ЭШКОБИЛОВА Д. Т.

ПОДНЯТИЕ ФУНКТОРА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА КАТЕГОРИЮ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

ТЕРМЕЗ – 2024

УДК 515.12
ББК __ __
И-__

Автор: Эшкобилова Д. Т.
«Поднятие функтора идемпотентных вероятностных мер на категорию равномерных пространств» монография 99 стр.

В монографии рассмотрено функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем как расширение функтора идемпотентных вероятностных мер с категории компактов и их непрерывных отображений на категорию равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображений.

В монографии изложено, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем переводит совершенные отображения в совершенные отображения, а открытые отображения в открытые отображения, сохраняет вес, а также индекс полноты равномерных пространств. Следовательно, пространство идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем является локально компактным хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда таковым является исходное пространство. Далее, для заданной группы (G, X, α) топологических преобразований на тихоновском пространстве X построена группа $\left(I(G,X), I(X), I(\alpha)\right)$ топологических преобразований на пространстве $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер. Установлено, что если диагональное произведение Δf_p заданного семейства $\{f_p, f_{pq}; \mathfrak{A}\}$ непрерывных отображений является вложением, то диагональное произведение $\Delta I_n(f_p)$ семейства $\{I_n(f_p), I_n(f_{pq}); \mathfrak{A}\}$ непрерывных отображений также является вложением. Далее, получено условие для того, чтобы пространство идемпотентных вероятностных мер было компактом Дугунджи.

Монография предназначена для специалистов геометрия и топология, а также рекомендуется для студентов бакалавриата и магистрам.

Рецензенты:

Заитов А.А. – Проректор Ташкентского архитектурно-строительного института, доктор физико-математических наук, профессор

Чориева С. Т. – Доцент кафедры «Алгебра и геометрия», Термезского государственного университета, доктор философии по физико-математическим наукам (PhD).

Монография рекомендована к печати решением Научноного совета Термезского государственного университета № от 25.10.2024 г.

ISBN:__________

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в мире, одной из актуальных проблем современной теории функторов является решение задачи о взаимосвязи заданного пространства и возникающего пространства, получаемого различными функторами, в частности, функтором идемпотентных вероятностных мер. Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее «классический аналог» – идемпотентная математика, т. е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Идемпотентная математика продвинута весьма далеко. В частности, построен идемпотентный функциональный анализ; отмечена аналогия между идемпотентной меры и отдельных задач оптимизации. Идемпотентной вероятностной мере в традиционной математике соответствует вероятностная мера. Хотя это так, с другой стороны, результаты показывают, что для доказательства аналогичных утверждений для вероятностных мер и идемпотентных вероятностных мер требуются различные друг от друга методы. Исходя из этого, можно сделать вывод, что исследование по геометрическим и топологическим свойствам пространств идемпотентных вероятностных мер является целенаправленным научным исследованием.

Так как наблюдается интенсивное развитие научно-технического прогресса в мире, в современной математике требуется разработка новых направлений фундаментальных исследований, в частности, математики и внедрения полученных результатов в практику. Многие задачи как прикладной, так и чистой математики, возникающие из потребностей экономики и промышленности, сводятся к задачам, оптимизации и оптимального управления. Понятие идемпотентной меры (меры Маслова) находит многочисленные применения в различных областях математики, математической физики и экономики (например, в качестве мерами риска в банковской системе). В частности, такие меры возникают в задачах динамической оптимизации. А также использование мер Маслова для моделирования неопределенности в математической экономике может быть настолько же релевантным, насколько и использование классической теории вероятностей. Поэтому результаты, полученные по теории идемпотентных вероятностных мер, имеют и теоретическую, и практическую значимость и считаются одним из важнейших областей современной математики.

Идемпотентная математика – новая отрасль математических наук, интенсивно развивающаяся и набирающая популярность в течение последних четырёх десятилетий. Она тесно связана с математической физикой. Литература по этому вопросу обширна и включает в себя многочисленные книги и бесчисленное количество журнальных статей. Важный этап развития темы был представлен в книге «Идемпотентность» под редакцией Дж. Гунавардена [17]. Эта книга стала результатом общеизвестного международного семинара, который состоялся в Бристоле, Англия, в октябре 1994 года.

Следующий этап развития идемпотентной и тропической математики был представлен в книге «Идемпотентная математика и математическая физика» под редакцией Г. Л. Литвинова и В. П. Маслова [32]. Книга возникла в результате международного семинара, который состоялся в Вене, Австрия, в феврале 2003 года. В работе [33] представлены достижения Международного семинара по идемпотентной и тропической математике и проблемам математической физики, который состоялся в Независимом университете Москвы, Россия, 25-30 августа 2007 года.

Идемпотентная математика основана на замене обычных арифметических операций новым набором базовых операций, т.е. на замене числовых полей идемпотентными полукольцами и полуполями. Типичным примером является так называемая max-plus алгебра $\mathbb{R}_{\max}$.

Многие авторы (С. К. Клин, С. Н. Н. Пандит, Н. Н. Воробьев, Б. А. Карри, Р. А. Кунингхэм-Грин, К. Циммерманн, У. Циммерманн, М. Гондран, Ф. Л. Баччелли, Г. Коэн, С. Гобер, Г. Дж. Олсдер, Ж. П. Квадрат, В. Н. Колокольцов и др.) использовали идемпотентные полукольца и матрицы над этими полукольцами для решения некоторых прикладных задач информатики и дискретной математики, начиная с классической работы С. К. Клини [27].

Современный идемпотентный анализ (или идемпотентное исчисление, или идемпотентная математика) был основан В. П. Масловым и его учениками [31]. Некоторые предварительные результаты принадлежат Э. Хопфу и Г. Шоке, см. [10], [20].

Идемпотентную математику можно рассматривать как результат деквантования традиционной математики над числовыми полями, когда постоянная Планка h стремится к нулю, принимая мнимые значения. Эту точку зрения высказали Г. Л. Литвинов и В. П. Маслов [30]. Другими словами, идемпотентная математика – это асимптотическая версия традиционной математики над полями действительных и комплексных чисел.

Основная модель выражается в терминах идемпотентного принципа соответствия. Этот принцип тесно связан с известным принципом соответствия Н. Бора в квантовой теории. Действительно, существует опирающееся на опыт соответствие между важными, интересными и полезными конструкциями и результатами традиционной математики над полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полукольцами и полуполями (т. е. полукольцами и полуполями с идемпотентным сложением).

Систематическое и последовательное применение принципа идемпотентного соответствия приводит к разнообразным результатам, часто весьма неожиданным. В результате, параллельно с традиционной математикой над полями появляется ее «теневая» – идемпотентная математика. Эта «тень» стоит примерно в таком же отношении к традиционной математике, как классическая физика к квантовой теории.

Понятие идемпотентной (Масловской) меры находит важные приложения в различных областях математики, математических физики и экономики (см. обзорную статью [30] и библиографию к ней). Топологический и категориальный свойства функтора идемпотентных мер изучались в [38], [39], [42]. Идемпотентные меры не аддитивны, а соответствующие функционалы нелинейные. Но, однако, имеются взаимосвязь между топологическими свойствами пространства вероятностных мер и пространства идемпотентных мер (см., например, [39], [54], [55]).

Теория равномерных пространств в настоящее время стала логически обоснованной, далеко продвинутой отраслью работ А. Вейля, Н. Бурбаки, Ю. М. Смирнова, Х. Инасаридзе, В. А. Ефремовича, А. А. Борубаева, Д. К. Мусаева, А. А. Заитова, Р. Б. Бешимова, Т. Ф. Жураева, А. Чекеева, Б. Э. Канетов, и др.

Проблема определения и исследования равномерных аналогий важнейших классов топологических пространств и непрерывных отображений является не только актуальной, но и плодотворным инструментом для изучения самих топологических пространств. Первая проблема возникла при поиске равномерного аналога паракомпактности. Американский математик М. Д. Райс впервые определил равномерно паракомпактные пространства. Но, к сожалению, в этот класс не входит даже класс метрических пространств. Позднее в работе [4] были рассмотрены некоторые обобщения метрических, нормированных и унитарных пространств.

Начало систематических исследований по идемпотентной и тропической математике восходит к работам В. П. Маслова, опубликованным в конце 80 годов XX века. Начиная с XXI века до настоящего времени исследование пространства идемпотентных вероятностных мер, а также функторов идемпотентных вероятностных мер, действующих на категориях Тихоновских и компактных пространств является одним из основных разделов теории функторов.

Идемпотентная математика была построен в работах В. П. Маслова, В. Н. Колокольцова, Г. Л. Литвинова и других. М. Заричный, Т. Радул, Т. Банах, А. А. Заитов, И. И. Тожиев, А. Я. Ишметов, О. Губаль, В. Бридун, А. Севченко, М. Ценцель, D. Реповш и другие применяя в своих исследованиях категорные методы, внесли свои вклады для дальнейшего развития не только данной теории, но и теории ковариантных функторов и общей топологии.

Исследование пространства идемпотентных вероятностных мер на равномерных пространствах, а также равномерно непрерывных отображениях не было проведено, хотя имеется огромная база знаний в этом направлении.

В данной работе автором построено распространение функтора идемпотентных вероятностных мер с категории *Comp* компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений на категорию *Unif* равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображений. Установлено, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем переводит совершенные отображения в совершенные, сохраняет вес и индекс полноты равномерных пространств. Показано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем сохраняет равномерную открытость отображений равномерных пространств, а также локальную компактность исходного пространства. Построена согласованная группа топологических преобразований на пространстве идемпотентных вероятностных мер, индуцированная заданной группой топологических преобразований на исходном пространстве. Получено условие того, чтобы пространство идемпотентных вероятностных мер было компактом Дугунджи.

ГЛАВА I. ПРОСТРАНСТВО ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И СУБМЕТРИЗУЕМОСТЬ ПРОСТРАНСТВ

В настоящей главе перечислены понятия и факты, необходимые для установления результатов монографии. В главе соблюдено систематичность изложения концепций. Стиль разъяснений этих концепций соответствует литературам [66], [70], [73].

§1.1. Понятия и факты из теории топологических пространств, теории групп топологических преобразований и теории категорий

Концепции «топология» и «топологическое пространство» являются фундаментальными понятиями классической математики. Следующие понятия общеизвестны, их можно найти из [66], [70], [73]. Поэтому их определения приведем без особых ссылок.

Точка x называется предельной точкой подмножества A пространства X, если всякая проколотая окрестность точки x имеет с A непустое пересечение. Точка x называется точкой накопления подмножества A, если всякая окрестность точки x имеет с A бесконечное число общих точек. Точка x называется точкой полного накопления подмножества A, если для всякой окрестности U точки x мощность пересечения $U \cap A$ равна мощности A.

Семейство $\mathcal{B}$ называется базой топологического пространства X, если каждое непустое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого подсемейства семейства $\mathcal{B}$. Множество всех кардинальных чисел вида $|\mathcal{B}|$, где $\mathcal{B}$ – база топологического пространства X, имеет наименьший элемент (так как всякое множество кардинальных чисел вполне упорядочено отношением <). Это наименьшее кардинальное число называется весом топологического пространства X и обоначается через wX, т. е.

$$wX = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} - \text{база пространства } X\}.$$

Непустое семейство $\mathcal{G} = \{G\}$ подмножеств непустого множества X является базой некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(B1) для каждой точки $x \in X$ найдётся $G \in \mathcal{G}$ такое, что $x \in G$;

(B2) для любых двух множеств G_1, $G_2 \in \mathcal{G}$ и каждой точки $x \in G_1 \bigcap G_2$ найдётся множество $G_3 \in \mathcal{G}$ такое, что $x \in G_3 \subset G_1 \bigcap G_2$.

Пусть даны множество X и семейство $\mathcal{G}$ его подмножеств удовлетворяющее условиям (B1) – (B2), а τ – семейство всех подмножеств множества X, являющихся объединениями подсемейств семейства $\mathcal{G}$, т.е. $U \in \tau$ тогда и только тогда, когда $U = \bigcup \mathcal{G}_0$, где $\mathcal{G}_0$ – подсемейство семейства $\mathcal{G}$. Тогда семейство τ удовлетворяет условиям (O1) – (O3). Семейство τ является базой топологического пространства (X, τ). Топология τ называется топологией, порожденной базой $\mathcal{G}$.

Семейство $\mathcal{B}(x)$ окрестностей точки x называется базой топологического пространства X в точке x, если для любой окрестности V точки x существует такой элемент $U \in \mathcal{B}(x)$, что $x \in U \subset V$.

Семейство $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ называется системой окрестностей топологического пространства X. Всякая система окрестностей $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ обладает следующими свойствами:

(BP1) Для всякого $x \in X$ имеем $\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$ и для всякого $U \in \mathcal{B}(x)$ имеем $x \in U$.

(BP2) Если $x \in U \in \mathcal{B}(y)$, то существует такое $V \in \mathcal{B}(x)$, что $V \subset U$.

(BP3) Для любых U_1, $U_2 \in \mathcal{B}(x)$ существует такое $U \in \mathcal{B}(x)$, что $U \subset U_1 \bigcap U_2$.

Пусть даны множество X и совокупность $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ семейств его подмножеств, обладающих свойствами (BP1) – (BP3). Пусть τ – семейство всех подмножеств X, являющихся объединениями подсемейств семейства $\bigcup\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$. Тогда семейство τ удовлетворяет условиям (O1) – (O3). Совокупность $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ есть система окрестностей топологического пространства (X, τ).

Множество $A \subset X$ называется всюду плотным в X, если для всякой точки $x \in X$ и произвольной её окрестности $O_x \subset X$ имеет место $A \cap O_x \neq \varnothing$. По другому, множество $A \subset X$ всюду плотно в X, если $[A] = X$, где $[A] = [A]_X$ – замыкание множества A в пространстве X. Плотность пространства X определяется как наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A – всюду плотное подмножество пространства X. Это кардинальное число обозначается через $d(X)$, т. е.

$d(X) = \min\{|A| : A \text{ всюду плотно в } X\}$.

Пусть X – топологическое пространство, τ – топология на X и Y – подмножество пространства X. Семейство $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ определяет на Y топологию. Множество Y с топологией τ_Y называется подпространством пространства X, а сама топология τ_Y называется индуцированной топологией или топологией подпространства.

Пусть (X, τ) и (Y, τ') – два топологические пространства. Отображение f из X в Y называется непрерывным, если $f^{-1}(U) \in \tau$ для любого $U \in \tau'$, т. е. если прообраз любого открытого подмножества пространства Y является открытым подмножеством пространства X. Тот факт, что f – непрерывное отображение пространства X в Y, будет часто записываться в виде $f : X \to Y$.

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется замкнутым отображением, если для каждого замкнутого множества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут в Y.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется открытым отображением, если для каждого открытого множества $U \subset X$ образ $f(U)$ открыт в Y.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если f взаимно однозначно отображает X на Y и обратное отображение f^{-1} из Y в X также непрерывно. Два топологических пространства X и Y называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм пространства X на пространство Y.

Отображение топологических пространств $f: X \to Y$ называется вложением X в Y, если $f: X \to f(X) \subset Y$ – гомеоморфизм.

Пусть X и Y – два топологические пространства. Обозначим через Y^X множество всех отображений из X в Y, т. е.
$Y^X = \{ f \mid f: X \to Y \}$.

Множество всех непрерывных отображений из X в Y обозначим через $C(X, Y)$. В частности, $\mathbb{R}^X$ означает множество всех вещественно-значных функций, определенных на множестве X, а $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ – множество всех непрерывных вещественно-значных функций на пространстве X.

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ через λ_X обозначают постоянную функцию на множестве X, единственным значением которой является λ, т. е. $\lambda_X(x) = \lambda$ при всех $x \in X$.

Отметим, что следующая конструкция построения топологии на $\mathbb{R}^X$ общеизвестна:

Рассматривается произвольная последовательность $\{ f_i \}$ функций из X в $\mathbb{R}$. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой k, что $\left| f(x) - f_i(x) \right| < \varepsilon$ при каждом $x \in X$ и любом $i \geq k$, то будем говорить, что последовательность $\{ f_i \}$ равномерно сходится к вещественной функции f. Это явление в символах выражается так: $f = \lim f_i$.

Согласно построению для подмножества $A \subset \mathbb{R}^X$ и функции $f \in \mathbb{R}^X$ элементами замыкания $[A]$ являются те функции, для которых существует равномерно сходящаяся к ней последовательность, лежащая в A:

$$f \in [A] \Leftrightarrow f = \lim f_i, \quad \text{где } f_i \in A,\ i = 1, 2, \dots . \tag{1.1.1}$$

И так, определен оператор замыкания. Согласно предложению 1.2.7 из [73] этот оператор, порождает на $\mathbb{R}^X$ топологию, так называемую топологией равномерной сходимости на $\mathbb{R}^X$.

Для $f \in \mathbb{R}^X$ построим множество

$U_i(f) = \left\{ g \in \mathbb{R}^X : \text{существует такое } a < \frac{1}{i}, \text{ что } \left| f(x) - g(x) \right| < a \text{ при } x \in X \right\}$.

Совокупность $\left\{ U_i(f) \right\}_{i=1}^{\infty}$ образует системой окрестностей функции $f \in \mathbb{R}^X$ относительно топологии равномерной сходимости.

Пусть X и Y – произвольные топологические пространства. Для $A \subset X$ и $B \subset Y$ положим

$$M(A, B) = \left\{ f \in Y^X : f(A) \subset B \right\}. \tag{1.1.2}$$

Пуст $\mathcal{F}$ – семейство всех конечных подмножеств множества X, а τ – топология на Y. В силу предложения 1.2.1 [73] семейство $\mathcal{B}$ множеств вида $\bigcap_{i=1}^{k} M(A_i, U_i)$, где $A_i \in \mathcal{F}$ и $U_i \in \tau$ при $i = 1, 2, ..., k$, порождает базу топологию на Y^X, называемую топологией поточечной сходимости. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии поточечной сходимости пространства Y^X.

Топологическое пространство X называется компактным, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Компактное топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа, называется компактом.

Пара (Y,c) где Y – компакт, а $c:X\to Y$ – гомеоморфное вложение пространства X в Y, такое что $[c(X)]=Y$, называется компактификацией пространства X (или компактным хаусдорфовым расширением пространства X).

Топологическое T_1-пространство называется Тихоновским пространством, если для всякой $x\in X$ и всякого замкнутого множества $F\subset X$, $x\notin F$, существует непрерывная функция $f:X\to[0,1]$ такая, что $f(x)=0$ и $f(y)=1$ при $y\in F$.

Теория групп топологических преобразований является неотъемлемой частью алгебры и общей топологии. Одним из основным топологическим аппаратом когомологических методов теории компактных групп преобразований является эквивариантная теория когомологий [68].

Группа топологических преобразований есть тройка (G,X,α), где G – топологическая группа, X – хаусдорфово топологическое пространство, $\alpha:G\times X\to X$ – такое непрерывное отображение, что

1) $\alpha(g_2,\alpha(g_1,x))=\alpha(g_2g_1,x)$ для всех g_1, $g_2\in G$ и $x\in X$;

2) $\alpha(\mathrm{e},x)=x$ для всех $x\in X$, где e – единица группы G (см. например [34], [64], [67]).

Отображение $\alpha:G\times X\to X$ называется действием группы G на пространстве X. Пространство X фиксированным действием α группы G считается G -пространством. (или, более точно, левым G-пространством). Напомним, что правым G-пространством будет пространство X, рассматриваемое вместе с непрерывным отображением $\alpha_r:X\times G\to X$, для которого $\alpha_r(\alpha_r(x,g_1),g_2)=\alpha_r(x,g_1g_2)$ и $\alpha_r(x,\mathrm{e})=x$, для всех g_1, $g_2\in G$ и $x\in X$. Легко видеть, что любое правое G-пространство X можно превратить в левое G-пространство, положив $\alpha_l(g,x)=\alpha_r(x,g)$. Поэтому достаточно рассматривать лишь левые G-пространства.

Обычно для G-пространства используются те же термины и обозначения, что и для основного пространства, считая отображение α само собой разумеющимся.

Например, вместо $\alpha(g,x)$ пишется просто $g(x)$ или gx, так что равенства 1) и 2) перепишутся соответственно как

1′) $g_2(g_1(x))=(g_2g_1)(x)$ и 2′) $\mathrm{e}(x)=x$.

Если $H\subset G$ и $A\subset X$, то $H(A)=\{g(x):g\in H,x\in A\}$. Множество A называется инвариантным относительно действия группы H (или H-инвариантным), если $H(A)=A$.

Пусть (G,X,α) – группа топологических преобразований. Для каждого $g\in G$ формула $\alpha_g(x)=g(x)$ определяет отображение $\alpha_g:X\to X$. В силу 1′) выполняется равенство $\alpha_{g_2}\alpha_{g_1}=\alpha_{g_2g_1}$, а из 2′) вытекает что $\alpha(\mathrm{e})$ – тождественное отображение пространства X на себя.

Множество $\ker\alpha=\{g\in G:g(x)=x \text{ для всех } x\in X\}$ называется ядром действия α. Для каждого действия α его ядро $\ker\alpha$ есть нормальный делитель группы G (т.е. $gag^{-1}\in\ker\alpha$ для всяких $g\in G$ и $a\in\ker\alpha$) и замкнут в G [11].

Поскольку $\alpha_g\alpha_{g^{-1}}=\alpha_{\mathrm{e}}=\alpha_{g^{-1}}\alpha_g$, то для любого $g\in G$ отображение α_g есть гомеоморфизм пространства X на себя. Соответствие $g\to\alpha_g$ определяет гомеоморфизм $\alpha:G\to\mathrm{Homeo}(X)$, ядро которого называется ядром действия α, где $\mathrm{Homeo}(X)$ – группа всех гомеоморфизмов пространства X на себя.

Действие α называется транзитивным, если для каждых двух элементов x_1 и x_2 пространства X найдется такой элемент $g\in G$, что $g(x_1)=x_2$.

Действие $\alpha:G\times X\to X$ компактной группы G на пространстве X есть замкнутое отображение [16], [48]. Из этого следует, что, если G – компактная группа и X – некоторое G-пространство, то для любого замкнутого $A\subset X$

множество $G(A)$ замкнуто в X и для компактного A множество $G(A)$ компактно.

