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y-x^2} dx dy$$

интеграл ҳисоблансин.

Интеграллаш соҳаси Oxy текисликда $y = x^2$ парабола ва $y = 4$ тўғри чизик билан чегаралангандир. 3- теоремага кўра қаралаётган интеграл мавжуд бўлиб,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{агар } (x, y) \in D_1 = \{(x, y): x^2 \leq y < 1 + x^2\} \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } (x, y) \in D_2 = \{(x, y): 1 + x^2 \leq y < 2 + x^2\} \text{ бўлса,} \\ \sqrt{2}, & \text{агар } (x, y) \in D_3 = \{(x, y): 2 + x^2 \leq y < 3 + x^2\} \text{ бўлса,} \\ \sqrt{3}, & \text{агар } (x, y) \in D_4 = \{(x, y): 3 + x^2 \leq y < 4\} \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади (9- чизма). Соҳа Oy ўқига нисбатан симметрикдир.

Демак,

$$I = \iint_{(D_2)} dx dy + \sqrt{2} \iint_{(D_3)} dx dy + \sqrt{3} \iint_{(D_4)} dx dy$$

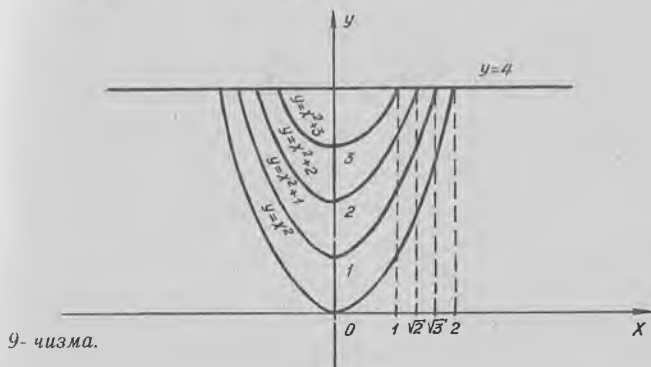
$\iint_{(D_1)} dx dy$ (D_1) соҳанинг юзасига тенглигини ҳисобга

олиб, топамиз:

$$S_4 = \iint_{(D_4)} dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{3+x^2}^4 dy = \frac{4}{3},$$

$$S_3 = \iint_{(D_3)} dx dy = 2 \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{2+x^2}^4 dy = S_4 = \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3},$$

$$S_2 = \iint_{(D_2)} dx dy = 2 \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{1+x^2}^4 dy - (S_3 + S_4) = 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$



Шундай қилиб,

$$I = S_2 + \sqrt{2} S_3 + \sqrt{3} S_4 = \frac{4}{3}(4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}).$$

14- м и с о л. Ушбу

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$$

интегрални ҳисобланг.

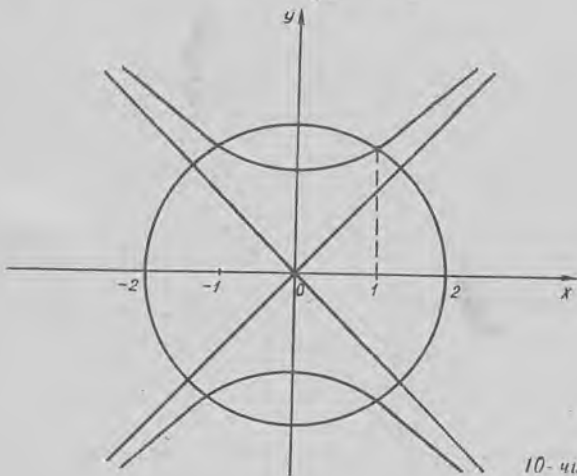
Интеграллаш соҳаси координата ўқларига нисбатан симметрикдир. Иккинчи томондан, $\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$ функцияси координата текислигининг ҳар бир чорагида жойлашган соҳада тенг қиймат қабул қилади (10- чизма).

Демак,

$$I = 4 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy.$$

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x^2 - y^2 + 2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x^2 - y^2 + 2 = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x^2 - y^2 + 2 < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 I &= 4 \left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \right. \\
 &\left. - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) = 4 \left(\int_0^1 2\sqrt{x^2-2} - \sqrt{4-x^2} dx + \right. \\
 &\left. + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx \right) = 4 \left[(x\sqrt{x^2+2} + 2\ln(x + \right. \\
 &\left. + \sqrt{x^2+2})) \Big|_0^1 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} \right) \Big|_1^2 \right] = \\
 &= 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}$$



10- чизма.

15- мисол. Ушбу

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy$$

лимитни топинг. Бу ерда $f(x, y)$ қаралаётган $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$ соҳада узлуксиз.

$\frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy$ интегралга ўрта қиймат ҳақидаги

теоремани қўллаймиз. Натижада:

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi\rho^2} f(\bar{x}, \bar{y}) \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} dx dy =$$

$$\frac{1}{\pi\rho^2} f(\bar{x}, \bar{y}) \pi\rho^2 = f(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \in (D).$$

$\rho \rightarrow 0$ да $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

$f(x, y)$ функция (D) да узлуксиз булгани учун

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\bar{x}, \bar{y}) = f(0, 0)$$

экани келиб чиқади.

16- мисол. Ушбу

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0, y > 0)$$

чизиқлар билан чегараланган юзани толинг.

$x = a \cos^3 \varphi$, $y = b \sin^3 \varphi$ ($\rho \geq 0$) алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1 \quad \text{да } \rho = 1,$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4 \quad \text{да } \rho = 8,$$

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ да $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ да $\varphi = \arctg 2$ бўлиб, $I(\rho, \varphi) =$
 $= 3ab\rho \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$ бўлади.

Шундай қилиб, изланаётган юза куйидагига тенг:

$$S = \iint_{(D)} dx dy = 3ab \int_1^8 \rho d\rho \int_{\pi/4}^{\arctg 2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{189}{16} ab \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_{\pi/4}^{\arctg 2} = \frac{189}{16} ab \left(\arctg \frac{1}{3} + \frac{6}{25} \right)$$

(юз бир.).

(Юқорида $\sin 4\varphi = \frac{4 \operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2}$ формуладан фойдаланилди).

(V) жисм юқоридан $z = f(x, y)$ сирт, ён томондан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндр сирт хамда куйидан Oxy текисликдаги (D) соҳа билан

чегараланган бўлсин. (V) жисмнинг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интеграли орқали қуйидагича топилади:

$$v = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy.$$

17- м и с о л. Ушбу

$$z = c \sin\left(\pi\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) \left(k \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq k+1, k \in N\right)$$

ва $z=0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг.

$$V = \iint_{(D)} |z(x, y)| dx dy \text{ интегрални ҳисоблаймиз. Бунда}$$

$$(D) = \{(x, y) \in R^2: k \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq k+1\} \quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \text{ алмаштиришни бажарамиз.}$$

$$z = \left| c \sin\left(\pi\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) \right| \text{ функциянинг жуфтлигини,}$$

қаралаётган соҳанинг координата ўқларига нисбатан симметриклигини ҳисобга олсак, у ҳолда:

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} \rho abc |\sin \pi \rho^2| a \rho = 4abc \times$$

$$\times \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} \rho |\sin \pi \rho^2| d\rho = 2\pi abc \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi} (\cos \pi r^2) \Big|_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} =$$

$$= abc (-1)^{k+1} (\cos(k+1)\pi - \cos k\pi) =$$

$$2abc (-1)^{k+2} \cos k\pi = 2abc$$

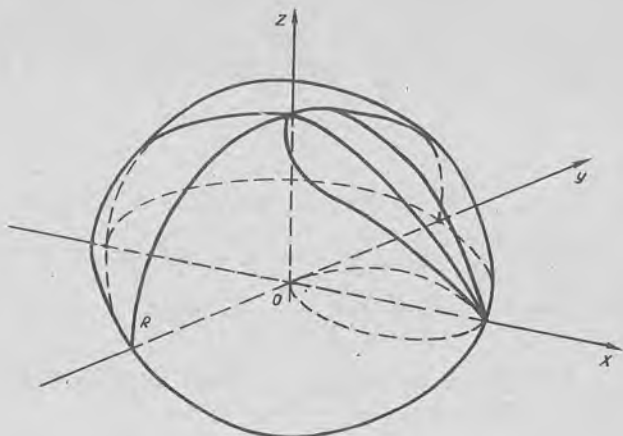
бўлади.

18- м и с о л. Ушбу $x^2 + y^2 = Rx$ цилиндр билан $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферадан ажратилган жисм ҳажмини топинг.

Интеграллаш соҳаси симметриклигини ҳисобга олган ҳолда топамиз:

$$V = 4 \iint_{(D)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \text{ бу ерда } (D) \text{ } Oxy$$

текислигининг биринчи чорагида жойлашган $x=0$ ва $x^2 + y^2 = Rx$ чизиқлар билан чегараланган ярим доирадир (11- чизма).



11- чизма.

Демак,

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dy = \frac{4}{2} \int_0^R [(R^2-x^2) \cdot \\
 &\cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} + \frac{4}{2} \sqrt{R(R-x)} \sqrt{x}] dx = \frac{\pi R^3}{3} - \\
 &- \frac{\sqrt{R}}{3} \left(2R^2 \sqrt{R} \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{8}{15} R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{8}{9} R^3.
 \end{aligned}$$

19- мисол. Ушбу $z^2 = xy$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг.

Жисм қуйидан $Oxy(z=0)$ текислик билан, юқоридан эса $z = \sqrt{xy}$ конус сирти билан қопланган. Ён томондан ясовчилари Oz ўқиға параллел бўлган гиперполик ($xy = c_1$), параболик ($y^2 = c_2x$) цилиндрлар билан чегаралангандир.

Ўзгарувчиларни $xy = u$, $y^2 = vx$ алмаштириш натижа-сида топамиз:

$$I(u, v) = \frac{1}{3v}, \quad (\Delta) = \{(u, v) \in R^2 : u \in [1, 4] v \in [1, 3]\}.$$

Демак,

$$V = \iint_{(D)} \sqrt{x} y \, dx dy = \iint_{(\Delta)} |I(u,v)| \sqrt{u} \, du dv = \frac{1}{3} \int_1^4 \sqrt{u} \, du \int_1^3 \frac{dv}{v} = \\ = \frac{19}{4} \ln 3.$$

Биз аниқ интеграл ёрдамида баъзи бир лимитларни ҳисоблашни кўрган эдик. Қаррали интеграллар ёрдамида ҳам бу масалани ҳал этиш мумкин.

20- м и с о л. $f(x,y)$ функция

$$(D) = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

соҳада интегралланувчи бўлса, икки қаррали интеграл таърифидан фойдаланиб, ушбу

$$\prod_{k=1}^n \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[f\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}, \frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}, \frac{k}{n}\right) \right] \right\}$$

кўпайтманинг $n \rightarrow \infty$ даги лимитини топинг. Бу ерда

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

$$\prod_{k=1}^n \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[f\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}, \frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}, \frac{k}{n}\right) \right] \right\} = \prod_n$$

белгилашни киритамиз.

$x \leq \frac{1}{2}$ лар учун $|\ln(1+x) - x| \leq x^2$ тенгсизликдан фойдалансак,

$$\left| \ln \prod_n - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right]^2$$

бўлади.

$$\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right]^2 < \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n n \sum_{i=1}^n \left[f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right]^2$$

эқанини эътиборга олиб, топамиз:

$$\left| \ln \prod_n - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right]^2 \leq \\ \leq \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n n \sum_{i=1}^n \left[f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right]^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n n \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right]^2 = 0$$

муносабатдан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)$$

га эга бўламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода $f(x,y)$ функция учун (D) соҳада қаралаётган бўлинишга нисбатан интеграл йиғинди эканини кўриш қийин эмас.

$\iint_D f(x,y) dx dy$ интеграл мавжудлигидан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_n = e^{\iint_D f(x,y) dx dy}$$

бўлади.

Демак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[f\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}, \frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}, \frac{k}{n}\right) \right] \right\} = e^{\iint_D f(x,y) dx dy}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

8—10- мисолларда r ва φ кутб координаталаридир.

1. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy.$

5. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy.$

2. $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) dy.$

6. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy.$

3. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy.$

7. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y) dy.$

4. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy.$

8. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$

$$9. \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0). \quad 10. \int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr.$$

Куйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$11. \iint_{(D)} (x^3 y + xy^3) dx dy.$$

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 - 3y^2 \leq 4, 4y^2 - 3x^2 \leq 4\}.$$

$$12. \iint_{(D)} \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{xy} dx dy.$$

(D) соҳа $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{4}{x^2}$, $y = x - 1$, $y = x + 1$ чизиклар билан чегараланган.

$$13. \iint_{(D)} xy^2 dx dy, \quad (D) \text{ соҳа } y^2 = 2px$$

парабола ва $x = \frac{p}{2}$ ($p > 0$) чизик билан чегараланган.

$$14. \iint_{(D)} |xy| dx dy, \quad (D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

$$15. \iint_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad (D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

$$16. \iint_{(D)} (x + y) dx dy, \quad (D) \text{ соҳа } x^2 + y^2 = x + y$$

чизик билан чегараланган.

$$17. \iint_{|x| + |y| \leq 1} (|x| + |y|) dx dy.$$

$$18. \iint_{x^4 + y^4 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy.$$

$$19. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$$

$$20. \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x + y] dx dy.$$

$$21. \iint_{(D)} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5} \right)^2 dx dy, \quad (D) \text{ соҳа } \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5} \right)^4 = \frac{x^2}{9} + y^2$$

чизик ва координата ўқлари билан чегараланган ($x > 0$, $y > 0$).

$$22. \iint_{(D)} \frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}} dx dy,$$

(D) соҳа $(x^6 + y^6)^2 = (x - y)^3$ чизик билан чегараланган.

$$23. \iint_{|x| + |y| \leq 1} x^3 y^5 dx dy.$$

$$24. \iint_{(D)} ([x] + [y]) dx dy, (D) — соҳа учлари $O(0,0)$, $A(0,2)$,$$

$B(2,0)$, $C(2,2)$ бўлган квадрат.

$$25. \iint_{\substack{x+y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0}} [x^2 + y^2] dx dy. \quad 26. \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy.$$

$$27. \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx dy. \quad 28. \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \frac{x dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$29. \iint_{(D)} \frac{(x+y)^2}{x} dx dy.$$

(D) = $\{(x, y) \in R^2 : 1 - x \leq y \leq 3 - x, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\}$.

$$30. \iint_{(D)} (x^3 + y^3) dx dy$$

(D) = $\{(x, y) \in R^2 : x^2 \leq y \leq 3x^2, \frac{1}{x} \leq 2y \leq \frac{3}{x}\}$.

$$31. \iint_{(D)} xy dx dy.$$

(D) = $\{(x, y) \in R^2 : ax^3 \leq y \leq bx^3, px \leq y^2 \leq qx\}$.

$$32. \iint_{(D)} \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy,$$

(D) = $\{(x, y) \in R^2 : ay \leq x^2 \leq by, px \leq y^2 \leq qx\}$.

$$33. \iint_{(D)} \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy, (D) \text{ соҳа } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

чизик ва координата ўқлари билан чегараланган.

$$34. \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \cos(x^2+y^2) dx dy.$$

35.

$$\iint_{(D)} \sqrt{|x-y^2|} dx dy, (D) = \{(x,y) \in R^2: |y| \leq 1, 0 \leq x \leq 2\}.$$

Куйидаги чизиклар билан чегараланган соҳалар юзаларини ҳисобланг:

$$36. (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2 = a^2.$$

$$37. (x^3+y^3)^2 = x^2+y^2, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$38. (x^2+y^2)^2 = 8a^2xy, (x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2, a > 0.$$

$$39. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{n} + \frac{y}{k}.$$

$$40. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{xy^2}{c^4}.$$

$$41. \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, x=0, y=0.$$

$$42. x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x, (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta).$$

$$43. y^2 = 2px, y^2 = 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy$$

$(0 < p < q, 0 < r < s).$

$$44. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1,$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, 4\frac{x}{a} = \frac{y}{b} (a > 0, b > 0).$$

$$45. (x^2+y^2)^3 = a^4(x^4+y^4).$$

$$46. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

$$47. \sqrt[n]{\frac{x}{a}} + \sqrt[n]{\frac{y}{b}} = 1,$$

$$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0).$$

$$48. y = \frac{x^4}{a^3}, y = \frac{x^4}{b^3},$$

$$xy = c^2, xy = d^2.$$

$$(x > 0, y > 0, 0 < a < b, 0 < c < d).$$

$$49. x^2 + y^2 = ay, x^2 + y^2 = by, x = \alpha y, x = \beta y.$$

$$(0 < a < b, 0 < \alpha < \beta).$$

$$50. (x + 2y - 1)^2 + (2x + y - 2)^2 = 9.$$

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг ҳажмларини топинг:

$$51. x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$(a > R\sqrt{2}).$$

$$52. z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

$$53. z = \sin \frac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi.$$

$$54. z = xy, x + y + z = 1, z = 0.$$

$$55. z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2.$$

$$56. z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$$

$$57. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geq a|x| \quad (a > 0).$$

$$58. z = e^{-(x^2 + y^2)}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2.$$

$$59. z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}, z = 0.$$

$$60. z = x^2 + y^2, z = x + y.$$

$$61. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Қуйидаги жисмларнинг ҳажмларини топинг:

$$62. z^2 \leq 2px, y \leq x \leq a, y \geq 0.$$

$$63. z^2 \geq 2px, z^2 \geq 2qy, 0 \leq z \leq a, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$64. x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq az \leq a^2 - 2y^2.$$

$$65. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1.$$

$$66. 4x \geq y^2, 4y \geq x^2, 0 \leq z \leq y.$$

$$67. x^2 + y^2 \leq az \leq h^2.$$

$$68. 0 \leq z \leq ce^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq R^2.$$

$$69. 0 \leq z \leq c \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}, |x| \leq a, |y| \leq b.$$

$$70. 0 \leq z \leq y \sin \left(\pi \left(\frac{x}{y} \right)^4 \right), nx \leq y^2 \leq mx.$$

$$\beta y \leq x \leq \alpha y, (m > n > 0, 0 < \beta < \alpha < 1).$$

2-§. УЧ ҚАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

$f(x, y, z)$ функция R^3 фазодаги чегараланган (V) соҳада берилган бўлсин. Бу функциянинг (V) соҳа бўйича уч қаррали интеграл тушунчаси 1-§ да келтирилган икки қаррали интегралга ўхшаш киритилади. (V) соҳанинг ρ бўлинишини қарайлик. Бу бўлинишнинг ҳар бир (V_k) ($k=1, 2, \dots, n$) бўлагида ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқта олиб, қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V_k.$$

интеграл йигиндини тузамиз, бунда $V_k - (V_k)$ нинг ҳажми.

4-таъриф. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (V) соҳанинг диаметри $\lambda < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлинишда ҳамда ҳар бир (V_k) бўлакдаги ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I га $f(x, y, z)$ функциянинг (V) бўйича уч қаррали интеграл дейилади ва у

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V_k.$$

Уч қаррали интегралларнинг мавжудлиги, интегралланувчи функциялар синфи ва интеграл хоссаларига оид теоремалар худди икки қаррали интеграллардаги каби бўлади.

$f(x, y, z)$ функция

$$(V) = \{(x, y, z) \in R^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq l\}$$

соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^l f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

бўлади.

Энди (V) соҳа — пастдан $z = \psi_1(x, y)$, юқоридан $z = \psi_2(x, y)$ сиртлар билан, ён томондан Oz ўқига параллел цилиндрик сирт билан чегараланган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг Oxy текислигига проекцияси (D) бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция шундай (V) соҳада узлуксиз бўлиб, $z = \psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) функциялар (D) да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{(D)} \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

бўлади.

Агар

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

бўлиб, $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$) функциялар $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

бўлади.

$f(x, y, z)$ функция (V) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, (V) соҳа — силлиқ ёки бўлакли силлиқ сиртлар билан чегараланган бўлсин.

$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$ интегралда ўзгарувчиларни қўйи-

дагича алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w), \end{cases} (u, v, w) \in \Delta \subset R^3 \quad (4)$$

(4) акслантириш 1-§ 4-пунктда келтирилган 1°—2° каби шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |I(u, v, w)| du dv dw \quad (5)$$

бўлади, бунда

$$I(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

(5) формула уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласидир. Кўпчилик ҳолларда уч каррали интегралларни ҳисоблаш учун ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштириш мақсадга мувофиқ бўлади:

а) Қуйидаги

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (6)$$

алмаштиришни қарайлик ($0 \leq r < +\infty$), ($0 \leq \varphi < 2\pi$), ($-\infty < z < +\infty$).

Натижада (5) формула ушбу

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} f(r, \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

кўринишни олади.

Одатда (6) алмаштириш цилиндрик алмаштиришлар (r, φ, z) эса нуқтанинг цилиндрик координаталари дейилади.

Ушбу

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (7)$$

алмаштиришни қарайлик ($0 \leq \rho < +\infty$), ($0 \leq \theta \leq \pi$), ($0 \leq \varphi < 2\pi$). У ҳолда (5) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin^2 \theta d\rho d\theta d\varphi.$$

Одатда (7) алмаштириш сферик алмаштиришлар, (ρ, θ, φ) эса нуқтанинг сферик координаталари дейилади.

21- м и с о л. Ушбу

$$\iiint_{(V)} x^2 dv$$

интегрални таъриф бўйича ҳисобланг. Бунда (V) соҳа $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ цилиндрлар, $y = x \operatorname{tg} \alpha$, $y = x \operatorname{tg} \beta$ ярим текисликлар ва иккита $z = c$ ва $z = d$ текисликлар билан чегараланган ($0 < a < b$, $c < d$, $0 < \alpha < \beta$).

Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасида цилиндрлар $r=a$, $r=b$, ярим текисликлар $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, текисликлар эса $z=c$ ва $z=d$ кўринишга эга бўлади. Қаралаётган интегралда функциянинг узлуксизлигини ҳисобга олиб, яъни интегрални мавжудлигидан фойдаланган ҳолда интеграл йиғинди тузамиз. (V) соҳани куйидаги бўлинишини қараймиз:

$$1) r=r_i, r_i=a + \frac{b-a}{n} \cdot i \text{ ёки}$$

$$r_i=a + i\Delta r, \Delta r=\frac{b-a}{n}, i=\overline{1, n-1}$$

$$2) \varphi=\varphi_k, \varphi_k=\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} \cdot k \text{ ёки}$$

$$\varphi_k=\alpha + k \cdot \Delta\varphi, \Delta\varphi=\frac{\beta-\alpha}{n}, k=\overline{1, n-1}.$$

$$3) z=z_j, z_j=c + \frac{d-c}{n} \cdot j \text{ ёки}$$

$$z_j=z + j \cdot \Delta z, \Delta z=\frac{d-c}{n},$$

$j=\overline{1, n-1}$, $(V_{i,j,k})$ соҳачанинг хажми

$$V_{ijk}=\frac{1}{2}\Delta\varphi \cdot \Delta r \cdot \Delta z \cdot (r_i + z_{i-1})=\frac{1}{2}\Delta\varphi \cdot \Delta r \cdot$$

$$\Delta z [2a + \Delta r(2i-1)] = \left(a + \Delta r \cdot \frac{2i-1}{2}\right) \Delta\varphi \cdot \Delta z \cdot \Delta r$$

бўлади.

$f(x, y, z) = x^2$ функция (r, φ, z) системада

$f(r, \varphi, z) = \frac{1}{2}r^2(1 + \cos 2\varphi)$ кўринишни олади.

Энди интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V_{ijk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(a + \Delta r \cdot \frac{2i-1}{2}\right) \times \\ \times r_i^2 \Delta r \sum_{j=1}^n \Delta z \sum_{k=1}^n (1 + \cos 2\varphi_k) \Delta\varphi.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндиларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sum_{i=1}^n \left(a + \Delta r \cdot \frac{2i-1}{2} \right) (a + \Delta r \cdot i)^2 \Delta r = \\
&= \sum_{i=1}^n \left(a + \Delta r \cdot \frac{2i-1}{2} \right) \cdot (a^2 + 2ai\Delta r + i^2 \Delta r^2) \Delta r = \\
&= \sum_{i=1}^n \left[a^3 + a^2 \Delta r \left(3i - \frac{1}{2} \right) + a \Delta r^2 (3i^2 - i) + \frac{1}{2} \Delta r^3 \cdot (2i^3 - i^2) \right] \Delta r = \\
&\quad \Delta r = \left\{ na^3 + a^2 \cdot \frac{b-a}{n} \left[\frac{3n(n+1)}{2} - n \cdot \frac{1}{2} \right] + \right. \\
&\quad + a \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \left[3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{(b-a)^3}{n^3} \cdot \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \right\} \frac{b-a}{n} = \\
&= (b-a) \cdot \left\{ a^3 + a^2(b-a) \left[\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2n} \right] + \right. \\
&\quad + a(b-a)^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] + \\
&\quad \left. + (b-a)^3 \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] \right\}; \\
\sigma_\varphi &= \sum_{k=1}^n (1 + \cos 2\varphi_k) \Delta \varphi = \left[n + \sum_{k=1}^n \cos(2\alpha + k \cdot 2\Delta \varphi) \right] \Delta \varphi = \\
&= \left[n \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} + \frac{\sin n \cdot \Delta \varphi \cos \left(2\alpha + \frac{n+1}{2} \cdot 2\Delta \varphi \right)}{\sin \Delta \varphi} \cdot \Delta \varphi \right] = \\
&= \left[\beta - \alpha + \frac{\Delta \varphi}{\sin \Delta \varphi} \sin(\beta - \alpha) \cos \left[2\alpha + \left(1 + \frac{1}{n} \right) (\beta - \alpha) \right] \right] \\
\sigma_z &= \sum_{j=1}^n \Delta z = d - c.
\end{aligned}$$

Энди $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \frac{1}{8} (b^4 - a^4) \left[(\beta - \alpha) - \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \right] (d - c).$$

Демак,

$$\iiint_{(V)} x^2 dv = \frac{1}{8} (b^4 - a^4) \left[(\beta - \alpha) - \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \right] (d - c).$$

$$I = \iiint_{(V)} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz$$

интегрални ҳисобланг. Бунда (V) соҳа $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлар билан чегараланган, $p, q, r, s > 0$.

