

R.N.Shamsiyev

MATEMATIKA

**OLIY O‘QUV YURTLAR BAKALAVR TALABALARI
UCHUN DARSLIK**

Toshkent – 2024

R.N.Shamsiyev Matematika. T.: 2024. -349 b.

Mazkur darslik oliy o'quv yurtlar bakalavr talabalari uchun yozilgan bo'lib, bunda chiziqli algebra, matematik tahlilga kirish, bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi elementlari va matematik statistika mavzulari bayon qilingan. Har bir mavzuda asosiy tushunchalar keltirilgan, tegishli teoremlar va unga doir namunaviy misollar yechimlari bilan berilgan. Har bir bobning oxirida nazorat savollari va talabalarning mustaqil ishlari uchun mashqlar va ularning javoblari keltirilgan.

Taqrizchilar:

B.J. Qodirqulov Toshkent davlat sharqshunoslik universiteti
“Matematika va umumiy fanlar” kafedrasini
mudiri, professor;

A. Abdukarimov Toshkent davlat texnika universiteti “Oliy
matematika” kafedrasini professori;

Ushbu darslik Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2023-yil 29-iyun 232-son buyrug'i bilan nashrga tavsiya etilgan.

ISBN: 978-9910-9301-6-4

SO‘Z BOSHI

Taqdim qilinayotgan darslik barcha oliy o‘quv yurtlar bakalavr talabalariga mo‘ljallangan. Ko‘pgina oliy o‘quv yurtlarda matematikani o‘rganish zaruriyati hozirgi kunda ilmiy texnik, iqtisodiy, tibbiy va farmatsevtik tadqiqotlarda matematikaning keng qo‘llanilishidan kelib chiqadi. Ayniqsa, bu matematik statistikaning qo‘llanilishida yaqqol namoyon bo‘ladi. Ko‘pgina iqtisodiy jarayonlarni iqtisodiy ko‘rsatgichlar asosida o‘rganishda, tibbiy tadqiqotlar, masalan yangi dori vositasining samaradorligini o‘rganishda matematik statistikaning uslublari yordamida tahlil qilish talab etiladi.

Darslikdagi o‘quv material chiziqli algebra (1-bob), matematik tahlil (2-8 boblar), ehtimollar nazariyasi elementlari (9-11 boblar) va matematik statistika (11-15 boblar) qismlaridan iborat.

Darslikdagi material an‘anaviy kurslardagiga nisbatan bir muncha soddalashtirilgan. Mavzular bo‘yicha keltirilgan misol va masalalar imkon qadar amaliy fanlaridagi terminlar asosida bayon qilishga harakat qilindi.

Har bir bobning oxirida nazorat savollari va talabalarning mustaqil ishlari uchun mashqlar va ularning javoblari keltirilgan.

Darslikni yozishda oliy o‘quv yurtlar bakalavr talabalari uchun matematika fanining amaldagi dasturida tavsiya qilingan adabiyotlardan keng foydalanilgan.

Darslik haqida bildirilgan har qanday fikr va mulohazalar mamnuniyat bilan qabul qilinadi.

Muallif.

I BOB. DETERMINANTLAR. CHIZIQLI TEGLAMALAR SISTEMASI.

1.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Ikkinch tartibli determinantlar. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar berilgan bo'lsin (ular “ a -bir-bir” “ a -bir-ikki, “ a -ikki-bir”, “ a -ikki-ikki” deb o'qiladi).

1.1-Ta'rif. Ikkinchi tartibli determinant deb, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ qiymatga teng bo'lgan songa aytiladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.1)$$

ko'rinishda yoziladi.

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar determinatning elementlari deb ataladi. Ikkinchi tartibli determinantlar ikkita satr va ikkita ustun bilan farqlanadi. a_{11}, a_{22} sonlar determinatning bosh diagonalini, a_{12}, a_{21} sonlar esa ikkilamchi diagonalni aniqlaydi.

1.1-Misol. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish: (1.1) formulaga ko'ra $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - (-4) \cdot 3 = 28$.

Uchinchi tartibli determinantlar.

1.2-Ta'rif. Uchinchi tartibli determinant deb,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda belgilanadigan va qiymati

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1.2)$$

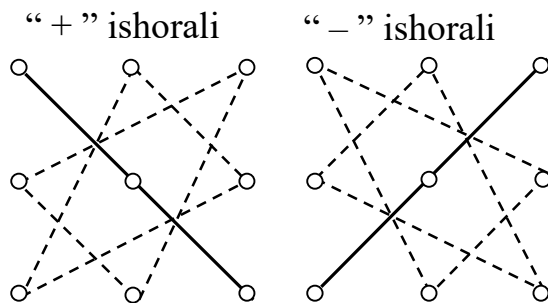
tenglik bilan topiladigan songa aytiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr va uchta ustunga ega. a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlardan tuzilgan diagonal asosiy, a_{31}, a_{22}, a_{13} elementlardan tuzilgani esa yon diagonal deb ataladi.

(1.2) algebraik yig'indini tuzish osongina: uning har bir hadi uchta elementning ko'paytmasidan iborat, bunda uchta hadi “+” ishoraga ega va

uchta hadi “–“ ishoraga ega. “+” ishorali hadlardan birinchisi bosh diagonal elementlarining ko‘paytmasidan iborat, qolgan hadlar har birining ikkita ko‘paytuvchisi bosh diagonalga parallel uchinchisi esa qarama-qarshi burchakda yotgan elementdan iborat. (1.2) yig‘indiga kirgan “–“ ishorali hadlar ham xuddi shunday tuziladi, ammo ular yon diagonalga nisbatan olinadi.

“+” va “–“ ishorali hadlarni tuzish sxemasi 1.1-rasmda tasvirlangan:



1.1-rasm

1.2-Misol. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 2 & 8 & -9 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ uchinchi tartibli dterminantni hisoblang.

Yechish: 1.2-Ta’rifga ko‘ra hisoblaymiz:

$$\Delta = 4 \cdot 8 \cdot 5 + (-7) \cdot (-9) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 8 - \\ - 3 \cdot 8 \cdot 0 - (-7) \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-9) \cdot 8 = 566 .$$

1.3-Ta’rif. Determinantning satrlari o‘rniga mos tartib raqamli ustunlarini joylashtirish, berilgan determinantni transponirlash deyiladi.

Quyida 3-tartibli determinantlarning xossalarini keltiramiz va ularni (1.2) yoyilma yordamida osongina tekshirib ko‘rish mumkin. Bu xossalar ikkinchi tartibli determinantlar uchun ham o‘rinli.

1-xossa. Determinant transponirlansa, uning qiymati o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

2-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita satrlari (ixtiyoriy ikkita ustunlari) orinlari almashtirilsa, determinant o‘z ishorasini ozgartiradi.

3-xossa. Bitta satr (bitta ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Keyingi to‘rtta xossa 1-3 xossalardan bevosita kelib chiqadi. Ularning o‘rinliligini (1.2) formula yordamida tekshirib ko‘rish mumkin.

4-xossa. Agar determinantning ikkita satri (ikkita ustuni) mos elementlari teng bo‘lsa, uning qiymati nolga teng.

5-xossa. Agar birorta satrning (birorta ustunning) barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, determinantning qiymati ham nolga teng bo‘ladi.

6-xossa. Agar ikkita satr (ikkita ustun) mos elementlari praporsional bo‘lsa, determinantning qiymati nolga teng bo‘ladi.

7-xossa. Determinantning birorta satr (birorta ustun) elementlariga boshqa satrning (boshqa ustunning) bir xil songa ko‘paytirilgan mos elementlarini qo‘shishdan determinantning qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{12} + ka_{32} & a_{13} + ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{31} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{31} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Minor va algebraik to‘ldiruvchilar. 3-tartibli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblashning yana bir usulini ko‘rsatamiz.

Δ determinant a_{ij} elementining M_{ij} *minori* deb, bu determinantning i – satrini va j – ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan ikkinchi tartibli determinantga aytiladi. Masalan, a_{23} elementning minori

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ikkinchi tartibli determinant bo‘ladi.

a_{ij} elementining A_{ij} algebraik to‘ldiruvchisi deb

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (1.3)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi miqdorga aytiladi.

1.1-Teorema. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ixtiyoriy ustuni) elementlarini ularning algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng, ya’ni quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.4)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

(1.4) formula determinantni i –satr elementlari bo‘yicha, (1.5) formula esa j –ustun elementlari bo‘yicha yoyish formulasi deb ataladi.

1.3-Misol. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 2 & 8 & -9 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish: Determinantni 1-satr elementlari bo‘yicha yoyamiz:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} - (-7) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 4(40 + 72) + 7(10 - 0) + 3(16 - 0) = 566. \end{aligned}$$

1.2. Yuqori tartibli determinantlar

To‘rtinchi tartibli determinant to‘rtta satr va to‘rtta ustundan iborat bo‘ladi:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Beshinchi, oltinchi va hokazo n – tartibli determinantlar xuddi shu singari aniqlanadi.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni geometrik qoidalarini qo‘llab hisoblash qulay. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash uchun bunday qulay usullar yo‘q. Biz quyida bunday determinantlarni hisoblashning ikki usulini keltiramiz.

Determinantni uchburchak shaklga keltirib hisoblash.

Determinantning xossalaridan foydalanib uni uchburchak shaklga keltirish mumkin va bunday determinantning qiymati bosh diagonalda turgan elementlarning ko'paytmasiga teng bo'ladi. Quyidagi n – tartibli determinant berilgan bo'lsin:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar yotgan diagonal determinantning bosh diagonal deb ataladi. Bosh diagonalda pastda joylashgan barcha elementlar nol bo'ladigan qilib almashtirishlar bajaramiz.

Agar birinchi ustunning barcha elementlari nollardan iborat bo'lsa yuqori tartibli determinantlarning 5-xossasiga ko'ra bu determinantning qiymati nolga teng bo'ladi. Birinchi ustunning kamida bitta elementi noldan farqli deb faraz qilamiz. Satrlarning o'rnini almashtirib noldan farqli bu elementni determinantning chap yuqori burchagiga joylashtirish mumkin. Bunda 2-xossaga ko'ra determinantning qiymati faqat o'z ishorasini o'zgartiradi. Boshqa ikki satrining ham o'rinlarini almashtirib determinantning o'z ishorasini ham saqlashimiz mumkin. Shunday qilib $a_{11} \neq 0$ bo'lsin. Birinchi satr elementlarini $-a_{k1}/a_{11}$ ga ko'paytirib k – satrning mos elementlariga qo'shamiz, bunda $k = 2, 3, \dots, n$. 7-xossaga ko'ra bu almashtirishda determinantning qiymati o'zgarmaydi. Natijada

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2}^{(1)} & a_{(n-1)3}^{(1)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(1)} & a_{(n-1)n}^{(1)} \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

determinantni hosil qilamiz. Bu yerda

$$a_{kl}^{(1)} = a_{kl} - \frac{a_{k1}a_{1l}}{a_{11}} \quad (k, l = 2, 3, 4, \dots, n)$$

(1.6) determinantda almashtirishning birinchi qadamidan keyin hosil bo'lgan yangi element. (1.7) determinatning birinchi ustunining bosh diagonaldan pastda joylashgan barcha elementlari nollardan iborat.