Эквивариантное отображение (или G-отображение) – это отображение $f: X \to Y$ одного G-пространства в другое, которое коммутирует с действиями группы, т. е. $f(g(x)) = g(f(x))$ для всех $g \in G$ и $x \in X$. Более точное равенство выглядит так $f(\alpha_X(g,x)) = \alpha_Y(g, f(x))$, $g \in G$, $x \in X$ здесь $\alpha_X: G \times X \to X$ и $\alpha_Y: G \times Y \to Y$ – действия одной и той же группы G соответственно на пространствах X и Y.

Эквивариантное отображение $f: X \to Y$, являющееся также гомеоморфизмом, называется эквивалентностью G-пространств X и Y. В этом случае обратное к f отображение f^{-1} также эквивариантно (следовательно, является эквивалентностью).

Напомним, что через $\mathcal{N}_G(\mathrm{e})$ обозначают [58] систему открытых окрестностей нейтрального элемента e группы G в топологии пространства G. При этом, если $O \in \mathcal{N}_G(\mathrm{e})$, то $Ox = \{g(x): g \in O\}$.

Теория функторов, вышедшая в свет на стыке общей топологии и теории категорий, уже далеко продвинута. Применение этой теории продолжает приобрести исследователям новые и новые результаты, улучшенные качеством и углубленностью [2], [9], [44], [45], [49], [50], [51], [52].

Напомним определение понятия категории по Лузгарёву [63].

Категорией называется пара наборов, первый набор состоит из объектов $(X, Y, Z, \ldots)$, а второй – из морфизмов (стрелок) $f: X \to Y$, для которой

- для каждой пары стрелок вида $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ задана их композиция $g \circ f: X \to Z$;
- для каждого объекта X задан тождественный морфизм $\mathrm{id}_X: X \to X$; так, что выполняются следующие условия:

1) композиция ассоциативна: если $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ и $h: Z \to T$ – морфизмы, то морфизмы $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f): X \to T$ совпадают;

2) тождественный морфизм играет роль нейтрального элемента относительно композиции: для любого морфизма $f: X \to Y$ выполнено $\mathrm{f} \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$.

Замечание 1.3.1. Тот факт, что X является объектом категории $\mathcal{C}$, мы будем обозначать так: $X \in \mathcal{C}$. Иногда полезно более вербозное обозначение: $X \in Ob\mathcal{C}$. Тот факт, что $f: X \to Y$ – морфизм категории $\mathcal{C}$, мы будем обозначать так $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (отпуская индекс $\mathcal{C}$, если понятно, о какой категории идет речь). При этом объект X называется областью морфизма f (обозначение: $\mathrm{dom}\, f = X$), а объект Y – кообластью морфизма f (обозначение: $\mathrm{kod}\, f = Y$).

Один из философских смыслов работы с категориями состоит в том, что мы абстрагируемся от внутренней структуры объектов и обращаем основное внимание на морфизмы между ними. Поэтому понятие категории немыслимо без понятия морфизма между категориями. Такие морфизмы называются функторами.

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории. Ковариантным функтором F из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ называется сопоставление

- каждому объекту X категории $\mathcal{C}$ объекта $F(X)$ категории $\mathcal{D}$;
- каждому морфизму $f: X \to Y$ категории $\mathcal{C}$ морфизма $F(f): F(X) \to F(Y)$ категории $\mathcal{D}$, такое, что
- если $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – морфизмы категории $\mathcal{C}$, то $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
- если X – объект категории $\mathcal{C}$, то $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Функтор $F: Comp \to Comp$, действующий в категории $Comp$ компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений называется полунормальным [72], если он удовлетворяет следующим условиям:

1) F сохраняет пустое множество и точку, т. е. $F(\varnothing) = \varnothing$ и $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ где $\mathbf{1}$ – одноточечное множество;

2) F сохраняет пересечений, т. е. $F\left(\bigcap_{\Phi\in\Omega}\Phi\right)=\bigcap_{\Phi\in\Omega}F(\Phi)$ для данного компактного хаусдорфова пространства X и для каждого семейства Ω замкнутых подмножеств X;

3) F является мономорфным, т. е. для каждого вложения $i:A\to X$ отображение $F(i):F(A)\to F(X)$ также является вложением;

4) F является непрерывным, т. е. $F(\lim S)=\lim(F(S))$ для каждого спектра $S=\left\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,\mathfrak{A}\right\}$ компактных хаусдорфовых пространств и их сквозных проекций.

Если функтор F полунормален, то существует единственная естественная трансформация $\eta^F=\eta:Id\to F$ тождественного функтора Id в функтор F. Более того, это преобразование является мономорфизмом, т. е. для каждого компактного хаусдорфова пространства X отображение $\eta_X:X\to F(X)$ является вложением.

Напомним, что функтор F, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, называется нормальным, если кроме предыдущих четырех условий, он ещё удовлетворяет трём следующим условиям:

5) F сохраняет вес $\left(wX=wF(X)\right)$;

6) F эпиморфен (т. е. сохраняет сюрьективность отображений);

7) F сохраняет прообразы $\left(F(f^{-1})=F(f)^{-1}\right)$.

Остановимся более подробно об этих понятиях. Рассмотрим обратный спектр компактов $S=\left\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,\mathfrak{A}\right\}$ и его предел $\lim S=\underleftarrow{\lim}\,S$. Общеизвестная теорема Куроша утверждает, что предел обратного спектра непустых компактов F не пуст и является компактом. Воздействие функтора F на компакты X_α и на отображения π_α^β, α, $\beta\in\mathfrak{A}$, $\alpha\prec\beta$, образуется обратный спектр $F(S)=\left\{F(X_\alpha),\,F\left(\pi_\alpha^\beta\right);\,\mathfrak{A}\right\}$. Пусть $\lim F(S)$ – предел этого спектра. Непрерывность (т. е. условие 4)) требует, чтобы выполнялось равенство $F(\lim S)=\lim F(S)$.

Как уже было отмечено выше, для топологического пространства X через wX обозначают его вес, т. е. наименьшую из мощностей баз пространства X. Сохранение веса функтором (т. е. условие 5)) требует, чтобы весы компактов X и $F(X)$ были равны.

Условие 3) для функтора F позволяет считать $F(A)$ подпространством $F(X)$ для замкнутого $A \subset X$. Отождествление $F(A)$ с подпространством $F(X)$ осуществляется вложением $F(i_A)$, где $i_A : A \to X$ – тождественное вложение.

Условие 6) (т. е. сюръективность функтора) требует, что если $f : X \to Y$ – непрерывное «на» отображение, то $F(f) : F(X) \to F(Y)$ также было непрерывным «на» отображением.

Для мономорфного функтора F условия 2) и 7) могут быть расшифрованы как следующие:

для любого семейства $\{X_\alpha\}$ замкнутых подмножеств произвольного компакта X выполнено равенство $F\left(\bigcap_\alpha X_\alpha\right) = \bigcap_\alpha F(X_\alpha)$ (условие 2));

для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ между компактами и любого замкнутого в Y множества B выполнено равенство $F\left(f^{-1}(B)\right) = F(f)^{-1} F(B)$ (условие 7)).

Условие сохранения точки означает, что F переводит одноточечное пространство в одноточечное.

Условие сохранения пересечений позволяет определить для мономорфного функтора F важное понятие носителя. Носителем точки $x \in F(X)$ называется такое замкнутое подмножество $\operatorname{supp} x \subset X$, что соотношения $A \supset \operatorname{supp} x$ и $x \in F(A)$ равносильны. Носитель точки $x \in F(X)$ и может быть определен из соотношения

$$\operatorname{supp} x = \bigcap \left\{ A \subset X : [A] = A,\ \ x \in F(A) \right\},$$

где $[A]$ – замыкание множества A.

§1.2. Деквантование Маслова и субметризуемость пространства идемпотентных вероятностных мер

Идемпотентная математика в настоящее время является уже развитой дисциплиной современной математики и имеет широкое применение [17], [20], [26], [30], [31] [32], [33], [62].

Напомним [62], что множество S называется полукольцом, если в нем определены две операции $\oplus$ – сложение и $\odot$ – умножение, удовлетворяющие следующим условиям:

1) сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;

2) сложение $\oplus$ коммутативно;

3) умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \text{ и } (x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$$

для всех $x, y, z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $\mathbf{1} \in S$, что $\mathbf{1} \odot x = x \odot \mathbf{1} = x$ для всех $x \in S$. Нулем полукольца S называется такой элемент $\mathbf{0} \in S$, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \oplus x = x \oplus \mathbf{0} = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется идемпотентным полукольцом, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$. (Идемпотентное) полукольцо S с элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называется (идемпотентным) полуполем, если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент.

Изложим деквантование Маслова [22], [30], [36], [54]. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – поле вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – полуполе неотрицательных вещественных чисел (относительно обычных операций сложения и умножения). Для $h > 0$ рассмотрим отображение $\Phi_h : \mathbb{R}_+ \to S = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определенное равенством

$$\Phi_h(x) = h \ln x. \qquad (1.2.1)$$

Перенесем обычные операции сложения и умножения из $\mathbb{R}_+$ в S с помощью отображения Φ_h. Пусть

$$u = \Phi_h(x) = h\ln x, \qquad v = \Phi_h(y) = h\ln y.$$

Тогда

$$\Phi_h(x+y) = h\ln(x+y) = h\ln\left(e^{\frac{u}{h}} + e^{\frac{v}{h}}\right),$$

$$\Phi_h(xy) = h\ln(xy) = h\ln x + h\ln y.$$

Положим

$$u \oplus_h v = \Phi_h(x+y) \text{ и } u \odot v = \Phi_h(xy),$$

т. е.

$$u \oplus_h v = h\ln\left(e^{\frac{u}{h}} + e^{\frac{v}{h}}\right) \text{ и } u \odot v = u + v.$$

Образ $\Phi_h(0) = -\infty$ обычного нуля 0 является нулем $\mathbf{0}$ и образ $\Phi_h(1) = 0$ обычной единицы 1 – единицей $\mathbf{1}$ в S относительно этих операций. Таким образом, S приобретает структуру полукольца $\mathbb{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbb{R}_+$.

Следующие преобразования дают новое доказательство деквантизации Маслова

$$u \oplus_h v = h\ln\left(e^{\frac{u}{h}} + e^{\frac{v}{h}}\right) = \begin{cases} h\ln\left(e^{\frac{u}{h}}\left(1 + e^{\frac{v-u}{h}}\right)\right), & \text{если } u \ge v, \\ h\ln\left(e^{\frac{v}{h}}\left(1 + e^{\frac{u-v}{h}}\right)\right), & \text{если } u < v \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} u + \ln\left(1 + e^{\frac{v-u}{h}}\right), & \text{если } u \ge v, \\ v + \ln\left(1 + e^{\frac{u-v}{h}}\right), & \text{если } u < v \end{cases} = \begin{cases} u + \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^{\frac{u-v}{h}}}\right), & \text{если } u \ge v, \\ v + \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^{\frac{v-u}{h}}}\right), & \text{если } u < v \end{cases}$$

при $h \to 0$ легко показать, что $u \oplus_h v \to \max\{u, v\}$. Несложно проверить, что S образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения

$u \odot v = u + v$ с нулевым элементом $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max}$, оно является идемпотентным полуполем. Переход из $\mathbb{R}^{(h)}$ к предельному состоянию $\mathbb{R}_{\max}$ при $h \to 0$ и процедура квантования аналогичны. Здесь параметр h играет роль постоянной Планка. Поэтому полуполе $\mathbb{R}_{+} \cong \mathbb{R}^{(h)}$ рассматривают как «квантовый» объект, а $\mathbb{R}_{\max}$ – как результат его деквантование. Изложенный переход из $\mathbb{R}_{+}$ к $\mathbb{R}_{\max}$ называется деквантованием Маслова [27], [51], [52], [53], [54].

Рассмотрим компакт X, банахову алгебру $C(X)$ непрерывных функций $\varphi : X \to \mathbb{R}$, снабженную поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой, то есть нормой $\|\varphi\| = \{|\varphi(x)| : x \in X\}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ символ c_X означает постоянную функцию, определяемую формулой $\lambda_X(x) = \lambda$, $x \in X$. Пусть φ, $\psi \in C(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Положим $(\varphi \oplus \psi)(x) = \max\{\varphi(x); \psi(x)\}$, $(\lambda_X \odot \varphi)(x) = \lambda + \varphi(x)$, $x \in X$. Неравенство $\varphi \le \psi$ означает, что $\varphi(x) \le \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Напомним, что функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется [42] идемпотентной вероятностной мерой на X, если он обладает следующими свойствами:

(i) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (нормированность);

(ii) $\mu(\lambda_X \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность);

(iii) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность).

Число $\mu(\varphi)$ называется интегралом Маслова соответствующим к μ.

Предложение 1.2.1. Идемпотентная вероятностная мера непрерывна.

Доказательство. Отметим прежде всего, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ сохраняет порядок, то есть неравенство $\varphi \le \psi$ влечет $\mu(\varphi) \le \mu(\psi)$, где $\varphi, \psi \in C(X)$. Действительно, так как неравенство $\varphi \le \psi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi \oplus \psi = \psi$, то имеем

$$\mu(\varphi) \le \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi) = \mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\psi)$$

Кроме того, свойство однородности операции $\odot$ означает, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ слабо аддитивна, т. е. $\mu(\varphi + \lambda_X) = \mu(\varphi) + \lambda$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь $\varphi, \psi \in C(X)$ – функции такие, что $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ Тогда

$$-\varepsilon_X < \psi - \varphi < \varepsilon_X ,$$

$$\varphi - \varepsilon_X < \psi < \varphi + \varepsilon_X ,$$

$$\mu(\varphi) - \varepsilon < \mu(\psi) < \mu(\varphi) + \varepsilon ,$$

$$|\mu(\psi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon .$$

Предложение 1.2.1 доказано.

Для компакта X обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных вероятностных мер на X.

Идемпотентная вероятностная мера непрерывна [42], [54], [71].

Ясно, что $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ – топологического произведения числовых прямых. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ топологии произведения образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, ..., \varphi_n; \varepsilon \rangle = \{ \nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, \ i = 1, ..., n \} ,$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, ..., n$, $\varepsilon > 0$. На множестве $I(X)$ рассмотрим топологию, индуцированную из $\mathbb{R}^{C(X)}$. Ясно, что эта индуцированная топология и топология поточечной сходимости на $I(X)$ совпадают. Хорошо известно, что для компакта X топологическое пространство $I(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, также является компактом [42].

Для компактов X, Y и непрерывного отображения $f : X \to Y$ равенство

$$I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f) \qquad (1.2.2)$$

определяет отображение $I(f):I(X)\to I(Y)$. Так как композиция непрерывных отображений непрерывна, то отображение $I(f)$ непрерывно [42]. Итак, построенная конструкция I переводит компакты в компакты (т. е. объекты в объекты категории $Comp$) и непрерывные отображения в непрерывные отображения (т. е. морфизмы в морфизмы категории $Comp$), то есть I образует функтор, действующий в категории $Comp$ компактов и их непрерывных отображений. М. Заричный в 2010 году показал, что конструкция I является нормальным функтором [42].

Так как функтор I идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, нормален, то для каждого компакта X и для произвольной идемпотентной вероятностной меры $\mu\in I(X)$ можно определить ее носитель, который принято обозначать символом $\operatorname{supp}\mu$. Носитель идемпотентной вероятностной меры $\mu\in I(X)$ – это наименьшее (относительно включения) замкнутое множество, на котором сосредоточена μ, т. е.

$$\operatorname{supp}\mu=\bigcap\left\{A\subset X:\left[A\right]=A,\ \mu\in I(A)\right\}.$$

Пусть $x\in X$ – некоторая точка компакта X. Функционал $\delta_x:C(X)\to\mathbb{R}$, определенный по правилу $\delta_x(\varphi)=\varphi(x)$, $\varphi\in C(X)$, называется мерой Дирака. Каждая мера Дирака является идемпотентной вероятностной мерой, причем $\operatorname{supp}\delta_x=\{x\}$. Отметим, что выполнение следующих соотношений

$$X\cong\delta(X)=\left\{\delta_x:x\in X\right\}=\left\{0\odot\delta_x:x\in X\right\}=I_1(X).$$

равносильно хаусдорфовой компактности X.

Каждая идемпотентная вероятностная мера μ с конечным носителем представляется в виде

$$\mu=\lambda_1\odot\delta_{x_1}\oplus\lambda_2\odot\delta_{x_2}\oplus\ldots\oplus\lambda_n\odot\delta_{x_n}$$

единственным способом (с точностью до перестановки местами), где $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ – носитель μ, т. е. $\operatorname{supp}\mu=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Здесь коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям

$$\lambda_i > \mathbf{0} \equiv -\infty \;\; i = 1, 2, ..., n \text{ и } \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus ... \oplus \lambda_n = \mathbf{1} = 0\,, \qquad (1.2.3)$$

и называется $\max$-plus барицентрической массой соответствующих точек x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что для идемпотентной вероятностной меры μ с конечным носителем включение $x_i \in \operatorname{supp} \mu$ справедливо тогда и только тогда, когда ее $\max$-plus барицентрическая масса $\lambda_i > -\infty$.

Для компакта X и положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\operatorname{supp} \mu| \le n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно в $I(X)$ [22], [36], [42]. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.

Для каждого $n \in \{1, 2, ...,\}$ конструкция I_n образует [54] функтор, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. Другими словами, для компакта X топологическое пространство $I_n(X)$, рассматриваемое как подпространство $I(X)$, является компактом, и для каждого непрерывного отображения $f : X \to Y$ компактов отображение $I_n(f) : I_n(X) \to I_n(Y)$, определенное как сужение $I_n(f) = I(f)|_{I_n(X)}$, также непрерывно. Как уже было отмечено выше, множество $I_\omega(X)$ всюду плотно в $I(X)$, следовательно, подпространство $I_\omega(X) \subset I(X)$ не является компактом. Иными словами, конструкция I_ω не образует функтор в категории компактов. Легко видеть, что функторы I_n идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем имеют конечную степень: $\deg I_n = n$, $n = 1, 2, ...$.

Возникает

Вопрос: имеет ли конечную степень всякий функтор с конечным носителем?

Построим функтор I_f идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и бесконечной степенью: $\deg I_f = \infty$. Для компакта X множество $I_f(X)$ состоит из идемпотентных вероятностных мер, носители которых конечны, причем если носитель меры μ состоит из n точек, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $\max$-plus-барицентрические массы кроме одной из этих точек не больше чем $-\ln(n+1)$. Легко видеть из (1.3.3) вытекает, что $\lambda_{i_0} = 0$ для единственного $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, где $\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}$. По определению

$$I_f(X) = \Big\{ \mu = \oplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X) : \text{равенство } \lambda_{i_0} = 0 \text{ выполняется}$$
$$\text{только для единственного индекса } i_0 \text{ и } \lambda_i \le -\ln(n+1)$$
$$\text{для всех } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\_0\} \Big\} \qquad (1.2.4)$$

Для непустого компакта множество $I_f(X)$ непусто. Из определения элементов пространства $I_f(X)$ следует, что множество $\delta(X)$ мер Дирака лежит в $I_f(X)$. Для произвольного компакта X подпространство $I_f(X) \subset I(X)$ является компактом, и для каждого непрерывного отображения $f : X \to Y$ компактов отображение $I_f(f) : I_f(X) \to I_f(Y)$, определенное как ограничение $I_f(f) = I(f)|_{I_f(X)}$, также непрерывно. Таким образом, конструкция I_f образует функтор $I_f : Comp \to Comp$.

Приведем конструкцию (см. [51], [52], [55]) функтора P_f – традиционного аналога функтора I_f. Для компакта X множество $P_f(X)$ состоит из (обычных) вероятностных мер (т. е. линейных, неотрицательных, нормированных функционалов $C(X) \to \mathbb{R}$), носители которых конечны, причем если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, x_2, ..., x_n$, то барицентрическая масса хотя бы одной из этих точек не меньше $1-\frac{1}{n+1}$. По определению

$$P_f(X)=\left\{\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{x_i}\in P_\omega(X):\text{ существует } i_0\in\{1,...,n\}\right.$$
$$\left.\text{такой, что } \alpha_{i_0}\geq 1-\frac{1}{n+1}\right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что если $\alpha_{i_0}\geq 1-\frac{1}{n+1}$ для некоторого $i_0\in\{1,...,n\}$, то $\alpha_i\leq 1-\frac{1}{n+1}$ для всех $i\in\{1,...,n\}\setminus\{i_0\}$. Из определения (1.2.1) отображения Φ_h при $h=1$ вытекает равенство $\Phi_1\left(\frac{1}{n+1}\right)=\ln\frac{1}{n+1}=-\ln(n+1)$, что оправдывает рассмотрение неравенство $\lambda_i\leq-\ln(n+1)$ в построении функтора I_f.

Вторая глава посвящена исследованию функтора I_f и пространства вида $I_f(X)$, где X – компакт.

Пусть X – Тихоновское пространство, βX – Стоун-Чех компактное расширение X. Определим [15], [22] подпространство

$$I_\beta(X)=\left\{\mu\in I(\beta X):\operatorname{supp}\mu\subset X\right\}.$$

Такие элементы называют [22], [35] как идемпотентные вероятностные меры с компактным носителем. Обеспечим $I_\beta(X)$ индуцированной топологией и $I(\beta X)$. Тогда $I_\beta(X)$ становится тихоновским пространством.

Для тихоновских пространств X и Y рассмотрим непрерывное отображение $f:X\to Y$ и его максимальное расширение $\beta f:\beta X\to\beta Y$ (оно единственно). Тогда можно установить, что $I(\beta f)\big(I_\beta(X)\big)\subset I_\beta(Y)$. Исходя из этого, полагая

$$I_\beta(f) = I(\beta f)\big|_{I_\beta(X)}.$$

определим непрерывное отображение $I_\beta(f): I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$.

Ясно, что $I_\beta(f)\big(I_\omega(X)\big) \subset I_\omega(Y)$. Поэтому отображение

$$I_\omega(f) = I_\beta(f)\big|_{I_\omega(X)} : I_\omega(X) \to I_\omega(Y)$$

также определено корректно.

Таким образом, операция I_β, переводя тихоновские пространства в тихоновские пространства (т. е. объекты категории $Tych$ в объекты той же категории $Tych$), и непрерывные отображения тихоновских пространств в непрерывные отображения тихоновских пространств (т. е. морфизмы категории $Tych$ в морфизмы той же категории $Tych$), является функтором, действующим в категории $Tych$ – тихоновских пространств и их непрерывных отображений [22], [56].