Қаралаётган интегралда

$$x+y+z=u, \quad y+z=uv, \quad z=uvw$$

алмаштиришни бажарамиз.

x, y ва z ларнинг энг кичик қийматлари 0 бўлгани учун $x+y+z=1$, $x+y+z=u$ муносабатлардан, $u \leq 1$ эканини топамиз. Демак, u нинг тайинланган қийматида $y+z$ нинг энг катта қиймати u га тенг, бундан $v \leq 1$. Худди шунга ўхшаш $w \leq 1$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$(\Delta) = \{(u, v, w) : 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}.$$

$$x = u(1-v), \quad y = uv(1-w), \quad z = uvw$$

бўлиб, Якобиан эса

$$\begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v,$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{(\Delta)} u^p (1-v)^p u^q v^q (1-w)^q u^r v^r w^r \cdot (1-u)^s \cdot u^2 v \, du dv dw = \\ &= \int_0^1 u^{p+q+r+2} (1-u)^s du \int_0^1 v^{q+r+1} \cdot (1-v)^p dv \int_0^1 w^r (1-w)^q dw = \\ &= \int_0^1 u^{p+q+r+2} \cdot (1-u)^s du \int_0^1 B(r+1, q+1) v^{q+r+1} (1+v)^p dv = \\ &= B(r+1, q+1) \int_0^1 u^{p+q+r+2} (1-u)^s B(q+r+2, p+1) du = \\ &= B(r+1, q+1) B(q+r+2, p+1) B(p+q+r+3, s+1) = \\ &= \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+q+2)\Gamma(q+r+p+3)\Gamma(p+q+r+s+4)} = \\ &= \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \end{aligned}$$

23- мисол. Ушбу

$$I = \iiint_{(V)} z(x^2 + y^2) dx dy dz$$

интегрални ҳисобланг. Бунда (V) — соҳа $x^2 + y^2 \leq az$, $(x^2 + y^2)^2 \leq az^3$ сиртлар билан чегараланган.

(V) ни чегаралаб турган сиртлар OZ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртлар бўлгани учун меридиан кесимнинг чизмасини қараймиз (12- чизма).

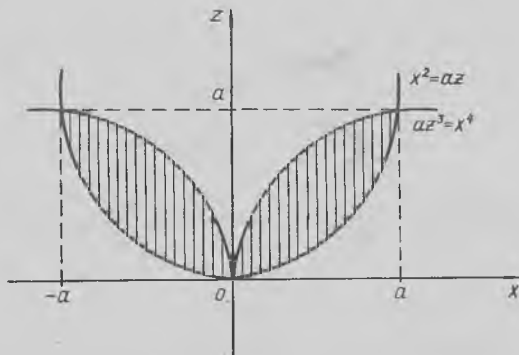
$x^2 + y^2 = az$ ва $(x^2 + y^2)^2 = az^3$ сиртлар ушбу $z = a$, $x^2 + y^2 = a^2$ айлана бўйича кесишади.

(V) соҳанинг OZ ўқида проекцияси $(0, a)$ интервалдан иборат, xOy текислигига проекцияси эса $x^2 + y^2 < a^2$ доирадан иборатдир. $z = z_0$, $(z_0 \in (0, a))$ текислик (V) ни ички радиуси $\sqrt{az_0}$, ташқи радиуси $\sqrt{az_0}$ бўлган доиравий ҳалқа бўйлаб кесади.

Демак,

$$(V) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < az, \frac{x^2 + y^2}{a} < z < \sqrt[3]{\frac{(x^2 + y^2)^2}{a}} \right\}$$

$$\iiint_{(V)} z(x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{(D_0)} (x^2 + y^2) dx dy \int_{\frac{x^2 + y^2}{a}}^{\sqrt[3]{\frac{(x^2 + y^2)^2}{a}}} z dz.$$



12- чизма

Бу ерда

$$(D_0) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Цилиндрик координаталарга ўтиб, топамиз:

$$I = \int_0^a h dh \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{ah}}^{\sqrt{ah}} r^3 dr,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr \int_{\frac{r^2}{a}}^{\frac{r^2}{a}} h dh = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \int_0^a h(a^2 h^2 - ah^3) dh = \\ = \frac{\pi}{2} a^6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi a^6}{40}.$$

Демак,

$$I = \frac{\pi a^6}{40}.$$

24- мисол. Ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$$

сиртлар билан чегараланган соҳа ҳажмини топинг.

Маълумки, изланаётган ҳажм

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz$$

формула орқали топилиб, бунда (V) юқорида берилган сиртлар билан чегаралангандир.

Сферик координаталар системасидан фойдаланамиз:

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

$$(\Delta) = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi < 2\pi, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta\}$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin \theta d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 d\rho = 16 \frac{\pi a^3}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta =$$

$$= 16 \frac{\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/6} \cos^3 \theta d(\cos \theta) = \frac{5}{12} \pi a^3 \text{ (куб.бир.)}$$

Мисол ва масалалар

Куйидаги уч карралаи интегралларни ҳисобланг:

71.
$$\iiint_{(V)} xy^2z^3 dx dy dz,$$

бунда (V) $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган.

72.
$$\iiint_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz,$$

бунда (V) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ сирт билан чегараланган.

73.
$$\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

бунда (V) $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$ сиртлар билан чегараланган.

74.
$$\iiint_{(V)} xyz dx dy dz,$$

бунда (V) $z = \frac{x^2 + y^2}{m}$, $z = \frac{x^2 + y^2}{n}$,

$$xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

сиртлар билан чегараланган ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$, $0 < m < n$)

75.
$$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

m, n, p лар бутун, манфий бўлмаган сонлар.

76.
$$\iiint_{\substack{0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} 1(x^2 - 4xy + y^2) dx dy dz.$$

77.
$$\iiint_{(V)} xyz dx dy dz,$$

78.

$$\iiint_{(V)} z dx dy dz, (V) = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : z^2 \geq \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2), 0 \leq z \leq h \right\}.$$

79.
$$\iiint_{(V)} z^2 dx dy dz, (V) = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}.$$

$$80. \iiint_{(V)} (x+y+z)^2 dx dy dz, (V) = \{(x, y, z) \in R^3 : \\ :x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}.$$

Куйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг хажмларини топинг:

$$81. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z.$$

$$82. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz.$$

$$83. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz.$$

$$84. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2).$$

$$85. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 z^4.$$

$$86. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2.$$

$$87. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 (x^3 + y^3).$$

$$88. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 z(x^2 - y^2).$$

$$89. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z e^{-\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$90. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^6 \sin^2 \left[\frac{\pi z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right].$$

$$91. (x^2 + y^2)^2 + z^4 = za^3.$$

$$92. (x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3 xyz.$$

$$93. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^4} = \frac{x}{k}.$$

$$94. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{k} \sin \left(\frac{\pi z}{c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} \right).$$

$$95. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1, x=0, y=0, z=0 (z>0).$$

$$96. x + y + z = a, x + y + z = 2a, x + y = z, x + y = 2z, x = y, y = 3x.$$

$$97. a^2 \leq xy \leq b^2, pz \leq xy \leq qz, \alpha x \leq y \leq \beta x, (0 < a < b, 0 < p < q, 0 < \alpha < \beta).$$

$$98. r = a \sin \varphi \cdot (1 + \cos \varphi).$$

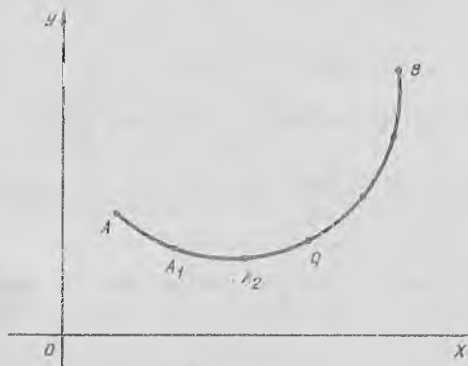
$$99. r = a \sin \varphi \cdot (a \sin^2 \psi + b \cos^2 \psi).$$

$$100. \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b} \right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c} \right)^{2/3} = 1.$$

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. БИРИНЧИ ТУР ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1. Интеграл таърифи. Текисликда бирор тўғриланувчи AB ($A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$) эгри чизикни (ёйни) олайлик. Бу эгри чизикда икки йўналишдан бирини (масалан, A нуқтадан B нуқтага қараб йўналишни) мусбат, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик (13- чизма).



13- чизма.

AB эгри чизикни A дан B га қараб A_0 ($A_0=A$), A_1, A_2, \dots, A_n ($A_n=B$) нуқталар ёрдамида

$(A_k=(x_k, y_k) \in \overset{\cup}{AB}, k=\overline{0, n}, (x_0, y_0) = (a_1, a_2), (x_n, y_n) = (b_1, b_2))$ n та бўлаққа бўламиз. Бу

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$$

нуқталар системаси $\overset{\cup}{AB}$ ёйининг бўлиниши дейилади ва

$$P = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

каби белгиланади. $A_k A_{k+1}$ ёй узунликлари

Δs_k ($k=0,1, \dots, n$) нинг энг каттаси P бўлинишнинг диаметри дейлади ва λ_p билан белгиланади:

$$\lambda_p = \max_k \{\Delta s_k\}.$$

\widetilde{AB} эгри чизиқда $f(x,y)$ функция аниқланган бўлсин. Бу эгри чизиқнинг

$$p = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\widetilde{A_k A_{k+1}}$ ёйида ихтиёрий (ξ_k, η_k) нукта ($k=0,1,2, \dots, n-1$) оламиз. Сўнг қуйида-
ги

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k \quad (1)$$

йиғиндини тузамиз. Одатда (1) интеграл йиғинди дейлади.

\widetilde{AB} эгри чизиқни шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (2)$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган $\{\lambda_{pm}\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{pm} = 0$$

бўлсин. Бундай бўлинишларнинг ҳар бирига нисбатан (1) каби йиғиндилар тузиб

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз.

Агар \widetilde{AB} эгри чизиқнинг ҳар қандай (2) кўринишдаги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нукталарни танлаб олинишига боглиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу сон σ йиғиндининг лимити дейлади:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = I$$

1-таъриф. Агар $\lambda_p \rightarrow 0$ да σ йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x,y)$ функция $\overset{\circ}{AB}$ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи, бу лимит эса $f(x,y)$ функциянинг биринчи тур эгри $\overset{\circ}{AB}$ чизиқли интегралли дейилади ва

$$\int_{\overset{\circ}{AB}} f(x,y) ds$$

каби белгиланади:

$$\int_{\overset{\circ}{AB}} f(x,y) ds = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фараз қилайлик, $\overset{\circ}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} (0 \leq s \leq S) \quad (3)$$

система билан берилган бўлсин. Бунда s — $\overset{\circ}{AQ}$ ёйнинг узунлиги ($Q = (x,y) \in \overset{\circ}{AB}$), S эса $\overset{\circ}{AB}$ нинг узунлиги.

1-теорема. Агар $f(x,y)$ функция $\overset{\circ}{AB}$ эгри чизиқда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overset{\circ}{AB}$ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интегралли мавжуд ва

$$\int_{\overset{\circ}{AB}} f(x,y) ds = \int_0^S f(x(s), y(s)) ds \quad (5)$$

бўлади.

Энди $\overset{\circ}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (4)$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз ҳосилаларга эга ва $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

2- теорема. Агар $f(x, y)$ функция AB да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг AB бўйича биринчи тур эгри чизикли интеграл мавжуд ва

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (5)$$

бўлади.

Бу теоремалар биринчи тур эгри чизикли интегралнинг мавжудлигини аниқлаб бериши билан бирга унинг Риман интеграл орқали ифодаланишини ҳам кўрсатади.

3. Интегралнинг хоссалари. Биринчи тур эгри чизикли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга.

AB эгри чизик (3) ёки (4) система билан аниқланган бўлиб, $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ шу эгри чизикда берилган ва узлуксиз функциялар бўлсин.

1°. Агар $AB = ACUCB$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{AC} f(x, y) ds + \int_{CB} f(x, y) ds$$

бўлади.

2°. Ушбу

$$\int_{AB} C \cdot f(x, y) ds = C \int_{AB} f(x, y) ds \quad (C = \text{const})$$

тенглик ўринли.

3°. Қуйидаги

$$\int_{AB} [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_{AB} f(x, y) ds \pm \int_{AB} g(x, y) ds$$

тенглик ўринли бўлади.

4°. Агар $\forall (x, y) \in AB$ да $(fx, y) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y) ds \geq 0$$

бўлади.

5°. $|f(x,y)|$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да интегралланувчи ва

$$\left| \int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y) ds \right| \leq \int_{\overset{\smile}{AB}} |f(x,y)| ds$$

бўлади.

6°. Шундай $(c_1, c_2) \in \overset{\smile}{AB}$ нукта топиладики,

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y) ds = f(c_1, c_2) \cdot S$$

бўлади, S бунда $\overset{\smile}{AB}$ нинг узунлиги.

4. Интегрални ҳисоблаш. Эгри чизикли интеграллар Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади. Бунда кўпинча

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y) ds = \int_a^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (5)$$

формуладан ҳамда қуйида келтириладиган формулалардан фойдаланилади.

Айтайлик, $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизик ушбу

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз $y'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $f(x,y)$ функция шу $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (6)$$

бўлади.

Энди $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1)$$

тенглама билан (кутб координата системасида) берилган бўлиб, $\rho(\theta)$ функция $[\theta_0, \theta_1]$ да узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $f(x,y)$ функция шу $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overset{\circ}{AB}} f(x,y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta \quad (7)$$

бўлади.

1- мисол. Ушбу

$$\int_{\overset{\circ}{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\circ}{AB}$ текисликнинг $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$ нукталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

Равшанки, A ва B нукталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$y = x + 1$$

бўлиб, берилган интеграл эса

$$y = x + 1, \quad -1 \leq x \leq 0$$

кесма бўйича олинган интеграл бўлади.

Унда (6) формулага кўра

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\circ}{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) ds &= \\ &= \int_{-1}^0 (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x+1}) \sqrt{1+(x+1)^2} dx \end{aligned}$$

бўлади. Кейинги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x+1}) \sqrt{2} dx &= \\ &= \sqrt{2} \left[3 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 2(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 = -5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\overset{\circ}{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) ds = -5\sqrt{2}.$$

2- мисол. Ушбу

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} \frac{x}{y} ds$$

интегрални ҳисобланг, $\overset{\cup}{AB}$ бунда $y^2=2x$ параболанинг $(1, \sqrt{2})$ ва $(2,2)$ нукталари орасидаги бўлаги.

Юқоридаги (6) формулага кўра ($y = \sqrt{2x}$):

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} \frac{x}{y} ds = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}} \sqrt{1 + (\sqrt{2x})'^2} dx$$

бўлади.

Энди

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}} \sqrt{1 + (\sqrt{2x})'^2} dx$$

интегрални ҳисоблаймиз. Агар

$$1 + (\sqrt{2x})'^2 = \frac{2x+1}{2x}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}} \sqrt{1 + (\sqrt{2x})'^2} dx &= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1+2x} dx = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} \frac{x}{y} ds = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}).$$

3- мисол. Ушбу

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} xy ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{AB}{\int} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг биринчи квадрантдаги қисми.

Аввало

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипснинг параметрик теңдамасини ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Демак, берилган интеграл ушбу

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

эгри чизик бўйича олинади.

(5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{\overset{AB}{\cup}} xy ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} acost \cdot bsint \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} acost \cdot bsint \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Кейинги интегралда

$$\cos 2t = u$$

деб оламиз. Унда

$$\sin 2t dt = -\frac{1}{2} du, \quad u \in [-1, 1]$$

булиб,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}u} du = \\
 &= \frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2-a^2} \cdot \frac{2}{3} \left[\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}u \right]^{3/2} \Big|_{-1}^1 = \\
 &= \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}
 \end{aligned}$$

булади. Демак,

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} xy ds = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

4-мисл. Ушбу

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} xy ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = a \operatorname{sh} t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

гипербола шаклидан иборат.

(5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}
 \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} xy ds &= \int_0^{t_0} a \operatorname{ch} t \cdot a \operatorname{sh} t \sqrt{(a \operatorname{ch} t)^2 + (a \operatorname{sh} t)^2} dt = \\
 &= a^2 \int_0^{t_0} \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t \sqrt{a^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t)} dt.
 \end{aligned}$$

Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_0} \operatorname{sh} t \cdot \sqrt{a^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t)} dt &= \frac{a}{2} \int_0^{t_0} \operatorname{sh} 2t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt = \\
 &= \frac{a}{4} \int_0^{t_0} \sqrt{\operatorname{ch} 2t} d(\operatorname{ch} 2t) = \frac{a}{4} \cdot \frac{2}{3} (\operatorname{ch} 2t)^{3/2} \Big|_0^{t_0} = \\
 &= \frac{a}{6} (\operatorname{ch}^3 2t_0 - 1).
 \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} xy ds = \frac{a^3}{6} (\operatorname{ch}^2 2t_0 - 1).$$

5- мисол. Ушбу

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} |y| ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB қуйидаги (қутб координаталар системасида)

$$\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

тенглама билан берилган эгри чизик (лемниската ёйи).

Юқорида келтирилган (7) формулага кўра

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} |y| ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\rho \sin \varphi| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$$

бўлади.

Агар

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$|\rho \cdot \sin \varphi| \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = a^2 |\sin \varphi|$$

бўлиб,

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} |y| ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 |\sin \varphi| d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = a^2 (2 - \sqrt{2})$$

бўлади.

6- мисол. Ушбу

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} (x+y) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB эгри чизик учлари $O(0,0)$, $O_1(1,0)$ ва $O_2(0,1)$ нукталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

Интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_{\overset{AB}{\curvearrowright}} (x+y)ds = \int_{O_1O_2} (x+y)ds + \int_{O_2O} (x+y)ds + \int_{OO_1} (x+y)ds$$

бўлади.

Равшанки,

O_1O_2 нинг тенгламаси $y=1-x$ ($0 \leq x \leq 1$),

O_2O нинг тенгламаси $x=0$ ($0 \leq y \leq 1$),

OO_1 нинг тенгламаси $y=0$ ($0 \leq x \leq 1$)

бўлади. Шунини эътиборга олиб, топамиз:

$$\int_{O_1O_2} (x+y)ds = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2} dx = \sqrt{2},$$

$$\int_{O_2O} (x+y)ds = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2},$$

$$\int_{OO_1} (x+y)ds = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\int_{\overset{AB}{\curvearrowright}} (x+y)ds = 1 + \sqrt{2}.$$

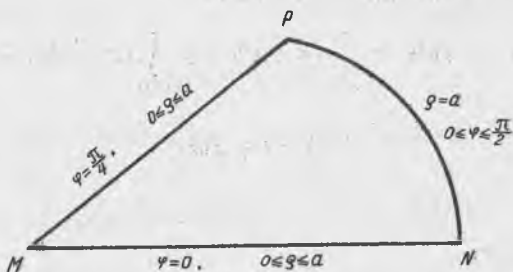
7- мисол.

$$\int_{\overset{AB}{\curvearrowright}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB эгри чизик

$$\rho = a, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

(кўтб координаталар системасида) чизиқлар билан чегараланган қавариқ ёпиқ контурдан иборат (14- чизма).



14- чизма.

Интегралнинг хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{\overline{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_{MN} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{NP} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{PM} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$$

MP чизиқда

$$\varphi = 0, 0 \leq \rho \leq a$$

бўлганлиги сабабли

$$\begin{aligned} \int_{MN} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^a e^{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}} d\rho = \\ &= \int_0^a e^{\rho} d\rho = e^a - 1 \end{aligned}$$

бўлади.

NP чизиқда

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \rho = a$$

бўлганлиги сабабли

$$\int_{NP} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\pi/4} e^{\rho} \rho d\varphi = ae^a \frac{\pi}{4}$$

бўлади.

PM чизиқда

$$0 \leq \rho \leq a, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

бўлганлиги сабабли

$$\int_{PM} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^{\rho} d\rho = e^a - 1$$

бўлади.

Демак,

$$\int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = e^a - 1 + ae^a \cdot \frac{\pi}{4} + e^a - 1 = 2(e^a - 1) + \frac{\pi ae^a}{4}$$

\overline{AB}

5. Интегралнинг баъзи бир татбиқлари. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл ёрдамида ёй узунлигини, жисмнинг массасини, огирлик марказларини, инерция моментларини ҳисоблаш мумкин.

1°. Текисликда тўғриланувчи \overline{AB} эгри чизиқ берилган бўлсин. Унинг узунлиги ушбу

$$S = \int_{\overline{AB}} ds \quad (8)$$

формула билан топилади.

2°. Текисликда тўғриланувчи \overline{AB} эгри чизиғи бўйича масса тарқатилган бўлиб, унинг зичлиги $\rho = \rho(x, y)$ бўлсин. Бу эгри чизиқнинг массаси

$$m = \int_{\overline{AB}} \rho(x, y) ds, \quad (9)$$

огирлик марказининг координаталари эса

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{\overline{AB}} x \cdot \rho(x, y) ds, \quad y_0 = \frac{1}{m} \int_{\overline{AB}} y \cdot \rho(x, y) ds \quad (10)$$

бўлади.

$\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқнинг OX ва OY координата ўқларига нисбатан статик моментлари

$$S_x = \int_{\overset{\smile}{AB}} y ds, \quad S_y = \int_{\overset{\smile}{AB}} x ds \quad (11)$$

формулалар билан, шу ўқларга нисбатан инерция моментлари эса

$$I_x = \int_{\overset{\smile}{AB}} y^2 ds, \quad I_y = \int_{\overset{\smile}{AB}} x^2 ds \quad (12)$$

формулалар орқали ифодаланadi.

8- м и с о л. Ушбу

$$x(t) = a \cos^3 t,$$

$$y(t) = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

система билан берилган $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизик (астроида) нинг узунлигини топинг.

Астроида координата ўқларига нисбатан симметрик бўлишини эътиборга олиб, (8) формуладан топамиз:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\overset{\smile}{AB}} ds = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{9a^2}{4} \sin^2 2t} dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6a. \end{aligned}$$

Демак,

$$S = 6a.$$

9- мисол. Чизикли зичлиги $\rho(x, y) = |y|$ бўлган

$$y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq \frac{p}{2})$$

параболанинг массасини ҳамда оғирлик марказини топинг.

(9) формуладан фойдаланиб, параболанинг массаси

$$m = \int_{\overset{\cup}{AB}} |y| ds$$

бўлишини аниқлаймиз. Бу эгри чизикли интеграл (6) формулага кўра

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} |y| ds = \int_{-p}^p |y| \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy$$

бўлади. Демак,

$$m = \int_{-p}^p |y| \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy.$$

Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p |y| \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy &= 2 \cdot \frac{1}{p} \int_0^p y \sqrt{p^2 + y^2} dy = \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p \sqrt{p^2 + y^2} d(p^2 + y^2) = \frac{1}{p} [(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^p = \\ &= \frac{2}{3} p^2 (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Демак,

$$m = \frac{2}{3} p^2 (2\sqrt{2} - 1).$$

Параболанинг оғирлик марказининг координаталари (10) формулага кўра

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{\overset{\cup}{AB}} x \cdot |y| ds,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{\overset{\sim}{AB}} y \cdot |y| ds$$

бўлади. Энди бу эгри чизикли интегралларни ҳисоблай-
миз:

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\sim}{AB}} x \cdot |y| ds &= \int_{\overset{\sim}{AB}} \frac{y^2}{2\rho} |y| ds = \frac{2}{1} \int_0^P y^3 \cdot \frac{1}{2\rho} \times \\ &\times \frac{\sqrt{\rho^2 + y^2}}{\rho} dy = \frac{1}{\rho^2} \int_0^P y^3 \sqrt{\rho^2 + y^2} dy \end{aligned}$$

Кейинги интегрални бўлаклаб, интеграллаш форму-
ласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Агар

$$y^2 = u, \quad y \sqrt{\rho^2 + y^2} dy = dv$$

дейилса, унда

$$du = 2y dy, \quad v = \frac{1}{3} (\rho^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \int_0^P y^3 \sqrt{\rho^2 + y^2} dy &= \frac{1}{3} y^2 (\rho^2 + y^2) \Big|_0^P - \frac{1}{3} \int_0^P 2y (\rho^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \\ &= \frac{2\sqrt{2}\rho^5}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{2}{5} (\rho^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^P = \frac{2\rho^5(1 + \sqrt{2})}{15} \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$x_0 = \frac{1}{m \cdot \rho^2} \cdot \frac{2\rho^5(1 + \sqrt{2})}{15} = \frac{(5 + 3\sqrt{2})\rho}{35}$$

Худди шунга ўхшаш

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{\overset{\sim}{AB}} y |y| ds = \frac{3(2\sqrt{2} + \rho)}{28} (3\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$$

бўлиши топилади.

10- м и с о л. Ушбу

$$\overset{\sim}{AB}: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

астроиданинг OX ва OY координата ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

Аввало берилган астроиданинг параметрик қўри-нишдаги тенгламасини топамиз. У қуйидагича

$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t, \\ y &= a \sin^3 t \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

бўлади. Сўнгра ёй дифференциалини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \\ &= \sqrt{3a \cos^2 t (-\sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt = \\ &= 3a \cos t \cdot \sin t dt. \end{aligned}$$

(11) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} y ds = \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \cdot \sin t dt = \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = \frac{3a^2}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} x ds = \int_0^{\pi/2} a \cos^3 t \cdot 3a \cos t \cdot \sin t dt = \\ &= -3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t d(\cos t) = \frac{3a^2}{5}. \end{aligned}$$

Демак, астроиданинг координата ўқларига нисбатан статик моментлари

$$S_x = \frac{3a^2}{5}, \quad S_y = \frac{3a^2}{5}$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$\overset{\curvearrowright}{AB}: x^2 + y^2 = a^2$$

айлананинг диаметрига нисбатан инерция моментини топинг.