Keyingi almashtirishlarda birinchi satr va birinchi ustun elementlariga teginilmaydi.

Agar (1.7) determinantning ikkinchi ustunining birinchi satrdan pastda joylashgan elementlari (ya'ni $a_{22}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, \dots, a_{n2}^{(1)}$ elementlar) nolga teng bo'lsa, u holda bu determinantning ham qiymati nolga teng bo'ladi. Chunki uni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoysak $\Delta_n = a_{11}\Delta_{n-1}^{(1)}$ bo'ladi, bu yerda

$$\Delta_{n-1}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2}^{(1)} & a_{(n-1)3}^{(1)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(1)} & a_{(n-1)n}^{(1)} \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Agar $a_{22}^{(1)} = a_{32}^{(1)} = \dots = a_{n2}^{(1)} = 0$ bo'lsa, yuqori tartibli determinantlarning 5-xossasiga ko'ra $\Delta_{n-1}^{(1)} = 0$ va demak $\Delta_n = 0$ bo'ladi.

$a_{22}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, \dots, a_{n2}^{(1)}$ elementlarning kamida bittasi noldan farqli deb faraz qilamiz. (1.7) determinantda ham satrlarning o'rnini almashtirib bu noldan

farqli elementni ikkinchi satr ikkinchi ustunga joylashtiramiz. Shuning uchun $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb hisoblashimiz mumkin. Ikkinchi satr elementlarini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko'paytirib k –satrning mos elementiga qo'shamiz, natijada

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(n-1)3}^{(2)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(2)} & a_{(n-1)n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

determinantni hosil qilamiz, bu yerda

$$a_{kl}^{(2)} = a_{kl}^{(1)} - \frac{a_{k2}^{(1)} a_{2l}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (k, l = 3, 4, \dots, n)$$

—berilgan determinantni uchburchak shaklga keltirish uchun bajarilayotgan almashtirishning ikkinchi qadamida hosil bo'lgan yangi elementlar. (1.8) determinantning birinchi va ikkinchi ustularining bosh diagonalidan pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng.

Keyingi almashtirishlarda (1.8) determinantning birinchi va ikkinchi satrlariga, hamda birinchi va ikkinchi ustunlariga teginilmaydi.

Determinantning bosh diagonalidan pastda joylashgan elementlarini ketma-ket nolga aylantirish jarayonini davom ettirib, $(r - 1)$ – qadamdan keyin $(r \leq n)$ determinant:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3r}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{r(n-1)}^{(r-1)} & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

ko‘rinishni oladi, bu yerda

$$a_{kl}^{(r-1)} = a_{kl}^{(r-2)} - \frac{a_{k(r-1)}^{(r-2)} a_{(r-1)l}^{(r-2)}}{a_{(r-1)(r-1)}^{(r-2)}} \quad (k, l = r, r+1, \dots, n).$$

Agar $r < n$ bo‘lsa, determinant $\Delta_n = 0$ bo‘ladi, chunki determinant satrlari orasida elementlari faqat nollardan iboratlari ham mavjud. Agar $r = n$ bo‘lsa (1.9) determinant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

ko‘rinishni oladi va uning qiymati bosh diagonal elementlarning ko‘paytmasiga teng:

$$\Delta_n = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \quad (1.11)$$

1.4-Misol. Quyidagi determinantni hisoblang:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 10 & 6 \\ -4 & 7 & 10 & -19 & -16 \\ 3 & -8 & 7 & 20 & 9 \\ -1 & 3 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Yechish: Dastlab determinantni uchburcak shaklga keltiramiz. Agar satrlar o‘rni almashtirilsa, determinantning 2-xossasiga ko‘ra determinant o‘z

ishorasini o'zgariradi. Shuning uchun biz satrlar o'rinlarini almashtirganimizda determinat oldiga “–” ishorasini qoyamiz.

1-qadam. Birinchi va to'rtinchi satrlar o'rnini almashtiramiz, natijada

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ -4 & 7 & 10 & -19 & -16 \\ 3 & -8 & 7 & 20 & 9 \\ -1 & 3 & -3 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 10 & 6 \end{vmatrix}$$

determinantga ega bo'lamiz.

2-qadam. Determinantning birinchi satrini 4 ga ko'paytirib ikkinchi satrga, –3 ga ko'paytirib uchinchi satrga, 1 ga ko'paytirib to'rtinchi satrga va nihoyat –2 ga ko'paytirib beshinchi satrga qo'shamiz. Hisoblashlar bajarilgandan so'ng

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi.

3-qadam. Endi ikkinchi satrni –2 ga ko'paytirib uchinchi satrga, 1 ga ko'paytirib to'rtinchi satrga, 2 ga ko'paytirib beshinchi satrga qo'shamiz, natijada

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

determinantga ega bo'lamiz.

4-qadam. Uchinchi va to'rtinchi satrlar o'rinlarini almashtiramiz, bunda determinant oldidagi “–” ishora yo'qoladi va

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

determinant bilan ishlaymiz.

5-qadam. Uchinchi satrni 3 ga ko'paytirib to'rtinchi satrga, 1 ga ko'paytirib beshinchi satrga qo'shamiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

6-qadam. Hosil bo'lgan determinantda to'rtinchi va beshinchi satrlar o'rinlarini almastiramiz:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

7-qadam. Nihoyat bu determinantda to'rtinchi satrni -2 ga ko'paytirib beshinchi satrga qo'shsak, qidirilayotgan uchburchak shakldagi

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi. Uning qiymati esa (1.11) formulaga ko'ra bosh diagonalda joylashgan elementlar ko'paytmasiga teng bo'ladi. Shunday qilib, determinant oldidagi minus ishorani inobatga olib

$$\Delta_5 = -(1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 24$$

determinantning qiymatini topdik.

Determinantning taribini pasaytirib hisoblash. 1.1-Teoremani yuqori tartibli determinantlarga ham qo'llash mumkin. Natijada n – tartibli determinantni n ta $(n - 1)$ – tartibli determinantlarning algebraik yig'indisi shaklida ifodalashning imkonini beradi. Bu $(n - 1)$ – tartibli determinantlarni ham o'z navbatida $(n - 1)$ ta $(n - 2)$ – tartibli determinantlarning algebraik yigindisi shaklida tasvirlash mumkin bo'ladi va hokazo. Determinantni yoyishni tarkibida nollar soni eng ko'p bo'lgan satr yoki ustun elementlari bo'yicha bajargan ma'qul bo'ladi. Agar determinantning barcha elementlari noldan farqli bo'lsa, determinantning xopssalaridan foydalanib, uni almashtirishlar yordamida kamida bitta elementi noldan farqli bo'ladigan satrli ko'rinishga keltirish kerak. Bu jarayonni quyi tartibli determinantlarga ham qo'llab determinant qiymati hisoblanadi.

1.5-Misol. Quyidagi 5-tartibli determinantning qiymatini hisoblang:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 9 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & -3 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

Yechish: Mazkur determinantning birinchi va uchinchi satrlaridan bittadan nollari bor. Birinchi satrning elementlarini nolga aylantiramiz. Birinchi ustunni ikkinchi ustunga qo'shamiz, birinchi ustunni -2 ga ko'paytirib uchinchi ustunga, -1 ga ko'paytirib beshinchi ustunga qo'shamiz:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -10 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 8 & -1 & 11 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyamiz.

$$\Delta_5 = (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & -1 & 11 \end{vmatrix}.$$

O'ng tomondagi determinantni almashtiramiz. Birinchi satrni 3 ga ko'paytirib ikkinchi satrga, -1 ga ko'paytirib uchinchi satrga va -2 ga ko'paytirib to'rtinchi satrga qo'shamiz:

$$\Delta_5 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Hosil qilingan determinantni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz va determinantning qiymatini hisoblaymiz:

$$\Delta_5 = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 24 = 48.$$

1.3. Chiziqli tenglamalar sistemasi

Umumiy tushunchalar. Agar tenglamada noma'lumlar birinchi darajali va noma'lumlarning ko'paytmasi bo'lmasa, ya'ni u

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

ko‘rinishda bo‘lsa, bunday tenglamalar *chiziqli tenglama* deb ataladi, bu yerda a_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) va b —sonlar, x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) —noma’lumlar. a_i sonlar *tenglamaning koeffitsiyentlari*, b esa *ozod had* deb ataladi. Agar $b = 0$ bo‘lsa, tenglama *bir jinsli*, aks holda *bir jinslimas* deb ataladi.

Endi n noma'lumli n ta chizigli

[illegible]

tenglamalar sistemasini qaraymiz. Bu sistema koeffitsiyentlaridan n – tartibli

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantni kiritamiz.

Sonlarning $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tartiblangan to'plami $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlar o'rniga qo'yilganda (1.12) sistemaning har bir tenglamasi ayniyatga aylansa,

bu $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tartiblangan sonlar to'plami (1.12) sistemaning *yechimi* deb ataladi. Agar sistema yechimga ega bo'lsa, uni biz *o'zaro muvofiq* sistema, yechimga ega bo'masa *nomuvofiq* sistema deb ataymiz. Agar (1.12) sistemaning $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ va $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n$ yechimlari uchun

$$\gamma_1 = \gamma'_1, \gamma_2 = \gamma'_2, \dots, \gamma_n = \gamma'_n$$

tengliklarda bittasi o'rinli bo'lmasa ham, ular *har xil yechimlar* deb ataladi.

Kramer usuli. n noma'lumli n ta chiziqli (1.12) tenglamalar sistemasini Kramer usuli deb ataluvchi usul bilan yechamiz.

1.2-Teorema (Kramer). Agar (1.12) chiziqli tenglamalar sistemasida $\Delta_n \neq 0$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega va bu yechim

$$x_i = \frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.13)$$

formulalar bo'yicha topiladi, $\Delta_n^{(i)}$ bu yerda Δ_n determinantning i – ustunini ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinant:

$$\Delta_n^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(1.13) formulalar Kramer formulalari deb ataladi.

1.6-Misol. Ushbu sistemani Kramer usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 6, \\ 2x - y + z = 5, \\ -x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

Yechish: Tenglamalar sistemasining asosiy determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

1.2-Teoreмага ko'ra berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. $\Delta_3^{(i)}$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

(1.13) Kramer formulriga ko'ra sistemaning yechimini topamiz:

$$x = \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_3} = \frac{4}{2} = 2, y = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_3} = \frac{2}{2} = 1, z = \frac{\Delta_3^{(3)}}{\Delta_3} = \frac{4}{2} = 2.$$

Nazorat savollari

1. Ikkinchi taqribli determinantlar qanday hisoblanadi?
2. Uchinchi taqribli determinantlar qanday hisoblanadi?
3. Determinantni transponirlash deganda nimani tushunasiz?
4. Determinantning xossalarini bayon qiling.
5. Determinant a_{ij} elementining M_{ij} minori deb qanday songa aytiladi?
6. Determinant a_{ij} elementining A_{ij} algebraik to'ldiruvchisi deb qanday songa aytiladi?
7. Yuqori tartibli determinantlarni qanday hisoblash mumkin?
8. Chiziqli tenglama deb qanday tenglamaga aytamiz?
9. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deb nimaga aytiladi?
10. Chiziqli tenglamalar sistemasini ychishning Kramer formulalarini yozing.