Определение 1.2.1 [9]**.** Ковариантный функтор $F: Tych \to Tych$ называется нормальным если он удовлетворяет следующим условиям: функтор F непрерывен, сохраняет вес, вложения, пересечения, прообразы, точку, пустое множество и переводит k-накрывающие отображения в сюръекции.

Напомним [73], что отображение $f: X \to Y$ топологических пространств называется k-накрывающим, если для любого компакта $B \subset Y$ существует такой компакт $A \subset X$, что $f(A) = B$.

Теорема 1.2.1 [22]. Конструкция $I_\beta: Tych \to Tych$ является нормальным функтором.

Пусть даны топологические пространства (X, τ_1), (Y, τ_2), и отображение f из X в Y.

Следующие два понятия и результат данного параграфа будут использованы в следующих главах

Определение 1.2.2 [43]. Отображение f называется уплотнением из X в Y, если выполняются следующие условия:

1. $f : X \to Y$ непрерывно;
2. $f : X \to f(X)$ взаимно-однозначно, т. е. инъективно;
3. $f(X) = Y$, т. е. сюръективно.

Определение 1.2.3 [43]. Пространство X называется субметризуемым, если оно уплотняется на метризуемое пространство.

Приведем пример, показывающий существование не метризуемого, но субметризуемого пространства.

Пример 1.2.1 (А. А. Заитов, Д. Т. Эшкобилова)**.** Пусть $X = Y = [0, 1)$. Рассмотрим пространство $(X, \tau_{\to})$, где $\tau_{\to}$ – топология, порождённая базой $\mathfrak{B}_{\to} = \{[a, b) : 0 \le a < b \le 1\}$. Оно не является метрическим пространством (т. е. его топологию невозможно задать метрикой). Пусть (Y, τ_{e}) – метрическое пространство, где τ_{e} – естественное топология на Y. Очевидно, что для отображения $f : X \to Y$, определенного равенством $f(x) = x$, выполняются все вышеуказанные три условия. По определению, $(X, \tau_{\to})$ – субметризуемое (но не метризуемое) пространство.

Теорема 1.2.2. Для отображения $f : X \to Y$ тихоновских пространств X и Y отображение $I_{\omega}(f) : I_{\omega}(X) \to I_{\omega}(Y)$ – уплотнение тогда и только тогда, когда $f : X \to Y$ – уплотнение.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ – уплотнение. Тогда в силу нормальности функтора I_{β} (см. предложение 2.12 из [43]) следуют, что

1. Отображение $I_{\beta}(f)$ непрерывно, что обеспечит непрерывность сужения $I_{\omega}(f) : I_{\omega}(X) \to I_{\omega}(Y)$;
2. $I_{\omega}(f)$ является взаимно однозначным отображением;
3. $I_{\omega}(f)(I_{\omega}(X)) = I_{\omega}(Y)$, т. е. $I_{\omega}(f)$ – сюръективное отображение.

Обратно, пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение такое, что отображение $I_\omega(f):I_\omega(X)\to I_\omega(Y)$ является уплотнением. Тогда $I_\omega(Y)$ метризуемо, но $I_\omega(X)$ не обязательно метризуемо. Следовательно, Y метризуемо, а метризуемость X равносильна метризуемости $I_\omega(X)$. А отображение $f=I_\omega(f)\big|_X:X\to Y$ сюръективно (инъективно) тогда и только тогда, когда отображение $I_\omega(f):I_\omega(X)\to I_\omega(Y)$ сюръективно (инъективно, соответственно).

Таким образом, теорема 1.2.2 доказана. Из нее сразу вытекает важное утверждение.

Следствие 1.2.1. Тихоновское пространство X – субметризуемо тогда и только тогда, когда $I_\omega(X)$ субметризуемо.

Пример 1.2.2 (А. А. Заитов, Н. К. Мамадалиев). Достаточность в теореме 1.2.2 не имеет место для отображения $I_\beta(f):I_\beta(X)\to I_\beta(Y)$. Отсюда вытекает, что утверждение следствия 1.2.1 нельзя улучшить на случай пространства $I_\beta(X)$. На самом деле, для пространств $X=(X,\tau_\to)$ и $Y=(Y,\tau_e)$ для чисел a, b, где $0\le a<b<1$, отрезок $[a,b]$ является компактным подмножеством в Y, замкнутым, но не являющееся компактным подмножеством в X. Отображение $f:X\to Y$, $f(x)=x$, – сюръективное. Но, так как для идемпотентной вероятностной меры на Y с носителем $[a,b]$ в множестве $I_\beta(X)$ не существует её прообраз, т. е. отображение $I_\beta(f)$ не является сюръективным.

ГЛАВА II. КАТЕГОРНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА КАТЕГОРИИ *Comp*

В этой главе установлено категорные свойства функтора I_f идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и бесконечной степенью и геометрические свойства пространств вида $I_f(X)$, где X – компакт.

§2.1. О функторе I_f идемпотентных вероятностных мер

В данном параграфе доказано, что функтор I_f идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений является нормальным функтором. В работе [42] исследовано категорные свойства функтора $I: Comp \to Comp$ идемпотентных вероятностных мер**.** Конструкция I_f взятия множества $I_f(X)$ уже введена в §1.2**.** Установим, что она образует нормальный функтор $I_f: Comp \to Comp$ в категории компактов. Этот функтор интересен тем, что он является функтором с конечным носителем, и не имеет конечной степени.

Обеспечим подмножество $I_f(X)$ компакта $I(X)$ с индуцированной топологией.

Предложение 2.1.1. Для компакта X пространство $I_f(X)$ также является компактом.

Доказательство. Как уже мы отметили, для компакта X пространство $I(X)$ является компактом. По построению (смотрите (1.2.4), глава I) $I_f(X)$ замкнуто в $I(X)$. Так как каждое замкнутое подмножество компакта есть компакт, то $I_f(X)$ – компакт. Предложение 2.1.1 доказано.

Для непрерывного отображения $f: X \to Y$ компактов определим отображение $I_f(f): I_f(X) \to I_f(Y)$

Предложение 2.1.2. Отображение $I_f(f)$ непрерывно.

Доказательство. Сперва покажем, что отображение $I_f(f)$ определено корректно, т. е. установим включение $I_f(f)\big(I_f(X)\big)\subset I_f(Y)$. Действительно, пусть $\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}$, $\lambda_{i_0} = 0$ и $\lambda_i \leq -\ln(n+1)$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\} \backslash \{i_0\}$. Имеем

$$I_f(f)(\mu)(\varphi) = I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}\right)(\varphi \circ f) =$$
$$= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \odot \delta_{x_i}(\varphi \circ f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \odot \left(\varphi \circ f(x_i)\right)\right) =$$
$$= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \odot \left(\varphi\big(f(x_i)\big)\right)\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \odot \delta_{f(x_i)}(\varphi)\right) =$$
$$= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{f(x_i)}\right)(\varphi),$$

$\varphi \in C(Y)$. Следовательно, $\operatorname{supp} I_f(\mu) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Ясно, что $k \leq n$. Предположим, что $f\left(x_{i_1}\right) = f\left(x_{i_2}\right) = \dots = f\left(x_{i_m}\right) = f\left(x_{i_0}\right) = y_{j_0}$. Обозначим $\lambda_{j_0} = \overset{k}{\underset{j=0}{\oplus}} \lambda_{i_j}$. Так как $\overset{k}{\underset{j=0}{\oplus}} \lambda_{i_j} = \lambda_{i_0} = 0$, то $\lambda_{j_0} = 0$ для единственного j_0, и $\lambda_j \leq -\ln(n+1) \leq -\ln(k+1)$ для всех $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j_0\}$. Откуда $I_f(f)(\mu) \in I_f(Y)$. Таким образом, отображение $I_f(f): I_f(X) \to I_f(Y)$ определено корректно.

Уже было отмечено, что непрерывность отображения $I(f): I(X) \to I(Y)$ вытекает из предложения 1.2.1. Так как сужение непрерывного отображение непрерывно, то $I_f(f)$ также непрерывно. Предложение 2.1.2 доказано.

Предложение 2.1.3. Конструкция I_f является ковариантным функтором в категории компактов и их непрерывных отображений.

Доказательство. Из предложения 2.1.2 вытекает, что I_f удовлетворяет условию F1). Покажем, что конструкция I_f сохраняет композицию отображений. Пусть X, Y, Z – компакты и $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – непрерывные отображения. Пусть $\mu \in I_f(X)$ и $\varphi \in C(Z)$. Тогда

$$I_f(g\circ f)(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ(g\circ f))=\mu((\varphi\circ g)\circ f)=I_f(f)(\mu)(\varphi\circ g)=$$
$$=(I_f(g)\circ I_f(f)(\mu))(\varphi).$$

т. е. $I_f(g\circ f)=I_f(g)\circ I_f(f)$. Пусть $\mathrm{id}_X : X\to X$ – тождественное отображение, т. е. $\mathrm{id}_X(x)=x$ для всех $x\in X$. Тогда

$$I_f(\mathrm{id}_X)(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ \mathrm{id}_X)=\mu(\varphi),$$

т. е. $I_f(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{I_f(X)}$. Предложение 2.1.3 доказано.

Предложение 2.1.4. Функтор I_f сохраняет вес бесконечных компактов, т. е. для любого бесконечного компакта X имеет место равенство $w(I_f(X))=w(X)$.

Доказательство. Ясно, что отображение $\delta : X\to I_f(X)$, определенное по формуле $\delta(x)=\delta_x$, $x\in X$, есть вложение компакта $X\cong\delta(X)$ в $I_f(X)$. На самом деле, для каждого $x\in X$ имеем $\delta_x\in I_f(X)$, так как

$$\delta_x=0\odot\delta_x\oplus\bigoplus_{y\in X\setminus\{x\}}(-\infty\odot\delta_y).$$

Поэтому $w(X)\le w(I_f(X))$. Обратно, из предложения 12 [43] имеем $w(I(X))=w(X)$. Но, $I_f(X)\subset I(X)$, поэтому $w(I_f(X))\le w(I(X))$, т. е. $w(I_f(X))\le w(X)$. Предложение 2.1.4 доказано.

Предложение 2.1.5. Функтор I_f мономорфен, т. е. сохраняет инъективность отображений компактов.

Доказательство. Рассмотрим идемпотентные меры $\mu_1,\mu_2\in I_f(X)$, $\mu_1\ne\mu_2$ В силу инъективности отображения f существует функция $\varphi\in C(Y)$, такая, что $\mu_1(\varphi\circ f)\ne\mu_2(\varphi\circ f)$. Поэтому

$$I_f(\mu_1)(\varphi)=\mu_1(\varphi\circ f)\ne\mu_2(\varphi\circ f)=I_f(\mu_2)(\varphi),$$

т. е. $I_f(f)(\mu_1)\ne I_f(f)(\mu_2)$. Предложение 2.1.5 доказано.

Предложение 2.1.6. Пусть $f: X \to Y$ – непрерывное отображение «на». Тогда $I_f(f): I_f(X) \to I_f(Y)$ – также непрерывное отображение «на».

Доказательство. Непрерывность показано в предложении 2.1.2. Имеем

$$I_f(f)(\delta_x)(\varphi) = \delta_x(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) = \delta_{f(x)}(\varphi).$$

Поэтому так как $f(X) = Y$, то для каждой $y \in Y$, существует такой $x \in X$, что $f(x) = y$. Следовательно, $I_f(f)(\delta(X)) = \delta(Y)$. Для каждой меры $\nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i \odot \delta_{y_i} \in I_f(Y)$ построим меру $\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i \odot \delta_{x_i}$ на X, где $x_i \in X$ выбраны так, что $f(x_i) = y_i$. Легко видеть, что $I_f(\mu) = \nu$. Предложение 2.1.6 доказано.

Предложение 2.1.7. Функтор $I_f: Comp \to Comp$ сохраняет

a) точку,

b) пустое множество.

Доказательство. a) Пусть $x \in X$. В предложении 2.1.4 отмечено, что $\delta_x \in I_f(X)$. Для любой точки $y \in X$, $y \neq x$, имеем $\operatorname{supp} \delta_y = \{y\}$. Поэтому $\delta_y \notin I_f(\{x\})$. Следовательно, $I_f(\{x\}) = \{\delta_x\}$.

b) Пусть $X = \varnothing$. Тогда $C(X) = \varnothing$. следовательно,

$$C_p(C(X)) = C_p(\varnothing) = \varnothing.$$

Из того, что $I_f(X) \subset C_p(C(X))$ получим, что $I_f(\varnothing) \subset \varnothing$, т. е. $I_f(\varnothing) = \varnothing$. Предложение 2.1.7 доказано.

Предложение 2.1.8. Если A – замкнутое подмножество компакта X, то $I_f(A) \subset I_f(X)$. Более того, $I_f(A) = \{\mu \in I_f(X) : \operatorname{supp} \mu \subset A\}$.

Доказательство вытекает из определения понятия носителя.

Предложение 2.1.9. Если $f: X \to Y$ – непрерывное отображение между компактами и $B \subset Y$, то $I_f(f^{-1}(B)) = I_f(f)^{-1}(I_f(B))$.

Доказательство. Пусть $\mu \in I_f(f^{-1}(B))$. Согласно предложению 2.1.8 это означает, что $\mu \in I(X)$ и $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$. Следовательно, $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$.

Поэтому из предложения 2.1.8 вытекает, что $\operatorname{supp} I_f(f)(\mu) \subset B$. Следовательно, $I_f(f)(\mu) \in I_f(B)$, т. е. $\mu \in I_f(f)^{-1}(I_f(B))$.

Наоборот, пусть $\mu \in I_f(f)^{-1}(I_f(B))$. Тогда $I_f(f)(\mu) \in I_f(B)$, т. е. $\operatorname{supp} I_f(X)(\mu) \subset B$. Следовательно, согласно предложению 2.1.8 имеем $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Это означает, что $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$, откуда $\mu \in I_f(f^{-1}(B))$. Предложение 2.1.9 доказано.

Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$ – обратный спектр, индексированный элементами множества A и состоящий из компактов. Через $\lim X_\alpha$ обозначим предел этого спектра, а через $p_\alpha : \lim X_\alpha \to X_\alpha$, $\alpha \in A$ – предельные проекции. Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}, A\}$ порождает обратный спектр $\{I_f(X_\alpha), I_f(p_\alpha^{\alpha'}), A\}$, предел которого обозначим через $\lim I_f(X_\alpha)$ а предельные проекции через $pr_\alpha : \lim I_f(X_\alpha) \to I_f(X_\alpha)$. Отображения $I_f(p_\alpha) : I_f(\lim X_\alpha) \to I_f(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, порождают отображение $R_f : I_f(\lim X_\alpha) \to \lim I_f(X_\alpha)$.

Предложение 2.1.10. Отображение $R_f : I_f(\lim X_\alpha) \to \lim I_f(X_\alpha)$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. Так как сужения гомеоморфизма есть гомеоморфизм, то отображение R_f – гомеоморфизм, поскольку отображение

$$R : I(\lim X_\alpha) \to \lim I(X_\alpha)$$

является гомеоморфизмом и имеет место $R_f = R|_{I_f(\lim X_\alpha)}$. Предложение 2.1.10 доказано.

Предложение 2.1.11. Функтор I_f сохраняет пересечение, т. е. для любой пары A, B замкнутых подмножеств компакта X имеет место

$$I_f(A \cap B) = I_f(A) \cap I_f(B).$$

Доказательство. Из предложения 2.1.8 вытекает включение $I_f(A \cap B) \subset I_f(A) \cap I_f(B)$. Если $\mu \in I_f(A) \cap I_f(B)$, то по определению

$\text{supp}\mu \subset A$ и $\text{supp}\mu \subset B$, и следовательно, $\text{supp}\mu \subset A \cap B$. Откуда $\mu \in I_f(A \cap B)$, т. е. $I_f(A \cap B) \supset I_f(A) \cap I_f(B)$. Предложение 2.1.11 доказано.

Таким образом, доказано следующий основной результат параграфа.

Теорема 2.1.1. Конструкция I_f является нормальным функтором в категории компактов и их непрерывных отображений.

§2.2. Геометрические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер

В этом параграфе установлено, что если X – стягиваемый компакт, то $I_f(X)$ – также стягиваемый компакт.

Напомним, подмножество Y топологического пространства X называется ретрактом ([46], стр. 14) пространства X, если существует такое отображение $r: X \to Y$ (называемое ретракцией пространства X в Y), что ограничение $r|_Y : Y \to Y$ есть тождественное отображение $\text{id}_Y : Y \to Y$ (т. е. $r(y) = y$ для всех $y \in Y$). Если $r: X \to Y$ – ретракция и существует гомотопия $h: X \times [0,1] \to Y$ такая, что $h(x,0) = x$, $h(x,1) = r(x)$, для всех $x \in X$, то r называют деформационной ретракцией, а Y – деформационным ретрактом пространства X. Деформационная ретракция $r: X \to F$ называется сильно деформационной ретракцией, если для гомотопии $h: X \times [0,1] \to Y$ имеет место равенство $h(x,t) = x$ для всех $x \in F$ и всех $t \in [0,1]$. Пространство Y называют абсолютным ретрактом (и пишут $Y \in AR$), если для каждого гомеоморфизма h, отображающего Y на замкнутое подмножество hY какого бы то ни было пространства X, множество hY есть ретракт пространства X. Пространство Y называют абсолютным окрестностным ретрактом (и пишут $Y \in ANR$), если для каждого гомеоморфизма h, отображающего Y на замкнутое подмножество hY какого бы то ни было пространства X, существует такая окрестность U множества hY (в X), что hY является ретрактом для U.

Пусть X и Y – два компакта, лежащие в метризуемых пространствах M и N соответственно, где M, $N \in AR$. Последовательность $\{f_k\}$ отображений $f_k : M \to N$, $k = 1, 2, \ldots$, называется ([47], стр. 17) фундаментальной последовательностью из X в Y, если для каждой открытой окрестности V компакта Y (в N) существует открытая окрестность U компакта X (в M), такая, что

$$f_k\big|_U \simeq f_{k+1}\big|_U \text{ в } V \text{ почти для всех } k = 1, 2, \ldots.$$

Здесь «почти для всех» означает «для всех, кроме конечного числа». Соотношение $f_k\big|_U \simeq f_{k+1}\big|_U$ означает, что существует такая гомотопия $\varphi_k : U \times [0, 1] \to V$, что $\varphi_k(x, 0) = f_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x, 1) = f_{k+1}(x)$ для всех $x \in U$. Эту фундаментальную последовательность обозначают через $\{f_k, X, Y\}_{M,N}$ или коротко через $\boldsymbol{f}$, и пишут $\boldsymbol{f} : X \to Y$ в M, N. Говорят, что фундаментальная последовательность $\boldsymbol{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ порождена отображением $f : X \to Y$, если $f_k(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ и для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть X и Y – замкнутые подмножества метризуемых AR-пространств M и N, соответственно. Говорят ([47], стр. 29), что пространства X и Y фундаментально эквивалентны (относительно M, N), если существуют такие две фундаментальные последовательности $\boldsymbol{f} : X \to Y$ и $\boldsymbol{g} : Y \to X$, что $\boldsymbol{gf} = id_{X,M}$ и $\boldsymbol{fg} = id_{Y,N}$. Отношение фундаментальной эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому класс всех пространств распадается на попарно не пересекающиеся классы пространств, которые называются шейпами ([47], стр. 31). Следовательно, два пространства принадлежат одному и тому же шейпу тогда и только тогда, когда они фундаментально эквивалентны. Шейп, содержащий пространство X, называют шейпом пространства X и обозначают через $Sh(X)$. Понятие шейпа – топологическое, т. е. два гомеоморфных пространства имеют один и тот же шейп. Известно, что для двух окрестностных ретрактов A и B справедливо $Sh(A)=Sh(B)$ тогда и только тогда, когда они гомотопически эквивалентны.

Возьмем произвольную меру $\mu=\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\odot\delta_{x_i}\in I_f(X)$. Пусть $\lambda_{i_0}=0$. Тогда $\lambda_i\le-\ln(n+1)$ для всех $i\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_0\}$. Идемпотентной вероятностной мере μ сопоставим точку $\delta_{x_{i_0}}$ компакта $\delta(X)$. Полученное соответствие $I_f(X)\to\delta(X)$ обозначим через $r^{I(X)}_{\delta(X)}$. Отображение $r^{I(X)}_{\delta(X)}:I_f(X)\to\delta(X)$ определено корректно. Из построения отображения $r^{I(X)}_{\delta(X)}$ легко извлекается, что $r^{I(X)}_{\delta(X)}(\delta_x)=\delta_x$ для каждой $x\in X$, т. е. точки пространства $\delta(X)$ при отображении $r^{I(X)}_{\delta(X)}$ остаются неподвижными. Этим установлено, что $r^{I(X)}_{\delta(X)}$ – ретракция. Следующий результат усиливает это утверждение.

Теорема 2.2.1. Для произвольного компакта X подпространство $\delta(X)$ является сильным деформационным ретрактом компакта $I_f(X)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $h:I_f(X)\times[0,1]\to I_f(X)$, определенное формулой

$$h(\mu,t)=h_t(\mu)=\big(\ln(1-t)-\ln t\oplus\ln(1-t)\big)\odot\mu\oplus\big(\ln t-\ln t\oplus\ln(1-t)\big)\odot r^{I(X)}_{\delta(X)}(\mu),$$

$$(\mu,t)\in I_f(X)\times[0,1].$$

Легко проверить, что отображение h определено корректно. Более того, $h_0=\mathrm{id}_{I_f(X)}$ и $h_1=r^{I(X)}_{\delta(X)}$, т. е. h – гомотопия, связывающая отображений $\mathrm{id}_{I_f(X)}$ и $r^{I(X)}_{\delta(X)}$. Далее, имеем

$$h(\delta_x,t)=\big(\ln(1-t)-\ln t\oplus\ln(1-t)\big)\odot\delta_x\oplus\big(\ln t-\ln t\oplus\ln(1-t)\big)\odot r^{x}_{f}(\delta_x)=\delta_x,$$

т. е. $h_t(\delta_x)=\delta_x$ для всех $\delta_x\in\delta(X)$ и $t\in[0,1]$. Таким образом, $\delta(X)$ является сильным деформационным ретрактом компакта $I_f(X)$. Теорема 2.2.1 доказана.