Равшанки, берилган айлананинг параметрик кўринишидаги тенгламаси

$$\begin{aligned}x &= a \cos t, \\y &= a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)\end{aligned}$$

бўлади.

Айлана диаметрини OX ўқига жойлаштириб, сўнг (12) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}I_x &= \int_{AB} y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t \cdot \sqrt{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2} dt = \\&= a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi a^3.\end{aligned}$$

Демак, берилган айлананинг диаметрига нисбатан инерция моменти

$$I_x = \pi a^3$$

бўлади.

1-э с л а т м а. Айтайлик, AB фазовий эгри чизик бўлиб, бу чизикда $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридагидек $f(x, y, z)$ функциянинг AB эгри чизик бўйича биринчи тур эгри чизикли интегрални тушунчаси киритилади ва ўрганилади.

12- м и с о л. Ушбу

$$\int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB қуйидаги

$$\begin{aligned}x &= a \cos t \\y &= a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \\z &= bt\end{aligned}$$

система билан берилган эгри чизик.

Равшанки, бу ҳолда

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + bt^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

бўлади. Аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + bt^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \\ & = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3} (6\pi a^2 + 8\pi^3 b^2). \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3} (6\pi a^2 + 8\pi^3 b^2).$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги биринчи тур эгри чизикли интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_{\overset{\sim}{AB}} (x + y) ds$, бунда AB чизик текисликнинг

(0,2) ва (2,0) нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси.

2. $\int_{\overset{\sim}{AB}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} ds$, бунда $\overset{\sim}{AB}$ текисликнинг (0,0) ва

(1,2) нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси.

3. $\int_{\overset{\sim}{AB}} \frac{1}{x+y} ds$, бунда $\overset{\sim}{AB}$ ушбу $y = x + 2$ тўғри чи-

зиқнинг (2,4) ва (1,3) нуқталари орасидаги қисми.

4. $\int_{\overset{\sim}{AB}} y ds$, бунда $\overset{\sim}{AB}$ қуйидаги $y^2 = 2x$ параболанинг

(0,0) ва $(1, \sqrt{2})$ нуқталари орасидаги ёйи.

5. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} xy \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ ушбу $|x| + |y| = a$ тенглама

билан берилган чизик.

6. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} x^2 \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизик ушбу $x^2 + y^2 = a^2$

айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми.

7. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \cdot \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

система билан берилган эгри чизик.

8. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} (x + y) \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ ушбу

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

тенглама билан берилган чизик.

9. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \frac{1}{y^2} \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ куйидаги $y = a \operatorname{sch} \frac{x}{a}$ тенглама

билан берилган чизик.

10. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ ушбу

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

астроидадан иборат.

11. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ ушбу $x^2 + y^2 = ax$ айла-

надан иборат.

12. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} |y| \, ds$, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ куйидаги $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 -$

$-y^2)$ лемниската ейидан иборат.

13. Айтайлик, фазовий $\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \\ z &= z(t)\end{aligned}$$

система билан берилган бўлиб, $x(t)$, $y(t)$ ва $z(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ва $z'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Агар $f(x, y, z)$ функция шу $\overset{\curvearrowright}{AB}$ да аниқланган ва узлуксиз бўлса, унда

$$\begin{aligned}\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z) ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \times \\ &\times \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt\end{aligned}$$

булишини исботланг.

14. Ушбу

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизик қуйидаги

$$x = acost; \quad y = asint, \quad z = bt$$

винт чизигидан иборат.

15. Ушбу

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} (x + z) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ қуйидаги

$$x = t, \quad y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

чизикдан иборат.

Қуйидаги чизикларнинг ёй узунликларини топинг:

16. $x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

17. $ay^2 = x^3, \quad 0 \leq x \leq 5a.$

$$18. y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad (0 \leq x \leq x_0)$$

$$19. \rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

$$20. y = 1 - \ln \cos x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}).$$

21. Чизикли зичлиги $\rho(x, y) = |x|$ бўлган ушбу

$$x^2 = 4y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

параболанинг массасини ҳисобланг.

22. Чизикли зичлиги $\rho(x, y) = |y|$ бўлган ушбу

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

эллипснинг массасини топинг.

23. Чизикли зичлиги $\rho(x, y) = xy$ бўлган ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипснинг биринчи квадратида жойлашган қисмининг массасини топинг.

24. Чизикли зичлиги $\rho(x, y) = \frac{1}{y^2}$ бўлган ушбу

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

занжир чизигининг массасини топинг.

Куйидаги эгри чизикларнинг оғирлик маркази координаталарини топинг:

25. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi).$

26. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad (0 \leq x \leq a).$

27. $y^2 = ax^3 - x^4$

28. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad (-a \leq x \leq a).$

29. Ушбу

$$x = \sqrt{5} \cos^3 t,$$

$$(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

$$y = \sqrt{5} \sin^3 t$$

система билан берилган AB чизикнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментларини топинг.

30. Ушбу

$$x = \sqrt[3]{2} \cos t,$$

$$y = \sqrt[3]{2} \sin t$$

система билан берилган AB чизиқнинг OX ва OY ўқларга нисбатан инерция моментларини топинг.

2-§. ИККИНЧИ ТУР ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1. Интеграл таърифи. Текисликда бирор тўғриланувчи AB эгри чизиқ берилган бўлиб, бу чизиқда $f(x, y)$ функция аниқланган бўлсин. AB эгри чизиқнинг $P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ бўлинишини ва унинг ҳар бир $A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) ёйида ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта олиб функциянинг шу нуқтадаги қиймати $f(\xi_k, \eta_k)$ ни $A_k A_{k+1}$ нинг OX (OY) ўқидаги Δx_k (Δy_k) проекциясига кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \quad (\sigma'' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k) \quad (13)$$

Энди AB эгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (14)$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган $\{\lambda_{P_m}\}$ кетма-кетлик 0 га интилсин:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{P_m} = 0.$$

Бундай бўлинишларга нисбатан (13) каби йиғиндиларни тузиб, ушбу

$$\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_m, \dots, (\sigma''_1, \sigma''_2, \dots, \sigma''_m, \dots)$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз.

Агар AB эгри чизиқнинг ҳар қандай (14) кўринишдаги бўлинишлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma'_m\}$ ($\{\sigma''_m\}$) кетма-кетлик

(ξ_k, η_k) нукталарнинг $((\xi_k, \eta_k) \in A_k A_{k+1})$ танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I_1 сонга (I_2 сонга) интилса, бу сон σ' (σ'') йигиндиларнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma' = I_1 \quad (\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma'' = I_2)$$

каби белгиланади.

2-таъриф. Агар $\lambda_p \rightarrow 0$ да σ' йигинди (σ'' йигинди) чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция AB эгри чизиқ бўйича интегралланувчи дейилади. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интегралли дейилади ва

$$\int_{AB} f(x, y) dx \quad \left(\int_{AB} f(x, y) dy \right)$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k,$$

$$\left(\int_{AB} f(x, y) dy = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k \right).$$

AB эгри чизиқда $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\int_{AB} P(x, y) dx, \quad \int_{AB} Q(x, y) dy$$

уларнинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари бўлсин. Ушбу

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

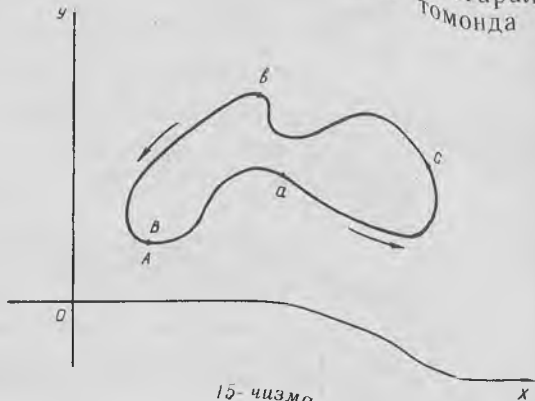
йигинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши дейилади ва

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

каби ёзилади:

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Энди AB тўғриланувчи ёпик эгри чизик, яъни A ва B нукталар устма-уст тушсин. Уни K билан белгилайлик. Бу ёпик эгри чизикда шундай йўналишни мусбат деб қабул қиламизки, кузатувчи ёпик чизик бўйлаб ҳаракат қилганда, ёпик чизик ёпик чизик билан чегараланган соҳа унга нисбатан ҳар доим чап томонда ётсин (15-чизма).



15-чизма.

$P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функцияларнинг ёпик эгри чизик K бўйича иккинчи тур эгри чизикли интегралларининг умумий кўриниши қуйидагича

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AaC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{\overset{\curvearrowright}{Cба}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

аниқланади ва

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ ёки } \oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

каби белгиланади.

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фараз қилайлик, $\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

система билан (параметрик кўринишда) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ хосиллага эга, $\psi(t)$ эса шу ораликда узлуксиз бўлиб, $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

3-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\curvearrowright}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг иккинчи тур эгри чизикли интеграл мавжуд ва

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

бўлади.

Энди $\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизик (15) система билан берилган бўлиб, бунда $\psi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\psi'(t)$ хосиллага эга, $\varphi(t)$ эса шу ораликда узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\curvearrowright}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг иккинчи тур эгри чизикли интеграл

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dy$$

мавжуд ва

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$$

бўлади.

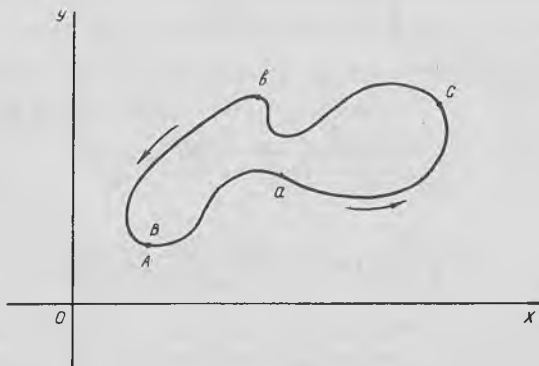
$\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизик (15) система билан берилган бўлиб, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ хосилаларга эга ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

каби ёзилади:

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Энди \overline{AB} тўғриланувчи ёпиқ эгри чизик, яъни A ва B нуқталар устма-уст тушсин. Уни K билан белгилайлик. Бу ёпиқ эгри чизикда шундай йўналишни мусбат деб қабул қиламизки, кузатувчи ёпиқ чизик бўйлаб ҳаракат қилганда, ёпиқ чизик билан чегараланган соҳа унга нисбатан ҳар доим чап томонда ётсин (15- чизма).



15- чизма.

$P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функцияларнинг ёпиқ эгри чизик K бўйича иккинчи тур эгри чизикли интегралларининг умумий кўриниши қуйидагича

$$\int_{\overline{AaC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{\overline{CbA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

аниқланади ва

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ ёки } \oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

каби белгиланади.

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фараз қилайлик, AB эгри чизик ушбу

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

система билан (параметрик кўринишда) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосиллага эга, $\psi(t)$ эса шу ораликда узлуксиз бўлиб, $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))=A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))=B$ бўлсин.

3-теорема. Агар $f(x, y)$ функция AB да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг иккинчи тур эгри чизикли интеграл мавжуд ва

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

бўлади.

Энди AB эгри чизик (15) система билан берилган бўлиб, бунда $\psi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\psi'(t)$ ҳосиллага эга, $\varphi(t)$ эса шу ораликда узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))=A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))=B$ бўлсин.

4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция AB да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг иккинчи тур эгри чизикли интеграл

$$\int_{AB} f(x, y) dy$$

мавжуд ва

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) dt$$

бўлади.

AB эгри чизик (15) система билан берилган бўлиб, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))=A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))=B$ бўлсин.

5-теорема. Агар $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар AB да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари мавжуд ва

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt$$

бўлади.

3. Интегралнинг хоссалари. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар қатор хоссаларга эга. Қуйида интегралнинг асосий хоссаларини келтирамыз.

1°. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар интеграллаш эгри чизиғининг йўналишига боғлиқ бўлади:

$$\int_{BA} f(x, y)dx = - \int_{AB} f(x, y)dx; \quad \int_{BA} f(x, y)dy = - \int_{AB} f(x, y)dy.$$

2°. Агар AB эгри чизиқ OX ўқига (OY ўқига) перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ кесмасидан иборат бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y)dy = 0, \quad \left(\int_{AB} f(x, y)dx = 0 \right).$$

3°. Агар $f(x, y)$ функция AB да интегралланувчи бўлиб, $AB = AC + CB$ бўлса,

$$\int_{AB} f(x, y)dx = \int_{AC} f(x, y)dx + \int_{CB} f(x, y)dx$$

бўлади.

4°. Агар $f(x, y)$ функция AB да интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int k f(x, y)dx = k \int f(x, y)dx$$

бўлади, бунда $k = \text{const}$

5°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар AB да интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)] dx = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dx \pm \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} g(x, y) dx$$

бўлади.

4. Интегралларни ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремалардан кўринадики, AB чизик (15) система билан берилганда иккинчи тур эгри чизикли интеграллар Риман интегралларига келтири- либ, қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt, \quad (16)$$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt,$$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt. \quad (17)$$

Хусусан, AB эгри чизик

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз, $y'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx \quad (17')$$

бўлади.

Агар AB эгри чизик

$$x = x(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $x(y)$ функция $[c, d]$ да узлуксиз $x'(y)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{\underbrace{AB}} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy,$$

$$\int_{\underbrace{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

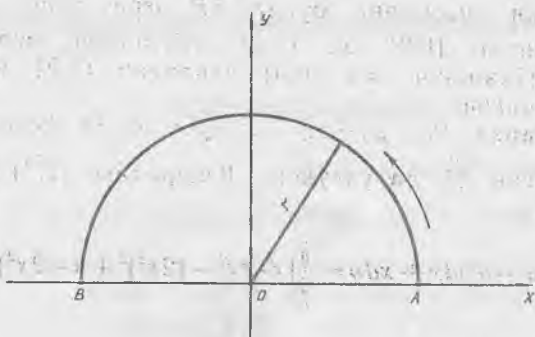
$$= \int_c^a [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)] dy \quad (17'')$$

бўлади.

13- мисол. Ушбу

$$\int_{\underbrace{AB}} (2xy - y^2) dx$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB — маркази координата бошида, радиуси r бўлган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми; йўналиши 16- чизмада кўрсатилган.



16- чизма.

Равшанки, айлананинг параметрик тенгламаси

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t$$

бўлади. Бунда t параметр 0 дан π гача ўзгарганда (x, y) нуқта A дан B га қараб AB — ярим айланани чизади. Унда (16) формулага кўра

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} (2xy - y^2) dx = - \int_0^{\pi} (2r^2 \sin t \cdot \cos t - r^2 \sin^2 t) r \sin t dt$$

бўлади. Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (2r^2 \sin t \cdot \cos t - r^2 \sin^2 t) r \sin t dt &= 2r^3 \int_0^{\pi} \sin^2 t d(\sin t) - \\ - r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt &= \left[2r^3 \cdot \frac{\sin^3 t}{3} - r^3 (-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}) \right]_0^{\pi} = -\frac{4}{3} r^3. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} (2xy - y^2) dx = \frac{4}{3} r^3.$$

14- мисол. Ушбу

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} (xy - y^2) dx + xdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\cup}{AB}$ эгри чизиқ $y = 2x^2$ параболанинг $(0,0)$ ва $(1,2)$ нуқталари орасидаги қисми, йўналиши эса $(0,0)$ нуқтадан $(1,2)$ нуқтага қараб олинган.

Равшанки, $P(x, y) = xy - y^2$, $Q(x, y) = x$ функциялар қаралаётган $\overset{\cup}{AB}$ да узлуксиз. Юқоридаги (17') формулага кўра

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} (xy - y^2) dx + xdy = \int_0^1 [x \cdot 2x^2 - (2x^2)^2 + x \cdot (2x^2)'] dx$$

бўлади. Кейинги интеграл эса

$$\int_0^1 (2x^3 - 4x^4 + 4x^2) dx = \frac{31}{30}$$

га тенг. Демак,

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} (xy - y^2) dx + xdy = \frac{31}{30}.$$

15- мисол. Ушбу

$$\int_{AB} y^2 dx + x^2 dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB эгри чизик

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг юқори ярим текисликдаги қис-
мидан иборат.

Бу эллипснинг параметрик тенгламасини ёзамиз:

$$\begin{aligned} x &= acost, \\ y &= bsint \end{aligned}$$

$A = (a, 0)$ нуктага параметрнинг $t = 0$ қиймати $B = (-a, 0)$ нуктага эса $t = \pi$ қиймати мос келиб, t параметр 0 дан π гача ўзгарганда (x, y) нукта A дан B га қараб эллипснинг юқори ярим текисликдаги қисмини чи-
зади.

$$P(x, y) = y^2, \quad Q(x, y) = x^2$$

функциялар эса AB да узлуксиз. Берилган интегрални
(17) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_{AB} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^{\pi} [b^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t] dt = \\ &= ab \int_0^{\pi} (a \cos^3 t - b \sin^3 t) dt = -\frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

16- мисол. Ушбу

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^2 + 1) dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB эгри чизик $(0,0)$ нук-
тадан чиқиб $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ нукталарни бирлаш-
тирувчи синиқ чизик.

Интегралнинг хоссасига кўра

$$\begin{aligned} \int_{AB} 3x^2 y dx + (x^2 + 1) dy &= \int_{AC} 3x^2 y dx + (x^2 + 1) dy + \\ &+ \int_{CB} 3x^2 y dx + (x^2 + 1) dy \end{aligned}$$

бўлади. AC бунда $(0,0)$ ва $(1,0)$ нукталарни, CB эса $(1,0)$ ва $(1,1)$ нукталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаларидан иборат.

AC да $y=0$ ва AC кесма OY ўқига перпендикуляр бўлганлиги сабабли

$$\int_{AC} 3x^2 y dx + (x^2 + 1) dy = 0$$

бўлади.

CB кесмада $x=1$ ва y эса OX ўқига перпендикуляр бўлганлиги сабабли

$$\int_{CB} 3x^2 y dx + (x^2 + 1) dy = \int_0^1 2 dy = 2$$

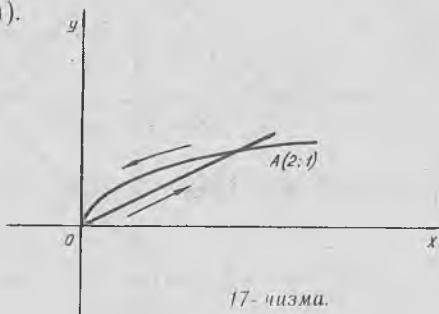
бўлади. Демак,

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^2 + 1) dy = 2.$$

17- мисол. Ушбу

$$\oint_k 2xy dx - x^2 dy$$

интегрални ҳисобланг. k бунда $O=(0,0)$, $A=(2,1)$ нукталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси ҳамда $y^2 = \frac{1}{2}x$ парабола ёйидан ташкил топган ёпик эгри чизик (17- чизма).



17- чизма.

Интеграл хоссасига кўра:

$$\oint_k 2xydx + x^2dy = \int_{\overset{OA}{\curvearrowright}} 2xydx + x^2dy + \int_{\overset{AO}{\curvearrowright}} 2xydx + x^2dy.$$

$\overset{OA}{\curvearrowright}$ кесмада $x=2y$ бўлиб, (17) формулага кўра

$$\int_{\overset{OA}{\curvearrowright}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 [2 \cdot 2y^2 \cdot 2 - 4y^2] dy = \frac{4}{3}$$

бўлади.

$\overset{AO}{\curvearrowright}$ ёйида эса $x=2y^2$ бўлиб, яна (17) формулага кўра

$$\int_{\overset{AO}{\curvearrowright}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 [2 \cdot 2y^2 \cdot y \cdot 4y - 4y^4] dy = -\frac{12}{5}$$

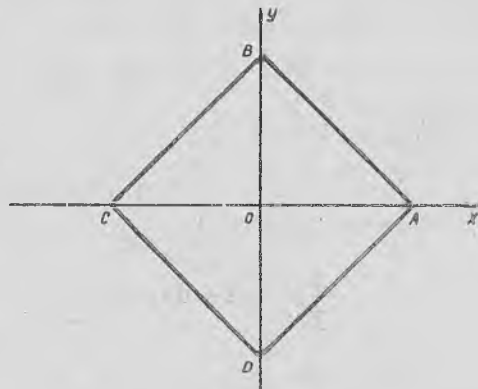
бўлади. Демак,

$$\oint_k 2xydx - x^2dy = \frac{4}{3} - \frac{12}{5} = -\frac{16}{15}.$$

18- мисол. Ушбу

$$\oint_k \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy)$$

интегрални ҳисобланг, бунда k — учлари $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$, $D=(0,-1)$ нуқталарда бўлган квадратнинг контуридан иборат (18- чизма).



18- чизма.

Интегралнинг хоссасидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \oint_k \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) &= \int_{\overset{AB}{\curvearrowright}} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) + \\ &+ \int_{\overset{BC}{\curvearrowright}} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) = \int_{\overset{CD}{\curvearrowright}} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) + \\ &+ \int_{\overset{DA}{\curvearrowright}} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy). \end{aligned}$$

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз.

$\overset{AB}{\curvearrowright}$ да $x+y=1$, $0 \leq x \leq 1$ бўлиб, $dx+dy=0$ бўлади.

Шунинг учун юқоридаги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл 0 га тенг:

$$\int_{\overset{AB}{\curvearrowright}} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) = 0;$$

$\overset{BC}{\curvearrowright}$ да $y-x=1$, $-1 \leq x \leq 0$ бўлиб, $dy=dx$ ҳамда $|x| = -x$, $|y| = x+1$ бўлади. B дан C нуқтагача BC бўйича келишда x ўзгарувчи 0 дан -1 гача ўзгаради. Шунини эътиборга олиб, топамиз:

$$\int_{\overset{BC}{\curvearrowright}} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) = \int_0^{-1} \frac{1}{-x+x+1} \cdot 2dx = -2.$$

$\overset{CD}{\curvearrowright}$ да $x+y=-1$, $-1 \leq x \leq 0$ бўлиб, $dx+dy=0$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\int_{\overset{CD}{\curvearrowright}} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) = 0$$

бўлади.

DA да $y-x=-1$, $0 \leq x \leq 1$ бўлиб, $dy=dx$ ҳамда $|x|=x$, $|y|=1-x$ бўлади. D нуктадан A нуктага DA бўйича келишда x 0 дан 1 гача ўзгаради. Шунинг учун

$$\int_{DA} \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) = \int_0^1 \frac{1}{x+1-x} \cdot 2dx = 2$$

бўлади. Демак,

$$\oint_k \frac{1}{|x|+|y|} (dx+dy) = 0$$

4. Интегралнинг баъзи бир татбиқлари. Иккинчи тур эгри чизикли интеграллардан текис шаклларнинг юзини ҳисоблашда, куч таъсирида бўлган майдонда бажарилган ишни топишда фойдаланилади.

1°. Текис шаклнинг юзи. Текисликда бирор юзага эга бўлган шакл берилган бўлсин. Унинг чегараси тўғриланувчи ёпиқ $\partial(D)$ чизикдан иборат. Бу шаклнинг юзи D иккинчи тур эгри чизикли интеграллар ёрдамида қуйидаги формулалар билан топилади:

$$D = \oint_{\partial(D)} xdy, \quad D = - \oint_{\partial(D)} ydx,$$

$$D = \frac{1}{2} \oint_{(D)} xdy - ydx. \quad (18)$$

2°. Бажарилган ишни топиш. Текисликда тўғриланувчи бирор AB эгри чизик берилган бўлсин. Бу эгри чизикдаги моддий нуктани ушбу

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

ўзгарувчи куч таъсирида A нуктани B нуктага ўтказишда бажарган иши

$$W = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (19)$$

бўлади.

19- мисол. Ушбу

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, & (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y &= b \sin t \end{aligned} \quad (20)$$

эллипс билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу шаклнинг юзи (18) формулага кўра

$$D = \frac{1}{2} \oint_{\partial(D)} xdy - ydx$$

булади, бунда $\partial(D)$ — эгри чизик (20) эллипсдан иборат.

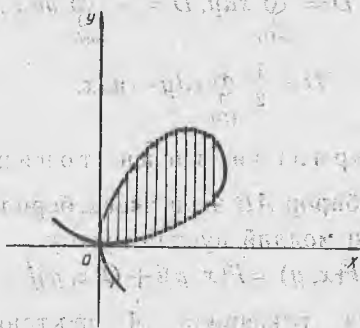
Энди эгри чизикли интегрални (17) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$D = \frac{1}{2} \oint_{\partial(D)} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (acost \cdot bcost + b \sin t \cdot a \sin t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

20- мисол. Ушбу

$$x^2 + y^3 = 3axy \quad (a > 0)$$

чизик (Декарт япроғи) билан чегараланган шаклнинг юзини топинг (19- чизма).



19- чизма.

Аввало берилган чизикнинг параметрик кўринишидаги тенгласини ёзамиз. Бунинг учун

$$y = tx$$

белгилаш киритамиз, бунда t — параметр. Унда

$$x^2 + y^3 = 3axy \Rightarrow x^2 + t^3 x^3 = 3ax^2 t \Rightarrow x = \frac{3at}{1+t}$$

булади. Натижада чизикнинг ушбу

$$x = \frac{3at}{1+t}, y = \frac{3at^2}{1+t} \quad (0 \leq t \leq +\infty)$$

параметрик кўринишдаги тенгламаларига келамиз. Изланаётган шаклнинг юзи (18) формулага кура

$$D = \frac{1}{2} \oint_{\partial(D)} xdy - ydx$$

бўлади. Бунда $\partial(D)$

$$x = \frac{3at}{1+t}, y = \frac{3at^2}{1+t} \quad (0 \leq t \leq +\infty)$$

чизикдан иборат.

(17) формуладан фойдаланиб, эгри чизикли интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \oint_{\partial(D)} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{3at}{1+t} d\left(\frac{3at^2}{1+t}\right) - \\ &- \frac{3at^2}{1+t} d\left(\frac{3at}{1+t}\right) = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t(2t-t^4) - t^2(1-2t^3)}{(1+t^2)^3} dt = \\ &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{3}{2} a^2. \end{aligned}$$

21- мисол. АВ эгри чизиги ушбу $y = x^3$ параболадан иборат. Унинг (0,0) ҳамда (1,1) нукталар орасидаги қисмини қараймиз. Шу ораликда

$$\vec{F}(x, y) = 4x^6\vec{i} + xy\vec{j}$$

куч таъсирида бажарилган ишни топинг.