Mashqlar.

2-tartibli determinantlarni hisoblang:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}. \quad 3. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}. \quad 4. \begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}. \quad 5. \begin{vmatrix} x-1 & x+1 \\ 2x & x-3 \end{vmatrix}.$$

Tenglamalarni yeching: 6. $\begin{vmatrix} 2x+2 & 3x-3 \\ x+1 & 5x-5 \end{vmatrix} = 0$. 7. $\begin{vmatrix} 5x-15 & 2x \\ 2x-6 & 4x \end{vmatrix} = 0$.

3-tartibli determinantlarni hisoblang:

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} . \quad 9. \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} . \quad 10. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} \quad 11.$$

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$$

Tenglamalarni yeching:

$$12. \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 13. \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$$

Tenglamalar sistemasini yeching:

$$14. \begin{cases} 3x + 4y - 5z = -9, \\ 2x - 5y + 2z = -3, \\ x + 2y + 3z = 7. \end{cases} \quad 15. \begin{cases} 2x - 5y + z = 0, \\ x + y - z = 2, \\ 3x + 2y - 3z = 5. \end{cases}$$

Javoblar.

1. 19. 2. 30. 3. 1. 4. $\sin(x - y)$. 5. $-x^2 - 6x + 3$. 6. $x_1 = -1, x_2 = 1$. 7. $x_1 = 0, x_2 = 3$. 8. 143. 9. -28. 10. $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)$. 11. $abc + x(ab + bc + ca)$. 12. $x_1 = -4 - \sqrt{22}, x_2 = -4 + \sqrt{22}$. 13. $(-\infty, +\infty)$. 14. $x = -1, y = 1, z = 2$. 15. $x = 2, y = 1, z = 1$.

II. BOB. BIR O‘ZGARUVCHIILI FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI.

2.1. Funksiya tushunchasi. Funktsiyalarning berilish usullari.

Funksiya tushunchasi. Birorta X, Y haqiqiy sonlar to‘plamlari berilgan bo‘lsin.

2.1-Ta’rif. Agar har bir $x \in X$ son uchun birorta qonun-qoida asosida aniq bir $y \in Y$ soni mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi va

$$y = f(x) \text{ yoki } y = y(x), \quad x \in X \text{ yoki } f: X \rightarrow Y$$

ko‘rinishida yoziladi. Bunday funksiylarni sonli funksiylar deb ataymiz. X to‘plam funksiyaning aniqlanish sohasi, x erkli o‘zgaruvchi yoki argument deb ataladi. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)$ yoki $D(f)$ orqali belgilanadi. Y to‘plam esa funksiyaning qiymatlar sohasi deb ataladi va u $E(y)$ yoki $E(f)$ orqali belgilanadi.

Ba’zi funksiylarni ko‘rsatishda $f(x)$ o‘rniga f belgi ham ishlatiladi.

Shunday qilib, agar:

1. X aniqlanish sohasi;
2. Har bir $x \in X$ songa funksiyaning $y = f(x)$ qiymatini mos qo‘yuvchi f moslik berilgan bo‘lsa, funksiya aniqlangan bo‘ladi.

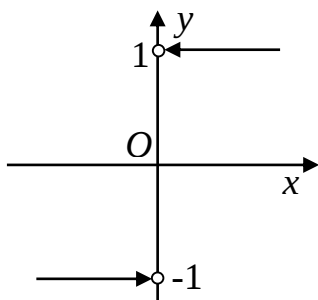
Agar f va g funksiyaning aniqlanish sohasi ustma – ust tushsa va aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $f(x) = g(x)$ o‘rinli bo‘lsa, ular teng funksiylar deb ataladi. Ushbu $y = x^2, -\infty < x < \infty$ va $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ funksiylar teng emas; ular faqat $[0 ; 1]$ kesmadagina teng.

Funksiyaga misollar.

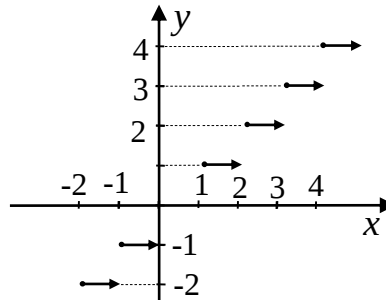
$$1. y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \\ -1, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

sign belgisi lotincha *signum* - ishora so‘zidan olingan. Bu funksiya $-\infty < x < \infty$ son o‘qining hamma joyida aniqlangan; qiymatlar to‘plami esa uchta $\{-1, 0, 1\}$ sonlardan iborat (2.1-rasm).

2. $y = [x]$ bu yerda $[x]$ sifatida x sonning butun qismi olingan, ya'ni $[x]$ qiymat x dan katta bo'lmagan eng katta butun songa teng. $n < x < n + 1$ uchun $[x] = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..$ bu funksiya son o'qining hamma joyida aniqlangan, qiymatlari to'plami esa butun sonlardan iborat (2.2-rasm).



2.1-rasm



2.2-rasm

Endi funksiyalar uchun muhim bo'lgan ayrim tushunchalarni kiritamiz.

2.2-Ta'rif. Agar har bir $x \in D(f)$ nuqta uchun bitta $f(x) \in E(f)$ nuqta mos qo'yilgan bo'lsa, $y = f(x)$ bir qiymatli funksiya, aks holda ko'p qiymatli deyiladi.

$E(f)$ to'plamda birorta $y = y_0$ nuqtani olamiz; u holda $D(f)$ to'plamda kamida bitta shunday x_0 nuqta topiladiki, uning uchun $y_0 = f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bunday nuqtalar bir nechta, hattoki cheksiz ko'p ham bo'lishi mumkin. Shunday qilib, $E(f)$ to'plamdan olingan har bir y nuqta uchun $D(f)$ to'plamdan bitta yoki bir nechta x nuqta mos qo'yildi. Natijada bir yoki ko'p qiymatli $x = g(y)$ funksiyani hosil qildik. Bu funksiya $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi va u $x = f^{-1}(y)$ orqali belgilanadi. Agar f^{-1} funksiya ham bir qiymatli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya o'zaro bir qiymatli deb ataladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya uch xil: analitik, grafik va jadval usul bilan beriladi.

Analitik usul. Agar $y = f(x)$ funksiya x o'zagruvchining qiymati ustida qandaydir amallar bajarilishini ko'rsatib turuvchi formula bilan aniqlansa, bu funksiyani biz analitik usul bilan berilgan deb ataymiz. Masalan,

$$y = x^3 + 1, -\infty < x < \infty$$

funksiya analitik usul bilan berilgan.

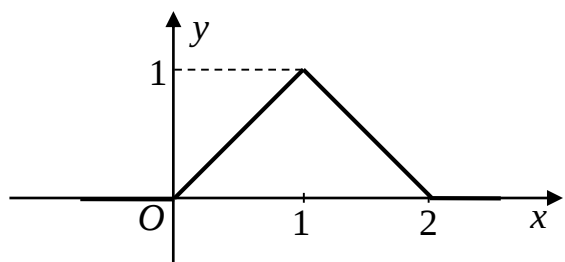
Bu holda funksiyaning aniqlanish sohasi deganda (agar u alohida ko'rsatilmagan bo'lsa) x argumentning funksiyaning aniqlovchi analitik ifoda haqiqiy va chekli qiymatni qabul qildiradigan barcha haqiqiy sonlar to'plami tushuniladi. Bunday ma'noda funksiyaning aniqlanish sohasini yana mavjudlik sohasi deb ham yuritiladi.

$y = \sqrt{4 - x^2}$ funksiya aniqlanish sohasi $-2 \leq x \leq 2$ kesmadan iborat.

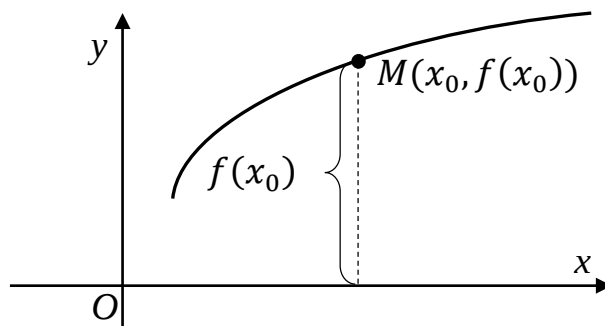
$y = x^2 + 5x + 7$ funksiyaning aniqlanish sohasi $-\infty < x < \infty$ son o'qining barcha joyidan iborat.

Funksiyaning analitik berilishi murakkab ko'rinishda ham bo'lishi mumkin. Xususiyl holda, funksiya o'zining aniqlanish sohasining turli qismlarida turli formulalar bilan aniqlanishi mumkin. Masalan funksiya quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lishi mumkin (2.3-rasm) $f(x) =$

$$\begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$



2.3-rasm



2.4-rasm

Grafik usul. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigi berilgan bo'lsa, u grafik usul bilan berilgan deyiladi. Bunda grafik $(x, f(x))$ nuqtalar to'plami ko'rinishida berilgan bo'lib, uning absissasi funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli, ordinatasi esa funksiyaning mos qiymatiga teng bo'ladi (2.4-rasm).

Jadval usul: Argumentning bir nechta qiymatiga mos keluvchi funksiyaning qiymatlari biror jadvalda keltirilgan bo'lsa, funksiya jadval

usulda berilgan deyiladi. Funksiya jadval usulda berilganida uning aniqlanish sohasi jadvalda keltirilgan $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ qiymatlaran iborat bo'ladi.

Murakkab funksiyalar. Ba'zan $y = f(u)$ funksiyaning u argumenti erkin o'zgaruvchi bo'lamsdan, u ham o'z navbatida boshqa bir o'zgaruvchiga, masalan x o'zgaruvchiga $u = g(x)$ ko'rinishda bog'liq bo'lgan holga duch kelamiz. Bunday holda y o'zgaruvchining x o'zgaruvchiga bog'liqligini ifodalash uchun u oraliq o'zgaruvchi o'rniga $g(x)$ ifoda qo'yiladi: $y = f(g(x))$. Bu qoida bo'yicha ifodalangan funksiyaning murakkab funksiya yoki f va g funksiyalarning superpozitsiyasi deb ataladi. Ba'zan bu yozuv o'rniga $y = f \circ g(x)$ ifoda yoziladi va u f va g funksiyalarning kompozitsiyasi deb ataladi.