Из теоремы 2.2.1 и утверждения (5.4) из [41] (стр. 32) получим

Следствие 2.2.1. Для произвольного компакта X имеет место $Sh(X) = Sh(I_f(X))$

Лемма 2.2.1. Для произвольного конечного компакта X множество $I_f(X)$ является окрестностным ретрактом компакта $I(X)$.

Доказательство. Для каждой меры Дирака δ_x, $x \in X$, построим окрестность

$$O_{\delta_x} = \left\{ \mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I(X) : \lambda_i = 0 \text{ при } x_i = x \text{ и } \lambda_i < -\ln 2 \text{ при } x_i \neq x \right\},$$

и рассмотрим открытое в $I(X)$ множество $\bigcup_{x \in X} O_{\delta_x}$. Ясно, что $O_{\delta_x} \cap O_{\delta_y} = \varnothing$ при $x \neq y$. Кроме того, имеем $I_f(X) \subset \bigcup_{x \in X} O_{\delta_x}$. Покажем, что $I_f(X)$ является ретрактом множества $\bigcup_{x \in X} O_{\delta_x}$. Если $\nu \in \bigcup_{x \in X} O_{\delta_x}$, где $\nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}$, $\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathbf{1}$, $\lambda_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, n$, то очевидно, что $\lambda_{i_0} = 0$ для некоторого единственного i_0 и, следовательно, $r_{\delta(X)}^{I(X)}(\nu) = \delta_{x_{i_0}}$. Определим отображение $r : \bigcup_{x \in X} O_{\delta_x} \to I_f(X)$ по правилу

$$r(\nu) = \begin{cases} 0 \odot \delta_{x_{i_0}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \left(-\ln(n+1)\right) \odot \delta_{x_i}, & \text{если } \lambda_i \geq -\ln(n+1) \text{ для некоторого } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, & \text{если } \lambda_i \leq -\ln(n+1) \text{ для всех } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}. \end{cases} \quad (2.2.1.)$$

Отображение r определено корректно. Оно непрерывно. Кроме того, $r(\mu) = \mu$ для любой меры $\mu \in I_f(X)$. Значит, отображение r является ретракцией. Лемма 2.2.1 доказана.

Напомним ([46], стр. 29) что множество $A \subset X$ называется стягиваемым по пространству X во множество $B \subset X$, если вложение $i_A : A \to X$ гомотопно некоторому отображению $f : A \to X$, такому, что $f(A) \subset B$. Если при этом B состоит из одной точки, то говорят, что A стягиваемо по X. Ясно, если существует гомотопия $h : A \times [0;1] \to A$, такая, что $h(y,0) = i_A$, и $h(y,1) = \{\text{точка}\}$, то A стягивемо по X.

Топологическое пространство X называется [46] локально стягиваемым в точке $x_0 \in X$, если всякая её окрестность U точки x_0 содержит окрестность U_0, стягиваемую по U к точке. Пространство X называется локально стягиваемым, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

Теорема 2.2.2. Функтор I_f сохраняет стягиваемость компактов, т. е. если X – стягиваемый компакт, то $I_f(X)$ – также стягиваемый компакт.

Доказательство. Мы покажем больше: функтор I_f сохраняет гомотопность отображений. Пусть h_0, $h_1 : X \to Y$ – гомотопные отображения, $h : X \times [0; 1] \to Y$ – гомотопия, связывающая отображений h_0, h_1, т. е. $h(x,0) = h_0(x)$, $h(x,1) = h_1(x)$. Вложение $i_{t_0} : X \times \{t_0\} \to X \times I$, определенное равенством $i_{t_0}(x,t_0) = (x,t_0)$, $x \in X$, определяет вложение $I_f(i_{t_0}) : I_f(X \times \{t_0\}) \to I_f(X \times I)$. Но, для каждого $t_0 \in [0; 1]$ пространство $I_f(X \times \{t_0\})$ естественно гомеоморфно $I_f(X) \times \{t_0\}$. Этот гомеоморфизм можно осуществить, как легко видеть, с помощью соответствия $\mu_{t_0} \leftrightarrow (\mu, t_0)$, где $\mu_{t_0} = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{(x_i, t_0)} \in I_f(X \times \{t_0\})$ и $\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_f(X)$.

Определим теперь отображение $I_f(h) : I_f(X) \times [0; 1] \to I_f(Y)$ равенством

$$I_f(h)\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, t \right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h(x_i, t)}.$$

Имеем

$$I_f(h)\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, 0 \right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h(x_i, 0)} = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h_0(x_i)} = I_f(h_0)\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \right),$$

$$I_f(h)\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i \odot \delta_{x_i}, 1\right)=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i \odot \delta_{h(x_i,1)}=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i \odot \delta_{h_1(x_i)}=I_f(h_1)\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i \odot \delta_{x_i}\right),$$

т. е. $I_f(h)(\mu, 0)=I_f(h_0)(\mu)$ и $I_f(h)(\mu,1)=I_f(h_1)(\mu)$ для любой $\mu \in I_f(X)$. Иными словами, $I_f(h)$ – гомотопия, связывающая отображений $I_f(h_0)$ и $I_f(h_1)$. Таким образом, функтор I_f сохраняет гомотопность отображений. Теорема 2.2.2 доказана.

§ 2.3. Абсолютные окрестностные ретракты компактов и функтор I_f

В данном параграфе установлено, что для компакта X пространство $I_f(X)$ является абсолютным окрестностным ретрактом тогда и только тогда, когда X – абсолютный окрестностный ретракт.

Лемма 2.3.1. Для компакта X множество $I_f(X)$ является окрестностным ретрактом подпространства $I_\omega(X) \subset I(X)$.

Доказательство. Рассмотрим следующее множество

$$O_{\delta_x}=\left\{\mu=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X): \lambda_i=0 \text{ при } x_i=x \text{ и } \lambda_i<-\ln 2 \text{ при } x_i \neq x,\ i\in\{1,\dots,n\},\ n=1,2,\dots\right\}.$$

Имеет место $O_{\delta_x} \cap O_{\delta_y}=\varnothing$ при $x \neq y$. Очевидно, что пересечение

$$\bigcap_{x\in X}\left(I_\omega(X)\setminus O_{\delta_x}\right)=\left\{\mu=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X): \lambda_i \geq -\ln 2,\ i\in\{1,\dots,n\},\ n=1,2,\dots\right\}$$

замкнуто в $I_\omega(X)$. По построению имеем $I_f(X)\subset \bigcup_{x\in X} O_{\delta_x}$. Значит, $\bigcup_{x\in X} O_{\delta_x}$ – открытая окрестность компакта $I_f(X)$ в $I_\omega(X)$. Так как $O_{\delta_x} \cap O_{\delta_y}=\varnothing$ при $x \neq y$, то для $\nu \in \bigcup_{x\in X} O_{\delta_x}$ существует единственная $x \in X$ такая, что $\nu \in O_{\delta_x}$. Построим отображение $r:\bigcup_{x\in X} O_{\delta_x} \to I_f(X)$ по формуле (2.2.1). Легко проверить, отображение r является ретракцией. Лемма 2.3.1 доказана.

Теорема 2.3.1. Пусть X – ANR-компакт. Тогда $I_f(X)$ – также ANR-компакт.

Доказательство. Так как всякий абсолютный ретракт является абсолютным окрестностным ретрактом, то достаточно установить справедливость заключения теоремы для абсолютных окрестностных ретрактов.

Пусть X – окрестностный ретракт некоторого компакта Y, U – открытое в Y множество такое, что $U \supset X$ и для него существует ретракция $r: U \to X$.

Рассмотрим открытое в $I_f(Y)$ множество $\bigcup\limits_{x\in U} O_{\delta_x}$. Ясно, что $I_f(X) \subset \bigcup\limits_{x\in U} O_{\delta_x}$. Как уже было отмечено выше, что если $\nu \in \bigcup\limits_{x\in X} O_{\delta_x}$ то существует единственная $x \in X$, что $\nu \in O_{\delta_x}$. Для идемпотентной вероятностной меры $\nu = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{y_i} \in \bigcup\limits_{x\in U} O_{\delta_x} \subset I_f(Y)$, для которой $\lambda_{i_0} = 0$ положим

$$r_U^Y(\nu) = \left(\lambda_{i_0} \oplus \bigoplus_{y_i \in Y\setminus U} \lambda_i\right) \odot \delta_{y_{i_0}} \oplus \bigoplus_{y_i \in U} \lambda_i \odot \delta_{y_i}.$$

Очевидно, что $r_U^Y(\nu) \in \bigcup\limits_{x\in X} O_{\delta_x}$. Кроме того, $r_U^Y(\nu) = \nu$ для всякой меры $\nu \in I_f(Y)$ такой, что $\operatorname{supp}\nu \subset U$. Так как операция взятия максимума непрерывна, то построенное отображение $r_U^Y : \bigcup\limits_{x\in U} O_{\delta_x} \to \bigcup\limits_{x\in U} O_{\delta_x}$ непрерывно. Далее, положим

$$R\left(r_U^Y(\nu)\right) = \left(\lambda_{i_0} \oplus \bigoplus_{y_i \in Y\setminus U} \lambda_i\right) \odot \delta_{r\left(y_{i_0}\right)} \oplus \bigoplus_{y_i \in U} \lambda_i \odot \delta_{r(y_i)}.$$

По построению $R\left(r_U^Y(\nu)\right) \in I_f(X)$. Отображение $R: \bigcup\limits_{x\in U} O_{\delta_x} \to I_f(X)$ определено корректно. Так как ретракция $r: U \to X$ непрерывна, то непрерывно отображение R. Легко проверить, что $R\left(r_U^Y(\nu)\right) = \nu$ для всякой меры $\nu \in I_f(X)$. Таким образом, $R \circ r_U^Y : \bigcup\limits_{x\in U} O_{\delta_x} \to I_f(X)$ – искомая ретракция. Итак, множество $I_f(X)$ – окрестностный ретракт компакта $I_f(Y)$.

Теперь применение леммы 2.3.1 и утверждения (1.3) из работы [40] (стр. 114) завершает доказательство теоремы 2.3.1.

На функториальном языке теорема 2.3.1 выглядит так:

Следствие 2.3.1. Функтор I_f сохраняет ANR-компакты.

Из теорем 2.2.1 и 2.3.1 вытекает важный результат

Следствие 2.3.2. Пусть X – компакт. $I_f(X) \in ANR$ тогда и только тогда, когда $X \in ANR$.

Далее, следующие утверждения также извлекается из теоремы 2.3.1

Следствие 2.3.3 Функтор I_f сохраняет свойство компакта быть Q-многообразием или гильбертовым кирпичом.

Следствие 2.3.4. Функтор I_f сохраняет свойство слоев отображений быть ANR-компактом, компактным Q-многообразием и гильбертовым кирпичом (конечной суммой гильбертовых кирпичей).

ГЛАВА III. ПРОСТРАНСТВО ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И КОМПАКТЫ ДУГУНДЖИ

Понятие компакта Дугунджи, введенное А. Пелчинским [65], оказалось весьма полезным и привело к появлению новых методов в общей топологии. Так, Р. Хейдон [19] показал, что всякий компакт Дугунджи является диадическим компактом, класс которых П. С. Александров определил как непрерывные образы обобщенных канторовых дисконтинуумов. А используемое им представление произвольного компакта Дугунджи в виде предела трансфинитного обратного спектра, короткие проекции которого открыты и имеют метризуемые ядра, показывает, что любая компактная топологическая группа является компактом Дугунджи в силу наличия ее разложения в ряд Ли, построенного Л. С. Понтрягиным. В результате дальнейшего развития, Е. В. Щепиным [72] получено спектральный метод исследования компактов. Анализ характеризации компактов Дугунджи, предложенный Щепиным, позволил В. В. Успенскому [69] определить d-пространства (od-пространства) как классы не компактных пространств, соответствующих классу компактов Дугунджи. Введенное понятие позволило рассматривать с единой точки зрения топологические группы, произведения пространств со счетной сетью и компакты Дугунджи.

В данной главе для заданной группы (G, X, α) топологических преобразований на тихоновском пространстве X построена группа $\left(I(G,X), I(X), I(\alpha)\right)$ топологических преобразований на пространстве $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер. Установлено, что если диагональное произведение Δf_p заданного семейства $\left\{ f_p, f_{pq}; \mathfrak{A}\right\}$ непрерывных отображений является вложением, то диагональное произведение $\Delta I_n\left(f_p\right)$ семейства $\left\{I_n\left(f_p\right), I_n\left(f_{pq}\right); \mathfrak{A}\right\}$ непрерывных отображений также является вложением. Далее, получено условие для того, чтобы пространство идемпотентных вероятностных мер было компактом Дугунджи.

В течении данной главы под пространством будем подразумевать Тихоновское пространство.

§3.1. Эквивалентность пространств идемпотентных вероятностных мер

Для пространства X положим

$$I(\mathrm{Homeo}(X)) = \{I(g) : g \in \mathrm{Homeo}(X)\}.$$

Ясно, что для произвольного пространства X имеем

$$I(\mathrm{Homeo}(X)) \subset \mathrm{Homeo}(X).$$

Отметим, что для пространства, содержащего более одной точки, это включение обратить нельзя.

Пример 3.1.1. Пусть $X = \{a,b\}$ – двухточечное дискретное пространство. Тогда $I(X)$ гомеоморфно max-plus-отрезку $[(-\infty,0),(0,-\infty)]$ с вершинами в точках $\delta_b = (-\infty)\odot\delta_a \oplus 0\odot\delta_b$, $\delta_a = 0\odot\delta_a \oplus (-\infty)\odot\delta_b$.

$\mathrm{Homeo}(X)$ состоит из двух элементов h_1, $h_2 : X \to X$, определенных по правилам $h_1(a) = a$, $h_1(b) = b$ и $h_2(a) = b$, $h_2(b) = a$. Им соответствуют гомеоморфизмы $I(h_i) \in \mathrm{Homeo}(I(X))$, которые определяются равенствами $I(h_i)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ h_i)$, $\varphi \in C(X)$, $i = 1,2$. При этом для

$$\lambda(a) \geq -\infty, \qquad \lambda(b) \geq -\infty, \qquad \lambda(a) \oplus \lambda(b) = 0$$

имеем

$$I(h_1)(\lambda(a)\odot\delta_a \oplus \lambda(b)\odot\delta_b) = \lambda(a)\odot\delta_a \oplus \lambda(b)\odot\delta_b$$

и

$$I(h_2)(\lambda(a)\odot\delta_a \oplus \lambda(b)\odot\delta_b) = \lambda(a)\odot\delta_b \oplus \lambda(b)\odot\delta_a.$$

Определим отображение $\Phi : I(X) \to I(X)$ равенством

$$\Phi(\lambda(a)\odot\delta_a \oplus \lambda(b)\odot\delta_b) = (2\lambda(a))\odot\delta_a \oplus (2\lambda(b))\odot\delta_b.$$

Ясно, что $\Phi \in \mathrm{Homeo}\big(I(X)\big)$. Легко проверить, что $\Phi \neq I(h_i)$, $i = 1,2$, т. е. не существует $h \in \mathrm{Homeo}(X)$, такой, чтобы выполнялось бы равенство $\Phi = I(h)$. С другой стороны, $\Phi\big|_X = h_1$.

Аналогично, можно было построить гомеоморфизм $\Psi : I(X) \to I(X)$ такой, что $\Psi\big|_X = h_2$, но не существует $h \in \mathrm{Homeo}(X)$, такой, чтобы было бы $\Psi = I(h)$.

Пусть X – компакт и (G, X, α) – группа топологических преобразований. Для пространства X и группы G положим

$$I(G,X) = \left\{\Phi \in \mathrm{Homeo}\big(I(X)\big) : \text{существует } g \in G \text{ такой, что } \Phi\big|_X = g\right\} \qquad (3.1.1)$$

Ясно, что для пространства X и группы G множество $I(G,X)$ – моноид относительно операции композиции гомеоморфизмов, а $I(\alpha_{\mathrm{e}}) = I(\mathrm{id}_X) \equiv \mathrm{id}_{I(X)} = \mathrm{e}_{I(G,X)}$ – нейтральный элемент моноида $I(G,X)$. Ясно, что $I(g) \in I(G,X)$, для $g \in G$.

Замечание 3.1.1. Для корректного понимания определения (3.1.1) отметим, что запись $\Phi\big|_X$ надо понимать как $\Phi\big|_{\delta(X)}$, а $g(\delta_x) = g(x)$. Тогда

$$\Phi\big|_{\delta(X)}(\delta_x) = \Phi\big|_X(\delta_x) = g(\delta_x) = g(x).$$

Пусть $\mu \in I(X)$ и $\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle$ – окрестность μ, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(X)$, $\varepsilon > 0$. Через $\mathfrak{B}$ обозначим базу топологии поточечной сходимости на $I(X)$. Для $\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle$ построим множество

$$O_{\langle \mu;\varphi_1,\dots,\varphi_n;\varepsilon\rangle} = \left\{\Phi \in I(G,X) : \Phi(\mu) \in \langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle\right\}.$$

Отметим, что имеет место

$$O_{\langle \mu_1;\varphi_{11},\dots,\varphi_{1n_1};\varepsilon_1\rangle} \cup O_{\langle \mu_2;\varphi_{21},\dots,\varphi_{2n_2};\varepsilon_2\rangle} = O_{\langle \mu_1;\varphi_{11},\dots,\varphi_{1n_1};\varepsilon_1\rangle \cup \langle \mu_2;\varphi_{21},\dots,\varphi_{2n_2};\varepsilon_2\rangle}.$$

Положим

$$\mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)=\{\bigcap_{l=1}^{m}O_{\cup\left\langle\mu_{t_l};\varphi_{t_l 1},\ldots,\varphi_{t_l n_l};\varepsilon_l\right\rangle}:\left\{\left\langle\mu_{t_l};\varphi_{t_l 1},\ldots,\varphi_{t_l n_l};\varepsilon_l\right\rangle\right\}\subset\mathfrak{B},m\in\mathbb{N}\}.$$

Пусть

$$\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)=\left\{O\Phi:O\in\mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)\right\},\qquad \Phi\in I(G,X),$$

где

$$O_{\langle\mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}\Phi=\left\{\Phi\circ\Psi:\Psi\in O\right\}\equiv\left\{\Upsilon\in I(G,X):\Upsilon(\mu)\in\left\langle\Phi(\mu);\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\right\rangle\right\}.$$

Таким образом, получили совокупность $\left\{\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)\right\}_{\Phi\in I(G,X)}$ семейств подмножеств множества $I(G,X)$. Эта совокупность является системой окрестностей в $I(G,X)$, т. е. она обладает следующими свойствами:

(ВР1) Для всякого $\Phi\in I(G,X)$ имеем $\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)\neq\varnothing$ и для всякого $O\Phi\in\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)$ имеем $\Phi\in O\Phi$.

(ВР2) Если $\Phi\in U\in\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Psi)$ то существует такое $V\in\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)$, что $V\subset U$.

(ВР3) Для любых $O_1\Phi$, $O_2\Phi\in\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)$ существует такое $O\Phi\in\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)$, что $O\Phi\subset O_1\Phi\bigcap O_2\Phi$.

Следующее утверждение является с одной стороны, важным, а с другой стороны, носит самостоятельный характер.

Лемма 3.1.1. Совокупность $\left\{\mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)\right\}_{\Phi\in I(G,X)}$ семейств подмножеств множества $I(G,X)$ является системой окрестностей в $I(G,X)$.

Доказательство состоит из проверки свойств (ВР1) – ВР3).

Установим, что $\mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)\neq\varnothing$. Но, это вытекает, из того, что $\mathrm{id}_{I(X)}(\mu)=\mu\in\left\langle\mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\right\rangle$, и тогда $\mathrm{id}_{I(X)}\in O_{\langle\mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}$, которое обеспечивает $O_{\langle\mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}\neq\varnothing$ и $O_{\langle\mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}\in\mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)$, т.е. $\mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)\neq\varnothing$.

Для каждого $\Phi \in I(G,X)$ и $\Psi = \mathrm{id}_{I(X)} \in O \in \mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)$ имеем $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{I(X)} \circ \Phi = \Phi \in O\Phi$. Следовательно, $O\Phi \in \mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi) \neq \varnothing$. Свойство (BP1) доказано.

Пусть $\Phi \in O_{\langle \mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}(\Psi) \in \mathcal{N}_{I(G,X)}(\Psi)$. Тогда по построению множества $O_{\langle \mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}(\Psi)$ имеют место следующие неравенства $\left|\Phi(\mu)(\varphi_i) - \Psi(\mu)(\varphi_i)\right| < \varepsilon$, $i = 1,\ldots,n$. Для каждого $i = 1,\ldots,n$ пусть

$$a_i = \left|\Phi(\mu)(\varphi_i) - \Psi(\mu)(\varphi_i)\right|.$$

Тогда $0 \le a_i < \varepsilon$, и

$$\left|\Phi(\mu)(\varphi_i) - \Psi(\mu)(\varphi_i)\right| < \tfrac{a_i+\varepsilon}{2},\ i = 1,\ldots,n$$

Для $\delta = \min\left\{\tfrac{\varepsilon - a_i}{2} : i = 1,\ldots,n\right\} > 0$ и произвольного $\Upsilon \in O_{\langle \mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\delta\rangle}(\Phi) \in \mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)$ имеем

$$\left|\Upsilon(\mu)(\varphi_i) - \Phi(\mu)(\varphi_i)\right| < \delta \le \tfrac{\varepsilon - a_i}{2}.$$

Следовательно,

$$\left|\Upsilon(\mu)(\varphi_i) - \Psi(\mu)(\varphi_i)\right| \le$$

$$\le \left|\Upsilon(\mu)(\varphi_i) - \Phi(\mu)(\varphi_i)\right| + \left|\Phi(\mu)(\varphi_i) - \Psi(\mu)(\varphi_i)\right| < \tfrac{\varepsilon - a_i}{2} + \tfrac{a_i + \varepsilon}{2} = \varepsilon$$

что обеспечит $\Upsilon \in O_{\langle \mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}(\Psi)$. Но, это означает, что

$$O_{\langle \mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\delta\rangle}(\Phi) \subset O_{\langle \mu;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}(\Psi).$$

Свойство (BP2) доказано.