Равшанки,

$$P(x, y) = 4x^6, Q(x, y) = xy.$$

Изланаётган ишни (19) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\overline{AB}} 4x^6dx + xydy = \\ &= \int_0^1 (4x^6 + x \cdot x^3 \cdot 3x^2)dx = 1. \end{aligned}$$

2-эслатма. AB фазовий эгри чизик бўлиб, бу чизикда $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридагидек, $f(x, y, z)$ функциянинг иккинчи тур эгри чизикли интеграллари таърифланади ва улар

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z)dx, \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z)dy, \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z)dz$$

каби белгиланади. Умумий ҳолда AB эгри чизикда $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y, z), \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} Q(x, y, z)dy, \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} R(x, y, z)dz$$

интеграллар мавжуд бўлсин. Ушбу

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y, z)dx + \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} Q(x, y, z)dy + \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} R(x, y, z)dz$$

ингидининг иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг умумий кўриниши дейилади ва

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

каби ёзилади:

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y, z)dx + \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} Q(x, y, z)dy + \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} R(x, y, z)dz = \\ & = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги иккинчи тур эгри чизикли интегралларни ҳисобланг:

31. $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} xydx$, бунда AB эгри чизик $y = \sin x$ синусоида

чизигининг $(0,0)$ ҳамда $(\pi, 0)$ нукталар орасидаги қисми.

32. $\int_{AB} xdy$, бунда AB эгри чизик $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ тўғри чизикнинг $(a, 0)$ ва $(0, b)$ нуқталари орасидаги қисми.

33. $\int_{AB} (xy - 1)dx + x^2ydy$, бунда AB эгри чизик $4x + y^2 = 4$ параболанинг биринчи квадрантдаги қисми.

34. $\int_{AB} (x^2 + y^2)dx + xydy$, бунда AB эгри чизик $y = e^x$ тенглама билан берилган чизикнинг $(0, 1)$ ҳамда $(1, e)$ нуқталари орасидаги қисми.

35. $\oint_{AB} (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, бунда AB эгри чизик $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсдан иборат.

36. $\oint_{AB} 2xdx - (x + 2y)dy$, бунда AB эгри чизик учлари $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

37. $\oint_{AB} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, бунда AB эгри чизик $x^2 + y^2 = a^2$ айланадан иборат.

38. $\oint_{AB} y \cos x dx + \sin x dy$, бунда AB эгри чизик учлари $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

39. $\int_{AB} 4x \sin^2 y dx + y \cos^2 2x dy$, бунда AB эгри чизик текисликнинг $(0, 0)$, $(3, 6)$ нуқталаридан ўтувчи тўғри чизикнинг шу нуқталар орасидаги қисми.

40. $\oint_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, бунда AB эгри чизик ушбу

$$\begin{aligned}x &= a \cos t, \\y &= a \sin t\end{aligned}\quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

айланадан иборат.

$$41. \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} xy dx + y^2 dx, \text{ бунда } \overset{\curvearrowright}{AB} \text{ ушбу}$$

$$x = t^2, y = t \quad (1 \leq t \leq 2)$$

эгри чизик.

$$42. \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} y dx - x dy, \text{ бунда } \overset{\curvearrowright}{AB} \text{ куйидаги}$$

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

астроида қисмидан иборат.

$$43. \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} (2a - y) dx + x dy, \text{ бунда } \overset{\curvearrowright}{AB} \text{ ушбу}$$

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

циклоидадан иборат.

$$44. \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \text{ бунда } \overset{\curvearrowright}{AB} \text{ эгри чизик куйидаги}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипсинг биринчи квадрантдаги қисми.

$$45. \overset{\curvearrowright}{AB} \text{ фазовий эгри чизик ушбу}$$

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t)\end{aligned}\quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

система билан берилган бўлиб, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ хосилаларига эга бўлсин

$$(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) = A, (x(\beta), y(\beta), z(\beta)) = B.$$

Агар $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар $\overset{\curvearrowright}{AB}$ да узлуксиз бўлса,

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)]dt$$

бўлишини исботланг.

46. Ушбу

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ эгри чизиқ фазодаги $(1,0,2)$ ҳамда $(3,1,4)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг шу нуқталар орасидаги қисми.

47. Ушбу

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} (y^2 + z^2)dx - yzdy + xdz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ қуйидаги

$$x = t,$$

$$y = 2\cos t, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

$$z = 2\sin t$$

винт чизигидан иборат.

48. Ушбу

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} x^2 dx + (x + z)dy + xydz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\curvearrowright}{AB}$ қуйидаги

$$x = \sin t,$$

$$y = \sin^2 t, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

$$z = \sin^3 t$$

система билан берилган эгри чизиқ.

49. Ушбу

$$\oint_{\overbrace{AB}} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

интеграл учун, бунда \overbrace{AB} эгри чизик $x^2 + y^2 = r^2$ айланадан иборат,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\overbrace{AB}} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = 0$$

бўлишини исботланг.

Қуйидаги эгри чизиклар билан чегараланган текис шаклнинг юзини топинг:

50. $x^2 + y^2 = 25$ айлана билан чегараланган шакл (доира).

51. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ астроида билан чегараланган шакл.

52. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ кардионда билан чегараланган шакл.

53. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ лемниската билан чегараланган шакл.

55. $(x + y)^2 = ax$ ($a > 0$) парабола ҳамда OX ўқи билан чегараланган шакл.

3-§. ГРИН ФОРМУЛАСИ

Юқоридан ҳамда пастдан $[a, b]$ да узлуксиз бўлган $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_0(x)$ функция графиклари, ён томонлардан эса $x = a$, $x = b$ вертикал чизиклар билан чегараланган (D) соҳани — эгри чизикли трапецияни қарайлик. Унинг чегарасини (контурини) ∂D билан белгилайлик. Маълумки, бу ҳолда $D = DU \partial D$ (20-чизма).

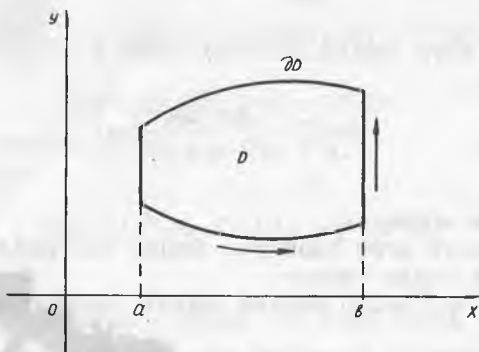
6-теорема. $P(x, y)$ функция \overline{D} соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция D соҳада узлуксиз $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy \quad (21)$$

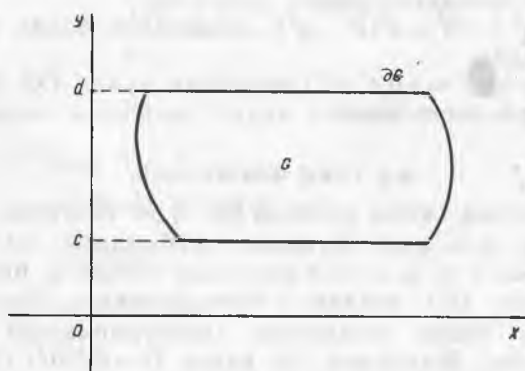
бўлади.

Энди юқоридан $y = d$, пастдан $y = c$ горизонтал чизиклар билан, ён томонларидан $[c, d]$ да узлуксиз бўлган

$x = \Psi_1(y)$, $x = \Psi_2(y)$ функция графиклари билан чегараланган G соҳани — эгри чизикли трапецияни қараймиз. Унинг контурини ∂G билан белгилаймиз (21-чизма).



20- чизма.



21- чизма.

7- теорема. $Q(x, y)$ функция \bar{G} соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция G соҳада узлуксиз $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{\partial G} Q(x, y) dy = \iint_G \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dy \quad (22)$$

бўлади.

Энди текисликдаги F соҳа юкоридаги икки ҳолда қаралган соҳанинг ҳар бирининг хусусиятига эга бўлсин. $P(x, y)$ ҳамда $Q(x, y)$ функциялар F да берилган ва узлуксиз. Агар бу функциялар F да узлуксиз

$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{\partial F} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_F \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (23)$$

бўлади.

Одатда (21), (22) ва (23) формулалар Грин формулалари дейилади. Кўпинча Грин формуласининг (23) кўринишидан фойдаланилади.

Айтайлик, текисликда чегараланган ёпик бир боғламли F соҳада $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ формулалар берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциялар F соҳада узлуксиз, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга.

У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1°. Агар F соҳада

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлса, у ҳолда F соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпик чизик бўйича олинган интеграл

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

бўлади.

2°. Агар F соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпик чизик бўйича олинган интеграл учун

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (AB \subset F)$$

интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизикқа боғлиқ бўлмайди (интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди).

3°. Агар ушбу

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (\overline{AB} \subset F)$$

интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизикқа боғлиқ бўлмаса (интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаса), у ҳолда

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ифода F соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади.

4°. Агар

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ифода F соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Демак, юқорида келтирилган тасдиқлар орасида

$$1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow 1^\circ$$

муносабатлар ўринли экан.

22- м и с о л. Грин формуласидан фойдаланиб, ушбу

$$\oint_{\overline{AB}} x^2 dy - x^2 y dx$$

интегрални ҳисобланг, бунда \overline{AB} эгри чизик $x^2 + y^2 = r^2$ айланадан иборат.

Равшанки,

$$P(x, y) = -x^2 y, \quad Q(x, y) = xy^2,$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Грин формуласи (23)га кўра

$$\oint_{\overline{AB}} xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_F (x^2 + y^2) dx dy$$

бўлади, бунда F ушбу $x^2 + y^2 \leq r^2$ доирадан иборат.

Шундай қилиб, берилган эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш содда икки қаррали интегрални ҳисоблашга келади.

Икки қаррали интегралда

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\iint_F (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}$$

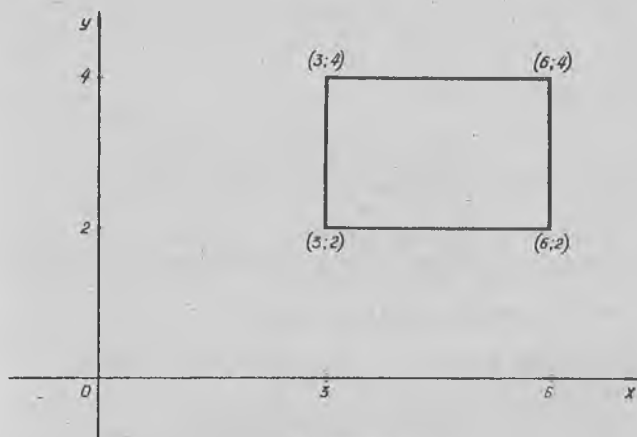
бўлади. Демак,

$$\oint_{\underbrace{AB}} xy^2 dy - x^2 \cdot y dx = \frac{\pi r^4}{2}.$$

23- м и с о л. Грин формуласидан фойдаланиб, ушбу

$$\oint_{\underbrace{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB эгри чизиқ учлари $(3,2)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(3,4)$ нукталарда бўлган тўғри тўртбурчакнинг контуридан иборат (22- чизма). Бу ҳолда



22- чизма.

$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]$$

булиб,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})])}{\partial x} = y \left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = y \left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - y \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2$$

булади. Грин формуласи (23) дан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_{\overline{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy = \iint_F y^2 dx dy,$$

AB

бунда \overline{AB} — юқорида — чизмада тасвирланган тўғри тўртбурчак контуридан иборат.

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\iint_{(F)} y^2 dx dy = \int_3^6 dx \int_2^4 y^2 dy = \frac{56}{3} \int_3^6 dx = 56.$$

Демак,

$$\oint_{\overline{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy = 56.$$

AB

24- мисол. Ушбу

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$$

эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ эмаслигини кўрсатинг, сўнг уни ҳисобланг. Бу интегралда

$$P(x, y) = x + y, \quad Q(x, y) = x - y$$

булади. Равшанки, бу функциялар узлуксиз ҳамда узлуксиз

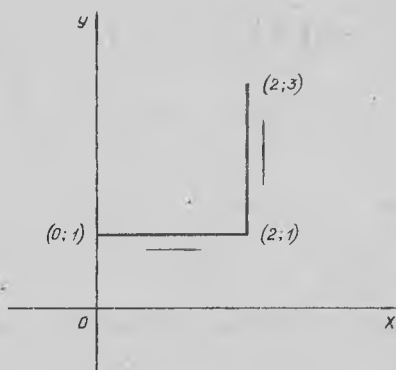
$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 1$$

хусусий ҳосилаларга эга. Иккинчи томондан,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади. Демак, берилган интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди. Шу имкониятдан фойдаланиб, интеграллаш йўлини шундай танлаймизки, берилган эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш осон бўлсин. Интеграллаш эгри чизиғи сифатида 23-чизмада кўрсатилган синиқ чизиқни оламиз.

Интеграл хоссасига кўра



23-чизма.

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,1)}^{(2,1)} (x+y)dx + (x-y)dy + \int_{(2,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$$

бўлади. Равшанки,

$$\int_{(0,1)}^{(2,1)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,1)}^{(2,1)} (x+y)dx = \int_0^2 (x+1)dx = 4,$$

$$\int_{(2,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(2,1)}^{(2,3)} (x-y)dy = \int_1^3 (2-y)dy = 0.$$

Демак,

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy = 4 + 0 = 4.$$

25- м и с о л. Ушбу

$$\oint_K (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy = 0$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг, бунда K эгри чизик учлари $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ нукталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

Берилган интегралда

$$P(x, y) = 3x^2 + y, \quad Q(x, y) = x^2 - 2y^2$$

бўлади.

Бу функциялар текисликда узлуксиз ҳамда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x$$

узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади. Унда юқоридаги 1°-тасдиққа биноан $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ нинг ёпиқ контур бўйича (берилган учбурчак контури бўйича) интегрални нолга тенг бўлади:

$$\oint_K (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy = 0.$$

26- м и с о л. Ушбу

$$\left(3x^2y - \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^3 - xy^2) dy$$

ифоданинг бирор $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлишини кўрсатинг, сўнг шу функцияни топинг.

Бу ифодада

$$P(x, y) = 3x^2y - \frac{y^3}{3}, \quad Q(x, y) = x^3 - xy^2$$

бўлади. Уларнинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 3x^2 - y^2, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - y^2$$

дан иборат. Демак, $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар узлуксиз ҳосилаларга эга ва

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Унда қаралаётган ифода 3°-тасдиққа биноан бирор $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади:

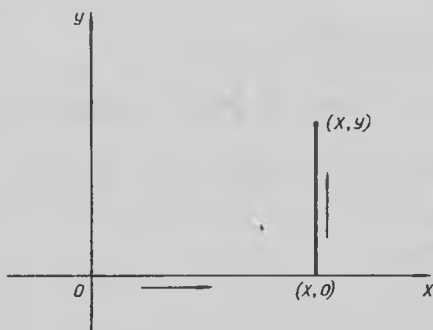
$$dF(x, y) = \left(3x^2y - \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^3 - xy^2)dy.$$

Энди $F(x, y)$ функцияни топамиз. Уни

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (24)$$

деб оламиз. Бунда (x_0, y_0) текисликда тайинланган нуқта, (x, y) эса ўзгарувчи нуқта. Интеграл эса шу нуқталарни бирлаштирувчи бирор эгри чизик бўйича олинган.

Модомики, (24) интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ эмас экан, унда (x_0, y_0) нуқта сифатида $(0, 0)$ ва интеграллаш эгри чизиги сифатида 24-чизмада тасвирланган синик чизикни оламиз.



24- чизма.

Интеграл хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2y - \frac{y^3}{3})dx + (x^3 - xy^2)dy = \\
 &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (3x^2y - \frac{y^3}{3})dx + (x^3 - xy^2)dy + \\
 &+ \int_{(x,0)}^{(x,y)} (3x^2y - \frac{y^3}{3})dx + (x^3 - xy^2)dy = \\
 &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (3x^2y - \frac{y^3}{3})dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x^3 - xy^2)dy = x^3y - \frac{xy^3}{3}.
 \end{aligned}$$

Демак,

$$F(x, y) = x^3y - \frac{xy^3}{3}.$$

Мисол ва масалалар

Грин формуласидан фойдаланиб, қуйидаги эгри чиққили интегралларни ҳисобланг:

56. $\oint_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$, бунда K — учлари (1,1), (3,2), (2,5) нукталарда бўлган учбурчакнинг контури.

57. $\oint_K (1-x^2)y dx + x(1+y^2) dy$, бунда K — ушбу $x^2+y^2 = r^2$ айланадан иборат.

58. $\oint_K (xy+x+y) dx + (xy+x-y) dy$, бунда K — ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсдан иборат.

59. $\oint_K e^x[(1-\cos y) dx - (y-\sin y) dy]$, бунда K — ушбу $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$ соҳанинг контуридан иборат.

60. $\oint_K 2(x^2+y^2) dx + (x+y)^2 dy$, бунда K — учлари (1,1), (2,2), (1,3) нукталарда бўлган учбурчакнинг контури.

61. $\oint_K \frac{dx-dy}{x+y}$, бунда K — учлари (1,0), (0,1),

$(-1,0)$, $(0, -1)$ нукталарда бўлган квадрат контуридан иборат.

Қуйидаги эгри чизикли интегралларни интеграллаш йўлига боғлиқ эмаслигини аниқланг, сўнг уларни ҳисобланг.

$$62. \int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx.$$

$$63. \int_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy.$$

$$64. \int_{(0,2)}^{(1,3)} (4xy - 15x^2y) dx + (2x^2 - 5x^3 + 7) dy.$$

$$65. \int_{(0,0)}^{(1,1)} (4x^3 - 3y^2 + 5y) dx + (5x - 6xy - 4y) dy.$$

$$66. \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}.$$

$$67. \int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy.$$

Қуйидаги ифодаларнинг бирор $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг. Агар у тўлиқ дифференциал бўлса, $F(x, y)$ функцияни топинг:

$$68. (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy.$$

$$69. (e^{2y} - 5y^3 e^x) dx + (2xe^{2y} - 15y^2 e^x) dy.$$

$$70. \left(12x^2y + \frac{1}{y^2} \right) dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^2} \right) dy.$$

$$71. (3x^2y^2 - y^3 + 4x) dx + (2x^3y - 3xy^2 + 5) dy.$$

$$72. \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} dx - \frac{x^2 + \sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$73. \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy.$$

$$74. \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x+y)^3}.$$

$$75. \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2} \right) dx + 2xy dy.$$

ХІХ боб

СИРТ ИНТЕГРАЛИ

Фазода ушбу

$$z = z(x, y) \quad (1)$$

тенглама билан аниқланган (S) сирт берилган бўлсин. Бунда $Z(x, y)$ функция (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) берилган функция бўлиб, у шу соҳада узлуксиз $Z'_x(x, y)$, $Z'_y(x, y)$ ҳосилаларга эга.

Маълумки, бундай сирт юзага эга бўлиб, у қуйидаги

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy$$

формула орқали ҳисобланади.

1-§. БИРИНЧИ ТУР СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

1. Интеграл таърифи. Юқорида айтилган (S) сирт берилган бўлсин. Бу сиртнинг бўлиниши, бўлиниш бўлақлари ва диаметри тушунчалари аввал қаралган $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши, (D) соҳанинг бўлиниши каби киритилади ва ўхшаш хоссаларга эга бўлади.

Айтайлик, $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда ($(S) \subset R^3$) берилган бўлсин. Бу сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагиди ($k = 1, 2, \dots, n$) ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуктани олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуктадаги қиймати $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ ни (S_k) сиртнинг S_k юзига кўпайтириб, қуйидаги йигиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k \quad (2)$$

Одатда (2) интеграл йигинди дейилади.

(S) сиртнинг шундай

$$P_1 P_2, \dots, P_m \dots \quad (3)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{p_3}, \dots, \lambda_{p_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{p_m} = 0$. Бундай P_m

($m=1,2,\dots$) бўлинишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг (2) кўринишдаги йиғиндиларини тузсак, ушбу

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots \quad (4)$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (3) бўлинишлари кетма-кетлиги олинганда ҳам, унга мос (4) кетма-кетлик (ξ_k, η_k, ζ_k) нукталарни танлаб олиншига боғлиқ бўлмаган ҳолда, ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг лимити дейилади.

1- т а ў р и ф. Агар $\lambda_p \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндисининг σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича интегралланувчи дейилади. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y, z)$ функциянинг биринчи тур сирт интегралли дейилади ва у

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds$$

каби белгиланади:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k.$$

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фазода R^3 сирт $z=z(x, y)$ тенглама билан берилган бўлиб, $z(x, y)$ функция чегараланган (D) соҳада узлуксиз ва (D) да узлуксиз $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

1- те о р е м а. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича биринчи тур сирт интегралли

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds$$

мавжуд ва

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) ds &= \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \times \\ &\times \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy \end{aligned}$$

бўлади.

Энди R^3 фазода (S) сирт $x=x(y, z)$ тенглама билан берилган бўлиб, $x(y, z)$ функция чегараланган (\bar{D}) соҳада узлуксиз ва (D) да узлуксиз $x'_y(y, z), x'_z(y, z)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

2-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича биринчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)} dy dz$$

мавжуд ва

бўлади.

3. Интегралнинг хоссалари. Биринчи тур сирт интеграллари икки қаррали интеграл хоссалари каби хоссаларга эга. Биз уларнинг айримларини келтирамиз.

1°. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича интегралланувчи бўлиб, $(S) = (S_1) \cup (S_2)$ бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(S_1)} f(x, y, z) ds + \iint_{(S_2)} f(x, y, z) ds$$

бўлади.

2°. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x, y, z)$ ҳам ($c = \text{const}$) шу сирт бўйича интегралланувчи бўлади ва

$$\iint_{(S)} c \cdot f(x, y, z) ds = c \cdot \iint_{(S)} f(x, y, z) ds$$

тенглик ўринли бўлади ($c = \text{const}$).

3°. Агар $f(x, y, z)$ ва $g(x, y, z)$ функцияларнинг ҳар бири (S) сирт бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y, z) \pm g(x, y, z)$ ҳам шу сирт бўйича интегралланувчи бўлиб,

$$\iint_{(S)} [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] ds = \iint_{(S)} f(x, y, z) ds \pm \iint_{(S)} g(x, y, z) ds$$

бўлади.

4. Интегрални ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремалар функциянинг биринчи тур сирт интегралларининг мавжудлигини тасдиқлаш билан бир қаторда уларни икки қаррали интеграллар орқали ифодаланишини ҳам кўрсатади. Бинобарин, сирт интеграллари икки қаррали интегралга келтириб ҳисобланади. Унда қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2(x, y) + z'_y{}^2(x, y)} dx dy,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x'_y{}^2(y, z) + x'_z{}^2(y, z)} dy dz,$$

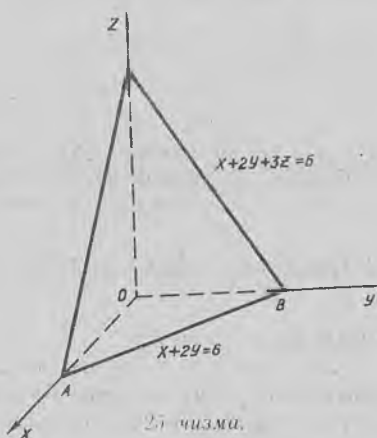
$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(D)} f(x, y, z, x, z) \sqrt{1 + y'_z{}^2(z, x) + y'_x{}^2(z, x)} dz dx. \quad (5)$$

1- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} (6x + 4y + 3z) ds$$

сирт интегралини ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги

$$x + 2y + 3z = 6$$



текисликнинг биринчи октантдаги қисми (25- чизма).

Равшанки, (S) сирт

$$z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$$

тенглама билан аниқланган.

(D) соҳада эса AOB учбурчакдан иборатдир. Бу соҳада z функция узлуксиз ҳамда

$$z'_x = -\frac{1}{3}, \quad z'_y = -\frac{2}{3}$$

узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга.

(S) сирт берилган

$$f(x, y, z) = 6x + 4y + 3z$$

функция эса шу сиртда узлуксиз. Унда (5) формулага кўра

$$\iint_{(S)} (6x + 4y + 3z) ds = \iint_{(D)} (6x + 4y + 3 \cdot \frac{1}{3} (6 - x - 2y)) \cdot \sqrt{1 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} dx dy$$

бўлади.

Энди икки карралаи интегрални хисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} [6x + 4y + (6 - x - 2y)] \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} dx dy &= \\ = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_{(D)} (2x + 2y + 6) dx dy &= \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (5x + \\ + 2y + 6) dx &= \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 [\frac{5}{2}x^2 + 2xy + 6x] \Big|_{x=0}^{x=6-2y} dy = \\ &= 2\sqrt{14} (\frac{y^3}{3} - 5y^2 + 21y) \Big|_0^3 = 54\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(S)} (6x + 4y + 3z) ds = 54\sqrt{14}.$$

2- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} (x + y + z) ds$$

интегрални хисобланг, бунда (S) сирт $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферанинг $z=0$ текисликнинг юкорисида жойлашган қисми.

Қаралаётган (S) сирт

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

тенглама билан ифодаланати. Бунда $Z = Z(x, y)$ функция $(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ да узлуксиз ҳамда узлуксиз

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

хусусий ҳосилаларга эга. Бу (D) соҳа $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ сиртнинг x_0y текисликдаги проекциясидир.

(S) сиртда $f(x, y, z) = x + y + z$ функция узлуксиз. Унда (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (x + y + z) ds &= \iint_{(D)} (x + y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \times \\ &\times \sqrt{1 + z'_x(x, y) + z'_y(x, y)} dx dy. \end{aligned}$$

Агар

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 + z'_x(x, y) + z'_y(x, y)} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} = \\ &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\iint_{(S)} (x + y + z) ds = r \iint_{(D)} \left(\frac{x + y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} + 1\right) dx dy$$

бўлади.