Murakkab funksiyaning qiymatini hisoblashda dastlab x o'zgaruvchining qiymati bo'yicha oraliq u o'zgaruvchining qiymati hisoblanadi. So'ngra esa hisoblangan u qiymat bo'yicha $y = f(u)$ qiymat hisoblanadi.

Ushbu misolni qaraymiz: $f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = x - 1$ bo'lsin. U holda murakkab funksiyaning o'zi $y = f(g(x)) = \sqrt{x - 1}$ ko'rinishda bo'ladi.

Funksiyalarning ayrim xossalari.

Davriy funksiyalar.

2.3-Ta'rif. $X \subseteq \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning *davri* deb, shunday $T > 0$ songa aytiladiki, bunda ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun $(x - T, x + T) \in X$ munosabat va

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x) \quad (2.1)$$

tenglik orinli bo'ladi.

$nT, n \in \mathbf{N}$ son ham funksiyaning davri bo'ladi. Masalan, T berilgan $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa $2T$ ham uning davri bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun, birinchidan $x \pm 2T = ((x \pm T) \pm T) \in X$ va ikkinchidan (2.1) tenglikka ko'ra

$$f(x \pm 2T) = f(x \pm T \pm T) = f(x \pm T) = f(x).$$

Bundan keyin funksiyaning davri deganda uning davrlarining eng kichigi tushuniladi.

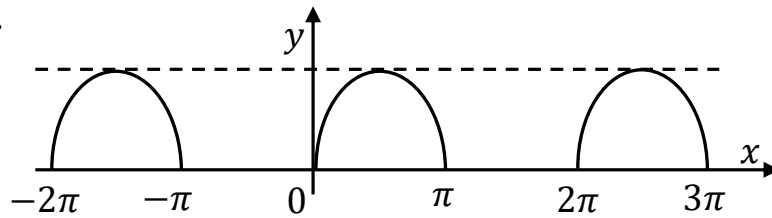
Agar $f(x)$ funksiyaning davri T bo'lsa, $g(x) = f(ax + b)$ funksiyaning davri T/a bo'ladi, bu yerda $a > 0$, b o'zgarmas sonlar. Haqiqatdan ham, (2.1) tenglikka ko'ra

$$g\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f(ax + b + T) = f(ax + b) = g(x).$$

Davrga ega bo'lgan funksiyaning *davriy funksiya* deb ataymiz.

Davri T bo'lgan $X \subseteq \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning grafigini yasash uchun, uning grafigini ixtiyoriy $[a, a + T]$ kesmada yasash yetarli, bu yerda $a \in X$ — birorta son. So'ngra Ox koordinata o'qi bo'ylab $\pm T, \pm 2T, \dots$, davrga suriladi.

2.5-rasmda davri $T = 2\pi$ bo'lgan $y = 2\sqrt{\sin x}$ funksiyaning grafigi keltirilgan.



2.5-rasm

Monoton funksiya. $f(x)$ funksiya $X \subseteq \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan va x_1, x_2 bu to'plamning ixtiyoriy nuqtalari bo'lib, ular uchun $x_1 < x_2$ tengsizlik o'rinli bo'lsin.

- 1) Agar $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *o'suvchi*;
- 2) agar $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'lsa, *kamaymaydigan*;
- 3) agar $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa, *kamayuvchi*;
- 4) agar $f(x_1) \geq f(x_2)$ bo'lsa *o'smaydigan* funksiya deb ataladi.

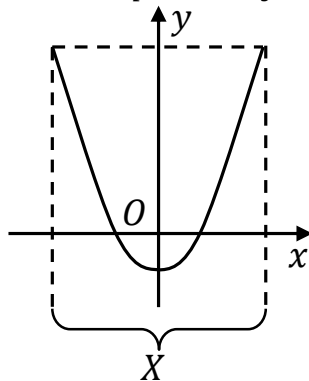
Barcha to'rt holda funksiyaning X to'plamda monoton deb ataladi, 1) va 3) hollarda qat'iy monoton deb ataladi. Qat'iy monoton funksiyaning teskarisi mavjudligi va teskari funksiya ham qat'iy monoton bo'lishi ravshan.

2.1-Misol. ► $y = x, y = x^3$ funksiya $\mathbf{R}$ son o'qida o'suvchi bo'ladi, $y = x^2$ funksiya esa $(-\infty, 0)$ intervalda kamayuvchi va $(0, +\infty)$ intervalda

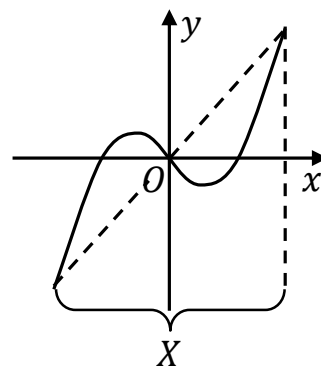
o'suvchi bo'ladi, ammo $x = 0$ nuqtani o'zida saqllovchi har qanday intervalda monoton bo'lmaydi. $y = c = \text{const}$, funktsiyani bir vaqtning o'zida ham kamaymaydigan, ham o'smaydigan funktsiya deb hisoblash mumkin. ◀

Juft va toq funktsiyalar. $f(x)$ funktsiyaning $D(f) = X \subseteq \mathbf{R}$ aniqlanish sohasi O koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lsin (2.6-rasm), ya'ni agar $x \in X$ bo'lsa, $-x \in X$ bo'ladi.

2.4-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $X \subseteq \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funktsiyani *juft*, agar $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa *toq* funktsiya deb ataymiz.



2.6-rasm



2.7-rasm

Juft funktsiyaning grafigi Oy o'qqa nisbatan simmetrik (2.6-rasm), toq funktsiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik (2.7-rasm) bo'ladi. $f(x)$ funktsiyaning juft yoki toqligini aniqlash uchun $f(-x)$ funktsiyani tahlil qilish kerak.

2.2-Misol. Ushbu $f(x) = x^k$ funktsiya k parametr juft, ya'ni $k = 2m$ bo'lganda juft va $k = 2m + 1$ bo'lganda toq funktsiya bo'ladi.

Juft ham toq ham bo'lmagan funktsiyalarni umumiy ko'rinishdagi funktsiyalar deb ataymiz.

Chegaralangan funktsiyalar. $D \subseteq \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin.

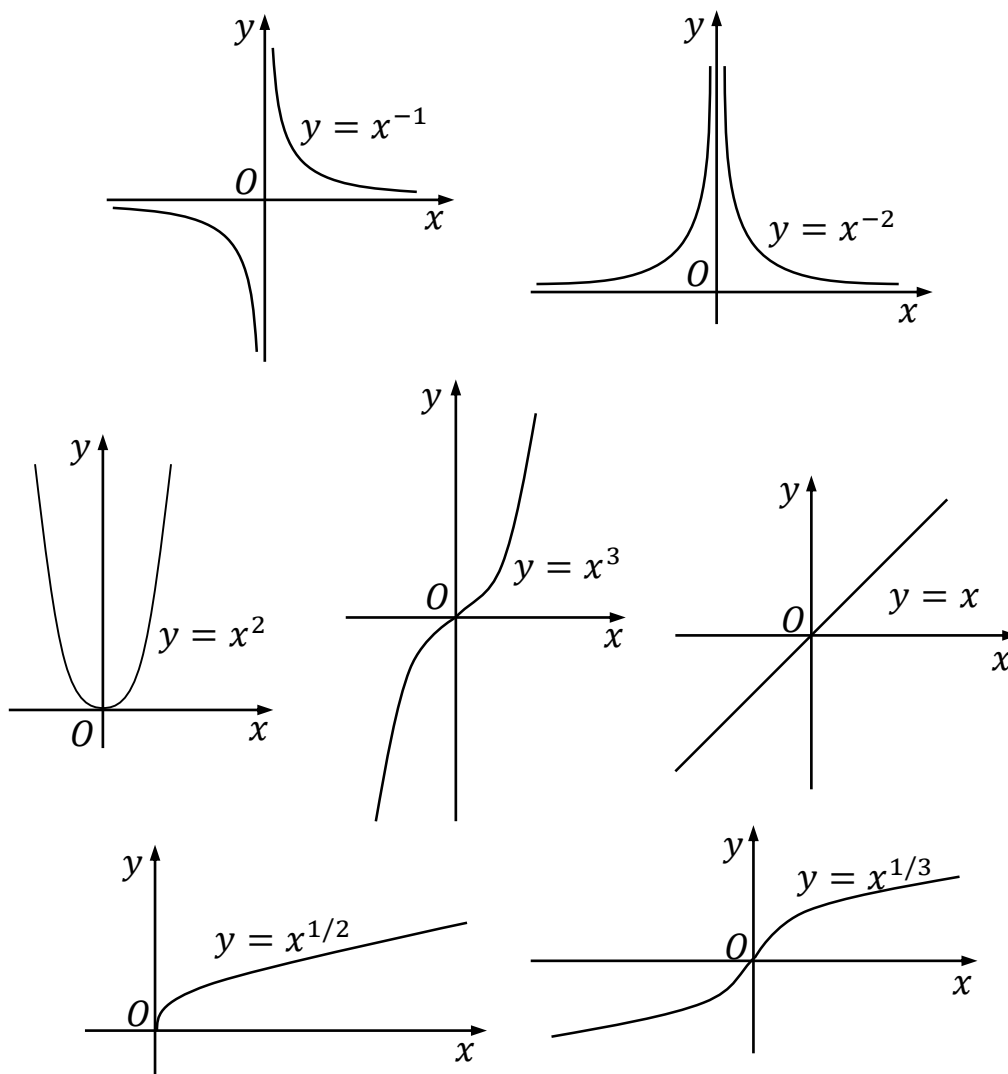
2.5-Ta'rif. Agar shunday M (mos ravishda m) o'zgarmas son topilib, barcha $x \in D$ nuqtalar uchun $f(x) \leq M$ (mos ravishda $f(x) \geq m$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funktsiya D to'plamda yuqoridan (mos ravishda quyidan) chegaralangan deyiladi.

2.6-Ta'rif. Agar shunday $C > 0$ o'zgarmas son topilib, barcha $x \in D$ nuqtalar uchun $|f(x)| < C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda chegaralangan deyiladi.

2.3-Misol. $\mathbf{R}$ son oqida aniqlangan

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

funksiya $D = \mathbf{R}$ to'plamda chegaralangan, chunki ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ uchun $0 < f(x) \leq 1$ tengsizlik o'rinli.