Пусть $O_1 \in O_{\langle \mu_1;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\varepsilon_1\rangle}\Phi$, $O_2 \in O_{\langle \mu_2;\psi_1,\ldots,\psi_n;\varepsilon_2\rangle}\Phi$. По конструкцию $\Phi \in O_1\Phi \cap O_2\Phi$, т. е. $O_1\Phi \cap O_2\Phi \neq \varnothing$. Но, тогда непустым является и пересечение $O_{\left\langle \mu_1;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\frac{\varepsilon_1}{2}\right\rangle}\Phi \cap O_{\left\langle \mu_2;\psi_1,\ldots,\psi_n;\frac{\varepsilon_2}{2}\right\rangle}\Phi$, которое содержит Φ и содержится в $O_1\Phi \cap O_2\Phi$.

Остаётся заметить, что

$$O_{\left\langle \mu_1;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\frac{\varepsilon_1}{2}\right\rangle}\Phi \cap O_{\left\langle \mu_2;\psi_1,\ldots,\psi_n;\frac{\varepsilon_2}{2}\right\rangle}\Phi = (O_{\left\langle \mu_1;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\frac{\varepsilon_1}{2}\right\rangle} \cap O_{\left\langle \mu_2;\psi_1,\ldots,\psi_n;\frac{\varepsilon_2}{2}\right\rangle})\Phi.$$

Тогда $O\Phi = O_{\left\langle \mu_1;\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\frac{\varepsilon_1}{2}\right\rangle}\Phi \cap O_{\left\langle \mu_2;\psi_1,\ldots,\psi_n;\frac{\varepsilon_2}{2}\right\rangle}\Phi \in \mathcal{N}_{I(G,X)}(\Phi)$ и $O\Phi \in O_1\Phi \cap O_2\Phi$. Свойство (ВР3) установлено.

Теперь, применяя предложение 1.2.3 из [73], стр. 47, завершаем доказательство леммы 3.1.1.

Теперь для заданного действия $\alpha:(G,X)\times X \to X$ определим действие

$$I(\alpha): I(G,X)\times I(X)\to I(X)$$

по правилу

$$I(\alpha)(\Phi,\mu)=\Phi(\mu), \tag{3.1.2}$$

где $(\Phi,\mu)\in I(G,X)\times I(X)$. В частности, для пар вида $(I(g),\mu)\in I(G,X)\times I(X)$, где $g\in G\subset \mathrm{Homeo}(X)$, имеем

$$I(\alpha)(I(g),\mu)(\varphi)=I(g)(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ g), \qquad \varphi\in C(X),$$

иными словами, предложенное нами равенство (3.1.2) для индуцированных гомеоморфизмов даёт равенство (1.2.2).

Ясно, что

$$\ker I(\alpha)=\left\{\mathrm{id}_{I(X)}\right\}.$$

Рассмотрим подмножество

$$G_I(X)=\left\{I(g): g\in G\right\}\subset I(G,X).$$

$G_I(X)$ считается подпространством пространства $I(G,X)$.

Теорема 3.1.1. Для любой группы топологических преобразований (G,X,α) множество $G_I(X)$ является нормальным делителем моноида $I(G,X)$. При этом для g, g_1, $g_2\in G$ имеем

$$I(\alpha_{g_1})I(\alpha_{g_2})=I(\alpha_{g_1g_2}) \text{ и } I(\alpha_g)^{-1}=I(\alpha_{g^{-1}}).$$

Доказательство. Из ковариантности функтора I следует, что для каждой $\mu\in I(X)$ справедливо

$$I\left(\alpha_{g_1}\right)I\left(\alpha_{g_2}\right)(\mu)(\varphi)=I\left(\alpha_{g_1}\right)\left(I\left(\alpha_{g_2}\right)(\mu)\right)(\varphi)=I\left(\alpha_{g_2}\right)(\mu)\left(\varphi\circ\alpha_{g_1}\right)=$$

$$=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g_1}\circ\alpha_{g_2}\right)=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g_1g_2}\right)=I\left(\alpha_{g_1g_2}\right)(\mu)(\varphi),\quad \varphi\in C(X).$$

Далее, для g, $g^{-1}\in G$ имеем

$$I\left(\alpha_g\right)I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)(\mu)(\varphi)=I\left(\alpha_g\right)\left(I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)(\mu)\right)(\varphi)=I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)(\mu)\left(\varphi\circ\alpha_g\right)=$$

$$=\mu\left(\varphi\circ\alpha_g\circ\alpha_{g^{-1}}\right)=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{gg^{-1}}\right)=\mu(\varphi);$$

с другой стороны,

$$I(\alpha_{\mathrm{e}})(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ\alpha_{\mathrm{e}})=\mu(\varphi),\quad \varphi\in C(X)$$

т. е. $I\left(\alpha_g\right)I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)=I(\alpha_{\mathrm{e}})$. Точно также можно показать, что $I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)I\left(\alpha_g\right)=I(\alpha_{\mathrm{e}})$. Далее, для g, $g^{-1}\in G$ имеем

$$I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)I\left(\alpha_g\right)(\mu)(\varphi)=I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)\left(I\left(\alpha_g\right)(\mu)\right)(\varphi)=I\left(\alpha_g\right)(\mu)\left(\varphi\circ\alpha_{g^{-1}}\right)=$$

$$=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g^{-1}}\circ\alpha_g\right)=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g^{-1}g}\right)=\mu(\varphi\circ\alpha_{\mathrm{e}})=I(\alpha_{\mathrm{e}})(\mu)(\varphi),$$

т. е. $I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)I\left(\alpha_g\right)=I(\alpha_{\mathrm{e}})$. Следовательно, $I\left(\alpha_g\right)^{-1}=I\left(\alpha_{g^{-1}}\right)$, $g\in G$.

Установим ассоциативность операции $I(\alpha_{g_2})I(\alpha_{g_1})=I(\alpha_{g_2g_1})$ на $I(G,X)$ Пусть $g_1,g_2,g_3\in I(G,X)$.

$$\left(I\left(\alpha_{g_3}\right)I\left(\alpha_{g_2}\right)\right)\left(I\left(\alpha_{g_1}\right)(\mu)\right)(\varphi)=I\left(\alpha_{g_3g_2}\right)\left(I\left(\alpha_{g_1}\right)(\mu)\right)(\varphi)=I\left(\alpha_{g_1}\right)(\mu)\left(\varphi\circ\alpha_{g_3g_2}\right)=$$

$$=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g_3g_2}\circ\alpha_{g_1}\right)=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{(g_3g_2)g_1}\right)=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g_3(g_2g_1)}\right)=$$

$$=\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g_3}\circ\alpha_{g_2g_1}\right)=I\left(\alpha_{g_2g_1}\right)\mu\left(\varphi\circ\alpha_{g_3}\right)=$$

$$=I\left(\alpha_{g_3}\right)\left(I\left(\alpha_{g_2g_1}\right)(\mu)\right)(\varphi)=I\left(\alpha_{g_3}\right)\left(I\left(\alpha_{g_2}\right)I\left(\alpha_{g_1}\right)(\mu)\right)(\varphi),\quad \varphi\in C(X),$$

т. е. $\left(I\left(\alpha_{g_3}\right)I\left(\alpha_{g_2}\right)\right)I\left(\alpha_{g_1}\right)=I\left(\alpha_{g_3}\right)\left(I\left(\alpha_{g_2}\right)I\left(\alpha_{g_1}\right)\right)$.

Пусть $\Phi\in I(G,X)$. Тогда

$$\left(\Phi\left(I\left(\alpha_g\right)\Phi^{-1}\right)\right)(\mu)(\varphi)=\left(\Phi I\left(\alpha_g\right)\right)\left(\Phi^{-1}(\mu)\right)(\varphi)=\Phi\left(\Phi^{-1}(\mu)\right)\left(\varphi\circ\alpha_g\right)=$$

$$= \Phi\Phi^{-1}(\mu)(\varphi \circ \alpha_g) = \mu(\varphi \circ \alpha_g) = I(\alpha_g)(\mu)(\varphi), \quad \varphi \in C(X)$$

т. е. $\Phi\left(I(\alpha_g)\right)\Phi^{-1} = I(\alpha_g) \in G_I(X)$.

Теорема 3.1.1 доказана полностью.

Отметим, что исходная группа G на X изоморфна группе $G_I(X)$ на $I(X)$. Поэтому из теоремы 3.1.1 вытекает важное утверждение.

Следствие 3.1.1. Для любой группы топологических преобразований (G, X, α) группа G является нормальным делителем моноида $I(G, X)$.

Теорема 3.1.2. Если множество $A \subset X$ является G-инвариантным, то множество $I(A)$ является $I(G, X)$-инвариантным.

Доказательство. Пусть $G(A) = A$. Тогда для каждого $g \in G$ сужение $\alpha_g\big|_A$ является гомеоморфизмом подпространства $A \subset X$ на себя. Поэтому

$$I(G, X)\left(I(A)\right) = \left\{\Phi(\mu) : \Phi \in I(G, X),\ \mu \in I(A)\right\}.$$

Но, так как для каждого $\Phi \in I(G, X)$ существует $g \in G$, такой, что $\Phi\big|_X = g$, то $\operatorname{supp}\Phi(\mu) \subset A$. Последнее включение вытекает из следующей леммы, которая имеет самостоятельный характер.

Лемма 3.1.2. Для каждых $\mu \in I(X)$ и $\Phi \in I(G, X)$ имеет место

$$\operatorname{supp}\Phi(\mu) = \left\{g(x) : x \in \operatorname{supp}\mu\right\},$$

где g – элемент группы G такой, что $\Phi\big|_X = g$.

Доказательство леммы вытекает из следующего равенства

$$(\Phi \circ \delta)(\operatorname{supp}\mu) = \Phi\big|_{\delta(X)}\left(\left\{\delta_x : x \in \operatorname{supp}\mu\right\}\right) = g(\operatorname{supp}\mu) = \left\{g(x) : x \in \operatorname{supp}\mu\right\}.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Итак, получено, что $\Phi(\mu) \in I(A)$. Значит, $I(G, X)\left(I(A)\right) \subset I(A)$.

Обратное включение вытекает из того, что $\mathrm{id}_{I(X)} \in I(G, X)$. Поэтому, для каждой $\mu \in I(A)$ имеем $\mu = \mathrm{id}_{I(X)}(\mu) \in I(G, X)\left(I(A)\right)$, следовательно, $I(A) \subset I(G, X)\left(I(A)\right)$.

Таким образом, $I(G,X)(I(A)) = I(A)$. Теорема 3.1.2 доказана.

G-инвариантность множества $A \subset X$ в теореме 3.1.2 существенна.

Пример 3.1.2. Рассмотрим компакт $X = [0,1]$, его подмножество $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ и гомеоморфизм $h: X \to X$, заданное равенством $h(x) = 1 - x$. Тогда $h\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\right) = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$, следовательно, $h\big|_A$ не является гомеоморфизмом подпространства $A \subset X$ на себя.

Следующие важные утверждения легко извлекаются из леммы 3.1.2.

Следствие 3.1.2. Пусть $\Phi \in I(G,X)$. Тогда для каждой меры $\mu \in I(X)$, допускающей разложение $\mu = \oplus \lambda(x) \odot \delta_x$, мера $\Phi(\mu)$ допускает разложение следующего вида

$$\Phi(\mu) = \underset{x \in \operatorname{supp}\mu}{\oplus} \gamma(\lambda(x)) \odot \delta_{g(x)},$$

где g – элемент группы G такой, что $\Phi\big|_X = g$, а $\gamma: [-\infty, 0] \to [-\infty, 0]$ – некоторая полунепрерывная сверху функция.

Следствие 3.1.3. Для каждых $\mu \in I(X)$ и $g \in G$ имеет место

$$\operatorname{supp} I(g)(\mu) = \{g(x) : x \in \operatorname{supp}\mu\}.$$

Отметим, что для транзитивного действия α действие $I(\alpha)$ группы $I(G,X)$ транзитивно. Однако, это утверждение не верно для сужения $I(\alpha)\big|_{G_I(X)}$ действия $I(\alpha)$ на нормальный делитель $G_I(X)$.

Пример 3.1.3. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ (все эти три точки – различные). Пусть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

– группа перестановок множества $\{1,2,3\}$. Действие $\alpha: G \times X \to X$ группы G на пространстве X определим по правилу $\alpha(g, x_i) = x_{g(i)}$. Тогда α – транзитивное действие. При этом $\alpha_g(x_i) = x_{g(i)}$. Ясно, что

$I\left(\alpha_g\right)\left(0\odot\delta_{x_1}\oplus 0\odot\delta_{x_2}\oplus 0\odot\delta_{x_3}\right)=0\odot\delta_{x_1}\oplus 0\odot\delta_{x_2}\oplus 0\odot\delta_{x_3}$ для каждого $g\in G$. Таким образом, для никакой идемпотентной вероятностной меры ν не существует элемент $I\left(\alpha_g\right)$ нормального делителя $G_I(X)$ группы $I(G,X)$, для которого было бы $I\left(\alpha_g\right)(\mu)=\nu$, здесь $\mu=0\odot\delta_{x_1}\oplus 0\odot\delta_{x_2}\oplus 0\odot\delta_{x_3}$. Следовательно, $I(\alpha)\big|_{G_I(X)}$ не является транзитивным.

Теорема 3.1.3. Если $h:X\to Y$ – эквивариантное отображение G-пространств X и Y, то $I(h):I(X)\to I(Y)$ эквивариантное отображение $I(G,\cdot)$-пространств.

Доказательство. Имеем

$$I(h)I\left(\alpha_g\right)(\mu)(\varphi)=I\left(\alpha_g\right)(\mu)(\varphi\circ h)=\mu\left(\varphi\circ h\circ\alpha_g\right)=$$

$$=\mu\left(\varphi\circ h\circ\alpha_g(x)\right)=\mu\left(\varphi\circ h\left(g(x)\right)\right)=$$

$$=\left(\text{в силу эквивариантности отображения } h\right)=$$

$$=\mu\left(\varphi\circ g\left(h(x)\right)\right)=\mu\left(\varphi\circ\alpha_g\circ h(x)\right)=\mu\left(\varphi\circ\alpha_g\circ h\right)=$$

$$=I(h)(\mu)\left(\varphi\circ\alpha_g\right)=I\left(\alpha_g\right)I(h)(\mu)(\varphi),\quad \varphi\in C(Y),$$

т. е. $I(h)I\left(\alpha_g\right)(\mu)(\varphi)=I\left(\alpha_g\right)I(h)(\mu)(\varphi)$, $\mu\in I(X)$. Теорема 3.1.3 доказана.

Из нормальности функтора I и теоремы 3.1.3 вытекает

Следствие 3.1.4. Если $h:X\to Y$ – эквивалентность G-пространств X и Y, то $I(h):I(X)\to I(Y)$ – эквивалентность $I(G,\cdot)$-пространств $I(X)$ и $I(Y)$.

§3.2. Открытые (d-открытые) действия и функтор I

Пусть $\mathcal{N}_G(\mathrm{e})$ – система открытых окрестностей нейтрального элемента e группы G в топологии пространства G, при этом для окрестности $O\in\mathcal{N}_G(\mathrm{e})$, через $Ox=\left\{g(x):g\in O\right\}$ обозначают орбиту элемента x относительно O.

Определение 3.2.1 [58]. Действие $\alpha:G\times X\to X$ называется:

- открытым, если для любых $x\in X$ и $O\in\mathcal{N}_G(\mathrm{e})$ имеем $x\in\operatorname{int}(Ox)$;

- d-открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in \mathcal{N}_G(e)$ имеем $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox))$;

- слабо d-открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in \mathcal{N}_G(e)$ существует точка $y \in X$ такая, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy))$.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется открытым (d-открытым), если для любого открытого в X множества O имеем $f(O) \subset \operatorname{int}(f(O))$ (соответственно, $f(O) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(f(O)))$).

Замечание 3.2.1. Очевидно, что открытые непрерывные действия являются непрерывными d-открытыми, следовательно, непрерывными слабо d-открытыми действиями. В [8] показано, что при открытом непрерывном действии фазовое пространство является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно фактор-пространству действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе. Если непрерывное действие слабо d-открыто или d-открыто, то фазовое пространство X является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых является замыканием орбиты некоторой точки в первом и произвольной точки во втором случае.

Напомним определение od-пространства (d-пространства) из [58].

Для пространства X система $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; \mathfrak{A}\}$, состоящая из частично упорядоченного множества $\mathfrak{A}$, непрерывных сюръективных отображений f_α пространства X, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и отображений $f_{\beta\alpha}: f_\beta(X) \to f_\alpha(X), \alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha < \beta$, называется согласованной системой непрерывных отображений на X, если:

(i) диагональное произведение $\Delta_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha(X)$ является вложением;

(ii) $f_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ f_\beta$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha < \beta$.

Согласованная система L отображений называется:

- открытой (d-открытой), если все отображения f_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, открыты (d-открыты);

- эквивариантной, если X – G-пространство и все отображения f_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, эквивариантны;

- слабо мультипликативной, если для любого $B \subset \mathfrak{A}$ существует $\beta = \sup B$ в $\mathfrak{A}$ такое, что диагональное произведение $\Delta\left\{ f_{\beta\alpha} : \alpha \in B \right\}$ инъективно;

- μ-системой, если диагональное произведение

$$\Delta\left\{ f_\alpha \in L : f_\alpha(X) \text{ субметризуемо} \right\}$$

является вложением.

Определение 3.2.2 [69]**.** Топологическое пространство X называется od-пространством (d-пространством), если существует согласованная открытая (соответственно d-открытая) слабо мультипликативная μ-система непрерывных отображений на пространстве X.

Для натурального n, тихоновского пространства X положим

$$I_{nn}\left(X\right) = I_n\left(X\right) \setminus I_{n-1}\left(X\right).$$

Предложение 3.2.1. Если действие $\alpha : G \times X \to X$ открыто, то для каждого натурального n открытым является и действие

$$I\left(\alpha\right) : I_{nn}\left(G, X\right) \times I_{nn}\left(X\right) \to I_{nn}\left(X\right).$$

Доказательство. Пусть действие $\alpha : G \times X \to X$ открыто. Установим, что для любого $\nu \in I_{nn}\left(X\right)$ имеет место

$$\left\langle \nu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \tfrac{\varepsilon}{2} \right\rangle \subset O_{\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle} \nu \qquad (3.2.1)$$

Здесь

$$O_{\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle} \nu \equiv \left\{ \Phi\left(\nu\right) : \Phi \in O_{\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle} \right\},$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C\left(X\right)$, $\varepsilon > 0$.

Тогда из (3.2.1) будет вытекать, во-первых

$$\operatorname{int}\left(O_{\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle} \nu \right) \neq \varnothing,$$

и, во-вторых

$$\nu \in \operatorname{int}\left(O_{\langle \mu;\varphi_1,\dots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}\nu\right).$$

Пусть $\nu' \in \left\langle \nu;\varphi_1,\dots,\varphi_n;\frac{\varepsilon}{2}\right\rangle$. Существует $\Phi' \in I_{nn}(G,X)$ такой, что $\Phi'(\nu)=\nu'$, $\left|\mu(\varphi_i)-\Phi'(\nu)(\varphi_i)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $i=1,\dots,n$. Тогда $\nu' \in O_{\langle \mu;\varphi_1,\dots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}\nu$. Таким образом, включение (3.2.1) установлено.

Следующий пример иллюстрирует существенность открытости действия $\alpha : G \times X \to X$ в предложении 3.2.1.

Пример 3.2.1. Рассмотрим пространство (D,τ_D), в котором все одноточечные множества замкнуты и существует хотя бы одна точка, скажем $d \in D$, для которой множество $\{d\}$ не открыто. Рассмотрим группу

$$G_d = \left\{ g \in \operatorname{Homeo}(D) : g(d) = d \right\}$$

с операцией композиции отображений. Пусть $\mathcal{U} = \{\gamma\}$ – семейство открытых покрытий пространства D. В множестве G_d вводится топология с помощью систем окрестностей

$$O_\gamma(g) = \left\{ h \in G_d : \forall x \in D, \exists U \in \gamma, g(x) \in U \wedge h(x) \in U \right\}, \qquad g \in G_d$$

Таким образом, G_d становится топологической группой. Отметим, что действие $\alpha : G_d \times D \to D$ не открыто. Действительно, для произвольной открытой окрестности O нейтрального элемента $\mathrm{e} = \mathrm{id}_D$ и точки $d \in D$ множество

$$Od = \left\{ g(d) : g \in O \right\} = \{d\}$$

замкнуто, но не открыто. Тогда $\operatorname{int}(Od) = \varnothing$ и $d \notin \operatorname{int}(Od)$.

Теперь покажем, что действие $I(\alpha) : I(G_d, D) \times I(D) \to I(D)$ также не открыто. На самом деле, для каждой окрестности O нейтрального элемента $\mathrm{id}_{I(D)}$ множество

$$O\delta_d = \left\{ \Phi(\delta_d) : \Phi \in O \right\} = \{\delta_d\}$$

замкнуто в $I(D)$, но не открыто в нем. Следовательно, $\delta_d \notin \operatorname{int}(O\delta_d) = \varnothing$.

Предложение 3.2.2. Для d-открытого действия $\alpha : G \times X \to X$ и для каждого натурального n действие

$$I(\alpha) : I_{nn}(G, X) \times I_{nn}(X) \to I_{nn}(X)$$

также d-открыто.

Доказательство. Из (3.2.1) вытекает, что для каждого $\nu \in I_{nn}(X)$ имеет место

$$\nu \in \left\langle \nu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \tfrac{\varepsilon}{2} \right\rangle \subset \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(O_{\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle} \nu\right)\right).$$

Предложение 3.2.3. Для слабо d-открытого действия $\alpha : G \times X \to X$ и для каждого натурального n действие

$$I(\alpha) : I_{nn}(G, X) \times I_{nn}(X) \to I_{nn}(X)$$

является слабо d-открытым.

Доказательство вытекает из того, что для любых $\nu \in I_{nn}(X)$ и $O_{\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle} \in \mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)$, и для каждого $\nu' \in \left\langle \nu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \tfrac{\varepsilon}{2} \right\rangle$ имеем $\nu \in O_{\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle} \nu'$.