Энди икки қаррали интегрални ҳисоблаймиз. Бу интегралда ушбу

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

алмаштиришларини бажарамиз. Натижада

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \left(\frac{x + y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} + 1\right) \times dx dy &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \left(\frac{\rho \cos \varphi + \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + 1\right) \rho d\rho \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \frac{\rho (\cos \varphi + \sin \varphi)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right] d\varphi + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} = \pi r^2 \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\iint_{(S)} (x + y + z) ds = \pi r^3.$$

3- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} x(y + z) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ цилиндр сиртнинг $z = 0, z = c$ ($c > 0$) текисликлар орасидаги қисми.

(S) сирт $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ тенглама билан берилган. Бу $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ функция $[-b, b]$ да узлуксиз бўлиб $(-b, b)$ да узлуксиз.

$$x'_y = -\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \quad x'_z = 0$$

хусусий ҳосилаларга эга. (S) сиртнинг OyZ текисликдаги проекцияси

$$(D) = \{(y, z) \in R^2 : x = \sqrt{b^2 - y^2}, z = 0, z = c\} = \\ = \{(y, z) \in R^2 : -b \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$$

бўлади.

$f(x, y, z) = x(y + z)$ функция (S) сиртда узлуксиз (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\iint_{(S)} x(y + z) ds = \iint_{(D)} \sqrt{b^2 - y^2} (y + z) \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2 - y^2}} dy dz = \\ = b \iint_{(D)} (y + z) dy dz.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки қаррали интегрални ҳисоблаймиз:

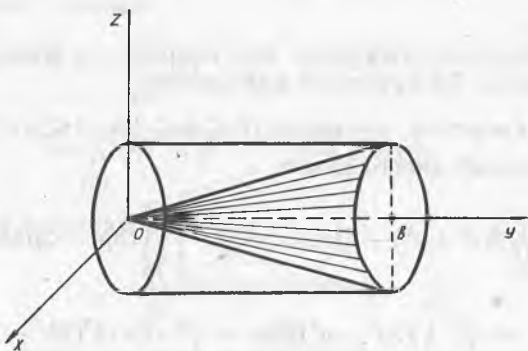
$$b \iint_{(D)} (y + z) dy dz = b \int_{-b}^b \left(\int_0^c (y + z) dz \right) dy = \\ = b \int_{-b}^b \left(yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=c} dy = b \int_{-b}^b \left(cy + \frac{c^2}{2} \right) dy = \\ = \frac{bc}{2} \cdot y^2 \Big|_{-b}^b + \frac{bc^2}{2} y \Big|_{-b}^b = b^2 c^2.$$

Демак,

$$\iint_{(S)} x(y+z) ds = b^2 c^2.$$

4- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) ds$$



26- чизма.

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ конус сиртнинг $y = 0$, $y = b$ ($b > 0$) текисликлар орасидаги қисми (26- чизма).

(S) сирт $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ тенглама билан берилганини эътиборга олиб, интегрални ҳисоблашда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(D)} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + y'_x{}^2 + y'_z{}^2} dz dx$$

формуладан фойдаланамиз. Бу ҳолда (D) соҳа (S) сиртнинг xOz текисликдаги проекцияси бўлиб, $y(D) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq b^2\}$ доирадан иборат бўлади. $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ функциянинг хусусий ҳосилалари эса

$$y'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad y'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

ларга тенг. Натижада

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) ds &= \iint_{(D)} [3x^2 + 5(x^2 + z^2) + 3z^2 - 2] \times \\ &\times \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)^2} dz dx = \\ &= \sqrt{2} \iint_{(D)} [3(x^2 + z^2) - 2] dz dx \end{aligned}$$

бўлади.

Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги икки қаррал интегралда ўзгарувчини қуйидагича

$$x = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq b)$$

алмаштириб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \iint_{(D)} [8(x^2 + z^2) - 2] dz dx &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^b (8\rho^3 - 2\rho) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (2\rho^4 - \rho^2) \Big|_0^b d\varphi = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot b^2(2b^2 - 1). \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(S)} (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) ds = 2\sqrt{2} \pi b^2(2b^2 - 1).$$

5- м и с о л. Ушбу

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

конуснинг ён сиртидан иборат.

(S) сирт

$$z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq b)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, унинг *Oxy* текислиги даги проекцияси $(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ бўлади.

$z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ функция узлуксиз ҳамда узлуксиз хусусий ҳосилалар

$$z'_x = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{by}{a\sqrt{x^2 + y^2}}$$

га эга. Бу сиртда берилган $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функция узлуксиз. Шуларни эътиборга олиб, (5) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \iint_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dxdy = \\ &= \iint_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} dxdy. \end{aligned}$$

Энди икки қаррали интеграл

$$\iint_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$

ни ҳисоблаймиз. Бу интегрални ҳисоблашда ушбу

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

алмаштиришларни бажарамиз. Натижада

$$\iint_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \rho^2 d\rho \right) d\varphi = \frac{a^3 \cdot 2\pi}{3}$$

бўлади. Демак,

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^3 \cdot 2\pi}{3} = \frac{2\pi a^2}{3} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

6- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} |xyz| ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $z = x^2 + y^2$ айланма параболоиднинг $z = 0$, $z = 1$ текисликлар орасидаги қисми.

Равшанки, бу (S) сиртнинг *Oxy* текислигидаги проекцияси

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

доирадан иборат бўлади.

(5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} |xyz| ds &= \iint_{(D)} |xy(x^2 + y^2)| \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \\ &= \iint_{(D)} (x^2 + y^2) |xy| \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Икки каррали интегрални ҳисоблашда юқоридагидек

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\begin{aligned} &\iint_{(D)} (x^2 + y^2) |xy| \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (\rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi \cdot \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2}) \rho d\rho \right) d\varphi = \\ &= 2 \int_0^1 \rho^5 \cdot \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot d\rho = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420} \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\iint_{(S)} |xyz| ds = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}.$$

7- м и с о л. Ушбу

$$\iint_{(S)} (xy + yz + zx) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конус сиртнинг $x^2 + y^2 = 2ax$ цилиндрик сирт билан кесишган қисми.

(S) сиртнинг Oxy текислигидаги проекцияси

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

доирадан иборат бўлади.

(5) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (xy + yz + zx) ds &= \iint_{(D)} (xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + \\ &+ x\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy. \end{aligned}$$

Агар

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

жаканини эътиборга олсак, унда юқоридаги икки қарралаи интеграл ушбу

$$\sqrt{2} \iint_{(D)} (xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

кўринишга келади. Бу интегралда

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

алмаштириш бажариб ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \iint_{(D)} (xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \\ & = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2a \cos \varphi} (r^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi + r^2 \sin \varphi + r^2 \cos \varphi) r dr d\varphi = \\ & = 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) \cos^4 \varphi d\varphi = \\ & = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot a^4 \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4. \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(S)} (xy + yz + zx) ds = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4.$$

5. Интегралнинг баъзи бир татбиқлари. Биринчи тур сирт интегралларидан сиртнинг юзини, массасини ҳисоблашда, оғирлик марказининг координаталарини, шунингдек инерция моментларини топишда фойдаланилади.

1°. (S) сиртнинг юзи

$$S = \iint_{(S)} ds$$

формула билан топилади.

2°. Агар (S) сирт бўйича зичлиги $\rho(x, y, z)$ бўлган масса тарқатилган бўлса, унда (S) сиртнинг массаси

$$m = \iint_{(S)} \rho(x, y, z) ds \quad (6)$$

бўлади.

3°. (S) сиртнинг оғирлик марказининг координаталари

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_{(S)} x \rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_{(S)} y \rho(x, y, z) ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iint_{(S)} z \rho(x, y, z) ds$$

булади.

4°. (S) сиртнинг Ox , Oy , Oz координата ўқларига нисбатан инерция моментлари мос равишда ушбу

$$I_x = \iint_{(S)} (z^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) ds, \quad I_y = \iint_{(S)} (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_z = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$$

формулалар билан топилади.

(S) сиртнинг Oxy , Oxz , Oyz координата текисликларига нисбатан инерция моментлари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$I_{xy} = \iint_{(S)} z^2 \rho(x, y, z) ds, \quad I_{xz} = \iint_{(S)} y^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{yz} = \iint_{(S)} x^2 \rho(x, y, z) ds.$$

8- мисол. Ушбу $z^2 = 2xy$ тенглама билан берилган конуснинг биринчи октантдаги ҳамда $x=2$, $x=4$ текисликлар орасида бўлган қисмининг юзини топинг.

Изланаётган сиртнинг юзи

$$S = \iint_{(S)} ds$$

формула билан топилади. Бу сирт интегрални (5) формулага кўра

$$S = \iint_{(S)} ds = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$$

бўлади, бунда (D) соҳа (S) сиртнинг Oxy текислигидаги проекцияси:

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}.$$

Энди

$$z'_x = (\sqrt{2xy})'_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad z'_y = (\sqrt{2xy})'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x}{y}}$$

бўлишини эътиборга олиб,

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{(D)} (\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}) dx dy$$

бўлишини топамиз. Кейинги икки каррала интеграл куйидагича хисобланади:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{(D)} (\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}) dx dy = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left[\int_0^4 (\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}) dy \right] dx = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left(2\sqrt{xy} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{y^3}{x}} \right) \Big|_{y=0}^{y=4} dx = \\ & = 2\sqrt{2} \int_0^2 (\sqrt{x} + \frac{4}{3\sqrt{x}}) dx = 16. \end{aligned}$$

Демак, $S = 16$.

9- м и с о л. Ҳар бир нуқтасидаги зичлиги шу нуқталардан координата бошигача бўлган масофа квадратига пропорционал бўлган ушбу

$$x = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$$

ярим сферанинг массасини топинг.

Шартга кўра

$$\rho(x, y, z) = k \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$$

бўлиб, бунда k пропорционаллик коэффицентидир.

Массани топиш формуласи (6) га кўра

$$m = \iiint_{(S)} k(x^2 + y^2 + z^2) ds$$

бўлади. Бу ерда (S) сирт $x = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$ ярим сферадан иборат бўлиб, унинг Oyz текисликдаги проекцияси

$$(D) = \{(x, y) \in R^2: y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

доирадан иборат.

(5) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$m = \iint_{(S)} k(x^2 + y^2 + z^2) ds = k \iint_{(D)} (r^2 - y^2 - z^2 + y^2 + z^2) \times \\ \times \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dydz.$$

Равшанки,

$$1 + x_y'^2 + x_z'^2 = 1 + (\sqrt{r^2 - y^2 - z^2})_y'^2 + \\ + (\sqrt{r^2 - y^2 - z^2})_z'^2 = \frac{r^2}{r^2 - y^2 - z^2}.$$

Натижада

$$m = kr^3 \iint_{(D)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}} dydz$$

тенгликка келамиз. Бу икки каррали интегрални хисоблаш учун

$$y = \alpha \sin \varphi, \quad z = \alpha \cos \varphi$$

алмаштиришни бажарамиз. Бунда $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha \leq r$ бўлади:

$$\iint_{(D)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}} dydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} \right) d\varphi = \\ = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r (r^2 - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} d(r^2 - \alpha^2) \right) d\varphi = \\ = - \frac{1}{2} \frac{(r^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot 2\pi = 2\pi r.$$

Демак,

$$m = mr^3 \iint_{(D)} \frac{dydz}{\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}} = 2\pi r^4 k$$

10- мисол. Ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ тенглама билан берилган бир жинсли сферанинг биринчи октантда жойлашган бўлагининг Oz ўққа нисбатан инерция моментини топинг.

Сфера бир жинсли бўлганлиги сабабли тарқатилган массанинг зичлиги ўзгармас бўлади. Уни 1 га тенг қилиб олиш мумкин: $\rho(x, y, z) = 1$.

Изланаётган инерция моменти

$$I_z = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) ds$$

формула билан топилади, бунда (S) сирт

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

тенглама билан аниқланади. Юқоридаги сирт интегралли (8) формулага кўра

$$I_z = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) ds = \iint_{(D)} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$$

бўлади, бунда (D) соҳа (S) сиртнинг OXY текислигидаги проекцияси:

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Равшанки,

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Унда

$$I_z = \iint_{(D)} (x^2 + y^2) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

бўлади. Энди икки қаррали интегрални $x = \alpha \cos \varphi$, $y = \alpha \sin \varphi$ алмаштириш ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\iint_{(D)} \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^r \frac{\alpha^3 d\alpha}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} \right) d\varphi = \frac{\pi r^3}{3}$$

Демак,

$$I_z = r \cdot \frac{\pi r^3}{3} = \frac{\pi r^4}{3}.$$

Мисол ва масалалар

1. Ушбу

$$\iint_{(S)} (x + y + z) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

кубнинг ташқи қисмидан иборат.

2. Ушбу $\iint_{(S)} ds$ интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$x + y + z = a$ текисликнинг биринчи октантда жойлашган қисми.

3. Ушбу $\iint_{(S)} x ds$ интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

қуйидаги $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ярим сферадан иборат.

4. Ушбу

$$\iint_{(S)} (x^2 + y^2 + 3z^2) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $z = 0$, $z = 1$ текисликлар орасидаги қисми.

5. Ушбу

$$\iint_{(S)} (y + z + \sqrt{a^2 - x^2}) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрнинг $z = 0$, $z = 1$ текисликлар орасидаги қисми.

6. Ушбу

$$\iint_{(S)} (z^2 + x^2 + y^3) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y = \sqrt{r^2 - x^2 - z^2}$ ярим сферадан иборат.

7. Ушбу

$$\iint_{(S)} (5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги

$x = \sqrt{y^2 + z^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $x=0$, $x=2$ текисликлар орасидаги қисми.

8. Ушбу

$$\iint_{(S)} (x^2 + 2y^2z^2 + y^4 + z^4) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x+y+z=2$ текисликнинг $y^2+z^2=1$ цилиндрдан ажратган қисми.

9. Ушбу

$$\iint_{(S)} y(x+z) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y = \sqrt{c^2 - z^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $x=a$ текисликлар орасидаги қисми.

10. Ушбу

$$\iint_{(S)} \sqrt{1+x^2+y^2} ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z=xy$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) тенглама билан берилган сиртнинг $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ цилиндрдан ажратган қисми.

11. Ушбу

$$\iint_{(S)} \sqrt{1+9x^2+9z^2} ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $y=3xz$ тенглама билан берилган сиртнинг $(x^2+y^2)^2=8xz$ цилиндрдан ажратган қисми.

12. Ушбу

$$\iint_{(S)} \frac{1}{(1+x+y+z)^2} ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x+y+z=1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) текисликдан иборат.

13. Ушбу

$$2x+2y+z=8a$$

текисликнинг $x^2+y^2=z^2$ цилиндр ичида жойлашган қисмининг юзини топинг.

14. Ушбу

$$x^2+y^2=r^2$$

цилиндрнинг $y+z=0$ ва $z=0$ текисликлар орасидаги юзини топинг.

15. Ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

сферанинг $x^2 + y^2 = 2az$ параболоид ичида жойлашган қисмининг юзини топинг.

16. Зичлиги $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ бўлган ушбу

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

ярим сферанинг массасини топинг.

17. Зичлиги $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 2$ бўлган ушбу

$$2z = 9 - x^2 - y^2$$

сиртнинг $z=0$ текислик билан кесишган қисмининг массасини топинг.

18. Зичлиги $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ бўлган ушбу

$$y + \sqrt{x^2 + z^2}$$

сиртнинг $y=0$ ва $y=1$ текисликлар орасидаги қисмининг массасини топинг.

Зичлиги ўзгармас бўлган қуйидаги сиртларнинг оғирлик марказини топинг:

19. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

20. $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq r$).

21. $a^2 z^2 = b^2(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq b$.

Зичлиги ўзгармас бўлган қуйидаги сиртларнинг OZ ўқиға нисбатан инерция моментларини топинг:

22. $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ ($0 \leq z \leq 1$).

23. $x^2 + y^2 = 2az$ ($0 \leq z \leq a$).

2-§. ИККИНЧИ ТУР СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Фазода (S) сирт $z = z(x,y)$ тенглама билан аниқланган. Бунда $z(x,y)$ функция (D) соҳада ($(D) \subset \subset R^2$) берилган, узлуксиз ҳамда узлуксиз хусусий ҳосилалар $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ га эга. (D) соҳанинг чегараси эса бўлакли-силлиқ чизиқдан иборат бўлсин.

(S) сиртда унинг чегараси билан кесишмайдиган k ёпиқ чизиқни олайлик. (x_0, y_0, z_0) нуқта сиртнинг k ёпиқ чизиқ билан чегараланган қисмига тегишли ва K_n шу ёпиқ чизиқ k нинг xOy текисликдаги проекцияси бўлсин.

Сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтасидаги уринма текисликка шу нуқтада перпендикуляр ўтказайлик. Бу перпендикуляр

нинг мусбат йўналиши деб шундай йўналишни оламизки, унинг учидан қаралганда иккала k ва k_n ёпик чизикларнинг йўналишлари мусбат бўлади. Унинг манфий йўналиши эса шундай йўналишки, унинг учидан қаралганда k_n нинг мусбат йўналишига k нинг манфий йўналиши мос келади. Перпендикулярнинг мусбат йўналиши бўйича олинган бирлик кесма сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуктадаги нормали дейилади. Нормалнинг O_x, O_y ва O_z ўқларнинг мусбат йўналишлари билан ташкил қилган бурчакларни мос равишда α, β, γ дейилса, унда

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \\ \cos\beta &= -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}\end{aligned}\quad (9)$$

бўлади. Булар нормалнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

Сиртнинг устки томони деб унинг шундай томони олинадики, бу томондан қаралганда иккала k ва k_n ёпик чизикларнинг йўналишлари мусбат бўлади.

Сиртнинг устки томони қаралганда k_n билан чегараланган текис шаклнинг юзи мусбат ишора билан, пастки томони (иккинчи томони) қаралганда манфий ишора билан олинади.

1. Интеграл таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган бўлсин. Бу сиртнинг маълум бир томони (ёки устки, ёки остки томонини) қарайлик. Сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагиди ($k=1, 2, \dots, n$) ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нукта олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуктадаги $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (Oxy, Oyz, Ozx) текисликдаги проекцияси (D_k) ($(D'_k), (D''_k), (D'''_k)$) нинг юзига кўпайтирилиб, қуйидаги интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot D_k \quad (10)$$

$$\left(\sigma' = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D\rho_k, \sigma'' = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot D''_k \right)$$

(S) сиртнинг шундай

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (11)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{p_m} = 0$.

Бундай P_m ($m=1,2, \dots$) бўлинишларга нисбатан

$f(x,y,z)$ функциянинг интеграл йигиндиларини тузамиз.

Натижада

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (11) бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ йигиндининг лимити дейилади ва у

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot D_k = I$$

каби белгиланади.

2- т а ъ р и ф. Агар $\lambda_p \rightarrow 0$ да $f(x,y,z)$ функциянинг интеграл йигиндиси $\sigma(\sigma', \sigma'')$ чекли лимитга эга бўлса, $f(x,y,z)$ функция (S) сиртнинг танланган томони бўйича интегралланувчи функция дейилади. Бу йигиндининг чекли лимити I эса (I', I''), $f(x,y,z)$ функциянинг (S) сиртнинг танланган томони бўйича иккинчи тур интеграллари дейилади ва у

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dx dy \left(\iint_{(S)} f(x,y,z) dy dz, \iint_{(S)} f(x,y,z) dz dx \right)$$

каби белгиланади:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dx dy = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot D_k.$$

$$\left(\iint_{(S)} f(x,y,z) dy dz = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D'_k, \right.$$

$$\left. \iint_{(S)} f(x,y,z) dz dx = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D''_k \right)$$

Умумий ҳолда (S) сиртда $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ва $R(x,y,z)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\iint_{(S)} P(x,y,z) dx dy, \iint_{(S)} Q(x,y,z) dy dz, \iint_{(S)} R(x,y,z) dz dx$$

интеграллар бор бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} P(x,y,z) dx dy + \iint_{(S)} Q(x,y,z) dy dz + \iint_{(S)} R(x,y,z) dz dx$$

йиғинди иккинчи тур сирт интегралининг умумий кўриниши дейилади ва у

$$\iint_{(S)} P(x,y,z) dx dy + Q(x,y,z) dy dz + R(x,y,z) dz dx$$

каби белгиланади:

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} P(x,y,z) dx dy + Q(x,y,z) dy dz + R(x,y,z) dz dx = \\ & \iint_{(S)} P(x,y,z) dx dy + \iint_{(S)} Q(x,y,z) dy dz + \iint_{(S)} R(x,y,z) dz dx. \end{aligned}$$

Фазода бирор (V) жисм берилган бўлсин. Бу жисмни ўраб турган ёпик сирт силлиқ сирт бўлиб, уни (S) дейлик. $f(x,y,z)$ функция (V) да берилган. Оху текисликка параллел бўлган текислик билан (V) ни икки қисмга ажратамиз: $(V) = (V_1) + (V_2)$. Натижада уни ўраб турган (S) сирт ҳам икки (S_1) ва (S_2) сиртларга ажралади.

Ушбу

$$\iint_{(S_1)} f(x,y,z) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x,y,z) dx dy$$

интеграл $f(x,y,z)$ функциянинг ёпик сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли дейилади ва

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dx dy$$

каби белгиланади. Бунда биринчи интеграл (S_1) сиртнинг устки томони, иккинчи интеграл эса (S_2) сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

Худди шунга ўхшаш

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dy dz, \iint_{(S)} f(x,y,z) dz dx$$

ҳамда, умумий ҳолда,

$$\iint_{(S)} P(x,y,z) dydz + Q(x,y,z) dydz + R(x,y,z) dzdx$$

интеграллар таърифланади.

Э с л а т м а. Иккинчи тур сирт интегралларда сиртнинг қайси томони (устки ёки пастки томони; ташқи томони ёки ички томони) бўйича интегралланаётганлиги таъкидлаб борилади.

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фазода (S) сирт $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган. Бунда $z = z(x, y)$ функция чегараланган (D) соҳада $((D) \subset \subset R^2)$ узлуксиз ва (D) да узлуксиз $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга.

3-теорема. Агар $f(x,y,z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dx dy$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S')} f(x,y,z) dydz = \iint_{(D')} f(x(y,z), y,z) dydz$$

бўлади.

Фазода (S') сирт $x = x(y,z)$ тенглама билан берилган. Бунда $x = x(y,z)$ функция чегараланган ёпиқ (D') соҳада $((D') \subset \subset R^2)$ узлуксиз ҳамда узлуксиз $x'_y(y,z)$, $x'_z(y,z)$ хусусий ҳосилаларга эга.

4-теорема. Агар $f(x,y,z)$ функция (S') сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S') сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S')} f(x,y,z) dydz$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S')} f(x,y,z) dydz = \iint_{(D')} f(x(y,z), y,z) dydz$$

бўлади.

Фазода (S'') сирт $y = y(z,x)$ тенглама билан берилган. Бунда $y = y(z,x)$ функция чегараланган (D'') соҳада $((D'') \subset \subset R^2)$ узлуксиз ва (D) да узлуксиз $y'_z(z,x)$, $y'_x(z,x)$ хусусий ҳосилаларга эга.

5-теорема. Агар $f(x,y,z)$ функция (S'') сиртда

берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S'') сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S'')} f(x,y,z) dzdx$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S'')} f(x,y,z) dzdx = \iint_{(D'')} f(x,y(z,x),z) dzdx$$

бўлади.

3. Интегралнинг хоссалари. Иккинчи тур сирт интеграллари икки қаррали интегралларнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

Қуйида иккинчи тур сирт интегралларига хос иккита хоссасини келтириш билан қифояланамиз.

1°. Функциянинг (S) сиртнинг бир томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли, функциянинг шу сиртнинг иккинчи томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интегралидан фақат ишораси билан фарқ қилади.

2°. $f(x,y,z)$ функциянинг ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик (S) сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли

учун

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dx dy = 0$$

бўлади.

$f(x,y,z)$ функциянинг ясовчилари Ox ўқига параллел бўлган цилиндрнинг (S) сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли

учун

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dy dz = 0$$

бўлади.

$f(x,y,z)$ функциянинг ясовчилари Oy ўқига параллел бўлган цилиндрнинг (S) сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли

учун

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dx dz = 0$$

бўлади.

4. Интегрални ҳисоблаш. Иккинчи тур сирт интеграллари икки қаррали интегралларга келтириб ҳисобланади:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dx dy = \iint_{(D)} f(x,y,z(x,y)) dx dy, \quad (12)$$

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dy dz = \iint_{(D)} f(x(y,z), y, z) dy dz, \quad (13)$$

$$\iint_{(S)} f(x,y,z) dz dx = \iint_{(D)} f(x, y(z,x), z) dz dx. \quad (14)$$

5. Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланиш. (S) сирт ва бу сиртда берилган $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ва $R(x,y,z)$ функциялар 1-пунктдаги шартларни қаноатлантирсин. Унда ушбу

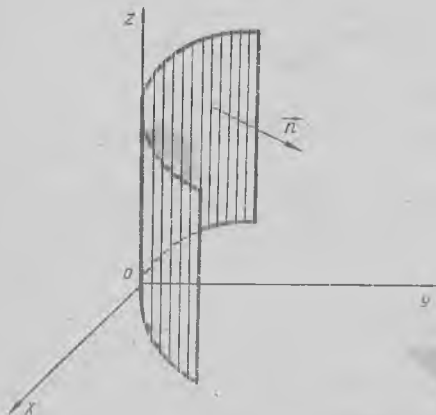
$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} P(x,y,z) dy dz + Q(x,y,z) dz dx + R(x,y,z) dx dy = \\ & = \iint_{(S)} [R(x,y,z) \cos \alpha + Q(x,y,z) \cos \beta + P(x,y,z) \cos \gamma] ds \end{aligned} \quad (15)$$

формула ўринли бўлади.

11- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} (ax^2 + by + cz^2) dx dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x^2 = 2py$ ($p > 0$) сиртнинг $y = 2p$, $z = 0$, $z = q$ текисликлар орасидаги қисмининг ички томони (27- чизма).



27- чизма.

(S) сиртнинг Oxz текислигидаги проекцияси $(D) = \{(x, z) \in R^2: -2p \leq x \leq 2p, 0 \leq z \leq q\}$ бўлади.

(S) сиртнинг ихтиёрий нуқтасига ўтказилган нормал Oy ўқи билан ўткир бурчак ташкил қилганлиги сабабли сирт интегрални мусбат ишора билан олинади. Юқоридаги (14) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\iint_{(S)} (ax^2 + by + cz^2) dx dz = \iint_{(D)} \left(ax^2 + b \cdot \frac{x^2}{2p} + cz^2 \right) dx dz.$$

Энди икки қаррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} & \iint_{(D)} \left(ax^2 + \frac{b}{2p} x^2 + cz^2 \right) dx dy = \\ & = \int_{-2p}^{2p} \left(\int_0^q \left[\left(a + \frac{b}{2p} \right) x^2 + cz^2 \right] dz \right) dx = \\ & = \int_{-2p}^{2p} \left[q \left(a + \frac{b}{2p} \right) x^2 + \frac{cq^3}{3} \right] dx = \frac{16}{3} p^3 q \left(a + \frac{b}{2p} \right) + \frac{4}{3} pcq^3. \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(S)} (ax^2 + by + cz^2) dx dz = \frac{16}{3} p^3 q \left(a + \frac{b}{2p} \right) + \frac{4}{3} pcq^3.$$

12- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эллипсоиднинг $z=0$ текисликдан пастда жойлашган қисми бўлиб, интеграл шу сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

Равшанки, (S) сиртнинг тенгламаси

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ва унинг Oxy текислигидаги проекцияси

$$(D) = \left\{ (x, y) \in R^2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

бўлади.

(S) сирт ва бу сиртда берилган

$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz$ функция ҳам 5-теореманинг шартларини қаноатлантиради. У ҳолда (12) формуладан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy = \\ & = - \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Интеграл (S) сиртнинг пастки томони бўйича олинганлиги сабабли сирт интеграли минус ишора билан олинади.

Энди

$$\begin{aligned} & - \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy = \\ & = \iint_{(D)} \left(kc \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy \end{aligned}$$

икки қаррали интегрални ҳисоблаймиз. Бу интегралда ўзгарувчиларни

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

каби алмаштириб топамиз:

$$\begin{aligned} & \iint_{(D)} \left(kc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \\ & = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (kc \sqrt{1 - \rho^2} - \rho^2) ab \rho d\rho \right) d\varphi = \\ & = ab \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 kc \rho \sqrt{1 - \rho^2} - \rho^3 \right) d\rho d\varphi = \\ & = 2\pi ab \left[-\frac{kc}{2} \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{\rho^4}{4} \right] \Big|_0^1 = 2\pi ab \left(\frac{kc}{3} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy = 2\pi ab \left(\frac{kc}{3} - \frac{1}{4} \right).$$

13- мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

ярим сферанинг ташқи қисми.

Равшанки, (S) сиртнинг тенгламаси

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

қўринишга эга. Бу функциянинг хусусий ҳосилалари

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

бўлиб,

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

бўлади.

Берилган иккинчи тур сирт интегрални (15) формуладан фойдаланиб биринчи тур сирт интегралига келтирамиз:

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \\ & = \iint_{(S)} [x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma] ds. \end{aligned}$$

Агар

$$\cos \alpha = \frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = \frac{x}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = \frac{y}{a}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a} = \frac{z}{a}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда юқоридаги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи тур сирт интеграли.

$$\frac{1}{a} \iint_{(S)} (x^3 + y^3 + z^3) ds$$

кўринишга келади. Демак,

$$\iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \frac{1}{a} \iint_{(S)} (x^3 + y^3 + z^3) ds.$$

Энди (5) формуладан фойдаланиб, биринчи тур сирт интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \iint_{(S)} (x^3 + y^3 + z^3) ds &= \frac{1}{a} \iint_{(D)} [x^3 + y^3 + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})^3] \times \\ &\times \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \iint_{(D)} \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy + \\ &+ \iint_{(D)} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy, \end{aligned} \quad (16)$$

бунда $D = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи турган икки қаррали интегрални ҳисоблаш учун

$$x = a \rho \cos \varphi, \quad y = a \rho \sin \varphi \quad (0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= a^4 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) d\rho = \\ &= a^4 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \right) \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = 0 \end{aligned}$$

(чунки $\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = 0$ бўлади).

$$\text{Энди (16) муносабатдаги } \iint_{(D)} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy$$

интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy &= a^4 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 - \rho^2) \rho d\varphi \right) d\rho = \\ &= 2\pi a^4 \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = \frac{1}{2} a^4 \pi. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, берилган иккинчи тур сирт интегралли $\frac{1}{2} a^4 \cdot \pi$ га тенг эканини топдик:

$$\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{1}{2} a^4 \pi.$$

14- м и с о л. Ушбу

$$\iint_{(S)} f(x) dydz + g(y) dzdx + h(z) dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$$

параллелепипеднинг ташқи сирти, f, g, h лар шу сиртда аниқланган узлуксиз функциялардир.

Равшанки,

$$(S) = (S_1) + (S_2) + (S_3) + (S_4) + (S_5) + (S_6)$$

бунда $(S_1), (S_2), (S_3), (S_4), (S_5), (S_6)$ лар параллелепипеднинг томонларидир:

$$\begin{aligned} (S_1) &= \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z = 0\}, \\ (S_2) &= \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z = c\}, \\ (S_3) &= \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq a, y = 0, 0 \leq z \leq c\}, \\ (S_4) &= \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq a, y = b, 0 \leq z \leq c\}, \\ (S_5) &= \{(x, y, z) \in R^3 : x = 0, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}, \\ (S_6) &= \{(x, y, z) \in R^3 : x = a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}. \end{aligned}$$

Интеграл хоссасига кўра

$$\begin{aligned} &\iint_{(S)} f(x) dydz + g(y) dzdx + h(z) dxdy = \\ &= \sum_{k=1}^6 \iint_{(S_k)} f(x) dydz + g(y) dzdx + h(z) dxdy \end{aligned}$$

Маълумки, бу тенгликнинг ўнг томонидаги сирт интегралларни ҳисоблашда, $(S_1), (S_3), (S_5)$ сиртлар бўйича интеграллар манфий ишора билан, $(S_2), (S_4), (S_6)$ сиртлар бўйича интеграллар эса мусбат ишора билан олинишини эътиборга оламиз. Шунингдек, интегралнинг 2°- хоссасидан фойдаланамиз. Натижада

$$\begin{aligned} \iint_{(S_1)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy &= \iint_{(S_1)} h(z)dxdy = \\ &= \int_0^a \left(\int_0^b h(0)dy \right) dx = -h(0) \cdot ab, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{(S_2)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy &= \iint_{(S_2)} h(z)dxdy = \\ &= \int_0^a \left(\int_0^b h(c)dy \right) dx = h(c) \cdot ab \end{aligned}$$

бўлади. Худди шунга ўқшаш

$$\iint_{(S_3)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy = -g(0)ac,$$

$$\iint_{(S_4)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dydx = g(b)ac,$$

$$\iint_{(S_5)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dydx = -f(0)bc,$$

$$\iint_{(S_6)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy = f(a)bc$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy &= \\ &= \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right] \cdot abc. \end{aligned}$$

Мисол ва масалалар

24. Ушбу

$$\iint_{(S)} x^2 y^2 z dx dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x^2 + y^2 + z^2 = z^2$ сферанинг $z=0$ текисликдан пастда жойлашган қисмининг устки томони.

25. Ушбу

$$I_1 = \iint_{(S)} x^2 dy dz, \quad I_2 = \iint_{(S)} y^2 dz dx$$

интегралларни ҳисобланг, бунда (S) сирт $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ сферанинг ташқи томони.

26. Ушбу

$$I_1 = \iint_{(S)} dx dy, I_2 = \iint_{(S)} z dx dy, I_3 = \iint_{(S)} z^2 dx dy$$

интегралларни ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эллипсоиднинг ташқи томони.

27. Ушбу

$$\iint_{(S)} 2 dx dy + y dx dz - x^2 z dy dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ эллипсоиднинг биринчи октантда жойлашган қисмининг ташқи томони.

28. Ушбу

$$\iint_{(S)} (y^2 + z^2) dy dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x = a^2 - y^2 - z^2$ параболоиднинг Oyz текислик ажратган қисмининг ташқи томони.

29. Ушбу

$$\iint_{(S)} z dx dy + y dx dz + z dy dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

кубнинг ташқи сирти.

30. Ушбу

$$\iint_{(S)} (x^2 + y^2 + 3z^2) dx dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $z=0$, $z=2$ текисликлар орасидаги қисмининг ташқи томони.

31. Ушбу

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z = 4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$ тенглама билан берилган сиртнинг $z=0$ текислик ажратган қисмининг ички (пастки) томони.

32. Ушбу

$$\iint_{(S)} (2x^2 + y^4 + z^4) dydz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x = yz$ ($y \geq 0, z \geq 0$) сиртнинг $(y^2 + z^2)^2 = 2b^2 yz$ цилиндр ажратган қисмининг ташқи томони.

33. Ушбу

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y = b^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$

сиртнинг $y = 0$ текислик ажратган қисмининг ички қисми.

34. Ушбу

$$\iint_{(S)} yz dy dz + xz dz dx + xy dx dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт тетраэдр сиртининг $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$ текисликлар билан чегараланган қисмининг ташқи томони.

3-§. СТОКС ҲАМДА ОСТРОГРАДСКИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

1. Стокс формуласи. Стокс формуласи сирт бўйича олинган интеграл билан шу сиртнинг чегараси бўйича олинган эгри чизикли интегрални боғловчи формуладир.

Ҳақиқатда икки томонли силлиқ (S) сирт берилган бўлиб, унинг чегараси $\partial(S)$ эса бўлакли — силлиқ эгри чизикдан иборат бўлсин. (S) сиртда $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялар аниқланган. Бу функциялар (S) да узлуксиз ҳамда барча аргументлари бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларига эга. У ҳолда ушбу

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(S)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy + \\ + \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right] dy dz + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right] dz dx \end{aligned} \quad (17)$$

формула ўринли бўлади. Одатда (17) Стокс формуласи дейилади.

Хусусан, (S) сирт сифатида Oxy текисликдаги (D) соҳа олинса, унда $z=0$ бўлиб, (17) формуладан

$$\oint_{\partial(D)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy.$$

Грин формуласи келиб чиқади.

Биринчи ва иккинчи тур сирт интегралларини ўзаро боғловчи формуладан фойдаланиб, Стокс формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial(S)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ & = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] ds. \end{aligned} \quad (18)$$

15-мисол. Ушбу

$$\oint_K e^x dx + z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда K эгри чизик $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ сиртнинг $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$ текисликлар билан кесишган чизикларидан ташкил топган ёпиқ чизикдир. Бу интегрални ҳисоблашда Стокс формуласидан фойдаланамиз. Берилган интегралда

$$P = e^x, \quad Q = z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}, \quad R = yz^3$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3xz\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = z^3$$

эканини топамиз.

(17) формулага кура

$$\oint_K e^x dx + z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{(S)} (3xz\sqrt{x^2+y^2} - 0) dx dy + (z^3 - (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}) \times \\
&\quad \times dy dz + (0 - 0) dz dx = \iint_{(S)} 3xz\sqrt{x^2+y^2} dx dy + \\
&\quad + \left[(\sqrt{x^2+y^2})^3 - (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right] dy dz = 3 \iint_{(S)} xz\sqrt{x^2+y^2} dx dy
\end{aligned}$$

бўлади, бунда (S) сирт K чизик билан чегараланган конус сирт ($z = \sqrt{x^2+y^2}$).

(S) сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

бўлади.

Сирт интегрални (S) сиртнинг пастки томони бўйича олинганлиги сабабли

$$3 \iint_{(S)} xz\sqrt{x^2+y^2} dx dy = -3 \iint_{(D)} x\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

бўлади. Натижада

$$\begin{aligned}
\oint_K e^x dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz &= -3 \iint_{(D)} x(x^2+y^2) dx dy = \\
&= -3 \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^3 + xy^2) dx \right) dy = -14.
\end{aligned}$$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\oint_K (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда K ёпиқ чизик

$$x = a \sin^2 t, \quad y = 2a \sin t \cos t, \quad z = a \cos^2 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

эллипсдан иборат.

Бу интегрални Стокс формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

Равшанки,

$$P = y + z, \quad Q = z + x, \quad R = x + y$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 1$$

бўлади. (18) формулага биноан

$$\oint_K (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = \\ = \iint_{(S)} [(1-1)\cos\alpha + (1-1)\cos\beta + (1-1)\cos\gamma] ds = 0$$

бўлади.

17-мисол. Ушбу

$$\oint_K ydx + zdy + xdz$$

интегрални ҳисобланг, бунда K ёпик чизик

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

айланадан иборат бўлиб, йўналиши эса соат стрелкасига қаршидир.

Бу интегрални ҳисоблашда ҳам Стокс формуласидан фойдаланамиз. Бу ҳолда

$$P = y, \quad Q = z, \quad R = x$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

бўлади.

(18) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_K (ydx + zdy + xdz) = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds = \\ = - \iint_{(S)} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ds.$$

Бу ерда (S) сирт $x + y + z = 0$ текисликнинг берилган айлана билан чегараланган қисми.

Энди $x + y + z = 0$ текислик тенгламасини нормал ҳолга келтириб,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

бўлишини аниқлаймиз. Натижада

$$\oint_K ydx + zdy + xdz = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{(S)} ds$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки,

$$\iint_{(S)} ds = \pi a^2.$$

Демак,

$$\oint_K ydx + zdy + xdz = -\frac{3}{\sqrt{3}} \pi a^2 = -\sqrt{3} \cdot \pi a^2.$$

2. Остроградский формуласи. Фазода, пастдан $z = \varphi_1(x, y)$ тенглама билан аниқланган силлик (S_1) сирт билан, юқоридан $z = \varphi_2(x, y)$ ($\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$) тенглама ёрдамида аниқланган силлик (S_2) сирт билан, ён томонларидан эса ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндр (S_3) сирт билан чегараланган (V) сохани (жисми) қарайлик. (V) да $R(x, y, z)$ функция аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (V) да узлуксиз

$$\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

хусусий хосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy \quad (19)$$

бўлади, бунда (S) сирт (V) жисми ўраб турувчи сирт.

Худди шунга ўхшаш (V) жисм ҳамда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ функциялар тегишли шартларни қаноатлантирганда

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz &= \\ &= \iint_{(S)} P(x, y, z) dx dz, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \iint_{(S)} Q(x, y, z) dx dz \quad (21)$$

формулалар ўринли бўлади.

Айтайлик, (V) жисм юқоридаги (19), (20), (21) формулаларни ўринли бўлишида қўйилган шартни бажарган бўлиб, унда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар

(V) да узлуксиз ва (V) да узлуксиз $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ хусу- сий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{(S)} P(x,y,z) dy dz + Q(x,y,z) dz dx + R(x,y,z) dx dy \quad (22) \end{aligned}$$

бўлади. Буни Остроградский формуласи дейилади.

Биринчи ва иккинчи тур сирт интегралларини ўзаро боғловчи формуладан фойдаланиб, Остроградский формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{(S)} [P(x,y,z) \cos \alpha + Q(x,y,z) \cos \beta + R(x,y,z) \cos \gamma] ds \quad (23) \end{aligned}$$

18-мисол. Ушбу

$$\iiint_{(S)} 4x^3 dy dz + 4y^3 dx dz - 6z^4 dx dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндринг $z=0, z=h$ текисликлар орасидаги қисмининг тўлиқ сиртидан иборат (28-чизма).

Берилган интегрални ҳисоблашда Остроградский формуласидан фойдаланамиз. Бу интеграл учун

$$P = 4x^3, \quad Q = 4y^3, \quad R = -6z^4$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 12y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -24z^3$$

эканлигини топамиз.

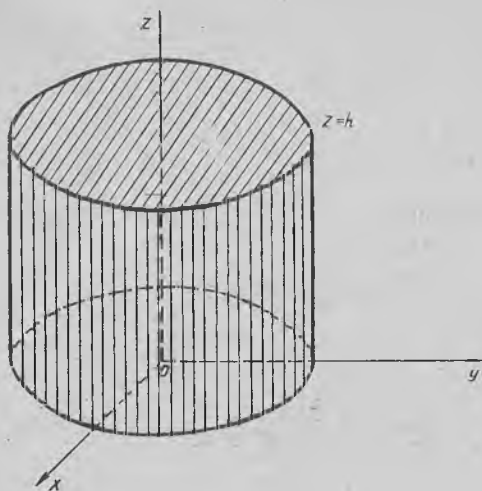
(22) формулага кўра

$$\begin{aligned} & \iiint_{(S)} 4x^3 dy dz + 4y^3 dz dx - 6z^4 dx dy = \\ & = 12 \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 - 2z^3) dx dy dz \end{aligned}$$

бўлади, бунда

$$(V) = \{(x,y,z) \in R^3: x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

Кейинги тенгликдаги уч қаррали интегрални ҳисоблай- миз.



28- чизма.

Равшанки,

$$\begin{aligned}
 & 12 \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 - 2z^3) dx dy dz = \\
 & = 12 \iint_{(D)} \left[\int_0^h (x^2 + y^2 - 2z^3) dz \right] dx dy = \\
 & = 12 \iint_{(D)} \left[(x^2 + y^2)h - \frac{h^4}{2} \right] dx dy,
 \end{aligned}$$

бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Агар ўзгарувчиларни

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

деб алмаштирсак, унда

$$\begin{aligned}
 & 12 \iint_{(D)} \left[(x^2 + y^2)h - \frac{h^4}{2} \right] dx dy = \\
 & = 12 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \left(\rho^3 - \frac{h^3}{2} \rho \right) d\rho \right] d\varphi = 6\pi a^2 h (a^2 - h^3)
 \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\iint_{(S)} 4x^3 dy dz + 4y^3 dz dx - 6z^4 dx dy = 6\pi a^2 h (a^2 - h^3).$$

19-мисол. Ушбу

$$\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x, y, z) \in R^3: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$$

кубнинг ташқи томони. Бу интегрални Остроградский формуласи билан таққослаб

$$P = x^2, Q = y^2, R = z^2$$

бўлишини топамиз.

Равшанки,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

Остроградский формуласига кўра:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy &= \\ &= 2 \iiint_{(V)} (x + y + z) dxdydz. \end{aligned}$$

Энди $(V) = \{(x, y, z) \in R^3: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$ эканини эътиборга олиб, уч қаррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} 2 \iiint_{(V)} (x + y + z) dxdydz &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = \\ &= 2 \left[\int_0^a dx \int_0^a \left[(x + y)a + \frac{a^2}{2} \right] dy \right] = \\ &= 2 \left[\int_0^a \left[a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right] dx \right] = 3a^4. \end{aligned}$$

Демак,

$$\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 3a^4.$$

20-мисол. Фазодаги (V) жисмнинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3} \iiint_{(S)} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$$

бўлишини исботланг, бунда (S) сирт (V) жисмни ўраб турган сирт, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар (S) сирт ташки нормалининг йўналтирувчи косинуслари.

Остроградский формуласининг (23) кўринишидан фойдаланиб топамиз:

$$\iint_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz = 3 \iiint_{(V)} dx dy dz.$$

Маълумки,

$$\iiint_{(V)} dx dy dz = V$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб, юқоридаги тенгликдан

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$$

бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

Стокс формуласидан фойдаланиб, қуйидаги эгри чизиқли интегралларни сирт интеграллари орқали ифодаланг:

35. $\oint_K y dx + z dy + x dz.$

36. $\oint_K x^2 y^3 dx + dy + dz.$

37. $\oint_K (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz.$

38. $\oint_K (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz.$

39. Ушбу $P = x^2 y^3$, $Q = 1$, $R = z$ функциялар учун Стокс формуласи (17) нинг ўринли бўлишини текширинг, бунда K эгри чизиқ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ айланадан иборат бўлиб, (S) сирт эса $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$ ярим сферанинг устки томони.

40. Ушбу $P=y$, $Q=z$, $R=x$ функциялар учун Стокс формуласи (17) нинг ўринли бўлишини текширинг, бунда k эгри чизик

$$x = a \cos^2 t, \quad y = a \sqrt{2} \sin t \cos t, \quad z = a \sin^2 t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

айлана бўлиб, (S) сирт эса шу айлана билан чегараланган доирадир.

Стокс формуласидан фойдаланиб, қуйидаги эгри чизикли интегралларни ҳисобланг:

41. $\oint_K (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, бунда K эгри

чизик ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ айланадан иборат.

42. $\oint_K (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, бунда K эгри

чизик $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ ($a > 0$, $c > 0$) эллипсдан иборат.

43. $\oint_K xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, бунда K ушбу $x =$

$= a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) эгри чизикдан иборат.

Остроградский формуласидан фойдаланиб, қуйидаги сирт интегралларини уч қаррали интеграл орқали ифодаланг (S сирт (V) жисми ўраб турувчи сирт).

44. $\iiint_{(S)} xydx dy + yzdy dz + zxdz dx.$

45. $\iiint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$

46. $\iint_{(S)} \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds.$

Остроградский формуласидан фойдаланиб, қуйидаги сирт интегралларни ҳисобланг:

47. $\iint_{(S)} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, бунда (S) сирт

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ташқи томони.

48. $\iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, бунда (S) сирт

$\{(x,y,z) \in R^3: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$ куб сиртининг ички томони.

49. $\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, бунда (S) сирт ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферанинг ташқи томони.

50. $\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, бунда (S) сирт ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ ($0 \leq z \leq b$) конус тўла сиртининг ташқи томони.

XX боб

ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ

1-§. ФУРЬЕ ҚАТОРИ ТУШУНЧАСИ

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу ораликда интегралланувчи бўлсин. Равшанки,

$f(x) \cdot \cos nx$, $f(x) \cdot \sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) функциялар ҳам $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

1-таъриф. Ушбу

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

функционал қатор $[-\pi, \pi]$ да берилган $f(x)$ функциянинг Фурье қатори дейилади. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ сонлар $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари дейилади.

(1) қатор $f(x)$ функциянинг Фурье қатори бўлиши қуйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Агар $f(x)$ жуфт функция бўлса, у ҳолда унинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$

бўлади.

Агар $f(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда унинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-0}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция $[-l, l]$ да ($l > 0$) берилган ва шу ораликда интегралланувчи бўлсин. Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

2-таъриф. Ушбу

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

функционал қатор $[-l, l]$ да берилган $f(x)$ функциянинг Фурье қатори дейилади. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ сонлар Фурье коэффициентлари дейилади.

(2) қатор $f(x)$ функциянинг Фурье қатори бўлиши қуйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = e^{\alpha x} \quad (-\pi \leq x \leq \pi, \alpha = 0)$$

функциянинг Фурье қаторини тузинг.

Юқорида келтирилган (1) формуладан фойдаланиб, бу функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha\pi} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{2}{\alpha\pi} \operatorname{sh}\alpha\pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha \cdot \cos nx + n \sin nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= (-1)^n \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \operatorname{sh}\alpha\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha \sin nx - n \cos nx}{\alpha^2 + n^2} \cdot e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \operatorname{sh}\alpha\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Унда берилган функциянинг Фурье қатори

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sh}\alpha\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \cdot (\alpha \cos nx - n \sin nx) \right] \end{aligned}$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

жуфт функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

Юқоридаги (1) формулалардан фойдаланиб, берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \\ &- \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{4}{n\pi} \left[\left(-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \right. \\ &\left. + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Демак, $f(x) = x^2$ функциянинг Фурье қатори

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = x$$

функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

(1) формулалардан фойдаланиб, берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin n x dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \\ &+ \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos n x dx = -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Демак, $f(x) = x$ функциянинг Фурье қатори

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$f(x) = e^x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

(3) формулалардан фойдаланиб, берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз. Равшанки, бу ҳолда $l=1$.

$$a_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1},$$

$$a_n = \int_{-1}^1 e^x \cos n\pi x dx = \frac{n\pi \sin n\pi x + \cos n\pi x}{1+n^2\pi^2} \cdot e^x \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{1+n^2\pi^2} \cdot (e \cdot \cos n\pi - e^{-1} \cos n\pi) = (-1)^n \cdot \frac{e - e^{-1}}{1+n^2\pi^2}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \int_{-1}^1 e^x \sin n\pi x dx = \frac{\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x}{1+n^2\pi^2} e^x \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{1+n^2\pi^2} (e n\pi \cos n\pi + e^{-1} n\pi \cos n\pi) =$$

$$= \frac{n\pi \cos n\pi}{1+n^2\pi^2} (e^{-1} - e) =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{e - e^{-1}}{1+n^2\pi^2} n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Демак, $f(x) = e^x$ функциянинг $(-1 \leq x \leq 1)$ Фурье қатори

$$e^x \approx \frac{e - e^{-1}}{2} + (e - e^{-1}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2} n\pi \sin n\pi x \right]$$

бўлади.

5- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } -\pi \leq x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{\pi} x^2, & \text{агар } 0 < x \leq \pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

Бу функциянинг Фурье қаторини ёзиш учун, аввало унинг Фурье коэффициентларини (1) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} dx = \frac{5}{6}\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \sin nx dx \right] = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3}.$$

Қаралаётган функциянинг Фурье қатори куйидагича бўлади:

$$f(x) \sim \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3 \cdot (-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3} \cdot \sin nx \right]$$

6-мисол. $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу ораликда интегралланувчи $f(x)$ функция Фурье қатори

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

нинг қисмий йиғиндиси

$$T_n(f; x) = T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

учун

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} dt$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатинг.