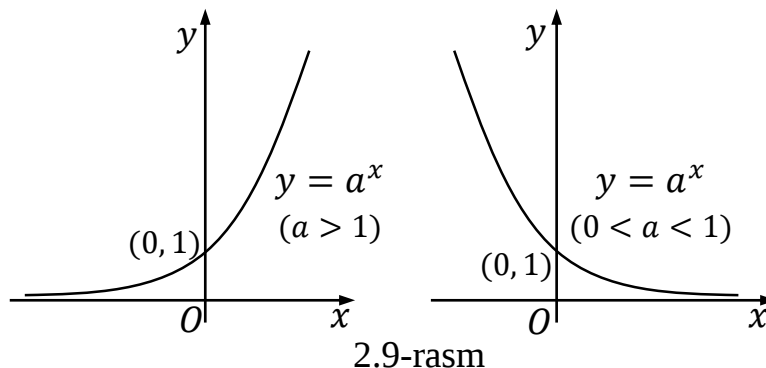


2.8-rasm

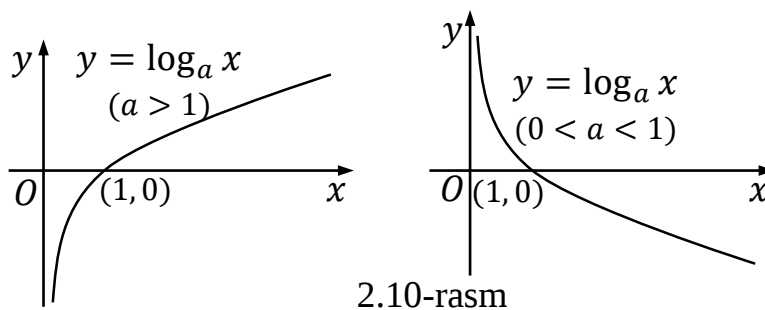
Elementar funksiyalar. Quydagi funksiyalarni asosiy elementar funksiyalar deb ataymiz:

1. $y = x^\alpha$ darajali funksiya, bunda $\alpha \in R$. Umumiy holda uning aniqlanish sohasi $(0; +\infty)$ son o'qining yarmidan iborat. Agar $\alpha = n \in N$ bo'lsa, x^α funksiya $(-\infty; +\infty)$ son o'qining hamma joyida aniqlangan. Darajaning turli qiymatlariga mos keluvchi grafiklar 2.8-rasmda tasvirlangan.

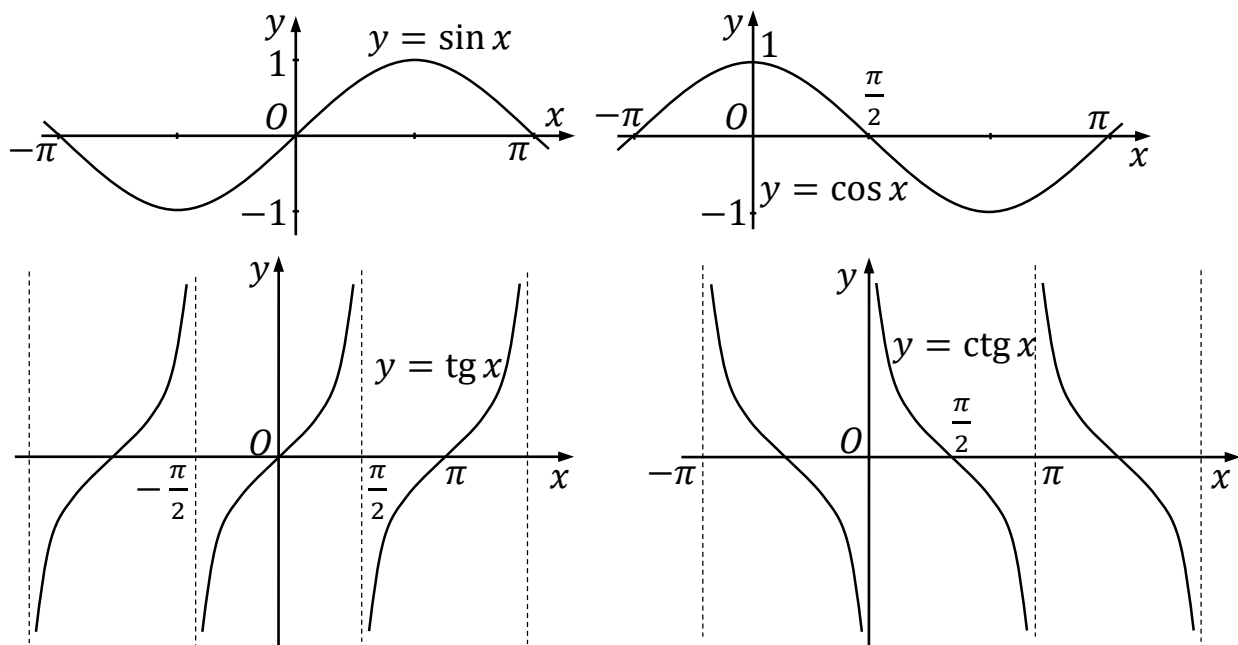
2. $y = a^x$ ko'rsatkichli funksiya, bunda $a > 0$, $a \neq 1$. U son o'qining hamma joyida aniqlangan. a asosning turli qiymatlariga mos keluvchi grafiklar 2.9-rasmda tasvirlangan.



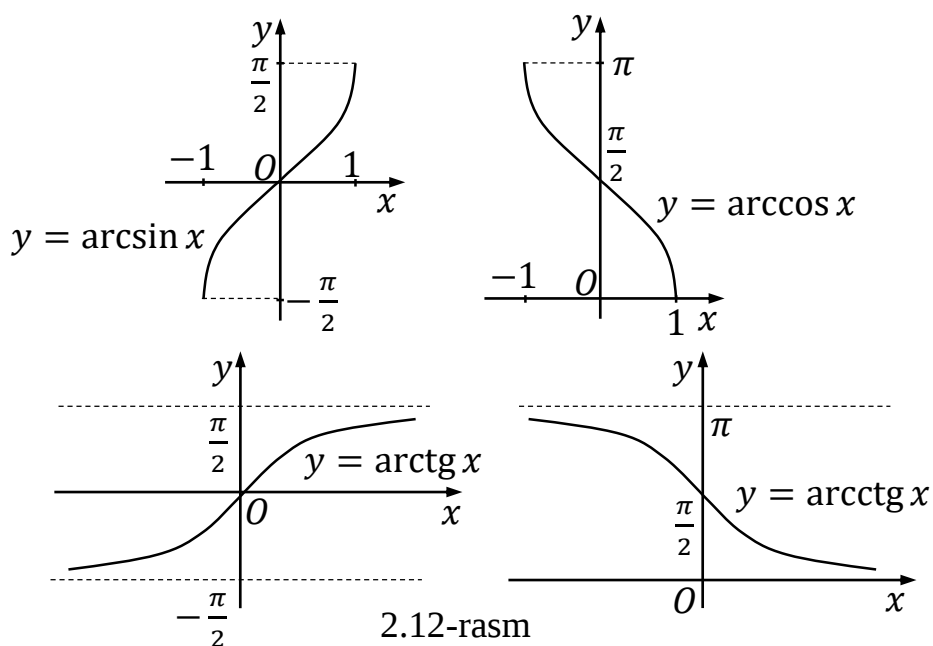
3. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya, bunda $a > 0$, $a \neq 1$. Uning aniqlanish sohasi $(0; +\infty)$ oraliqdan iborat. Logarifmik funksiya asosining turli qiymatlariga mos keluvchi grafiklari 2.10-rasmda tasvirlangan.



4. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ trigonometrik funksiyalar. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar son o'qining hamma joyida aniqlangan. $y = \operatorname{tg} x$ funksiya $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ bo'lganda aniqlangan. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya esa $x \neq k\pi$ bo'lganda aniqlangan, bu yerda k ixtiyoriy butun son. Trigonometrik funksiyalarning to'rtalasi ham davriy bo'lib, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalarning davri $T = 2\pi$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ esa $T = \pi$ davrga ega. Trigonometrik funksiyalarning grafiklari 2.11-rasmda tasvirlangan.



2.11-rasm



2.12-rasm

5. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ teskari trigonometrik funksiyalar. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $[-1; 1]$ kesmadan iborat. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiyalar esa son o'qining hamma joyida aniqlangan. Teskari trigonometrik funksiyalarning grafiklari 2.12-rasmda tasvirlangan.

2.2. Funksiyaning limiti.

Funksiyaning nuqtadagi limiti. Funksiyaning limiti matematik tahlildagi markaziy tushuncha hisoblanadi.

$f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin (a nuqtaning o'zida aniqlanmagan ham bo'lishi mumkin).

2.7-Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib,

$$|x - a| < \delta \quad (2.2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (2.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

2.4-Misol. $f(x) = c = \text{const}$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ ekanligini ko'rsatamiz.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son va x uchun $f(x) - c = c - c = 0 < \varepsilon$. Shuning uchun δ sifatida ixtiyoriy musbat sonni olish mumkin. ◀

2.5-Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ekanligini isbotlang.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $|x - 0| = |x| < \varepsilon$ bo'sin. $\delta = \varepsilon$ deb olsak ta'rifning shartlari bajariladi. ◀

2.6-Misol. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ ekanligini isbotlang.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $|x^2 - 4| < \varepsilon$ bo'sin.

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2| \cdot |(x - 2) + 4| \leq \\ &\leq |x - 2|(|x - 2| + 4) \end{aligned}$$

ekanligini inobatga olsak $|x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$ tengsizlikni qarash yetarli. Bu tengsizlik esa

$$|x - 2| < -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$$

tengsizlikka teng kuchli. Shuning sababli $|x^2 - 4| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi uchun (2.2) munosabatda $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$ deb olish yetarli. ◀

2.7-Misol. Tenglikni isbotlang: $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$.

► Ixtiyoriy haqiqiy a, b sonlar uchun o‘rinli bo‘lgan $||a| - |b|| \leq |a - b|$ tengsizlikdan foydalanamiz. U holda $||x| - |a|| \leq |x - a|$ va (2.2) munosabatda $\delta = \varepsilon$ deb olish kifoya. Haqiqatan ham $|x - a| < \delta = \varepsilon$ bo‘lsa,

$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$$

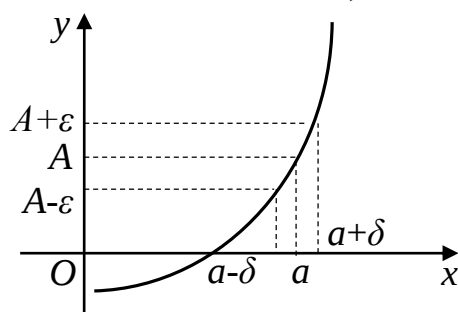
bo‘ladi. ◀

Topshiriq. Quyidagi limitlarni tengsizliklar yordamida ($\varepsilon - \delta$ tilida) ifodalang:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$; 3) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -7$; 4) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = -8$.

$y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limitining geometrik talqini 2.13-rasmda tasvirlangan. Tasvirga ko‘ra a nuqtaning δ atrofidan olingan barcha x nuqtalarga mos keluvchi $f(x)$ qiymatlar A nuqtaning ε atrofiga tushadi.

$y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin (a nuqtaning o‘zida aniqlanmagan ham bo‘lishi mumkin).



2.13-rasm

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

2.8-Ta’rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ son topilib, barcha $x > M$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning x argumenti $+\infty$ ga intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi.