Для действия $I(\alpha) : I_{nn}(G, X) \times I_{nn}(X) \to I_{nn}(X)$ и идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I_{nn}(X)$ определим отображение $I(\alpha)_\mu : I_{nn}(G, X) \to I_{nn}(X)$, $\mu \in I(X)$ стандартным образом, т. е.

$$I(\alpha)_\mu(\Phi) = \Phi(\mu), \ \Phi \in I(G, X).$$

Предложение 3.2.4. Открытость (d-открытость) непрерывного действия

$$I(\alpha) : I_{nn}(G, X) \times I_{nn}(X) \to I_{nn}(X)$$

эквивалентна открытости (d-открытости) отображений

$$I(\alpha)_\mu : I_{nn}(G, X) \to I_{nn}(X), \ \mu \in I_{nn}(X).$$

Доказательство. Пусть действие $I(\alpha)$ открыто, $\mu \in I_{nn}(X)$, множество O открыто в группе $I_{nn}(G, X)$. Для любого $\Phi \in O$ имеем $O\Phi^{-1}\Phi\mu = O\mu$ и $O\Phi^{-1} \in \mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)$. Поэтому $\Phi(\mu) \in \operatorname{int}\left(O\Phi^{-1}\Phi\mu\right) = \operatorname{int}(O\mu)$ и, следовательно,

$$I(\alpha)_\mu(O) \subset \operatorname{int}\left(I(\alpha)_\mu(O)\right).$$

Если отображение $I(\alpha)_\mu$ открыто, то для любого $O \in \mathcal{N}_{I(G,X)}\left(I(\alpha_{\mathrm{e}})\right)$ имеет место равенство $I(\alpha)_\mu(O) = \operatorname{int}\left(I(\alpha)_\mu(O)\right)$. Поэтому $\mu \in \operatorname{int}(O\mu)$.

Таким же способом устанавливается случай d-открытости.

Предложение 3.2.5. Действие $I(\alpha)$ на пространстве $I(X)$ d-открыто тогда и только тогда, когда для любых $O \in \mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)$ и $\mu \in I(X)$ существует окрестность U меры μ такая, что $U \subset \{\Phi W : \Phi \in O\}$ для любого непустого открытого подмножества $W \subset U$.

Доказательство. Ясно, что действие d-открыто в μ, если для любого $O \in \mathcal{N}_{I(G,X)}\left(\mathrm{id}_{I(X)}\right)$ существует окрестность U меры μ такая, что для любого непустого открытого подмножества $W \subset U$ существует $\Phi \in O$, для которого $\mu \in \Phi W$ (см. [58], замечание 4).

Необходимость вытекает из предложения 3.2.1 и леммы 3 из [58].

Предложение 3.2.6. Для открытого (соответственно, d-открытого) отображения $f : X \to Y$ отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$ также открыто (соответственно, d-открыто).

Доказательство. Достаточно показать, что

$$I(f)\left(\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle\right) \subset \operatorname{int}\left(I(f)\left(\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle\right)\right)$$

Но, это вытекает из того, что функтор I сохраняет открытость отображений [22].

§3.3. Условие компактности Дугунджи пространства идемпотентных вероятностных мер.

Теорема 3.3.1. Если $L = \left\{ f_\alpha, f_{\beta\alpha}; \mathfrak{A} \right\}$ – согласованная система непрерывных отображений на X, то для каждого натурального n семейство

$I_n(L)=\left\{I_n(f_\alpha), I_n\left(f_{\beta\alpha}\right); \mathfrak{A}\right\}$ непрерывных отображений на $I_n(X)$ также является согласованной системой.

Доказательство. Так как I_n – ковариантный функтор, то определены отображения

$$I_n(f_\alpha): I_n(X) \to I_n\left(f_\alpha(X)\right),\ I_n\left(f_{\beta\alpha}\right): I_n\left(f_\beta(X)\right) \to I_n\left(f_\alpha(X)\right),\ \alpha, \beta \in \mathfrak{A},\ \alpha < \beta.$$

Установим, что

(i) диагональное произведение $\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\Delta} I_n(f_\alpha): I_n(X) \to \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} I_n(f_\alpha)\left(I_n(X)\right)$ является вложением;

(ii) $I(f_\alpha) = I\left(f_{\beta\alpha}\right) \circ I\left(f_\beta\right)$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha < \beta$.

Но, равенство (ii) сразу же вытекает из ковариантности функтора I в силу равенства $f_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ f_\beta$, при $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha < \beta$.

Так как все отображения f_α непрерывны, то $I_n(f_\alpha)$ – также непрерывные отображение. Следовательно, диагональное произведение $\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\Delta} I_n(f_\alpha)$ непрерывно. Кроме того, так как f_α сюръективны, то из теоремы 1.2.2 вытекает, что $I_n(f_\alpha)\left(I_n(X)\right) = I_n\left(f_\alpha(X)\right)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Достаточно показать, что диагональное произведение $\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\Delta} I_n(f_\alpha): I_n(X) \to \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} I_n(f_\alpha)\left(I_n(X)\right)$ инъективно. Пусть μ_1, $\mu_2 \in I(X)$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда существует $\varphi \in C(X)$ такая, что $\mu_1(\varphi) \neq \mu_2(\varphi)$. Применяя теорему Вейерштрасса-Стоуна, можно установить, что множество

$$\left\{\psi \circ f_\alpha : \psi \in C\left(f_\alpha(X)\right), \alpha \in \mathfrak{A}\right\}$$

образует всюду плотное подкольцо кольца $C(X)$. Поэтому существует α и $\psi \in C\left(f_\alpha(X)\right)$ такие, что $\left|\varphi - \psi \circ f_\alpha\right| < \frac{a}{3}$, где $a = \left|\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)\right| > 0$. Поскольку каждая идемпотентная вероятностная мера сохраняет порядок, то $\left|\mu_i(\varphi) - \mu_i(\psi \circ f_\alpha)\right| \leq \frac{a}{3}$, $i = 1, 2$. Далее, имеем

$a = \left|\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)\right| =$

$$= \left|\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi \circ f_\alpha) + \mu_1(\psi \circ f_\alpha) - \mu_2(\psi \circ f_\alpha) + \mu_2(\psi \circ f_\alpha) - \mu_2(\varphi)\right| \le$$

$$\le \left|\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi \circ f_\alpha)\right| + \left|\mu_1(\psi \circ f_\alpha) - \mu_2(\psi \circ f_\alpha)\right| + \left|\mu_2(\psi \circ f_\alpha) - \mu_2(\varphi)\right| \le$$

$$\le \frac{2a}{3} + \left|\mu_1(\psi \circ f_\alpha) - \mu_2(\psi \circ f_\alpha)\right|,$$

т. е. $\left|\mu_1(\psi \circ f_\alpha) - \mu_2(\psi \circ f_\alpha)\right| \ge \frac{a}{3} > 0$. Но, тогда $\mu_1(\psi \circ f_\alpha) \ne \mu_2(\psi \circ f_\alpha)$, что значит $I_n(f_\alpha)(\mu_1)(\psi) \ne I_n(f_\alpha)(\mu_2)(\psi)$, следовательно, $I_n(f_\alpha)(\mu_1) \ne I_n(f_\alpha)(\mu_2)$. Таким образом, $\underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\Delta} I_n(f_\alpha)(\mu_1) \ne \underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\Delta} I_n(f_\alpha)(\mu_2)$.

Следствие 3.3.1. Если согласованная система $L = \left\{ f_\alpha, f_{\beta\alpha}; \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на X является слабо мультипликативной, то для каждого натурального n согласованная система $I_n(L) = \left\{ I_n(f_\alpha), I_n(f_{\beta\alpha}); \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на $I_n(X)$ также является слабо мультипликативной.

Легко заметить, что из предложения 3.2.6 и теоремы 3.3.1 вытекает важное свойство системы $L = \left\{ f_\alpha, f_{\beta\alpha}; \mathfrak{A} \right\}$.

Следствие 3.3.2. Если согласованная система $L = \left\{ f_\alpha, f_{\beta\alpha}; \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на X открыта (соответственно, d-открыта), то для каждого натурального n согласованная система $I_n(L) = \left\{ I_n(f_\alpha), I_n(f_{\beta\alpha}); \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на $I_n(X)$ также открыта (соответственно, d-открыта).

Из результатов §3.1 параграфа получим следующее утверждение.

Лемма 3.3.1. Если согласованная система $L = \left\{ f_\alpha, f_{\beta\alpha}; \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на X эквивариантна, то для каждого натурального n согласованная система $I_n(L) = \left\{ I_n(f_\alpha), I_n(f_{\beta\alpha}); \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на $I_n(X)$ также эквивариантна.

Лемма 3.3.2. Если согласованная система $L=\left\{ f_{\alpha}, f_{\beta\alpha}; \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на X является μ-системой, то для каждого натурального n согласованная система $I_n(L)=\left\{ I_n(f_{\alpha}), I_n(f_{\beta\alpha}); \mathfrak{A} \right\}$ непрерывных отображений на $I_n(X)$ также является μ-системой.

Доказательство. Из следствия [22] вытекает, что для метризуемого пространства Y пространство $I_n(Y)$ также метризуемо. Кроме того, если $f: X \to Y$ – непрерывное взаимно-однозначное отображение «на», то $I_n(f): I_n(X) \to I_n(Y)$ также непрерывное взаимно-однозначное отображение «на». Отсюда следует, что если X субметризуемо, то $I_n(X)$ тоже субметризуемо. Теперь из теоремы 3.3.1 вытекает, что если семейство $\Delta\left\{ f_{\alpha} \in L : f_{\alpha}(X) \text{ субметризуемо} \right\}$ является μ-системой, то

$$\Delta\left\{ I_n(f_{\alpha}) \in I_n(L) : I_n(f_{\alpha})\left(I_n(X)\right) \text{ субметризуемо} \right\}$$

образует μ-систему.

Суммируя все полученные результаты, теперь сможем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3.3.2. Если пространство X является od-пространством (d-пространством), то для каждого натурального n пространство $I_n(X)$ идемпотентных вероятностных мер также является od-пространством (d-пространством).

Для изложения дальнейшего результата нам потребуются следующие два предложения.

Предложение 3.3.1 [58]. Пусть действие на X слабо d-открыто, а семейство $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}_G(\mathrm{e})$ таково, что:

(i) для любых O, $U \in \mathcal{O}$ существует $V \in \mathcal{O}$ такое, что $V \subset O \cap U$;

(ii) для любого $O \in \mathcal{O}$ существует $U \in \mathcal{O}$ такое, что $U^2 \subset O$ и $U^{-1} \subset O$.

Если семейство $\mathcal{O}$ дополнительно к условиям (i) и (ii) удовлетворяет следующему условию:

(iii) для любых $O \in \mathcal{O}$ и $g \in G$ существует $V \in \mathcal{O}$ такое, что $gVg^{-1} \subset O$, то X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ есть G-пространство (не обязательно тихоновское).

Пусть $\mathcal{F}$ – семейство эквивариантных фактор-отображений G-пространства X. Положим $f \geq h$, f, $h \in \mathcal{F}$, если существует $p_{fh} : f(X) \to h(X)$ такое, что $p_{fh} \circ f = h$. Отметим, что в этом случае отображение $p = p_{fh}$ эквивариантно. Действительно, пусть $y = f(x) \in f(X)$ и $g \in G$. Для доказательства равенства $p(gy) = gp(y)$ достаточно показать, что $h^{-1}(p(gy)) = h^{-1}(gp(y))$. Последнее равенство вытекает из следующих соотношений

$$h^{-1}(p(gy)) = h^{-1}\Big(p\big(g(f(y))\big)\Big) = h^{-1}\big(p(f(gx))\big) = h^{-1}\big(h(gx)\big) = h^{-1}\big(gh(x)\big) =$$

$$= h^{-1}\Big(g\big(p(f(x))\big)\Big) = h^{-1}\big(g(p(y))\big).$$

После отождествления отображений f, $h \in \mathcal{F}$ таких, что $f \geq h$ и $h \geq f$ (отношение эквивалентности на $\mathcal{F}$), семейство классов эквивалентности (будем его также обозначать $\mathcal{F}$) становится частично упорядоченном множеством.

Предложение 3.3.2 [58]**.** Пусть X – G-пространство со слабо d-открытым действием, удовлетворяющим следующему свойству:

(s) для любых точки x и ее окрестности W существует такое (счетное) семейство $\mathcal{O}_{xW} \subset N_G(\mathrm{e})$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii) предложения 3.3.1, для которого существует $O \in \mathcal{O}_{xW}$ и $\mathrm{St}(x, \gamma_O) \cap (X \setminus W) = \varnothing$.

Тогда для семейства $\mathcal{F}$ эквивариантных фактор-отображений X семейство $L = \{ f \in \mathcal{F};\, p_{fh}, f, h \in \mathcal{F}, f \geq h; \mathcal{F} \}$ является согласованной слабо мультипликативной эквивариантной системой (соответственно μ-системой) отображений на X.

Классы компактных od - и d -пространств совпадают с классом компактов Дугунджи (см. [65], предложение 2), а компактификация Стоуна-Чеха βX пространства X есть компакт Дугунджи в том и только том случае, если X – псевдокомпактное d -пространство (см. [65], предложение 4).

В следующем утверждении требуем, чтобы свойство (s) в предложении 3.3.2 удовлетворяло и условие счётности, содержащейся в скобке.

Теорема 3.3.3. Пусть пространство X является G-пространством с открытым действием, удовлетворяющим свойству (s). Тогда для каждого натурального n пространство $I_n(X)$ идемпотентных вероятностных мер является od-пространством с согласованной слабо мультипликативной эквивариантной открытой μ-системой отображений. Если при этом если X – компакт, то $I_n(X)$ – компакт Дугунджи.

Доказательство вытекает из повторных применений конструкций, рассмотренных в теореме 3.3.1, их следствий 3.3.1, 3.3.2, лемм 3.3.1, 3.3.2, а также процедуру, проведенную в доказательстве теоремы 3 из [58].

ГЛАВА IV. ФУНКТОР ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА КАТЕГОРИИ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе установлено, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем, действующий в категории $Comp$ – компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений можно поднять на категорию $Unif$ – равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. Докажем, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем переводит совершенные отображения в совершенные отображения, а открытые отображения в открытые отображения и сохраняет вес и индекс полноты равномерных пространств. Следовательно, пространство идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем является локально компактным хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда таковым является исходное пространство.

§4.1. База топологии поточечной сходимости открытыми множествами

В этом параграфе определим базу топологии поточечной сходимости пространства идемпотентных вероятностных мер открытыми множествами исходного пространства.

Рассмотрим функции типа $\lambda : X \to [-\infty, 0]$. На заданном множестве X мы определяем [36] max-plus-*характеристическую функцию* ${}^{\oplus}\chi_A : X \to \mathbb{R}_{\max}$ множества $A \subset X$ по правилу

$$ {}^{\oplus}\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A \\ -\infty, & \text{если } x \in X \setminus A. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Для $\{x\}$ мы будем писать ${}^{\oplus}\chi_x$ вместо ${}^{\oplus}\chi_{\{x\}}$.

Пусть $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$ – дизъюнктная система множеств пространства X и $a_1,\ a_2\ ,\ \ldots,\ a_n$ – неположительные действительные числа. Функция

$$
{}^{\oplus}\chi_{F_1,\ldots,F_n}^{a_1,\ldots,a_n}(x)=\begin{cases} a_1, & \text{если } x\in F_1,\\ \cdots, & \\ a_n, & \text{если } x\in F_n,\\ -\infty, & \text{если } x\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}F_i \end{cases} \tag{4.1.2}
$$

называется [3] max-plus-ступенчатой функцией, определяемой наборами F_1, F_2, …, F_n и чисел a_1, a_2 , …, a_n.

Отметим, что

$$
{}^{\oplus}\chi_A^a(x)=a\odot{}^{\oplus}\chi_A(x)=\begin{cases} 0\odot a, & \text{если } x\in A,\\ -\infty, & \text{если } x\in X\setminus A \end{cases}=\begin{cases} a, & \text{если } x\in A,\\ -\infty, & \text{если } x\in X\setminus A \end{cases}
$$

для множества A в X и неположительного числа a. Следовательно, для непересекающейся системы множеств F_1, F_2, …, F_n в пространстве X и неположительных вещественных чисел a_1, a_2 , …, a_n имеем,

$$
{}^{\oplus}\chi_{F_1,\ldots,F_n}^{a_1,\ldots,a_n}(x)={}^{\oplus}\chi_{F_1}^{a_1}(x)\oplus{}^{\oplus}\chi_{F_2}^{a_2}(x)\oplus\cdots\oplus{}^{\oplus}\chi_{F_n}^{a_n}(x)
$$

случай, когда F_1, F_2, …, F_n являются одноточечными, скажем $F_i=\{x_i\}$, $i=1,\ldots,n$, то имеем

$$
{}^{\oplus}\chi_{x_1,\ldots,x_n}^{a_1,\ldots,a_n}={}^{\oplus}\chi_{x_1}^{a_1}\oplus{}^{\oplus}\chi_{x_2}^{a_2}\oplus\cdots\oplus{}^{\oplus}\chi_{x_n}^{a_n} \tag{4.1.3}
$$

Понятие плотности для идемпотентной меры было введено в [29], где был доказан основной результат о существовании плотности для произвольных мер. Более подробное изложение дано в [28] – в первой систематической монографии по идемпотентному анализу. Позже появилась статья [1], в которой проводилось дальнейшее исследование по плотности.

Пусть $\mu\in I(X)$. Тогда мы можем определить функцию $d_\mu : X\to[-\infty,0]$ по формуле

$$
d_\mu(x)=\inf\{\mu(\varphi):\varphi\in C(X)\ \text{такая, что}\ \varphi\le 0\ \text{и}\ \varphi(x)=0\},\ x\in X. \tag{4.1.4}
$$

Функция d_μ полунепрерывна сверху и называется плотностью μ. И наоборот, каждая полунепрерывная сверху функция $f : X \to [-\infty, 0]$ с $\max\{ f(x) : x \in X \} = 0$ определяет идемпотентную меру ν_f по формуле

$$\nu_f(\varphi) = \bigoplus_{x \in X} f(x) \odot \varphi(x), \qquad \varphi \in C(X). \tag{4.1.5}$$

Напомним, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется полунепрерывной сверху, если для каждой $x \in X$ и для каждого действительного числа r, удовлетворяющего $f(x) < r$, существует открытая окрестность $U \subset X$ точки x такая, что $f(x') < r$ для всех $x' \in U$. Легко видеть, что функции, определенные как (4.1.1) или (4.1.2) полунепрерывны сверху, если множества A и F_1, F_2, …, F_n, замкнуты, соответственно.

Положим

$U_S(X) =$

$$= \{ \lambda : X \to [-\infty, 0] \mid \lambda \text{ полунепрерывна сверху и } \lambda(x_0) = 0 \text{ для некоторой } x_0 \in X \}.$$

Тогда имеем

$$I(X) = \left\{ \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x : \lambda \in U_S(x) \right\}.$$

Очевидно, что $\bigoplus_{x \in X} {}^{\oplus}\chi_{x_0}(x) \odot \delta_x = \delta_{x_0}$, т. е. для max-plus-характеристической функции ${}^{\oplus}\chi_{x_0}$ формула (4.1.5) определяет меру Дирака δ_{x_0}, сосредоточенную на $\{x_0\}$.

Пусть A – замкнутое подмножество компактного хаусдорфово пространства X. Легко проверить, что $\nu \in I(A)$ тогда и только тогда, когда $\{ x \in X : d_\nu(x) > -\infty \} \subset A$. Следовательно,

$$\operatorname{supp} \nu = \{ x \in X : d_\nu(x) > -\infty \}.$$

Очевидно, что $\operatorname{supp}\nu = \{x_1, ..., x_n\}$ тогда и только тогда, когда плотность d_ν меры ν имеет вид (4.1.3), т. е.

$$d_\nu = {}^\oplus\chi_{x_1,...,x_n}^{a_1,...,a_n} = {}^\oplus\chi_{x_1}^{a_1} \oplus {}^\oplus\chi_{x_2}^{a_2} \oplus \cdots \oplus {}^\oplus\chi_{x_n}^{a_n}$$

для одноточечных точек $\{x_1\}$, …, $\{x_n\}$ и для некоторых неотрицательных чисел a_1, …, a_n с $a_i > -\infty$, $i = 1, ..., n$ и $\max\{a_1, ..., a_n\} = 0$. В этом случае ν называется идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем. Подмножество $I(X)$, состоящее из всех идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем, обозначим через $I_\omega(X)$ [36].

Для тихоновского пространства X рассмотрим идемпотентную вероятностную меру $\mu = \bigoplus\limits_{x\in X} \lambda(x) \odot \delta_x \in I_\beta(X)$ и конечную систему $\{U_1, ..., U_n\}$ открытых множеств $U_i \subset X$ таких, что

$$\operatorname{supp}\mu \cap U_i \neq \varnothing,\ i = 1, ..., n \text{ и } \operatorname{supp}\mu \subset \bigcup_{i=1}^n U_i .$$

Следуя [36], определим множество

$$\langle \mu; U_1, ..., U_n;\ \varepsilon \rangle = \{\nu = \bigoplus_{x\in X} \gamma(x) \odot \delta_x \in I_\beta(X) : \operatorname{supp}\nu \cap U_i \neq \varnothing, \operatorname{supp}\nu \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$$
$$\text{и } |\lambda(x) - \gamma(y)| < \varepsilon \text{ в точках } x \in \operatorname{supp}\mu \cap U_i \text{ и } y \in \operatorname{supp}\nu \cap U_i,\ i = 1, ..., n\}. \quad (4.1.6)$$

Теорема 4.1.1. Множества типа (4.1.6) составляют базу $\mathcal{B}$ топологии поточечной сходимости в $I_\beta(X)$.