Берилган функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси

$$T_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ни олиб, ундаги a_0 , a_k , b_k ($k=1, 2, \dots$) ларнинг ўрнига уларнинг ифодалари

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

ни қўйиб топамиз:

$$\begin{aligned} T_n(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cdot \cos kx + \\ &+ \sin kt \cdot \sin kx) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt. \end{aligned}$$

Равшанки,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ky &= 2 \sin \frac{y}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ky \right] \cdot \frac{2}{2 \sin \frac{y}{2}} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \left[\sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) y \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) y. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликда $y = t - x$ дейилса, у холда ушбу

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) = \frac{\sin(2n+1) \cdot \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}}$$

муносабатга эга бўламиз. Натижада исботланиши лозим бўлган

$$T_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin(2n+1) \cdot \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt$$

тенгликка келамиз.

Одатда (4) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функциянинг Дирихле интегралли дейилади.

2-§. ФУРЬЕ ҚАТОРИНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

Фурье қаторининг яқинлашувчилигини ифодалайдиган теоремаларни келтиришдан аввал функциянинг бўлакли-дифференциалланувчи тушунчасини эслатиб ўтамыз.

$[a, b]$ ораликни

$$[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n] \\ (a_0 = a, a_n = b)$$

бўладиган шундай

$$\begin{array}{c} [a_0, a_1], \\ [a_1, a_2], \\ \dots \dots \dots \\ [a_{n-1}, a_n] \end{array}$$

бўлақларга ажратиш мумкин бўлсаки, ҳар бир (a_k, a_{k+1}) да $(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ $f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлса ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(a_k+0)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) ва чап $f'(a_k-0)$ ($k=1, 2, \dots, n$) ҳосилаларга эга бўлса, у холда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи дейилади.

1-теорема. 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ ораликда бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, у холда бу функциянинг Фурье қатори

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлиб, $x \in (-\pi, \pi)$ да $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ бўлади.

$x = \pm \pi$ бўлганда $f(x)$ функция Фурье қаторининг йиғиндиси

$$\frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$$

га тенг бўлади.

2-теорема. Агар 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз, бўлак-дифференциалланувчи ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, бу функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлиб,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

бўлади.

Бу ҳолда $f(x)$ функция Фурье қаторига ёйилади дейилади.

7-мисол. $[-\pi, \pi]$ да берилган ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } -\pi \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } 0 \leq x < \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

2π даврли функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Берилган функция юқорида келтирилган 1-теореманинг шартларини қаноатлантиради. Бинобарин, бу функция Фурье қаторига ёйилади. Бу ёйилмани топиш учун $f(x)$ функциянинг Фурье қаторини тузамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} (-1) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nxdx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-\cos nx) dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$-b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nxdx +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-\sin nx) dx = \frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1], \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Демак,

$$a_n = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_{2n} = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$b_{2n-1} = -\frac{4}{(2n-1) \cdot \pi}.$$

Барча $x \in (-\pi, \pi)$, $x \neq 0$ нукталарда

$$f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

бўлади.

$x=0$ нуктада берилган функциянинг Фурье қатори йиғиндиси

$$\frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

га тенг.

$x = -\pi$, $x = \pi$ нукталарда қатор йиғиндиси мос равишда

$$\frac{f(-\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = 0,$$

$$\frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = 0$$

бўлади.

8- м и с о л. Ушбу

$$f(x) = \cos ax \quad (0 < a < 1)$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Бу функциянинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = 2 \cdot \frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cdot \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(a+n)x +$$

$$+ \cos(a-n)x] dx = (-1)^n \cdot \frac{2a}{a^2 - \pi^2} \cdot \frac{\sin a\pi}{\pi}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n=0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори

$$\cos ax \sim \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos nx$$

бўлади. Қаралаётган функция 2- теореманинг шартларини бажаради. Шунинг учун $f(x) = \cos ax$ функция Фурье қаторига ёйилади:

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos nx$$

Агар кейинги тенгликда $x=0$ дейилса, унда

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \right]$$

бўлиб, ушбу

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Мисол ва масалалар

$(-\pi, \pi)$ да берилган қуйидаги функцияларнинг Фурье қаторларини тузинг:

1. $f(x) = 2x + 3$.
2. $f(x) = \sin x + \sin 2x$.
3. $f(x) = |x|$.
4. $f(x) = x + x^2$.
5. $f(x) = |\cos x|$.

$(-1, 1)$ ораликда берилган қуйидаги функцияларнинг Фурье қаторларини ёзинг:

6. $f(x) = x^2$.
7. $f(x) = |2x|$.
8. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } -1 \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$
9. $f(x) = x^4$.
10. $f(x) = e^{2x}$.

Куйидаги функцияларни кўрсатилган ораликларда Фурье қаторларига ёйинг:

$$11. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

$$12. f(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$13. f(x) = \sin ax, \quad -\pi < x < \pi, \quad a \notin \mathbb{Z}.$$

$$14. f(x) = \operatorname{sh} ax, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$15. f(x) = x \sin x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Куйидаги функцияларни Фурье қаторларига ёйинг:

$$16. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$$

$$17. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -\pi < x < 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 0 \leq x < \pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } -\pi \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ \pi, & \text{агар } 0 < x \leq \pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$19. f(x) = |\sin x|$$

$$20. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -2 < x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } 0 < x < 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x, & \text{агар } -\pi \leq x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{4}(\pi - x), & \text{агар } 0 < x \leq \pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right), & \text{агар } -\pi \leq x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right), & \text{агар } 0 \leq x \leq \pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Функцияларнинг Фурье қаторларига ёйилмаларидан фойдаланиб, куйидаги тенгликларнинг уринли бўлишини кўрсатинг.

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(Кўрсатма, $f(x) = x^2$ функцияни $[-\pi, \pi]$ да Фурье қаторига ёйинг, сўнг $x=0$ деб олинг).

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} \right).$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - (-1)^n}{n^2} = \frac{7}{12} \pi^2.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}.$$

ЖАВОБЛАР

XII б о б

Кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити ва узлуксизлиги

10. $(1, -\frac{1}{6})$. 11. $(27, -\frac{15}{2})$. 12. (1, 1). 13. (3; 4). 14. (11, 1). 15. (1, 1). 16. (1, 1). 17. $(0, \frac{1}{2})$. 18. (0, 0). 19. (0, 0). 20. (1, 2). 21. $R^2 \setminus \{(x, y): x + y = 0\}$. 22. $y = -x$ чизик нуқталари ва бу чизикдан юқорида жойлашган барча нуқталар тўплами. 23. Текисликнинг биринчи чоракдаги барча нуқталари тўплами. 24. Текисликнинг иккинчи чоракдаги нуқталари тўплами. 25. $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$. 26. $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$. 27. $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$, агар $y \geq 0$ бўлса $(2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi$, агар $y < 0$ бўлса ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 28. $x \geq 0, y \geq 0, x \geq \sqrt{y}$. 29. $\{(x, y): x + y > 0\}$. 30. Бутун текислик (Oxy). 31. $y = x$. 32. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ гипербола тармоқлари орасидаги текислик қисми. 33. $R \setminus \{(x, y): x = 1, y = 0\}$. 35. $\{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. 36. $\{(x, y): x \leq x^2 + y^2 < 2x\}$. 37. $\{(x, y): 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq \pi(2k+1)\}$, $k \in Z$. 38. $\{(x, y): x + y < 0\}$. 39. $\{(x, y): x^2 + y^2 = 9\}$. 40. $y^2 = x, y^2 = -x, y = 2$ чизиклар билан чегараланган эгри чизиқли учбурчак. ($O(0, 0)$ нуқта кирмайди). 41. $\{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. 43. $\frac{1}{2a}$. 44. 3. 45. 0. 46. 0. 47. e^a . 48. 0. 49. 0. 50. 1. 51. 0. 52. 1. 53. e . 54. 0. 55. 1. 56. 1. 57. 0. 58. 0. 59. 0. 60. 1. 61. 1. 62. $\ln 2$. 73. 1, -1. 74. 1, 1. 75. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. 76. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 77. 1, -1. 78. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$. 79. 0, 1. 80. $\frac{1}{2}$, 1. 81. 0, 1. 82. 1, 1. 83. 0, 1. 84. 1, ∞ . 85. 0, 1. 86. 0, 0. 87. (1, 1) да узилади. 88. $y = 2x$ да узилади. 89. узлуксиз. 90. $y = -x$ да узилади. 91. $x^2 + y^2 = 4$ да узилади. 92. $y^2 = -x$ да узилади. 93. $y = x$ да узилади. 94. $x^2 + y^2 = 5$ да узилади. 95. (0, 0) да узилади. 96. (0, 0) да узилади. 97. $y = -x$ да узилади. 98. $x = 0, y = 0$ координата ўқларида узилади. 99. $x = n\pi, n \in Z, y = m\pi, m \in Z$ да узилади. 100. $x^2 + y^2 = 9$ да узилади.

$$\begin{aligned}
& 1. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}, \quad 5. dz = \left(\frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dx \\
& + \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2y\sqrt{y}} \right) dy, \quad d^2z = -\frac{y}{4x\sqrt{x}} dx^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{y\sqrt{y}} \right) dx dy + \\
& + \frac{3x}{4y^2\sqrt{y}} dy^2, \quad 6. \frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x+y) + x\cos(x+y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(x+y), \quad 7. \frac{\partial z}{\partial x} = \\
& = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad 9. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \\
& = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}, \quad 12. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{\sin y}{x}} \cos \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\frac{\sin y}{x}} \cos \frac{y}{x} \\
& 13. dz = -\frac{zy}{x^2 \sin\left(\frac{2y}{x}\right)} dx + \frac{2}{x \sin\left(\frac{2y}{x}\right)} dy, \quad 14. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \\
& \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad 16. dz = \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}(1+xy)}, \quad d^2z = -\frac{1}{4(1+xy)\sqrt{xy}} \\
& \times \left[\frac{3xy+1}{xy(1+xy)} (y^2 dx^2 + x^2 dy^2) - \frac{3xy-1}{1+xy} dx dy \right], \quad 17. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}, \\
& \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2-y^2)^2 \operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}, \\
& \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, \quad 18. dz = \left[\left(\frac{y}{x} \right)^x \ln \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x} \right)^x \right] dx + \left(\frac{y}{x} \right)^{x-1} dy d^2z = \\
& = \left[\left(\frac{y}{x} \right)^x \left(\ln \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{y}{x} \right)^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] dx^2 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)^{x-1} \left(\ln \frac{y}{x} - \right. \\
& \left. - \frac{x-1}{x} \right) dx dy + \frac{x-1}{x} \left(\frac{y}{x} \right)^{x-2} dy^2, \quad 20. f'_x(1, 0) = 0, \quad f'_y(1, 0) = 1, \quad f''_{xy}(1, \\
& 0) = 1, \quad df(1, 0) = -dy, \quad 21. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg} \frac{x+1}{\sqrt{y}}, \\
& \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+1}{2y\sqrt{y}} \operatorname{ctg} \frac{x+1}{\sqrt{y}}, \quad 22. dz = e^{xy} \left[\left(\frac{1}{y} + x \right) dx + \frac{x}{y} \left(x - \frac{1}{y} \right) dy \right], \\
& d^2z = e^{xy} \left[(1+xy) dx^2 + 2 \left(\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y^2} \right) dx dy + \left(x^2 - \frac{2x}{y} + \frac{2}{y^2} \right) \frac{x}{y} dy^2 \right] \\
& 24. du = \frac{x\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}} (ydx - xdy), \\
& d^2u = \frac{\sqrt{2} \{ y(x^1 + 2x^3 - y^4) dx^2 + x(x^4 - 2y^3 - y^4) dx dy - 2x^2 y^2 dy^2 \}}{(x^2+y^2)^2 (x^2-y^2)^{3/2}} \\
& 38. du = af'_1 dx + bf'_2 dy, \quad d^2u = a^2 f''_{11} dx^2 + 2abf''_{12} dx dy + b^2 f''_{22} dy^2.
\end{aligned}$$

$$40. \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin v + \frac{\partial z}{\partial y} 2u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} u \cos v, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2 v +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} 4u \sin v + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} 4u^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} u \sin v \cos v + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} u^2 \cos v +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos v, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial z}{\partial x^2} u^2 \cos^2 v - \frac{\partial z}{\partial x} u \sin v. \quad 41. \frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}.$$

$$42. \frac{dz}{dx} = (\sin x)^{\cos x} (\cos x \operatorname{ctg} x - \sin \ln \sin x). \quad 43. dz = \left(\frac{\sin uv}{v} - u \sin \frac{u}{v} + \right.$$

$$\left. + u \cos uv + v \cos \frac{u}{v} \right) du + \left(\frac{u^2}{v} \sin \frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v^2} \sin uv + \frac{u^2}{v} \cos uv + \right.$$

$$\left. + u \cos \frac{u}{v} \right) dv \quad 44. \frac{du}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg} \frac{x}{\sqrt{y}} \left(6 - \frac{x}{2y^2} \right). \quad 45. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \quad 46. dz = 0. \quad 48. -\frac{9\sqrt{3}}{2}. \quad 49. \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$51. du = x^{m-1} y^{n-1} (my dx + nx dy), \quad d^2 u = x^{m-2} y^{n-2} [m(m-1)y^2 dx^2 +$$

$$+ 2mnxy dx dy + n(n-1)x^2 dy^2]. \quad 52. du = \frac{y dx - x dy}{y^2},$$

$$d^2 u = -\frac{2}{y^3} dy (y dx - x dy). \quad 54. du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad d^2 u = \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

$$56. du = e^{xy} (y dx + x dy), \quad d^2 u = e^{xy} [y^2 dx^2 + 2(1+xy) dx dy + x^2 dy^2]. \quad 59. dz =$$

$$= 6(x^2 + y^2)(x dx + y dy), \quad d^2 z = 6(x^2 + y^2)((5x^2 + y^2) dx^2 + 4xy dx dy + (x^2 +$$

$$+ 5y^2) dy^2]. \quad 63. dz = 0. \quad 64. 0,97. \quad 65. 1, 32. \quad 67. 1,05. \quad 70. \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} (\sqrt{3} - 0,5).$$

$$72. dz = \left(y + \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(x - \frac{1}{x} \right) dy. \quad d^2 z = \frac{2y}{x^2} dx^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx dy.$$

$$74. dz = dx - 3 \cos y dy, \quad d^2 z = 3 \sin y dy^2. \quad 78. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{(2xy + y^2)^{3/2}}.$$

$$80. f''_{xx}(0,0) = m(m-1). \quad 87. \frac{2 \cdot 9!(4x+6y)}{(x+y)^{11}}. \quad 88. e^{x+y} [x^2 + y^2 + 2(mx +$$

$$+ ny) + m(m-1) + n(n-1)]. \quad 89. \sin \frac{n\pi}{2}. \quad 96. d^2 z = a^2 f''_{uu}(u, v) dx^2 +$$

$$+ 2ab f''_{uv}(u, v) dx dy + b^2 f''_{vv}(u, v) dy^2. \quad 97. du = f'(dx + dy) + f'(dx - dy),$$

$$d^2 u = f''_{11} (dx + dy)^2 + 2 f''_{12} (dx^2 - dy^2) + f''_{22} (dx - dy)^2.$$

$$99. d^2 z = (ye^x f'_v + e^{2y} f''_{uv} + 2ye^{x+y} f''_{vv} + y^2 e^{2x} f''_{vv}) dz^2 + 2(e^y f'_u + e^x f'_v +$$

$$+ xe^{2y} f''_{uv} + e^{x+y}(1+xy) f''_{vv} + ye^{2x} f''_{vv}) dx dy + (xe^y - f'_u + x^2 e^{2y} f''_{uv} +$$

$$+ 2xe^{x+y} f''_{uv} + e^{2x} f''_{vv}) dy^2. \quad 100. dz = \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \left(y \ln \frac{e^x}{y} dx + x \ln \frac{x}{e^y} dy \right).$$

$$d^2 z = \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \left[\left(y^2 \ln^2 \frac{e^x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx^2 + 2 \left(xy \ln \frac{e^x}{y} \cdot \ln \frac{x}{e^y} + \ln \frac{x}{y} \right) dx dy + \right.$$

- $+ \left(x^2 \ln^2 \frac{x}{ey} - \frac{x}{y} \right) dy^2$. 102. $1 - \frac{1}{2}(\Delta x^2 + \Delta y^2)$. 103. $y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}$.
 104. $1 - \frac{x^2 + y^2}{2!} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4!}$. 105. $1 + (y-1) + (x-1)(y-1)$.
 106. $f_{\min} = -21$. 107. Экстремум йўқ. 108. $z_{\min} = 0$ (0, 1) да.
 109. $z_{\min} = -1$ (1, 1) да. 110. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ да тах. 111. $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{3a}{2}\right)$,
 $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{3a}{2}\right)$ ларда. 112. (-1, 1) да тах. 113. $z_{\min} = 30$ (5, 2) да.
 115. $z_{\min} = -\frac{2}{e}$. 117. $z_{\max} = 8e^{-2}$ (-1, -2) да; (0, 0) да экстремум
 йўқ. 118. $z_{\min} = -\frac{1}{2e}$, $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}$ ларда. 121. $z_{\max} = 1$. 123.
 $z = -2$, $z = -5$. 124. $z = 17$ (0, 1) ва (1, 1) да $z = -\frac{17}{4}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ да.
 127. тах $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ да. 128. $z = 128$ (4, 4) да. $z = -4$ (0,
 0) да. 133. Йўқ. 134. Йўқ. 135. Аниқлайди. 141. $y'_x = \frac{e^{2y} - y}{\ln x - 2xe^{2y}}$.
 142. $y'_x = \frac{2b - 2axe^{-y}}{e^y - ax^2e^{-y}}$. 143. $y'_x = \frac{x+y}{x-y}$. 144. $y'_x = \frac{y^2 - 2x^2 \ln y}{x^2 - 2y^2 \ln x} \cdot \frac{y}{x}$.
 145. $y'_x = -\frac{y}{x}$. 146. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$.

XIV б о б

Функционал кетма-кетликлар ва қаторлар

1. $f(x) = 0$. 2. $f(x) = 0$. 3. $f(x) = x^3$. 4. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 6. $f(x) = 0$. 8. $f(x) = 0$.
 9. $f(x) = e^x$. 10. $f(x) = \ln x$. 13. $f(x) = \sqrt{x}$. 14. $f(x) = 0$. 15. $f(x) = e^{2x}$.
 16. $f(x) = \sqrt{x}$. 17. $f(x) = x$. 18. $f(x) = x$, агар $x < 0$ бўлса; $f(x) = \frac{1}{2}$,
 агар $x = 0$ бўлса; $f(x) = 1$, агар $x > 0$ бўлса. 19. $f(x) = 1$, агар
 $0 \leq x \leq 1$ бўлса; $f(x) = 2$, агар $1 < x < 2$ бўлса; $f(x) = \frac{x^2}{2}$, агар
 $x \geq 2$ бўлса. 31. Нотекис яқинлашади. 32. Нотекис яқинлашади.
 33. Нотекис яқинлашади. 35. Текис яқинлашади. 36. Нотекис яқинлашади.
 37. Нотекис яқинлашади. 38. Текис яқинлашади. 39. Текис яқинлашади.
 40. Текис яқинлашади. 46. $X = (-\infty, +\infty)$. 47. $X = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
 48. $X = (-\infty, -3] \cup (-1, +\infty)$. 49. $X = (-\infty, +\infty)$ $\{x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. 50. $X = (-1, 1)$. 51. $X = [0, +\infty)$.

52. $X = (-\infty, 0)$. 53. $X = \left[\frac{1}{e}, e \right)$. 54. $X = \{x \in R: 2 < |x| < \sqrt{6}\}$. 55. $X = (-\infty, +\infty) \setminus \{x = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. 56. $X = (-\infty, +\infty)$. 57. $X = (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$. 58. $X = (-3, 3]$. 59. $X = \{x \in R: |x| > \sqrt{e}\}$. 60. $X = (e, +\infty)$. 61. $X = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. 62. $X = \{x \in R: 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. 63. $X = (-1, 1)$. 64. $X = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. 65. $X = (-3, 3)$. 96. Нотекис яқинлашади. 97. Текис яқинлашади. 98. Текис яқинлашади. 99. Текис яқинлашади. 100. Нотекис яқинлашади. 101. Текис яқинлашади. 102. Текис яқинлашади. 103. Нотекис яқинлашади. 104. Текис яқинлашади. 105. Текис яқинлашади. 109. Узлуксиз. 110. Узлуксиз. 111. Узлуксиз. 112. $x=0$ да узилади. 113. $x=0$ да узилади. 114. $x=1$ да узилади. 115. Узлуксиз. 116. Мумкин. 117. Мумкин эмас. 118. Мумкин эмас. 119. Мумкин. 120. Мумкин. 121. Мумкин эмас. 122. Мумкин эмас. 123. Мумкин. 124. 2. 125. $\frac{2}{3}$. 126. 1. 127. -1. 128. 1. 129. $\frac{\pi^2}{6}$. 133. $r=1, (-1, 1), [-1, 1)$.
134. $r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 135. $x=0$ нуктадагина яқинлашади.
136. $r = \frac{1}{3}, \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 137. $r=4, (-4, 4)$. 138. $r=1, (-1, 1), (-1, 1]$. 139. $r=1, (-1, 1), [-1, 1)$. 140. $r = \frac{5}{2}, \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.
141. $r=1, (-1, 1), [-1, 1]$. 142. $r=4, (3, 5), [3, 5]$. 143. $r=3, (-2, 4), [-2, 4)$. 144. $r=e, (-e, e)$. 145. $r=1, (-4, -2), [-4, -2]$. 146. $r=1, (-1, 1)$. 147. $r=3, (-3, 3)$. 148. $r=1, (-1, 1), [-1, 1]$. 149. $r=1, (-1, 1), [-1, 1]$. 150. $r=1, [-1, 1]$. 151. $r=1, (0, 2)$. 152. $x=0$ нуктадагина яқинлашади. 153. $X = [0, 1; 10]$. 154. $X = (0, +\infty)$. 155. $X = (-1, +\infty)$. 156. $X = \{x: x \in R, \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots\}$. 157. $x = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 158. $S(x) = -\ln(1-x)$.
159. $S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$. 160. $S(x) = \operatorname{ch} x, |x| < +\infty$.
161. $S(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), |x| < 1$. 162. $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1$.
163. $S(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, |x| < 1$. 164. $S(x) = \frac{2}{(1-x)^2}, |x| < 1$.
165. $S(x) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right), |x| < 1$. 166. $\frac{\pi \sqrt{3}}{6}$. 167. 3.
175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, (-\infty < x < +\infty)$. 176. $x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+3} \times$

$$\times \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right). \quad 177. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{3^{2n+1}(2n+1)!}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$178. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} (2^{n-1} + (-1)^n) \cdot x^n \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$179. \quad \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (-1 < x < 1).$$

$$180. \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2n!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$181. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot 2^{2(n-1)}}{(2n)!} (1 + 3^{2n-1}) \cdot x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$182. \quad \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4^{-n} - 3^{-n}}{n} \cdot x^n \quad (-3 < x < 3).$$

$$183. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (-1 < x < 1). \quad 184. \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

$$185. \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}} \right) x^n \quad (-1 < x < 1).$$

$$186. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}, \quad (-3 < x < 3).$$

$$187. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} x^{2n}, \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}). \quad 188. \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi(n+1)}{3} \times$$

$$\times x^n, \quad (-1 < x < 1). \quad 189. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}, \quad (-1 < x < 1).$$

$$190. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(2n)!} (2^{2n-2} - 1) \left(x + \frac{\pi}{2} \right)^{2n}, \quad r = \infty.$$

$$191. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+1)^{2n}, \quad r = 1. \quad 192. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-(n+1)}) (x-1)^n,$$

$$r = 1. \quad 193. \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{3n+1} \cdot n!} (x-2)^{2n}, \quad r = 2.$$

$$194. \quad - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}, \quad r = 2.$$

$$195. \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + \dots \right), \quad r = \infty.$$

$$196. \quad e^{-2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right], \quad r = \infty.$$

$$197. \quad 2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{n! 2^{3n}} (x-4)^n \right], \quad r = 4.$$

$$199. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{4n-3} x^{2n}}{(2n)!} r = \infty. \quad 200. \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n,$$

$$r=2. \quad 201. \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, r=1. \quad 202. \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)} x^{2n-1}, r=2. \quad 203. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, r=1.$$

$$204. 2|x| \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right], r=1.$$

$$205. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}, r = \infty. \quad 206. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n(2n+1) \cdot (2n+1)!} r = \infty.$$

$$207. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n^2}, r=1. \quad 211. S(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, (x > 0).$$

$$212. St(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2} (-1 < x < 1). \quad 213. S(x) = (1+3x^2)e^{x^2}.$$

$$214. 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) (-1 \leq x < 1). \quad 215. \frac{x(x+1)(x^2+10x+1)}{(1-x)^5},$$

$$(-1 < x < 1). \quad 216. S(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x). \quad 217. \alpha \approx 3,017. \quad 218. \alpha \approx 0,309. \quad 219. \alpha \approx 1,0986. \quad 220. \alpha \approx 0,1973. \quad 221. \alpha \approx 0,6065. \quad 222. 0,946. \quad 223. 0,747. \quad 224. 0,905. \quad 225. 0,310. \quad 226. 0,783.$$

XV б о б.