$x \rightarrow -\infty$ dagi limit ham xuddi shu singari kiritiladi.

$x \rightarrow \infty$ dagi limitni beradigan bo‘lsak: Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ son topilib, barcha $|x| > M$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli

bo'lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning x argumenti ∞ ga intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

2.8-Misol. $0 < a < 1$ uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

ekanligini ko'rsatamiz.

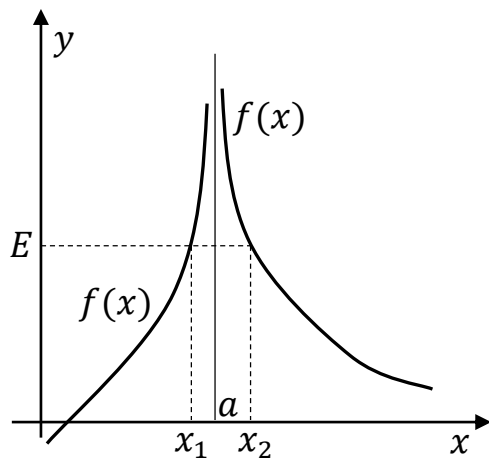
► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $a^x < \varepsilon$ bajariladi deb faraz qilamiz. $0 < a < 1$ bo'lganda $\log_a x$ funksiyaning xossaligidan foydalanib $a^x < \varepsilon$ tengsizlik o'rniga $x > \log_a \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. $M = \log_a \varepsilon$ deb olsak ta'rifning sharti bajariladi. ◀

2.9-Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ekanligini isbotlaymiz.

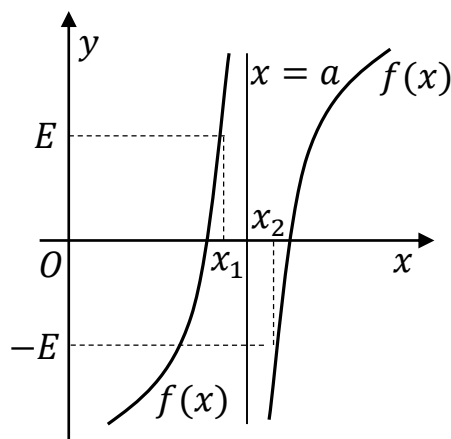
► Dastlab ixtiyoriy ε musbat son uchun $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ bo'lsin. U holda $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, yoki $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Agar ta'rifdagi M sifatida $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ sonni olsak $|x| > M$ uchun $\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$ orinli bo'ladi. ◀

Funksiyaning cheksizlikka intilishi.

2.9-Ta'rif. $E > 0$ son qanday bo'lishidan qat'iy nazar shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning biror atrofida barcha x nuqtalar uchun $f(x) > E$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $+\infty$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ko'rinishda yoziladi.



2.14-rasm



2.15-rasm

2.14-rasmda E ning qiymati bo'yicha $\delta = \min\{a - x_1, x_2 - a\}$ qiymatini ta'rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash ko'rsatilgan. x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning grafigi *vertikal asimptota* deb ataluvchi $x = a$ to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadi.

$-\infty$ funksiyaning biror nuqtadagi limiti bo'lish ta'rif ham xuddi shu singari kiritiladi. Buni o'quvchiga mustaqil bajarishiga qoldiramiz.

2.10-Ta'rif. $E > 0$ son qanday bo'lishidan qat'iy nazar shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning biror atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $|f(x)| > E$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, ∞ berilgan $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ko'rinishda yoziladi.

2.15-rasmda E ning qiymati bo'yicha $\delta = \min\{a - x_1, x_2 - a\}$ qiymatini ta'rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash ko'rsatilgan. x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning grafigi *vertikal asimptota* deb ataluvchi $x = a$ to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadi.

Endi x argument cheksizlikka intilganda $f(x)$ funksiya qiymati ham cheksizlikka intilish ta'rifini beramiz.

2.11-Ta'rif. $E > 0$ son qanday bo'lishidan qat'iy nazar shunday $M > 0$ son topilib, barcha $|x| > M$ nuqtalar uchun $|f(x)| > E$ tengsizlik bajarilsa, ∞ berilgan $f(x)$ funksiyaning x argumenti cheksizlikka intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ko'rinishda yoziladi.

2.10-Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ekanligini isbotlaymiz.

► Dastlab ixtiyoriy E musbat son uchun $\frac{1}{x^2} > E$ o'rinli bo'lsin. U holda $x^2 < \frac{1}{E}$, yoki $|x| < \frac{1}{\sqrt{E}}$. Agar ta'rifdagi δ sifatida $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$ sonni olsak $|x| < \delta$ uchun $\left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} > E$ o'rinli bo'ladi. Bu esa ta'rifga ko'ra $x \rightarrow 0$ da $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ degan ma'noni anglatadi. ◀

2.11-Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ ekanligini tekshiramiz.

► Ixtiyoriy $E > 0$ soni uchun $|x^3| > E$ bo'lsin. Bundan esa $|x| > \sqrt[3]{E}$ tengsizlikni hosil qilamiz. Ta'rifdagi M sifatida $M = \sqrt[3]{E}$ sonni olsak ta'rif sharti bajariladi. ◀

Bir tomonlama limitlar. Yuqorida $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limitining ta'rifini berishda x argument a nuqtaga uning biror biror atrofi doirasida qanday ko'rinishda intilishiga hech qanday chegaralash qo'yilmagan edi. Biroq a nuqta funksiyaning $D(f)$ aniqlanish sohasida faqat bir tomonlama atrofga ega bo'lishi ham mumkin (masalan, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya uchun $D(f) = \{x \in R: x \geq 0\}$ sohada $x = 0$ nuqtaning faqat o'ng atrofi mavjud). Bunday holda x argumentning a nuqtaga intilishi a nuqtaning bir tomonlama bo'lgan atrofi doirasida ma'noga ega bo'ladi. Ammo funksiya a nuqtaning atrofida aniqlangan taqdirda ham x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning o'zgarish xususiyatini yarim atrof doirasida amalga oshirilish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bunday chegaralash bir tomonlama limit tushunchasini kiritishga olib keladi.

a nuqtaning chap yarim δ atrofi deb $\{x: x \leq a, a - x < \delta\}$ to'plamga aytiladi.

2.12-Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning chap yarim atrofidan olingan barcha x nuqtalar uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap limiti deb ataladi va u $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

a nuqtaning o'ng yarim atrofi $\{x: x \geq a, x - a < \delta\}$ ko'rinishda aniqlanadi. Funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti ham xuddi chap limit singari aniqlanadi.

Funksiyaning a nuqtadagi chap va o'ng limitlarining qiymatlari uchun

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$$

belgilashlar ishlatiladi.

Funksiyaning nuqtadagi limitini bir tomonlama limitlardan farqlash uchun uni biz ikki tomonlama limit deb ataymiz. Funksiyaning nuqtadagi ikki

tomonloma va bir tomonloma limitlarining mavjudligi orasidagi bog‘liqlik ushbu teoremada keltiriladi.

2.1-Teorema. A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ikki tomonloma limiti bo‘lishligi uchun A soni bir vaqtning o‘zida ham chap, ham o‘ng limit bo‘lishi zarur va yetarli.

2.3. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.

Cheksiz kichik funksiyalar tushunchasi. $\alpha(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin, a nuqtaning o‘zida esa aniqlanmagan ham bo‘lishi mumkin.

2.13-Ta’rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya x o‘zgaruvchi a nuqtaga intilganda cheksiz kichik funksiya yoki $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = x - 1$ funksiya $x = 1$ nuqtadada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi, chunki $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$.

Umuman olganda, $\alpha(x) = x - a$ funksiya $x = a$ nuqtada eng oddiy cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

$x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya tushunchasi bilan bir qatorda $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ va $x \rightarrow -\infty$ da ham cheksiz kichik funksiya tushunchasini kiritish mumkin.

2.14-Ta’rif. Agar $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya mos rafishda $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ yoki $x \rightarrow -\infty$ da cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Ushbu $\alpha(x) = e^x$ funksiya esa $x \rightarrow -\infty$ da cheksiz kichik bo‘ladi, chunki

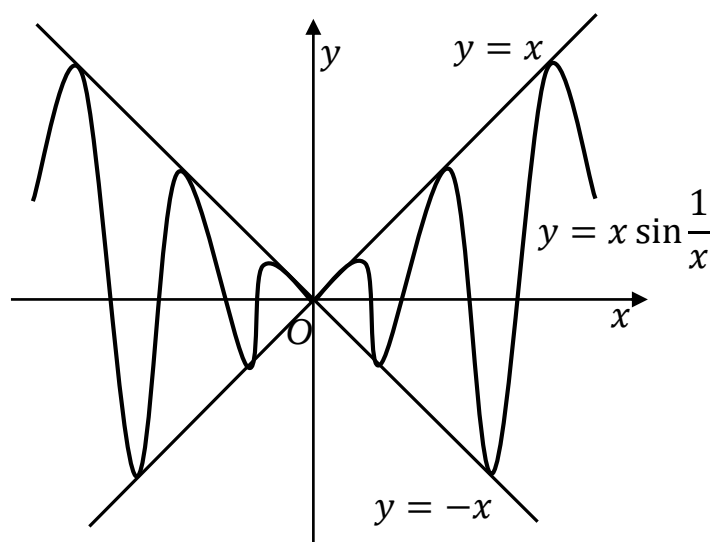
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Bundan keyin funksyaning limiti bilan bog'liq barcha tushuncha va teoremlarni funksyaning faqat nuqtadagi limiti bo'lgan hol uchun keltiramiz. $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ yoki $x \rightarrow -\infty$ hollar uchun mos tushuncha va teoremlarni ifodalash va isbot qilishni kitobxonning o'ziga havola qilamiz.

Cheksiz kichik funksyalarning xossalari.

2.2-Teorema. Agar $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lsa, u holda ularning $\alpha(x) + \beta(x)$ yig'indisi ham bu nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2.3-Teorema. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ esa bu nuqtaning atrofida chegaralangan bo'lsa, u holda $\alpha(x) \cdot f(x)$ ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi.



2.16-rasm

2.12-Misol. $y = x \sin \frac{1}{x}$ (2.16-rasm) funksyani $\alpha(x) = x$ va $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksyalarning ko'paytmasi sifatida qarash mumkin. $x = 0$ nuqtada $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiya esa $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida ($x = 0$ nuqtaning o'zi kirmaydi) chegaralangan. Shuning uchun 2.3-teoremaga ko'ra

$y = x \sin \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz kichik bo'ladi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. ◀

2.4-Teorema. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ funksiya esa a nuqtada noldan farqli limitga ega bo'lsa, u holda $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ nisbat ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Cheksiz katta funksiyalar. Cheksiz kichik funksiyalar tushunchasi bilan bir qatorda cheksiz katta funksiya tushunchasi ham kiritiladi.

$f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin, a nuqtaning o'zida esa aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin.