Доказательство. Пусть $\langle \mu; \varphi; \varepsilon \rangle$ будет элементом предбазы, где $\varphi \in C_b(X)$, $\varepsilon > 0$ и $\mu = \bigoplus\limits_{x\in X} \lambda(x) \odot \delta_x \in I(X)$. Поскольку φ непрерывна, то для каждой точки $x \in \operatorname{supp}\mu$ существует ее открытая окрестность U_x в X такая, что для любой точки $y \in U_x$ выполняется неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ верно. Из открытого в X покрытия $\{U_x : x \in \mathrm{supp}\mu\}$ множества $\mathrm{supp}\mu$ в силу компактности $\mathrm{supp}\mu$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_i : i = 1,\ldots,n\}$. Далее, для каждого

$$\nu = \underset{x\in X}{\oplus} \gamma(x) \odot \delta_x \in \left\langle \mu; U_1,\ldots,U_n; \tfrac{\varepsilon}{2} \right\rangle$$

имеем $\left|\lambda(x) - \gamma(y)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ в $x \in \mathrm{supp}\mu \cap U_i$ и $y \in \mathrm{supp}\,\nu \cap U_i$. Оценим следующую абсолютную величину

$$\left|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)\right| = \left|\underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) - \underset{x\in X}{\oplus} \gamma(x) \odot \varphi(x)\right| = a\,.$$

Возможны два случая:

Случай 1: $\underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) \geq \underset{x\in X}{\oplus} \gamma(x) \odot \varphi(x)$. Пусть

$$\underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) = \lambda(x') \odot \varphi(x').$$

Тогда $x' \in U_i$ для некоторого i и

$$a = \underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) - \underset{x\in X}{\oplus} \gamma(x) \odot \varphi(x) = \lambda(x') \odot \varphi(x') - \underset{x\in X}{\oplus} \gamma(x) \odot \varphi(x) \leq$$

$$\leq \left(\text{для каждого } y \in \mathrm{supp}\,\nu \cap U_i\right) \leq$$

$$\leq \lambda(x') \odot \varphi(x') - \gamma(y) \odot \varphi(y) = \left|\lambda(x') \odot \varphi(x') - \gamma(y) \odot \varphi(y)\right| \leq$$

$$\leq \left|\lambda(x') - \gamma(y)\right| + \left|\varphi(x') - \varphi(y)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Случай 2: $\underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) \leq \underset{x\in X}{\oplus} \gamma(x) \odot \varphi(x)$. Пусть

$$\underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) = \lambda(x') \odot \varphi(x').$$

Тогда $x' \in U_i$ для некоторого i и

$$a = \underset{x\in X}{\oplus} \gamma(x) \odot \varphi(x) - \underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) = \gamma(x') \odot \varphi(x') - \underset{x\in X}{\oplus} \lambda(x) \odot \varphi(x) \leq$$

$$\leq \left(\text{для каждого } y \in \mathrm{supp}\mu \cap U_i\right) \leq$$

$$\leq \gamma(x') \odot \varphi(x') - \lambda(y) \odot \varphi(y) = \left|\gamma(x') \odot \varphi(x') - \lambda(y) \odot \varphi(y)\right| \leq$$

$$\leq \left|\lambda(x') - \gamma(y)\right| + \left|\varphi(x') - \varphi(y)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Итак, $\left|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)\right| < \varepsilon$. Отсюда $\nu \in \left\langle \mu; \varphi; \varepsilon \right\rangle$, другими словами,

$$\left\langle \mu; U_1,\ldots,U_n; \tfrac{\varepsilon}{2} \right\rangle \subset \left\langle \mu; \varphi; \varepsilon \right\rangle.$$

Теорема 4.1.1 доказана.

§4.2. Равномерностные структуры

Для данного множества X частичный порядок $\subset$ может быть определен на семействе $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X включением подмножеств, превращая $(\mathcal{P}(X);\subset)$ в решетку. Определим понятие фильтра $\mathcal{F}$ на X как непустое подмножество $\mathcal{P}(X)$ со следующими свойствами:

$F1)$ если $A,\ B \in \mathcal{F}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{F}$;

$F2)$ если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$.

Базой фильтра называется подсемейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, если $\mathcal{B}$ непусто, и для любых двух элементов $A,\ B \in \mathcal{B}$ существует $C \in \mathcal{B}$ такое, что $C \subset A \bigcap B$ ($\mathcal{B}$ направлен вниз).

Далее, обозначения E^{-1} и $E \circ F$ следует понимать как отношения на X. Напомним, что если $E = \{(x, y)\}$ – отношение на X, т. е., подмножество декартово произведения $X \times X$, то обратное отношение E^{-1} определяется как подмножество $\{(y, x)\}$ в $X \times X$. Если E и F являются отношениями на X, то их композиция $E \circ F$ определяется как множество всех пар (x, z), для которых существуют $y \in X$, что $(x, y) \in E$ и $(y, z) \in F$.

Следующее определение было дано со стороны Бурбаки [7].

Определение 4.2.1. Диагональ множества $X \times X$ – это подмножество $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$. Диагональная равномерность на множестве X – это фильтр $\mathcal{E}$ на $X \times X$, состоящий из подмножеств $X \times X$, называемых окружением, таких, что:

$E1)$ если $E \in \mathcal{E}$, то $\Delta \subset E$;

$E2)$ если $E \in \mathcal{E}$, то существует окружение $F \in \mathcal{E}$ такое, что $F \subset E^{-1}$.

$E3)$ если $E \in \mathcal{E}$, то существует окружение $F \in \mathcal{E}$ такое, что $F \circ F \subset E$.

Отметим, что свойства $F2)$ и $E2)$ обеспечивают, что из $E \in \mathcal{E}$ следует, что $E^{-1} \in \mathcal{E}$.

Базой $\mathcal{B}$ диагональной равномерности $\mathcal{E}$ на X называется база фильтра на $X \times X$, которая удовлетворяет условиям $E1) - E3)$ определения 4.2.1.

Пусть E – окружение, $A \subset X$. Положим

$$E[x] = \{ y : (x, y) \in E \},$$

$$E[A] = \bigcup_{x \in A} E[x].$$

Если $(X, \mathcal{E})$ – равномерное пространство, то топология $\mathcal{T}$ равномерности $\mathcal{E}$, или равномерная топология $\mathcal{T}$, это топология, в которой семейство множеств $\mathcal{B}(x) = \{ E[x] : E \in \mathcal{E} \}$ является базой окрестностей в точке $x \in X$ [6].

Условие $E3)$ определения 4.2.1 было описано Келли [25] как «рудиментарная форма неравенства треугольника». Это налагает на X больше структуры, чем топология. Для любого покрытия множества X всегда можно определить топологию как семейство всевозможных конечных пересечений и произвольных объединений элементов этого покрытия. Иными словами, если $\mathcal{P}$ – покрытие множества X, то семейство

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} P_i : P_i \in \mathcal{P},\ i = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \cup \mathcal{P}^I : \mathcal{P}^I \subset \mathcal{P} \right\}$$

удовлетворяет условиям топологии на X.

Возьмем теперь семейство подмножеств $X \times X$, каждое из которых содержит диагональ:

$$\Sigma = \{ A \subset X \times X : A \supset \Delta \}.$$

Добавим все конечные пересечения в семейство и определим фильтр, взяв надмножества:

$$\Upsilon = \left\{ B \subset X \times X : B \supset \bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Этот фильтр может не удовлетворить условие $E3)$ определения 4.2.1 (см. пример в [24]).

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – диагональные равномерности на X и Y, соответственно. Функция $f : X \to Y$ называется равномерно непрерывной тогда и только тогда, когда для каждого $F \in \mathcal{F}$ существует некоторый $E \in \mathcal{E}$ такие, что

$$(x_1, x_2) \in E \Rightarrow \left(f(x_1), f(x_2)\right) \in F .$$

Легко следует, что всякая равномерно непрерывная функция непрерывна.

Понятие равномерной эквивалентности сродни понятию топологической эквивалентности или гомеоморфизма, но, кажется, нет более короткого термина для него.

Равномерные пространства X и Y называются равномерно эквивалентными, если существует биекция $f : X \to Y$ такая, что f и f^{-1} являются равномерно непрерывными [3].

Топологическое пространство X называется униформизуемым, если существует равномерность $\mathcal{E}$ на X такая, что топология этой равномерности совпадает с топологией X [3].

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 4.2.1. Топологическое пространство униформизуемо тогда и только тогда, когда оно вполне регулярно.

Напомним, что вполне регулярное пространство – это пространство, в котором замкнутое множество и не содержащаяся в нём точка могут быть разделены непрерывной функцией; Тихоновское пространство – это вполне регулярное пространство, в котором одноточечные множества замкнуты.

Теперь напомним определения фильтра Коши в равномерном пространстве.

Фильтр Коши: фильтр $\mathcal{F}$ в равномерном пространстве $(X, \mathcal{E})$ называется фильтром Коши, если для каждого окружения E из равномерности $\mathcal{E}$ существует такой элемент W фильтра $\mathcal{F}$, что $W \times W \subset E$ [3].

Равномерное пространство называется полным тогда и только тогда, когда каждый фильтр Коши в пространстве сходится к точке в пространстве [3].

Равномерное пополнение равномерного пространства: Равномерное пополнение равномерного пространства $(X,\mathcal{E})$ – это пара $\left(f,\left(X^*,\mathcal{E}^*\right)\right)$, где $\left(X^*,\mathcal{E}^*\right)$ – полное равномерное пространство, а f – равномерное вложение X как плотное подпространство в X^* [3].

Назовем [18] X вполне ограниченным или предкомпактным, если для каждого окружения U существует конечное множество F такое, что $U[F]=X$. Предкомпактные пространства обладают следующими свойствами: подпространства и произведения предкомпактных пространств снова предкомпактны.

Если $\mathcal{E}$ – совместимая вполне ограниченная равномерность на X, то ее пополнение является компактификацией X, называемой компактификацией Самуэла равномерного пространства $(X,\mathcal{E})$ [18].

Следствие 4.2.1. $I_\beta(X)$ униформизуемо.

Лемма 4.2.1. Для произвольного бесконечного тихоновского пространства X имеем $d\left(I_\beta(X)\right)\leq d(X)$.

Доказательство. В доказательстве используется модифицированная конструкция, предложенная в [2].

Теорема 4.1.1 сразу дает следующие два утверждения.

Следствие 4.2.2. Пусть X – тихоновское пространство, а $\mathcal{E}$ – диагональная равномерность на X такая, что топология этой равномерности совпадает с исходной топологией. Тогда семейство

$$\mathcal{B}_I=\Big\{\bigcup_\alpha\Big(\Big\langle\mu;\,E\left[A_1^\alpha\right],\ldots,\,E\left[A_n^\alpha\right];\varepsilon_1\Big\rangle\times\Big\langle\nu;E\left[B_1^\alpha\right],\ldots,E\left[B_k^\alpha\right];\varepsilon_2\Big\rangle\Big):$$

$$A_i^\alpha\in\mathcal{B}_X,\ i=1,\ldots,n;\ B_j^\alpha\in\mathcal{B}_X,\ j=1,\ldots,k;\ \varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0;$$

$$\bigcup_\alpha\Big\langle\mu;E\left[A_1^\alpha\right],\ldots,E\left[A_n^\alpha\right];\varepsilon_1\Big\rangle=\bigcup_\alpha\Big\langle\nu;E\left[B_1^\alpha\right],\ldots,E\left[B_k^\alpha\right],\varepsilon_2\Big\rangle=I_\beta(X)\Big\}$$

образует базу равномерности на $I_{\beta}(X)$, что топология этой равномерности совпадает с топологией поточечной сходимости на $I_{\beta}(X)$.

Для диагональной равномерности $\mathcal{E}$ на тихоновском пространстве X обозначим через $I_{\beta}(\mathcal{E})$ равномерность на $I_{\beta} \quad X$, порожденную базой $\mathcal{B}_{I}$.

Следствие 4.2.3. Если отображение $f:(X,\mathcal{E})\to(Y,\mathcal{F})$ равномерно непрерывно, то отображение $I_{\beta}(f):(I_{\beta}(X),I_{\beta}(\mathcal{E}))\to(I_{\beta}(Y),I_{\beta}(\mathcal{F}))$ также равномерно непрерывно.

Теорема 4.2.2. Функтор $I_{\beta}:Tych\to Tych$ поднимается на категорию $Unif$ – равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

Доказательство. Доказательство опирается на следствия 4.2.2 и 3.2.3.

§4.3. Действие функтора идемпотентных вероятностных мер на равномерностные структуры

Для Тихоновского пространства X определим отображение $\delta: X \to I_{\beta}(X)$ как $\delta(x)=\delta_{x}$, $x\in X$.

Из определения отображения δ сразу же вытекает следующий результат.

Предложение 4.3.1. Для равномерного пространства $(X , \mathcal{E})$ отображение $\delta:(X,\mathcal{E})\to(I_{\beta}(X),I_{\beta}(\mathcal{E}))$ – равномерное вложение.

Несложной модификацией доказательства результатов из [35] доказывается следующий результат. Это доказательство мы опустим.

Предложение 4.3.2. Если $i:(X,\mathcal{E})\to(Y,\mathcal{F})$ является равномерным вложением, то $I_{\beta}(i):(I_{\beta}(X),I_{\beta}(\mathcal{E}))\to(I_{\beta}(Y),I_{\beta}(\mathcal{F}))$ также является равномерным вложением.

Теорема 4.3.1. Равномерное пространство $(X , \mathcal{E})$ предкомпактно, если и только если равномерное пространство $(I_{\beta}(X),I_{\beta}(\mathcal{E}))$ является предкомпактным.

Доказательство. Свойство предкомпактных пространств и предложение 4.3.1 приводят к необходимости. Пусть $(X, \mathcal{E})$ – предкомпактное пространство. Тогда его пополнение $(X^*, \mathcal{E}^*)$ является компактным Хаусдорфовым пространством. В силу предложения 4.3.2 можно вложить $(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E}))$ в компактное Хаусдорфово пространство $\left(I_\beta(X^*), I_\beta(\mathcal{E})^*\right) = \left(I(X^*), I_\beta(\mathcal{E})^*\right)$. Следовательно, $(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E}))$ является предкомпактным. Теорема 4.3.1 доказана.

Предложение 1.2.18 [6] и теорема 4.3.1 дают следующее утверждение.

Следствие 4.3.1. Равномерное пространство $(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E}))$ является равномерно локально компактным хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(X, \mathcal{E})$ – равномерно локально компактное хаусдорфово пространство.

Компактификацию Самуэля равномерного пространства $(X, \mathcal{E})$ можно определить как пополнение $(X, \mathcal{E}^p)$, где $\mathcal{E}^p$ – максимальная предкомпактная равномерность, лежащая в $\mathcal{E}$ [35]. Для равномерных пространств $(X, \mathcal{E})$ его компактификация Самюэля обозначается через $\mathcal{S}_\mathcal{E}(X)$. Компактификация Самюэля $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ продолжается до ковариантного функтора $\mathcal{S}: Unif \to Comp$.

Существует естественное преобразование $T: \mathcal{S} \circ I_\beta \to I \circ \mathcal{S}$, компоненты $T_\mathcal{E}$ которого определяются следующим образом. Тождественное отображение $(X, \mathcal{E}) \to (X, \mathcal{E}^p)$ равномерно непрерывно. Следовательно, вложение $i_\mathcal{E}: (X, \mathcal{E}) \to \mathcal{S}_\mathcal{E}(X)$ равномерно непрерывно. Следовательно, $I_\beta(i_\mathcal{E}): (I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E})) \to I(\mathcal{S}_\mathcal{E}(X))$ также равномерно непрерывно. Но операция $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^p$ взятия компактной равномерности является ковариантным функтором. Следовательно, $I_\beta(i_\mathcal{E})^p: \left(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E}^p)\right) \to I(\mathcal{S}_\mathcal{E}(X))$ равномерно непрерывно.

Это отображение продолжается до отображения $T_{\mathcal{E}}:\mathcal{S}_{I_\beta(\mathcal{E})}\left(I_\beta\left(X\right)\right)\to I\left(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}\left(X\right)\right)$ пополнений.

Теорема 4.3.2. Если равномерность $\mathcal{E}$ предкомпактна, то отображение $T_{\mathcal{E}}$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. Если равномерность $\mathcal{E}$ является предкомпактной, то отображение $i_{\mathcal{E}}:\left(X,\mathcal{E}\right)\to\mathcal{S}_{\mathcal{E}}\left(X\right)$ – равномерное вложение. В силу теоремы 4.3.1 отображения $I_\beta\left(i_{\mathcal{E}}\right)$ и $I_\beta\left(i_{\mathcal{E}}\right)^p$ совпадают. Итак, согласно предложению 4.3.2 отображение $I_\beta\left(i_{\mathcal{E}}\right)$ является равномерным вложением. Таким образом, $T_{\mathcal{E}}$ – гомеоморфизм, являющийся пополнением равномерного вложения всюду плотного подпространства. Теорема 4.3.2 доказана.

Непрерывное отображение $f:X\to Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y называется совершенным, если f замкнуто и для каждого $y\in Y$ прообраз $f^{-1}\left(y\right)$ компактен.

Теорема 4.3.3. Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение. Отображение $I_\beta(f):I_\beta(X)\to I_\beta(Y)$ является совершенным тогда и только тогда, когда $f:X\to Y$ совершенно.

Доказательство. Пусть $f:X\to Y$ – совершенное отображение. Тогда в силу теоремы 3.7.15 [73] имеем $\beta f\left(\beta X\setminus X\right)\subset\beta Y\setminus Y$. Рассмотрим отображение $I(\beta f):I\left(\beta X\right)\to I(\beta Y)$ и покажем, что

$$I(\beta f)\left(I(\beta X)\setminus I_\beta(X)\right)\subset I(\beta Y)\setminus I_\beta(Y) \qquad (4.3.1)$$

Если $\mu\in I\left(\beta X\right)\setminus I_\beta\left(X\right)$, то $\mu\left({}^{\oplus}\chi_F\right)=a>0$ для некоторого компакта $F\subset\beta X\setminus X$. Из теоремы 3.7.15 [73] следует, что $\beta f(F)\subset\beta Y\setminus Y$. Легко видеть, что

$${}^{\oplus}\chi_{\beta f(F)}\circ\beta f\geq{}^{\oplus}\chi_F\,.$$

Поэтому

$$I(\beta f)(\mu)\left({}^{\oplus}\chi_{\beta f(F)}\right)=\mu\left({}^{\oplus}\chi_{\beta f(F)}\circ\beta f\right)\geq\mu\left({}^{\oplus}\chi_F\right)>0.$$

Следовательно, $I(\beta f)(\mu)\notin I_\beta(X)$. Таким образом, нами установлено (4.3.1). С другой стороны, по определению имеем

$$I(\beta f)^{-1}\left(I_\beta(Y)\right)\subset I_\beta(X).$$

Поскольку функтор I_β – нормальный [22], сюръективность $f:X\to Y$ влечет, что $I_\beta(f):I_\beta(X)\to I_\beta(Y)$ является сюръективным отображением. Вследствие этого, получим

$$I(\beta f)^{-1}\left(I_\beta(Y)\right)=I_\beta(X).$$

Но $I(\beta f):I(\beta X)\to I(\beta Y)$ –отображение компактных хаусдорфовых пространств, т. е. $I(\beta f)$ – совершенное отображение. Следовательно, из предложения 3.7.4 [73] следует, что

$$I(\beta f)\big|_{I_\beta(X)}=I_\beta(f):I_\beta(X)\to I_\beta(Y)$$

– совершенное отображение.

Пусть теперь отображение $I_\beta(f):I_\beta(X)\to I_\beta(Y)$ совершенно. Затем, снова используя предложение 3.7.4 [73], можно заключить, что $f=I_\beta(f)\big|_X:X\to Y$ – совершенное отображение. Теорема 4.3.3 доказана.

Семейство $\mathcal{A}$ диагональных окружений равномерного пространства $(X,\mathcal{E})$ образует базу равномерности $\mathcal{E}$, если для каждого $E\in\mathcal{E}$ существует $A\in\mathcal{A}$ такое, что $A\subset E$. Наименьшая мощность баз равномерности $\mathcal{E}$ называется весом равномерностью $\mathcal{E}$ и обозначается $w(\mathcal{E})$.

Из определения немедленно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3.1. Пусть $(X,\mathcal{E})$ – равномерное пространство, а $\left(Y,\mathcal{E}|_Y\right)$ – его подпространство, где $\mathcal{E}|_Y=\left\{E\cap(Y\times Y):E\in\mathcal{E}\right\}$. Тогда $w\left(\mathcal{E}|_Y\right)\leq w(\mathcal{E})$.

Теорема 4.3.4. Имеет место равенство $w\left(I_\beta(\mathcal{E})\right)=w(\mathcal{E})$.

Доказательство. Из предложения 4.3.2 и леммы 4.3.1 следует, что $w\left(I_\beta\left(\mathcal{E}\right)\right) \geq w\left(\mathcal{E}\right)$.

Поскольку X – вполне регулярное пространство (см. теорему 3.2.1), оно имеет компактное хаусдорфово расширение bX и равномерность $\mathcal{E}^{bX}$ такую, что $\mathcal{E}^{bX}\Big|_X = \mathcal{E}$ и $w\left(\mathcal{E}\right) = w\left(\mathcal{E}^{bX}\right)$.

Легко заметить, что

$$I_\beta\left(X\right) = \left\{\mu \in I\left(\beta X\right) : \mathrm{supp}\mu \subset X\right\} \cong \left\{\mu \in I\left(bX\right) : \mathrm{supp}\mu \subset X\right\} = I_b\left(X\right).$$

Следовательно, можно выбрать открытые множества $U_1,...,U_n$ из базы в теореме 4.1.1. Затем наборы $\left\langle \mu; U_1,...,U_n; \varepsilon \right\rangle$, определенные в (4.1.6) образуют базу в $I_\beta\left(X\right)$.

Пусть теперь $\mathcal{B}$ – база равномерности такая, что $\left|\mathcal{B}\right| = w\left(\mathcal{E}\right)$. Тогда

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \left(\left\langle \mu;\ E\left[A_1^\alpha\right],...,E\left[A_n^\alpha\right];\varepsilon_1 \right\rangle \times \left\langle \nu; E\left[B_1^\alpha\right],...,E\left[B_k^\alpha\right];\varepsilon_2 \right\rangle \right) : \right.$$

$$A_i^\alpha \in \mathcal{B}_X,\ i = 1,...,n;\ B_j^\alpha \in \mathcal{B}_X,\ j = 1,...,k;\ \left|\mathfrak{A}\right| < \infty;\ \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0;$$

$$\left. \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \left\langle \mu;\ E\left[A_1^\alpha\right],...,\ E\left[A_n^\alpha\right];\ \varepsilon_1 \right\rangle = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \left\langle \nu;\ E\left[B_1^\alpha\right],...,\ E\left[B_k^\alpha\right],\ \varepsilon_2 \right\rangle = I_\beta\left(X\right) \right\}$$

образует базу равномерности на $I_\beta\left(X\right)$. Очевидно, $\left|\mathcal{B}_I\right| = \left|\mathcal{B}\right|$. Следовательно, $w\left(I_\beta\left(\mathcal{E}\right)\right) \leq w\left(\mathcal{E}\right)$. Теорема 4.3.4 доказана.