Хосмас интеграллар

$$1. \frac{1}{2} \ln 2. \quad 2. \frac{\pi}{4}. \quad 3. \frac{1}{3e^3}. \quad 4. 1. \quad 5. \pi. \quad 6. \pi^2 8. \quad 7. \ln(1 + \sqrt{2}). \quad 8. \frac{2\pi}{\sqrt{31}}. \quad 9. -1.$$

$$10. \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad 21. \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \ln 3. \quad 22. \frac{5 - \ln 64}{3}. \quad 23. \pi. \quad 24. 1. \quad 25. \frac{1}{\alpha} (\alpha > 0).$$

$$26. \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3. \quad 27. 2(1 - \ln 2). \quad 28. \frac{13\pi}{4}. \quad 29. 10. \quad 30. 0. \quad 31. 0. \quad 32. \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$33. \frac{2}{13}. \quad 34. \frac{3}{13}. \quad 35. \pi. \quad 36. 2 \ln(1 + \sqrt{2}). \quad 37. \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \quad 38. 24. \quad 39. \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$40. \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \quad 72. 0 < \alpha \leq 1 \text{ да шартлик яқинлашувчи, } \alpha > 1 \text{ да абсолют}$$

яқинлашувчи. 73. $0 < \alpha \leq 1$ да шартли яқинлашувчи, $\alpha > 1$ да абсолют яқинлашувчи. 74. $0 < \alpha \leq 1$ да шартли яқинлашувчи, $\alpha > 1$ да абсолют яқинлашувчи. 75. $1 \leq \alpha < 2$ да шартли яқинлашувчи, $0 < \alpha < 1$ да абсолют яқинлашувчи. 76. $-3 < \alpha < -1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 \leq \alpha \leq 1$ да шартли яқинлашувчи. 77. $\alpha < -1$ да абсолют яқинлашувчи, $-1 \leq \alpha < 0$ да шартли яқинлашувчи. 78. 0. 79. Мавжуд

- эмас. 80. 0. 81. 0. 82. 2. 83. $\frac{\pi}{2}$. 84. -1. 85. $2\ln 3$. 86. $\frac{1}{\ln 2}$. 87. $\frac{\pi}{2}$. 88. $\frac{9\pi}{4}$. 89. $\frac{\pi^2}{8}$. 90. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. 91. $6\sqrt[3]{2}$. 100. $\frac{31}{5}$. 101. 4. 102. 2π . 103. $-\frac{4}{3}$. 104. $\frac{21}{4}$. 105. $\frac{(e-1)^2}{e}$. 106. $2\ln(\sqrt{2}-1)$. 107. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 108. $\frac{7}{9}$. 109. π . (а, $b \in R$, $a < b$). 126. Яқинлашувчи. 127. Узоқлашувчи. 128. Яқинлашувчи. 129. Яқинлашувчи. 130. Узоқлашувчи. 131. Яқинлашувчи. 132. Узоқлашувчи. 133. Яқинлашувчи. 134. Узоқлашувчи. 135. Яқинлашувчи. 136. $\alpha > -1$ да абсолют яқинлашувчи. 137. Абсолют яқинлашувчи эмас. 138. $\alpha > 1$ да абсолют яқинлашувчи. 139. $\alpha > 0$ да абсолют яқинлашувчи. 140. $\alpha > 0$ да абсолют яқинлашувчи. 141. $\alpha < 1$ да абсолют яқинлашувчи. 142. $\ln \frac{b-c}{c-a}$. 143. $\ln 2$. 144. $-\pi \ln 2$. 145. $-\frac{\ln 3}{4}$.

XVI б о б

Параметрга боғлиқ интеграллар

1. $f(x) = x^4$. 2. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } 0 < x < 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{агар } x \geq 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$ 3. $f(x) = |x|$.
4. $f(x) = x^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. 5. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } 0 < x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ , & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } 0 \leq x < 1 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$ 7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
8. $f(x) = 0$. 9. $f(x) = 0$. 10. $f(x) = 0$. 16. $f(x) = 0$ га текис яқинлашади. 17. $f(x) = 0$ га текис яқинлашади. 18. $f(x) = 0$ га текис яқинлашади. 19. $f(x) = 0$ га текис яқинлашади. 20. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ га нотекис яқинлашади. 21. $y = 0$ нуктада узилишга эга. 22. а) $\frac{\pi}{4}$; б) 1.
23. $F'(x) = 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int y^2 e^{-xy^2} dy$. 24. $F'(\alpha) = -(e^{|\sin \alpha|} \sin \alpha + e^{\alpha |\cos \alpha|} \cos \alpha) + \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dx$. 25. $F'(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_0^{\alpha} f_u(u, v) dx$, ($u = x + \alpha$, $v = x - \alpha$). 26. $F'(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2)$.
27. $F^1(\alpha) = 2\alpha \int_{\alpha^2 - \alpha}^{\alpha^2 + \alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2) dy + 2 \int_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cdot \cos 2\alpha x dx -$

$$-2\alpha \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy. \quad 28. \quad F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

29. $F''(x) = 2f(x)$, агар $x \in (a, b)$ бўлса, $F''(x) = 0$, агар $x \in (a, b)$ бўлса.

30. $F^{(n)}(x) = (n-1)! f(x)$. 31. $\pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}$. 32. 0, агар $|a| \leq 1$ бўлса;

$\pi \ln a^2$, агар $|a| > 1$ бўлса. 33. $\pi \arcsin a$. 34. $\frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$.

35. а) $\arctg \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; б) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. Курсатма:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \quad (a > 0, b > 0)$$
 муносабатдан фойдаланинг ва $x = e^{-t}$

алмаштириш бажаринг. 38. Нотекис яқинлашади. 39. Текис яқинлашади. 40. Текис яқинлашади. 41. Текис яқинлашади. 42. Нотекис яқинлашади. 43. Нотекис яқинлашади. 44. Нотекис яқинлашади. 45. Текис яқинлашади. 46. Текис яқинлашади. 47. Текис яқинлашади. 48. Нотекис яқинлашади. 49. Текис яқинлашади. 50. Текис яқинлашади. 51. Мумкин эмас. 53.1. 56. $\alpha = \pm 1$. 57. Узлуксиз. 58. Узлуксиз. 59. Узлуксиз. 60. $\alpha = 0$ да узилишга эга.

62. 0. 63. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$. 64. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{\alpha}$. 65. $\frac{\ln(2\alpha)^{2\alpha} \cdot (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2\alpha + 2\beta}}$. 66. $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^\alpha + m^2}{\alpha^2 + m^2}$. 67.

$$-\pi(1 - \sqrt{1 - \alpha^2}). \quad 68. \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}. \quad 69. \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha (1 + |\alpha| - \sqrt{1 + \alpha^2}).$$

70. $\frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|) (\beta \neq 0)$. 71. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}}{a^\alpha \beta^\beta}$, ($\alpha > 0, \beta > 0$).

72. $\frac{2\pi}{3} [\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta - (a^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta)]$ ($\alpha > 0, \beta > 0$).

73. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}$. 74. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$. 75. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$. 76. $\sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$.

77. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$. 78. $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$. 79. $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \cdot \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2})$.

80. $\frac{\pi}{2} |\alpha|$. 81. $\frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi} \alpha$. 82. $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$. 83. $\frac{3\pi}{8} \alpha |\alpha|$. 84. $\frac{\pi}{4}$.

85. $\frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$. 86. $\frac{\alpha + \beta}{2} \arctg \frac{\alpha + \beta}{k} - \frac{\alpha - \beta}{2} \arctg \frac{\alpha - \beta}{k} +$

$+\frac{k}{4} \ln \frac{k^2 + (\alpha - \beta)^2}{k^2 + (\alpha + \beta)^2}$. 87. $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$. Курсатма: $\frac{1}{1+x^2} =$

$\int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$ муносабатдан фойдаланинг. 88. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha e^{-|\alpha|}$.

89. $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2})$. 90. $\frac{\pi(1 + |\alpha|)}{4} e^{-|\alpha|}$. 91. $\sqrt{\frac{\pi}{|\alpha|}} \sin \left(\frac{ac - b^2}{a} + \right.$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} a \Big). \quad 92. \sqrt{\pi} \cos(a^2 + \frac{\pi}{4}). \quad 93. \sqrt{\pi} \sin(a^2 + \frac{\pi}{4}). \quad 94. \frac{\pi}{2a} \sin ay. \\
95. & -\frac{\pi}{2} \cos ay. \quad 96. \pi(\operatorname{ctg} \pi a - \operatorname{ctg} \pi b). \quad 97. \frac{\pi}{2}(e^a - 1). \quad 98. \frac{1}{2} \ln \frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2}. \\
99. & \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha \sqrt{2}} \cos \alpha \sqrt{2}. \quad 100. \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha \sqrt{2}} \sin \alpha \sqrt{2}. \quad 106. \frac{\pi}{8}. \quad 107. \frac{\pi a^4}{16}. \\
108. & \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad 109. \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}. \quad 110. \frac{\pi}{2}. \quad 111. \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)}. \\
112. & \frac{\pi}{2 \sin n \pi}. \quad 113. \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n)}. \quad 114. \frac{2^{n-1} \Gamma^2(\frac{n}{2})}{(1-k^2)^{n/2} \Gamma(n)}. \quad 115. \pi \operatorname{ctg} \pi a. \\
116. & \frac{\pi^3}{8} \frac{1 + \sin^2 \frac{\pi a}{2}}{\cos^3 \frac{\pi a}{2}}. \quad 117. \frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad 118. \frac{\pi^2 \cos p \pi}{\sin^2 p \pi}. \\
119. & \frac{\pi}{2v \cos \frac{\pi \mu}{2v}}. \quad 120. \ln \sqrt{2}. \quad 121. \frac{a^2}{2n} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}. \quad 122. \frac{a^3}{3n^2} \frac{\Gamma^3(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{3}{n})}.
\end{aligned}$$

XVII б о б

Каррали интеграллар

$$\begin{aligned}
1. & \int_0^2 dy \int_{y-2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y-2}^2 f(x, y) dx. \quad 2. \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \\
& + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx. \quad 3. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \quad 4. \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\
& + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx. \quad 5. \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \quad 6. \int_0^1 dy \int f(x, y) dx. \\
7. & \int_0^i dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx. \quad 8. \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi. \\
9. & \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi. \quad 10. \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi. \quad 11. \quad 3. \quad 12. \frac{2}{3} \ln 4. \quad 13. \frac{\rho^5}{21}. \\
14. & \frac{a^4}{2}. \quad 15. \frac{2\pi a^3}{3}. \quad 16. \frac{\pi}{2}. \quad 17. \frac{4}{3}. \quad 18. \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad 19. \frac{9}{16} \pi. \quad 20. \quad 6. \quad 21. \frac{50941}{162}. \\
22. & \frac{2\sqrt[6]{632}}{3}. \quad 23. \quad 0. \quad 24. \quad 4. \quad 25. \quad 9 - \frac{5\pi}{4}. \quad 26. \quad \pi((1+a^2) \ln(1+a^2) - a^2).
\end{aligned}$$

27. $\frac{32}{45}R^5$. 28. $\frac{2}{3}a^2$. 29. $\frac{26\ln 2}{3}$. 30. $\frac{17}{18}$. 31. $\frac{5}{48}\left(a^{\frac{6}{5}} - b^{\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}} - p^{\frac{8}{5}}\right)$.
32. $\frac{\sin pb - \sin pa}{q} - \frac{\sin qb - \sin qa}{q}$. 33. $\frac{2}{15}$. 34. $\pi \sin a^2$. 35. $4 + \pi$.
36. $\frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{3}$. 37. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2})$. 38. $a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}\right)$.
39. $\frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{n^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 40. $\frac{1}{1260} \cdot \frac{(ab)^5}{c^8}$. 41. $\frac{ab}{70}$.
42. $\frac{(\beta - \alpha)(b^2 - a^2)}{2(\alpha + 1)(\beta + 1)}$. 43. $\frac{4}{3}(q - p)(s - r)$. 44. $\frac{65}{108}ab$. 45. $\frac{3}{4}\pi a^2$.
46. $\frac{\pi}{2}ab(a^2 + b^2)$. 47. $\frac{ab(n!)^2}{(2n)!}$. 48. $\frac{3}{5}(c^2 - d^2) \ln \frac{a}{b}$. 49. $\frac{1}{4}(a^2 - b^2) \times$
 $\times \left[\frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} + \arctg \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \right]$. 50. 3π . 51. $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3}R^3$. 52. $\frac{88}{105}$.
53. π . 54. $\frac{17}{12} - 2\ln 2$. 55. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. 56. $\frac{45}{32}\pi$. 57. $\frac{16}{9}a^3$.
58. $\pi(1 - e^{-R^2})$. 59. $2a^2c \frac{(\beta - \alpha)(\pi - 2)}{\pi^2}$. 60. $\frac{\pi}{8}$. 61. $\frac{2}{9}abc(3\pi +$
 $+ 20 - 16\sqrt{2})$. 62. $\frac{2}{5}a^2\sqrt{2ap}$. 63. $\frac{1}{20} \cdot \frac{a^5}{pq}$. 64. $a^3\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$. 65. $\frac{16ab^2}{3}$.
66. $\frac{88}{5}$. 67. $\frac{\pi a^3}{2}$. 68. πabc . 69. $\frac{4}{\pi^2}abc$. 70. $\frac{m^3 - n^3}{12\pi} [\cos \pi \beta^4 - \cos \pi \alpha^4]$.
71. $\frac{1}{364}$. 72. $\frac{4}{5}\pi abc$. 73. $\frac{16\pi}{3}$. 74. $\frac{1}{32} \times$
 $\times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)(b^8 - a^8) \left[(\beta^2 - \alpha^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right) + 4\ln \frac{\beta}{\alpha} \right]$.
75. 0, агар m, n, p ларнинг бирортаси тоқ бўлса,
 $\frac{4\pi}{m+n+p+3} \cdot \frac{(m-1)!(n-1)!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, агар m, n, p лар жуфт
бўлса.
76. $-\frac{1}{3}$. 77. $\frac{9a^6}{1280}$. 78. $\frac{\pi R^2 h^2}{4}$. 79. $\frac{51}{64}\pi R^5$. 80. $\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3} -$
 $-\frac{97}{6})$. 81. $\frac{1}{3}\pi a^3$. 82. $\frac{a^3}{6}$. 83. $\frac{a^3}{360}$. 84. $\frac{\pi a^3}{60}$. 85. $\frac{4\pi a^3}{21}$. 86. $\frac{32}{315}a^3$.
87. $\frac{5\sqrt{2}}{24}\pi a^3$. 88. $\frac{a^3}{3}$. 89. $\frac{\pi}{3}(1 - e^{-1})a^3$. 90. $\frac{8}{3}a^3$. 91. $\frac{\pi^2 a^3}{6}$.
92. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$. 93. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \frac{a^2 bc}{k}$. 94. $\frac{4}{3} \frac{abc^2}{k}$. 95. $\frac{1}{18}abc$. 96. $\frac{49}{864}a^3$.
97. $\frac{1}{4}(b^4 - a^4)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q}\right) \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 98. $\frac{5\pi^2 a^3}{8}$. 99. $\frac{\pi^2}{64}(a+b)(5a^2 - 2ab + 5b^2)$.
100. $\frac{45}{35}abc$.

XVIII боб

Эгри чизикли интеграллар

1. $2\sqrt{2}$. 2. $\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2$. 4. $\frac{1}{3} (3\sqrt{3}-1)$. 5. 0.
6. $\frac{\pi a^3}{2}$. 7. $\frac{a^2}{3} [(1+4\pi^2)^{3/2}-1]$. 8. $\sqrt{2} a^2$. 9. $\frac{\pi}{a}$. 10. $4a^{\frac{7}{3}}$. 11. $2a^2$.
12. $(-2\sqrt{2}) \cdot 2a^2$. 14. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}$. 15. $\frac{1}{54} (56\sqrt{7}-1)$.
16. $\frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. 17. $\frac{335}{27} a$. 18. $\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} \right)$. 19. $\frac{3\pi}{2} a$.
20. $\ln(1+\sqrt{2})$. 21. $\frac{8}{3} (2\sqrt{2}-1)$. 22. $2b \left(b + \frac{\operatorname{arcsin} \varepsilon}{\varepsilon} \right)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.
23. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. 24. $\frac{\pi}{a}$. 25. $\left(\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3} \right)$. 26. $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5} \right)$.
27. $\left(\frac{5a}{8}, 0 \right)$. 28. $\left(0, \frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)} \right)$. 29. $S_{ox} = S_{oy} = 3$.
30. $\Gamma_{ox} = \Gamma_{oy} = 2\pi$. 31. π . 32. $\frac{ab}{2}$. 33. $\frac{17}{15}$. 34. $\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{12}$. 35. 0. 36. 3.
37. -2π . 38. 0. 39. 18. 40. 2π . 41. $\frac{221}{15}$. 42. $-\frac{3}{16} \pi a^2$. 43. $-2\pi a^2$.
44. $\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}$. 46. $55 \frac{2}{3}$. 47. $\frac{2(3\pi+1)}{3}$. 48. 1,9. 50. 25π .
51. $\frac{3\pi}{8} a^2$. 53. $6\pi a^2$. 54. a^2 . 55. $\frac{a^2}{3}$. 56. $-46 \frac{2}{3}$. 57. $\frac{\pi r^4}{2}$. 58. 0.
59. $-\frac{1}{5} (\pi-1)$. 60. $-\frac{4}{3}$. 61. -4 . 62. 8. 63. $\frac{5}{8}$. 64. -2 . 66. $-\frac{3}{2}$.
67. $\pi+1$. 68. $F(x,y) = \frac{1}{3} x^3 + x^2 y - xy^2 - \frac{1}{3} y^3 + C$. 69. $F(x,y) = xe^{2y} - 5y^3 e^x + C$. 70. $F(x,y) = 4x^3 y + \frac{x}{y^2} + C$. 71. $F(x,y) = x^3 y^2 - y^3 x + 2x^2 + 5y + C$. 72. $F(x,y) = \frac{1 + \sqrt{x^2+y^2}}{y} + C$. 73. $F(x,y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + C$.
74. $F(x,y) = \ln(x+y) - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C$. 75. Функциянинг тўлиқ дифференциали бўлмайди.

XIX боб

Сирт интеграллари

1. 9. 2. $\frac{\sqrt{3} a^2}{2}$. 3. 0. 4. $2\sqrt{2} \pi$. 5. $\frac{(4a+\pi)a}{2}$. 6. $\pi \left(\frac{4r^4}{3} + \frac{r^5}{2} \right)$. 7. $80\sqrt{2} \pi$.

8. $\frac{36\pi-29}{12}$. 9. a^2c^2 . 10. $\frac{(8+\pi a^2)a^2}{16}$. 11. $2(2+9\pi)$. 12. $\frac{3-\sqrt{3}}{2} +$
 $+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. 13. $3\pi r^2$. 14. $4r^2$. 15. $2(3-\sqrt{2})\pi a^2$. 16. $\frac{4\pi}{3}r^4 + \frac{\pi}{2}r^5$.
17. $\frac{\pi}{15}(500\sqrt{10}-23)$. 18. $2\sqrt{2}\pi$. 19. $\left(\frac{r}{2}; \frac{r}{2}; \frac{r}{2}\right)$. 20. $\left(\frac{r}{2\sqrt{2}}; \frac{r}{2\sqrt{2}};$
 $\frac{r}{\pi}(\sqrt{2}+1)\right)$. 21. $(0,0, \frac{2b}{3})$. 22. $\frac{\pi a^3}{2}\sqrt{a^2+1}$. 23. $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}a^2 \cdot S$,
бунда S сирт юзи. 24. $-\frac{\pi a^7}{420}$. 25. $J_1=J_2=\frac{8\pi}{3}$. 26. $J_1=\pi ab$,
 $J_2=\frac{4abc\pi}{3}$, $J_3=\pi abc$. 27. $\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{4}{15}\right)$. 28. $\frac{\pi a^4}{2}$. 29. -3 . 30. 32π .
31. -96π . 32. $\frac{b^6}{9}$. 33. $-\frac{\pi ab^4c}{2}$. 34. 0 . 35. $-\int\int\int_{(s)} dx dy + dy dz + dz dx$.
36. $-3\int\int_{(s)} x^2 y^2 dx dy$. 37. 0 . 38. $-2\int\int_{(s)} x dy dz + y dz dx + z dx dy$. 41. 0 .
42. $-2\pi a(a+c)$. 43. $-\pi a^2$. 44. 0 . 45. $2\int\int\int_{(v)} (x+y+z) dx dy dz$.
46. $2\int\int\int_{(v)} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 47. $4\pi abc$. 48. $3a^4$. 49. $\frac{12}{5}\pi r^5$. 50. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

XX боб

Фурье қаторлари

1. $f(x) \sim 3 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$. 3. $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 4. $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} + \right.$
 $\left. + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{2n} \right]$. 5. $f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx$.
6. $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$. 7. $1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.
8. $1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$. 9. $\frac{1}{5} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{3}{2n^2\pi^2}\right) \frac{\cos 2n\pi x}{4n^2} + \right.$
 $\left. \left(\frac{6}{(2n-1)^2\pi^2} - 1 \right) \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)} \right]$. 10. $2\text{sh}2 \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right.$
 $\left. \times \frac{2\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x}{n^2\pi^2 + 4} \right]$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. 12. $\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$.
13. $\frac{2\sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + a^2} \sin nx$. 14. $\frac{2\sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 + a^2}$.
15. $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos nx$. 16. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$.

$$\begin{aligned}
& 17. \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right] \quad 18. \frac{\pi}{2} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{\pi}{n} \sin nx \right] \quad 19. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \quad 20. 1 + \\
& + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})\pi x}{(2k+1)} \quad 21. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{\pi}{2} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \right] \\
& 22. \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}
\end{aligned}$$

АДАБИЁТ

1. Азларов Т. А. Мансуров Х. Математик анализ, 2- қисм, — Т. «Ўқитувчи», 1989.
2. А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойбергганов, А. Ворисов, Р. Фуломов. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1, —Т. «Ўзбекистон», 1993.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М., Наука, 1977 ва бошқа йиллардаги нашрлари.
4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы, Ряды. Л. Д. Кудрявцев тахрири остида.— М. Наука, 1986.

М У Н Д А Р И Ж А

Сўз боши	3
XII боб. Кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити ва узлуксизлиги	4
1- §. R^m фазо. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити	4
2- §. Кўп ўзгарувчили функция ва унинг лимити	9
3- §. Кўп ўзгарувчи функциянинг узлуксизлиги	28
XIII боб. Кўп ўзгарувчили функциянинг ҳосила ва дифференциаллари	38
1- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари	38
2- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари	59
3- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремум қийматлари	74
4- §. Ошқормас функциялар	82
XIV боб. Функционал кетма-кетликлар ва қаторлар	91
1- §. Функционал кетма-кетликлар ва қаторларнинг яқинлашувчилиги	91
2- §. Функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчилиги	94
3- §. Текис яқинлашувчи функционал кетма-кетликларнинг хоссалари	104
4- §. Функционал қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги	107
5- §. Функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги	110
6- §. Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари	120
7- §. Даражали қаторлар	126
8- §. Даражали қаторларнинг хоссалари	130
9- §. Тейлор қатори. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш	134

<i>XV боб.</i>	Хосмас интеграллар	145
1-§.	Чексиз оралик бўйича хосмас интеграллар ва уларнинг яқинлашувчилиги тушунчалари	145
2-§.	Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. Асосий формулалар	150
3-§.	Хосмас интегралларнинг яқинлашувчилиги ҳақида теоремалар. Интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги	156
4-§.	Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари ва уларнинг яқинлашувчилиги тушунчалари	167
5-§.	Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. Асосий формулалар	171
6-§.	Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги ҳақида теоремалар. Интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги	175
<i>XVI боб.</i>	Параметрга боғлиқ интеграллар	187
1-§.	Параметрга боғлиқ интеграл тушунчаси	187
2-§.	Параметрга боғлиқ интегралларнинг функционал хоссалари	192
3-§.	Параметрга боғлиқ хосмас интеграллар	204
4-§.	Параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг функционал хоссалари	211
5-§.	Эйлер интеграллари	236
<i>XVII боб.</i>	Каррали интеграллар.	244
1-§.	Икки каррали интеграллар	244
2-§.	Уч каррали интеграллар	273
<i>XVIII боб.</i>	Эгри чизиқли интеграллар	283
1-§.	Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар	283
2-§.	Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар	305
3-§.	Грин формуласи	324
<i>XIX боб.</i>	Сирт интеграллари	335
1-§.	Биринчи тур сирт интеграллари	353
2-§.	Иккинчи тур сирт интеграллари	353
3-§.	Стокс ҳамда Остроградский формулалари	366
<i>XX боб.</i>	Фурье қаторлари	376
1-§.	Фурье қатори тушунчаси	376
2-§.	Фурье қаторининг яқинлашувчилиги	383
Жавоблар		389
Адабиёт		404

На узбекском языке

*Азимбой Саъдуллаев, Хожиақбар Мансуров, Гулмирза Худойберганоў,
Азизжон Ворисов, Рустам Гуломоў*

**СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»**

II

Учебное пособие для студентов университетов

Издательство «Ўзбекистон» — 1995,
700129, Ташкент, Навои, 30.

Мухаррир И. Аҳмаджонов
Муқова расмони Д. Собирова
Бадний муҳаррир И. Кученкова
Техник муҳаррир А. Горшкова
Мусаххих М. Раҳимбекова

Теришга берилди 27.04.94. Босишга рухсат этилди 17.05.95. Бичими 84×108¹/₃₂ «Таймс»
гарнитура офсет босма усулида босилди. Шартли бос. т. 21,42. Нашр т. 20,17. 5000 нусхада
чоп этилди. Буюртма № 527. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Нашр № 284—93.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот кўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида
босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

М12 **Математик** анализ курсидан мисол ва масалалар
тўплами: Олий ўқув юртлари талабалари учун ўқув
қўлланмаси/А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худой-
берганов Қ. 2.— Т.: Ўзбекистон, 1995.— 406 б.
1. Саъдуллаев А. ва бошқ.

ISBN 5-640-01508-X

Қўлланми университетлар ҳамда педагогика институтлари,
шунингдек, олий техника ўқув юртларининг олий математика
чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари
учун мўлжалланган.

Мазкур китоб кўп ўзгарувчи функциялар, функционал
кесма кетликлар ва қаторлар, хосмас интеграллар, параметрга
боғлиқ хос ҳамда хосмас интеграллар, қаррали интеграллар, эгри
чиизиқли ва эгри интеграллари, Фурье қаторлари мавзуларини
ўз ичига олади. Қўлланмада 1300 га яқин мисол ва масалалар
келтирилган бўлиб, уларнинг 250 дан ортиги батафсил ечим билан
таъминланган.

22.16я7

№ 308—95
Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси

1602070000—66
С _____ 95
М351(04) — 95

152-65

УЗБЕКИСТОН