2.15-Ta'rif. Har qanday katta $M > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaga cheksiz katta funksiya deb ataladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifdagi $|f(x)| > M$ tengsizlikni $f(x) > M$ yoki $f(x) < -M$ tengsizliklar bilan almashtirib, mos ravishda musbat cheksiz katta $f(x)$ funksiyaning: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ yoki manfiy cheksiz katta $f(x)$ funksiyaning: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ hosil qilamiz.

2.13-Misol. Barcha $x \neq 0$ nuqtalarda aniqlangan $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya x argument nolga intilganda cheksiz katta funksiya bo'ladi.

► Yetarlicha katta $M > 0$ sonini olamiz. $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} > M$ tengsizlik $|x| = |x - 0| < \frac{1}{M}$ tengsizlikka teng kuchli. Shuning uchun, agar $\delta = \frac{1}{M}$ deb olinsa, u holda $|x - 0| = |x| < \frac{1}{M}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq 0$ nuqtalar uchun $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| > M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa ta'rifga ko'ra x argument nolga intilganda $f(x) = \frac{1}{x}$ cheksiz katta funksiya degan ma'noni anglatadi. ◀

Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar o'rtasidagi bog'liqlik quyidagi teoremda ifodalangan.

2.5-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta bo'lsa, u holda $1/f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik va a nuqtaning biror atrofida noldan farqli bo'lsa, u holda $1/\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta funksiya bo'ladi.

2.4. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Limitlar ustida arifmetik amallar. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin, a nuqtaning o'zida esa aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin.

2.6-Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lishsa, u holda ularning $f(x) + g(x)$ yig'indisi ham, $f(x) - g(x)$ ayirmasi ham, $f(x) \cdot g(x)$ ko'paytmasi ham, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ qo'shimcha shartda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat ham bu nuqtada limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0; \quad (2.6)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

2.1-Masala. $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega, $g(x)$ funksiya esa limitga ega bo'lmasa, $f(x) + g(x)$ funksiya bu nuqtada limitga ega bo'lmasligini ko'rsating.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ limit mavjud bo'lsin. $f(x) + g(x)$ va $f(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lganligi uchun 2.15-teoremaga ko'ra ularning ayirmasi ham a nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f(x) + g(x)) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ya'ni $g(x)$ funksiya ham a nuqtada limitga ega ekan. Bu esa masala shartiga zid. Ana shu zidlik qilgan farazimizning noto'riligini ko'rsatadi. ◀

2.2-Masala. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limit mavjud bo'lmasa $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ limit mavjud bo'lmasligini ko'rsating.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ limit mavjud bo'lsin. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ bo'lganligi uchun $\frac{1}{f(x)}$ funksiya a nuqtada limitga ega. $f(x) \cdot g(x)$ va $\frac{1}{f(x)}$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lganligi uchun 2.6-teoremaga ko'ra ularning ko'paytamasining ham limiti mavjud:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[(f(x) \cdot g(x)) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \cdot g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

ya'ni $g(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega ekan. Bu esa masala shartiga ziddir. Ana shu zidlik qilgan farazimizning noto'g'ri ekanligini anglatadi. ◀

Murakkab funksiyaning limiti.

2.7-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya a nuqtada A chekli limitga ega bo'lsa va A qiymatni a nuqtaning o'zi kirmagan biror atrofida qabul qilmasa, $g(y)$ funksiya esa A nuqtada B limitga ega bo'lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada limitga ega va u B soniga teng.

Bu teorema murakkab funksiyaning limitini hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirishni

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow A} g(y) \quad (2.7)$$

formula bo'yicha amalga oshirish imkonini beradi.

Ikki ajoyib limit. a nuqtada limitga ega bo'lgan funksiyaning yuqorida qaralgan xossalari funksiyaning bu nuqta atrofida o'zgarishini tahlil qilish imkonini beradi. Ammo ayrim hollarda bu xossalari va limitni hisoblash qoidalari yetarli bo'lmay qoladi. Bunga $(\sin x)/x$ funksiyaning $x = 0$ nuqta atrofida o'zgarishini misol sifatida keltirish mumkin.

Birinchi ajoyib limit deb ataluvchi quyidagi tenglik o'rinli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.8)$$

$x = 0$ nuqtada $(\sin x)/x$ nisbat funksiya aniqlanmagan, biroq (2.8) limit mavjud ekanligini ta'kidlaymiz. Biror nuqtada limitning mavjud bo'lishi uchun funksiyaning o'zi bu nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas. Endi *ikkinchi ajoyib limit* deb ataluvchi ushbu tenglikni keltiramiz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2.9)$$

Endi $x \rightarrow -\infty$ bo'lsin. $x = -u$ deb olamiz, u holda $x \rightarrow -\infty, u \rightarrow +\infty$. Ayniy almashtirishlardan so'ng

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^u = \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz. (2.7) formulaga ko'ra o'zgaruvchilarni almashtiramiz va ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani va (2.9) tenglikni qo'llab

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \cdot \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) = e \cdot 1 = e$$

limitni topdik. Xulosa qilsak, x cheksizlikka har qanday intilganda ham (2.9) o'rinli.

(2.9) tenglikda (2.7) formulaga ko'ra $y = 1/x$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz va $x \rightarrow \infty$ da $y \neq 0$ degan shartni qo'yamiz, u holda

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e \quad (2.10)$$

natijani hosil qilamiz.

Birinchi qarashda (2.10) natija haqiqatga ziddek tuyuladi, chunki $y \rightarrow 0$ bo'lsa, $1 + y \rightarrow 1$ bo'ladi va birning har qanday darajasi bir bo'ladi! Ammo bu tenglikni boshqacha izohlash mumkin. $y \rightarrow 0$ da daraja ko'rsatkichi $1/y$ cheksiz katta funksiya, asos esa bir emas, balki $y \rightarrow 0$ da birdan cheksiz kichik miqdorga farq qiladi. Ushbu jadvalda $g(y) = (1 + y)^{1/y}$ funksiyaning y kamayib borishdagi qiymatlari keltirilgan:

y	1	1/2	1/3	1/4	0,1	0,01	0,001	0,0001
$g(y)$	2	2,250	2,370	2,441	2,594	2,7047	2,7169	2,7181

(2.9) va (2.10) formulalar 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish imkonini beradi.

Funksiyaning limitini hisoblashga bir necha misol keltiramiz.

2.14-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3}{2x - 5}$.

► Limit ostidagi funktsiyani ikkita $f(x) = x^3 + 3$ va $g(x) = 2x - 5$ funksiyalarning nisbati sifatida qaraymiz. Bu funksiyalarning har biri $x = 2$ nuqtada limitga ega:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3) = 2^3 + 3 = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = -1$$

Maxrajdagi $g(x)$ funksiyaning limiti noldan farqli, shuning uchun bu yerda nisbatning limiti haqidagi teoremani qo‘llashimiz mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3}{2x - 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5)} = \frac{11}{-1} = -11.$$

2.15-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

► $f(x) = x^2 - 9$ va $g(x) = x + 3$ deb olamiz. Bu funksiyalar $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = 0$ limitlarga ega. Shuning uchun $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Limit ostidagi funksiya $x = -3$ nuqtada aniqlanmagan va bu nuqtaning o‘zida funktsiyani qaramasdan, faqat limiti qaraladi. Suratdagi $f(x)$ funktsiyani ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3}.$$

O‘ng tomondagi kasrni $x + 3 \neq 0$ ifodaga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3, \quad x \neq -3.$$

Shuning uchun

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6. \blacktriangleleft$$

2.16-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$

► Surat va maxrajdagi funksiyalarning $x = 0$ nuqtadagi limitlari nolga teng, shuning uchun yana $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Bu aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{4+x^2} + 2$ ifodaga ko‘paytiramiz. $x \neq 0$ holda

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} &= \frac{(\sqrt{4+x^2}-2)(\sqrt{4+x^2}+2)}{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)} = \frac{4+x^2-4}{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2}. \end{aligned}$$

Hosil qilingan funksiyaga nisbatning limiti haqidagi teoremani qo‘llash mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2} = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

2.17-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

► Limit ostidagi funksiyaning ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$\frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{\sin 7x} = \frac{5 \sin 5x}{5x} \cdot \frac{7x}{\sin 7x}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 7x = 0$ bo‘lganligi uchun murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo‘llab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. U holda ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremani qo‘llaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{5}{7} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{7}. \blacktriangleleft$$

2.18-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$.

► Ayniy almashtirishlardan so‘ng

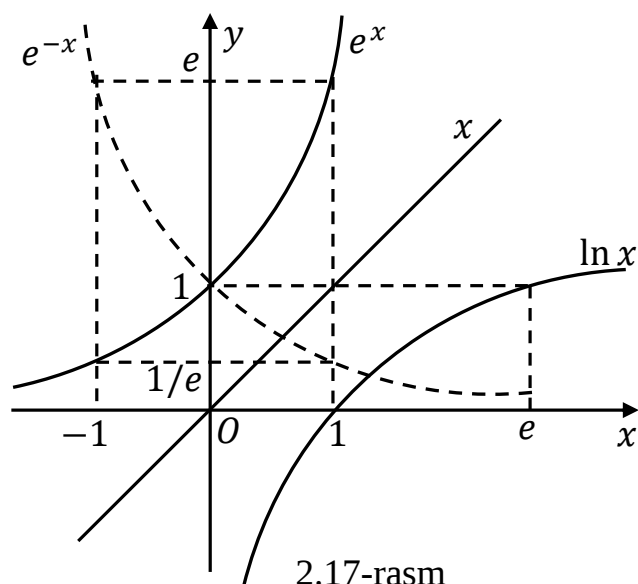
$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} &= \left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right)^{x^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{x^2}} = \\ &= \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{1/x^2}} \left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{2}{-2/x^2}}\end{aligned}$$

ifodani hosil qilamiz. Bu yerda $1/x^2 = y$ va $-2/x^2 = z$ deb olsak

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = (1+y)^{1/y} (1+z)^{1/z} [(1+z)^{1/z}]^2$$

ko'rinishni oladi. Agar $x \rightarrow \infty$, u holda $y \rightarrow 0$ va $z \rightarrow 0$, o'zgaruvchilarni almashtirgandan so'ng ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani va (2.7), (2.10) formulalarni qo'llaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{1/z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} [(1+z)^{1/z}]^2 = e^4.$$



2.17-rasm

Eksponenta, natural logarifm va giperbolik funksiyalar. Matematik tahlilda va amaliy masalalarda e soni muhim o'rin tutadi. Xususan eksponensial (yoki qisqa qilib eksponenta) deb ataluvchi e^x (ba'zan $\exp x$ ko'rinishda ham yoziladi) ko'rsatkichli funksiyaning asosi bo'lib xizmat qiladi. Bu funksiyaga teskari bo'lgan $\ln x = \log_e x$ logarifmik funksiyaning

ham asosi bo‘ladi. Ularning grafiklari 2.17-rasmda tasvirlangan. Bu yerda e^{-x} funksiyaning ham grafigi keltirilgan.