Оказывается, существуют свойства равномерных пространств более тонкие, чем полнота, то есть $\mathcal{H}$-полнота равномерных пространств.

Пусть $\left(X, \mathcal{E}\right)$ – равномерное пространство, а $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ – произвольная система диагональных окружений. Фильтр $\mathcal{F}$ на множестве X называется $\mathcal{H}$-фильтром Коши в $\left(X, \mathcal{E}\right)$, если для каждого окружения $E \in \mathcal{H}$ существует такой элемент $W \in \mathcal{F}$, что $W \times W \subset E$.

Определение 4.3.1 [6]**.** Пусть $(X, \mathcal{E})$ – равномерное пространство и $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$. Равномерное пространство $(X, \mathcal{E})$ называется $\mathcal{H}$-полным, а система $\mathcal{H}$ -полной, если каждой $\mathcal{H}$-фильтр Коши $\mathcal{F}$ имеет по крайней мере одну точку полного накопления, т. е. $\bigcap\{[F] : F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$.

Определение 4.3.2 [6]**.** Наименьшее кардинальное число τ называется индексом полноты равномерного пространства $(X, \mathcal{E})$, если существует такая система $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, что $|\mathcal{H}| = \tau$ и $(X, \mathcal{E})$ является $\mathcal{H}$-полным равномерным пространством.

Индекс полноты равномерного пространства $(X, \mathcal{E})$ обозначают $ic(\mathcal{E})$.

Теорема 4.3.5. Имеет место $ic(I_\beta(\mathcal{E})) = ic(\mathcal{E})$.

Доказательство. Из предложения 1.2.19 [6] и предложения 4.3.1 следует, что $ic(I_\beta(\mathcal{E})) \geq ic(\mathcal{E})$.

Покажем, что выполняется обратное неравенство. Пусть $ic(\mathcal{E}) \leq \tau$. Тогда по теореме 1.2.22 [6] $(X, \mathcal{E})$ можно отобразить на некоторое полное равномерное пространство $(Y, \mathcal{F})$ веса $w(\mathcal{F}) \leq \tau$ совершенным отображением f. Тогда по теореме 4.3.3 отображение $I_\beta(f) : I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ совершенно, а по теореме 4.3.4 есть $w(I_\beta(\mathcal{F})) \leq \tau$. Снова применяя теорему 1.2.22 [6], получаем $ic(I_\beta(\mathcal{E})) \leq \tau$. Так как τ – произвольное кардинальное число со свойством $ic(\mathcal{E}) \leq \tau$, то $ic(I_\beta(\mathcal{E})) \leq ic(\mathcal{E})$.

Таким образом, мы получили требуемое равенство. Теорема 4.3.5 доказана.

Чтобы далее рассматривать равномерно открытые отображения, мы напомним следующее эквивалентное определение равномерности.

Определение 4.3.3 [6]**.** Пусть X – непустое множество. Семейство $\mathcal{U}$ покрытий множества X называется равномерностью (в терминах покрытий) на X, если выполняются следующие условия:

(C1) если $\alpha \in \mathcal{U}$ и α вписано в некоторое покрытие γ множества X, то $\gamma \in \mathcal{U}$;

(C2) для любой пары $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ существует $\gamma \in \mathcal{U}$, которое вписано и в α, и в β;

(C3) для каждого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{U}$, сильно звездно вписанное в α;

(C4) для любой пары x, y различных элементов X существует такое $\alpha \in \mathcal{U}$, что ни один элемент α не содержит одновременно x и y.

Пара $(X, \mathcal{U})$, состоящая из множества X и равномерности на нем $\mathcal{U}$, называется равномерным пространством.

Определение 4.3.4 [6]**.** Равномерное непрерывное отображение $f:(X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ на равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$ называется равномерно открытым, если f переводит каждое открытое равномерное покрытие $\alpha \in \mathcal{U}$ в открытое равномерное покрытие $f(\alpha) \in \mathcal{V}$.

Положим

$$I(\alpha) = \left\{ \langle \mu; U_1, \ldots, U_n; \varepsilon \rangle : U_i \in \alpha,\ i = 1, \ldots, n;\ \varepsilon > 0 \right\}$$

а также

$$\mathcal{B}_{I,\mathcal{U}} = \left\{ I(\alpha) : \alpha \in \mathcal{U} \right\}.$$

Поскольку система $\mathcal{B}_{I,\mathcal{U}}$ удовлетворяет условиям (B1) – (B3) предложения 1.1.2 [6], она является базой некоторой равномерности на $I_\beta(X)$. Пусть $\mathcal{U}_I$ – равномерность, порожденная $\mathcal{B}_{I,\mathcal{U}}$.

Теорема 4.3.6. Пусть $f:(X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ – равномерно непрерывное отображение. Отображение $I_\beta(f):(I_\beta(X),\mathcal{U}_I) \to (I_\beta(Y),\mathcal{V}_I)$ равномерно открыто тогда и только тогда, когда f равномерно открыто.

Доказательство. Поскольку $f = I_\beta(f)\big|_X$, то из равномерной открытости $I_\beta(f)$ следует, что $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ – равномерно открытое отображение.

Пусть $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ – равномерно открытое отображение. Возьмем любое открытое равномерное покрытие $\mathcal{G}\in\mathcal{U}_I$ пространства $I_\beta(X)$. Нам нужно показать, что $I_\beta(f)(\mathcal{G})\in\mathcal{V}_I$. Существует $I(\alpha)\in\mathcal{B}_{I,\mathcal{U}}$, вписанное $\mathcal{G}$, т. е. каждый $\langle\mu;U_1,...,U_n;\varepsilon\rangle\in I(\alpha)$ имеет $G\in\mathcal{G}$ такое, что $\langle\mu;U_1,...,U_n;\varepsilon\rangle\subset G$. Так как $f(\alpha)\in\mathcal{V}$ имеем

$$\langle I_\beta(f)(\mu); f(U_1),..., f(U_n);\varepsilon\rangle\in I(f(\alpha))\in\mathcal{V}_I$$

а также

$$\langle I_\beta(f)(\mu); f(U_1),..., f(U_n);\varepsilon\rangle\subset I_\beta(f)(G).$$

Таким образом, $I(f(\alpha))$ измельчает $I_\beta(f)(\mathcal{G})$. Следовательно, $I_\beta(f)(\mathcal{G})\in\mathcal{V}_I$. Теорема 4.3.6 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе монографии дано систематическое изложение понятий и фактов, используемых для изложения её основных достижений. Она состоит из двух параграфов. В этих параграфах перечислены общеизвестные факты и понятие из общей топологии, теории ковариантных функторов, идемпотентной математике и теории групп. Хотя первая глава является вспомогательной, во втором параграфе получен результат о том, что пространство идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем субметризуемо тогда и только тогда, когда исходное тихоновское пространство таково. Этот результат применяется третьем главе. Однако, он имеет самостоятельный характер.

Вторая глава состоит из трех параграфов. В ней построено функтор I_f идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и бесконечной степенью. Установлено категорные свойства функтора I_f и геометрические свойства пространств вида $I_f\left(X\right)$, где X – компакт.

В первом параграфе второй главы установлено, что функтор I_f идемпотентных вероятностных мер является нормальным.

Во втором параграфе рассмотрено геометрические свойства пространства идемпотентных вероятностных мер. Доказано, что для произвольного компакта X подпространство $\delta\left(X\right)$ пространства $I\left(X\right)$ идемпотентных вероятностных мер, состоящее из мер Дирака, является сильным деформационным ретрактом компакта $I_f\left(X\right)$. Далее, показано, что функтор I_f сохраняет стягиваемость компактов, т. е. если X – стягиваемый компакт, то $I_f\left(X\right)$ – также стягиваемый компакт.

В третьем параграфе исследовано гомотопические свойства пространства идемпотентных вероятностных мер. Получено результат утверждающий, что $I_f\left(X\right)$ является абсолютным окрестностным ретрактом в классе компактов тогда и только тогда, когда X является абсолютным окрестностным ретрактом в классе компактов.

Третья глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе показано, что каждая группа (G, X, α) топологических преобразований на компактном хаусдорфовом пространстве X порождает группу $(I(G,X), I(X), I(\alpha))$ топологических преобразований на пространстве $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер. Введена топология в нем, согласованная групповой операцией и установлена эквивалентность $I(G,\cdot)$-пространств $I(X)$ и $I(Y)$ при условии эквивалентности G-пространств X и Y.

Второй параграф содержит результаты, которые играют важную роль при установлении результатов третьего параграфа, в частности, основного результата главы – теорему 3.3.3. Стоит особо отметить пример 3.2.1, показывающий существенность открытости действия $\alpha : G \times X \to X$ в предложении 3.2.1.

В третьем параграфе третьей главы наряду текущими результатами, установлен, как уже было отмечено выше, основной результат главы (теорема 3.3.3), где получено условие того, чтобы пространство идемпотентных вероятностных мер было компактом Дугунджи.

Четвёртая глава монографии состоит из трех параграфов. В первом параграфе определена база топологии поточечной сходимости пространства идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем открытыми множествами исходного тихоновского пространства.

Во втором параграфе получен результат о том, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем, действующий в категории $Comp$ – компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений можно поднять на категорию $Unif$ – равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

В третьем параграфе доказано, что функтор идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем переводит совершенные отображения в совершенные отображения, а открытые отображения в открытые отображения, сохраняет вес, а также индекс полноты равномерных пространств.

Следовательно, пространство идемпотентных вероятностных мер с компактным носителем является локально компактным хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда таковым является исходное пространство.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akian M., “Densities of idempotent measures and large deviations”. //Trans. Amer. Math. soc., 351, 4515–4543(1999).
2. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Zaitov A. A, “On certain properties of the spaces of order-preserving functionals”. //Topology and its Applications, 155 (2008), no. 16, 1792–1799.
3. Borchers H. J. and Sen R. N., “Mathematical Implications of Einstein Weyl Causality”. //Lect. Notes Phys. 709, 157–167(2006). DOI 10.1007/3-540-37681-X.
4. Borubaev A. A., “On some generalizations of metric, normed, and unitary spaces”. //Topology and its Applications, 201, 344–349 (2016).
5. Borubaev A. A., Eshqobilova D. T., “The functor of idempotent probability measures and maps with uniformity properties of uniform spaces”. //Eurasian Mathematical Journal. 2021, Vol. 12, No 3, p. 29–41. (Scopus IF. 0,34, DOI:https://doi.org/10.32523/2077-9879-2021-12-3-29-41).
6. Borubaev A. A., Pankov P. S., Chekeev A. A., “Spaces Uniformed by Coverings”. –Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, Budpest, 2003.
7. Bourbaki N., “Topologie Générale”. –Chaps. 1 et 2, 3rd edition, Actualites Sci. et Ind. 1142, Hermann, Paris. English translation, General Topology, Parts 1 and 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.
8. Chatyrko V. A., Kozlov K. L., “The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions”. //Proc. 9-th Prague Topological Symposium, Topol. Atlas, North Bay, ON, Praga, 2002, 15–21.
9. Chigogidze A. Ch., “Extension of normal functors”. //Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mekh., 6, 23-26(1984).
10. Choquet G., “Theory of capacities”. //Ann. Inst. Fourier, 5, 131–295(1955).
11. Eshqobilova D. T., “A metric on the space of idempotent probability measures on metrisable space”. //International scientific conference “Modern problems of geometry and topology and their applications”. Tashkent, Uzbekistan. November 21-23, 2019, p. 38.

12. Eshqobilova D. T., “Lifting the functor I_β to the category of uniform spaces”. //Physical and mathematical sciences. 2020, Vol. 4 -Issue 1, p. 29– 40.
13. Eshqobilova D. T., Zaitov A. A., “On pseudometric uniformity on a hyperspace”. //International scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”. Kyrgyzstan, Bishkek- Issyk- Kul. June 16-19, 2021, p. 46.
14. Eshqobilova D. T., Kholturaev Kh. F., “The functor of idempotent probability measures and completeness index of uniform spaces”. //Uzbek Mathematical Journal. Vol. 65 -Issue 1, 2021, p. 65–79.
15. Fedorchuk V. V., Chigogidze A. Ch., “On the extension dimension of nonmetrizable manifolds”. //Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 3, 44–48(1999).
16. Glen E. Bredon., “Introduction to compact transformation groups”. //Academic Press. New York – London.
17. Gunawardena J., “Idempotency”. //Publ. of the Newton Institute, vol 11 (1998), Cambridge University Press, Cambridge, (Online publication date: May 2010).
18. Hart K. P., Nagata J. and Vaughan J. E., editors, “Uniform Spaces. I, in: Encyclopedia of General Topology”. //E sevier Science Ltd., 259–263(2004).
19. Haydon R., “On a problem of Pelczynski: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE (0–dim)”. //Studia Math., 52:1 (1974), 23–31.
20. Hopf E., “The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$”. //Comm. Pure Appl. Math., 3, 201–230(1950).
21. Inassaridze H., “Smooth K-groups for Monoid Algebras and K-regularity”. //Mathematics 2015, 3, 891–896; doi:10.3390 math3030891.
22. Ishmetov A. Ya., “On functor of idempotent probability measures with compact support”. //Uzbek mathematical journal, No 1, 72–80(2010).
23. Ishmetov A. Ya., On C-properties of the space of idempotent probability measures. //Bulletin of the Institute of Mathematics. 2020. № 3. p. 42-48.
24. James I. M., “Topologies, and Uniformities”. Springer-Verlag, London 1999.
25. Kelley J. L., “General Topology”. van Nostrand, New York, 1955.

26. Kholturaev Kh. F., “Geometrical properties of the space of idempotent probability measures”. //Applied General Topology, Vol 22, №2, 2021, p. 399–415.
27. Kleene S. C., “Representation of events in nerve sets and finite automata, in: Automata Studies”. //J. McCarthy and C. Shannon (eds), Princeton Univ. Press, 3–40(1956).
28. Kolokoltsov V. N., Maslov V. P., “Idempotent analysis and its applications”. Kluwer Publishing House, 1997.
29. Kolokoltsov V. N., Maslov V. P., “The general form of the endomorphisms in the space of continuous functions with values in a numerical semiring”. //Sov. Math. Dokl. 36, 55–59(1988).
30. Litvinov G. L., “Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction”. //Journal of Mathematical Sciences, 140:3, 426–444(2007). https://d0i.org/10.1007/s10958-007-0450-5.
31. Litvinov G. L., Maslov V. P, Shpiz G. B., “Idempotent (asymptotic) analysis and the representation theory, in: Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics”. //Malyshev V. A. and Vershik A. M. (eds.), Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 267–278(2002); arXiv:math.RT/0206025.
32. Litvinov G. L., Maslov V. P., “Idempotent Mathematics and Mathematical Physics”. //Contemporary Mathematics, 377(2005), 370 pp.
33. Litvinov G. L., Maslov V. P., Sergeev S. N. (eds), “Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics”, Vol. I, Moscow, 2007., 104 pp.
34. Madirimov M., A. A. Zaitov, “Equivariant maps of probability measures space (Russian)”. //Bulletin of Institute of Mathematics, 2021, Vol. 4, №3, 66–74.
35. Sadovnichiy Yu. V., ”Lifting the functors U_τ and U_R to the categories of bounded metric spaces and uniform spaces”. //Sb. Math. , 191: 11, 1667–1691(2000).
36. Zaitov A. A., “On a metric on the space of idempotent probability measures”. //Applied General Topology, 1, 35–51(2020).

37. Zaitov A. A., Eshqobilova D. T., “On max-plus-regular extension and averaging operators”. //Abstracts of reports of the Republican scientific conference “Modern problems of mathematics: problems and solutions”. Termez, october 21-23, 2020, p. 47–49.
38. Zaitov A. A., Jumayev D. I., “Hyperspace of the Π-complete spaces and maps”. //Eurasian Math. J., 12 (2021), no. 2, 104–110.
39. Zaitov A. A., Kholturaev Kh. F., “On interrelation of the functors P of probability measures and I of idempotent probability measures”. //Uzbek Mathematical Journal, 4, 36–45(2014).
40. Zaitov A., Ishmetov A. Functor I_{β} lifts onto the category $Metr_b$. //Abstracts of the conference problems of modern topology and its applications. 11-12 may 2017, Tashkent. pp.108-109
41. Zaitov A., Ishmetov A. On paracompact type properties of the space of idempotent probability measures and absolute retracts. //V Congress of the Turkic World matematicians. Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June 5-7, 2014, 232.
42. Zarichniy M. M, “Spaces and maps of idempotent measures”. //Izv. Math., 74(2010), no. 3,481–499.
43. Архангельский А. В., Пономарев В. И., «Основы общий топологии в задачах и упражнениях», –М., «Наука», 1974.
44. Бешимов Р. Б., «Некоторые свойства функтора O_{β}». //Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004, 313, стр. 131–134.
45. Бешимов Р. Б., Сафарова Д. Т., «Равномерное пространство и его гиперпространство». //Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021, №197, стр. 108–116.
46. Борсук К. Теория ретрактов. – М.: Мир. – 1971.
47. К. Теория шейпов. – М.: Мир, – 1976.
48. Бредон Г., «Введение в теорию компактных групп преобразований». –М., Наука, 1980.
49. Джаббаров Г Ф., «Тройка бесконечных итераций функтора положительно-однородных функционалов». //Матем. тр. 2019, том. 22, № 1, стр. 101–118.

50. Джаббаров Г Ф., М. М. Жабборов. «Метризация пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок однородных функционалов». //Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021, №197, стр. 88–94.
51. Жураев Т. Ф., «О функторе P вероятностных мер». //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1990, № 1, с. 26-3.
52. Жураев Т. Ф., «Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями некоторых ковариантных функторов» //Докторская диссертация, Ташкент – 2022, Институт Математики имени В. И. Романовского.
53. Заитов А. А., Эшкобилова Д. Т., «Компакты Дугунджи и пространство идемпотентных вероятностных мер». //Математические заметки. 2023, том 114, № 4, с. 497–508 (Scopus IF. 0,72, DOI:https://doi.org/10.4213/mzm13592)
54. Заитов А. А., Ишметов А. Я., «Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер». //Математические заметки, Том 106 выпуск 4, 2019, стр. 531–542.
55. Заитов А. А., «Геометрические и топологические свойства подпространства $P_f(X)$ вероятностных мер». //Изв. вузов. Матем., 10 (2019), 28–37.
56. Заитов А. А., Ишметов А. Я. О монаде, порожденной функтором I_β. //Вестник НУУз, 2, 2013, 61-64.
57. Заитов А. А., Эшкобилова Д. Т., «Субметризуемость и пространство идемпотентных вероятностных мер». //International scientific conference “Matematical analysis and its applications in modern matematical physics”. Samarqand, Uzbekistan. September 23-24, 2022, p. 128–129.
58. Козлов К. Л, Чатырко В. А., «Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи». //Матем. сб., 2010, том 201, №1, 103–128.
59. Колокольцов В. Н., «Идемпотентные структуры в оптимизации». //Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз 65, 1999, 118–174.

60. Колокольцов В. Н., Маслов В. П., «Идемпотентный анализ как аппарат теории управления». //Функц. анализ и его прил 23, 1 (1989), 1–14. MZ10
61. Колокольцов В. Н., Маслов В. П., «Идемпотентный анализ как аппарат теории управления и оптимального синтеза». //Функц. анализ и его прил 23, 4 (1989), 53–62.
62. Литвинов Г. Л., Маслов В. П, Шпиз Г. Б., «Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход. //Матем. заметки 69, 5 (2001), 758–797.
63. Лузгарев А., «Теория категорий». //Конспект лекций, 2016.
64. Мадиримов М., «Размерность и ретракции в теории топологических групп преобразований» –Ташкент: «Фан», 1987. –144 с.
65. Пелчинский А., «Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций». –М., Мир, 1970.
66. Садовничий Ю. В., Бешимов Р. Б., Жураев Т. Ф., «Топология». Ташкент–2021.
67. Смирнов Ю. М., «Об эквивариантных вложениях G-пространств». //УМН, т. 31, №5(191) (1976), стр. 137–147.
68. Сян У. И., «Когомологическая теория топологических групп преобразований». –М., Мир, 1979.
69. Успенский В. В., “Топологические группы и компакты Дугунджи». //Матем. сб., 180:8 (1989), 1092–1118.
70. Федорчук В. В., Филиппов В. В. «Общая топология». // –М., Физ.-мат. Лит., 2006.
71. Холтураев Х. Ф., «О Z-множествах пространства идемпотентных вероятностных мер». //Математические заметки, Том 111, выпуск 6, 2022, стр. 904–920.
72. Щепин Е. В., «Функторы и несчетные степени компактов». //*УМН,* 36:3 (1981), 3–62.
73. Энгелькинг Р., «Общая топология». –М.: «Мир», 1986. –752 с.

74. Эшкобилова Д. Т., «Об одной группе топологических преобразований пространства идемпотентных вероятностных мер». //Бюллетень Института математики. ISSN 2181-9483. 2022, № 5, с. 134–142.
75. Эшкобилова Д. Т., «О новой системе псевдометрик, порождающей равномерность на гиперпространстве». //Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий». Бухара, 11-12 май, 2022 г., стр. 131–132.
76. Эшкобилова Д. Т., «О поднятии функтора идемпотентных вероятностых мер на категорию равномерных пространств». //Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Теоретические основы и прикладные задачи современной математики». Андижан, 28 марта 2022 г., стр. 449–450.
77. Эшкобилова Д. Т., «Функтора идемпотентных вероятностых мер и равномерные пространства». //Тезисы докладов международной научно-практической конференции “Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий». Нукус, 2-3 май, 2023 г., стр. 93–95.
78. Эшкобилова Д. Т., «Эквивалентность пространств идемпотентных вероятностных мер». //Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы алгебры и анализа». Термез, 18-19 ноябрь, 2022 г., стр. 191–192

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЭШКОБИЛОВА ДИЛРАБО ТУРАХОНОВНА

ПОДНЯТИЕ ФУНКТОРА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА КАТЕГОРИЮ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

МОНОГРАФИЯ