e asosli logarifmlarni natural logarifmlar deb ataladi. Ular uchun asosiy logarifmik ayniyat

$$e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x \quad (2.11)$$

bo‘ladi. $\ln x$ funksiya asosi birdan katta bo‘lgan logarifmik funksiyalarning barcha xossalariga ega. Bir asosdan ikkinchi asosga o‘tadigan ma’lum formulalar ham o‘rinli, xususan

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \ln 10 \cdot \lg x = 2,3026 \cdot \lg x,$$

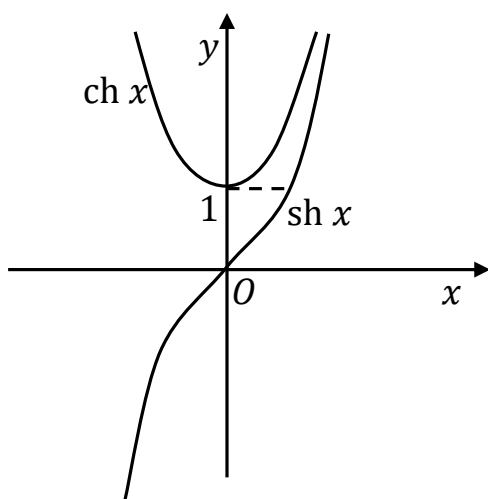
$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e \cdot \ln x = 0,4343 \cdot \ln x.$$

Shunday qilib, e^x va $\ln x$ funksiyalar asosiy elementar a^x va $\log_a x$ funksiyalarning $a = e$ bo‘lgandagi xususiy hollari ekan.

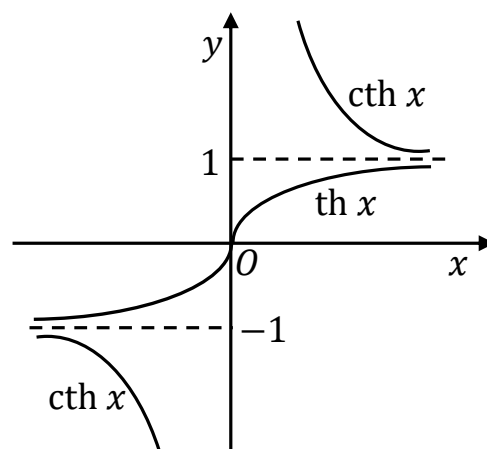
Ekspontensial funksiya orqali giperbolik sinus, kosinus, tangens va kotangens funksiyalar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Ulardan $\operatorname{ch} x$ - juft, qolganlari $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ - toq ekanligini ta’kidlab o‘tamiz. Ularning grafiklari 2.18, 2.19-rasmlarda berilgan.



2.18-rasm



2.19-rasm

Trigonometrik funksiyalardagi ma'lum $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ formulaga o'xshash giperbolik funksiyalarda ham

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (2.12)$$

formula ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ nuqtalar uchun o'rinli. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{sh} x \end{aligned} \quad (2.13)$$

formulalar ham o'rinli.

2.5. Funksiyaning uzluksizligi.

Uzluksizlikning ta'rifi. $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtada aniq bir $f(a)$ qiymatni qabul qilsin.

2.16-Ta'rif. Agar $x = a$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va u $f(a)$ qiymatga teng bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Shunday qilib

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (2.14)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb atalar ekan.

Funksiyaning uzluksizligi $\varepsilon - \delta$ tilida quyidagicha ta'riflanadi.

2.17-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (2.15)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning limitiga $x \neq a$ degan shartni qo'ygan edik. Bu yerda esa bu shart bajarilishini talab qilmaymiz.

Funksiya uzluksizligi tushunchasini ifodalashning yana bir ko'rinishini keltiramiz. $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Qaralayotgan a nuqtani asosiy nuqta deb hisoblab, argumentning a nuqtadan Δx miqdorga (manfiymi yoki musbatmi farqi yo'q) farq qiluvchi boshqa $x = a + \Delta x$ qiymatini olamiz. Δx miqdorni argumentning orttirmasi deb ataymiz. Funksiya o'zgarishining

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \quad (2.16)$$

qiymatini f funksiyaning a nuqtadagi x argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi orttirmasi deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(a)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu esa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(a)] = 0 \quad (2.17)$$

tenglikka teng kuchli. $f(x + \Delta x) - f(a) = \Delta y$ ekanligini e‘tiborga olsak, (2.17) tenglikni

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

2.18-Ta’rif. Δx argument orttirmasi nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bu orttirmaga mos keluvchi Δy orttirmasi ham nolga intilsa, $y = f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

2.19-Misol. $y = x^3$ funksiya son o‘qining ixtiyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$$\begin{aligned} \Delta y &= (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2 \cdot \Delta x + 3a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ &= (3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x \end{aligned}$$

tenglikni yozamiz. Bu tenglikda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$ bo‘lishi ko‘rinib turibdi.



2.20-Misol. $y = \sin x$ funksiya son o‘qining ixtiyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(a + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq |\Delta x|$$

o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $|\cos(a + \Delta x/2)| \leq 1$ va $|\sin(\Delta x/2)| \leq |\Delta x|/2$ tengsizliklardan foydalanildi. Shuning uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. ◀

Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

2.8-Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ularning $f(x) + g(x)$ yig'indisi, $f(x) - g(x)$ ayirmasi, $f(x) \cdot g(x)$ ko'paytmasi va $g(a) \neq 0$ qo'shimcha shartda $f(x)/g(x)$ nisbati ham a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

2.9-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz, $g(y)$ funksiya esa mos $A = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

► Teoremaning shartiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = g(A) = B$.

Murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo'llab

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow A} g(y) = g(A) = g(f(a)) \quad (2.18)$$

tenglikni hosil qildik, ya'ni $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz ekan. ◀

Agar (2.18) tenglikning o'ng tomonidagi $g(y)$ funksiyaning $f(a)$ argument qiymatini $f(x)$ funksiyaning limiti orqali ifodalasak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) \quad (2.19)$$

tenglikni yozish mumkin.

2.21-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x}$.

► Limit ostidagi funksiyani

$$(1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = ((1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x})^3$$

ko'rinishda yozib olamiz va $y = f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x}$, $g(y) = y^3$ funksiyalarning superpozitsiyasi sifatida qaraymiz. Agar $u = \operatorname{tg} x$ deb o'zgaruvchilarni almashtirsak, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ limitni hisoblash qiyin bo'lmaydi.

Haqiqatdan ham ikkinchi ajoyib limitni inobatga olsak

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = u \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \pi \end{array} \right| = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$$

limitni topamiz. U holda $g(y) = y^3$ funksiyaning uzluksizligidan (2.20-Misol) (2.19) formulaga ko‘ra

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} \right)^3 = e^3. \blacktriangleleft$$

Bir tomonlama uzluksizlik. Uzilish nuqtalari. $f(x)$ funksiya a nuqtaning o‘ng (chap) yarim atrofida aniqlangan bo‘lsin.

2.19-Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtada o‘ng limiti mavjud va bu limit $f(a)$ qiymatga teng, ya’ni

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \quad (2.20)$$

tenglik orinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada o‘ngdan uzluksiz deyiladi.

a nuqtada chapdan uzluksizlik xuddi shu singari

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = f(a) \quad (2.21)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsa, uning chegaraviy a va b nuqtalarga nisbatan a nuqtada o‘ng uzluksizlik, b nuqtada chap uzluksizlik haqida gapirish mumkin. Oraliqning ixtiyoriy ichki nuqtasidagi uzluksizlik bu nuqtadagi o‘ng va chap uzluksizlikka teng kuchli, chunki nuqtadagi limitning mavjudligi o‘ng va chap limitlarning mavjudligiga teng kuchli (2.1-Teorema).

Funksiya uzluksiz bo‘ladigan nuqtani bu funksiyaning uzluksizlik nuqtasi deb ataymiz. $f(x)$ funksiyaning a uzluksizlik nuqtasida quyidagi shartlar bajarilgan bo‘ladi:

- 1) Funksiya a nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;
- 2) a nuqtada ikkala bir tomonlama limitlar mavjud va ular chekli;
- 3) a nuqtadagi ikkala bir tomonlama limitlar ustma-ust tushadi, ya’ni $f(a+0) = f(a-0)$;
- 4) a nuqtada ustma-ust tushadigan bir tomonlama limitlar funksiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$f(a+0) = f(a-0) = f(a) \quad (2.22)$$

2.20-Ta’rif. a nuqtada uzluksiz bo‘lmagan funksiyani bu nuqtada uzilishli funksiya, a nuqtani esa bu funksiyaning uzilish nuqtasi deb ataladi.

a nuqta haqida uzilish nuqtasi sifatida gapirilganda, a nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining a nuqtadan farqli boshqa nuqtalari ham mavjud deb faraz qilinadi.

(2.22) uzluksizlik shartining qanday buzilganligiga qarab uzilish nuqtalari turlarga bo‘linadi.

2.21-Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli chap va o‘ng limitlarga ega va ular o‘zaro teng, ammo funksiyaning a nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lishmasa

$$f(a + 0) = f(a - 0) \neq f(a),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilishi bartaraf qilinadigan nuqtasi deb ataladi.

Uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta degan iboraning ma’nosi shundan iboratki, yangi uzluksiz funksiya hosil qilish uchun funksiyaning faqat bitta a nuqtadagi qiymatini o‘zgartirish yetarli. $f(x)$ funksiya yordamida tuziladigan

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a; \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a \end{cases}$$

funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Shunday qilib funksiyaning a nuqtadagi qiymatini o‘zgartirib uzilishni “bartaraf” qildik.

2.22-Misol. $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ funksiyaning qaraymiz.

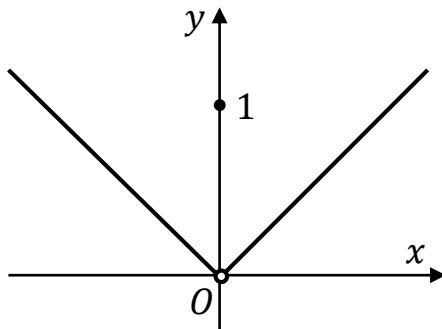
► Funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi chap va ong limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

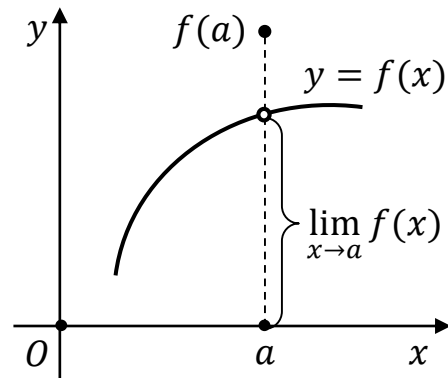
ya’ni $x = 0$ nuqta uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta ekan (2.20-rasm). Agar $f(x)$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymatini $F(0) = 0$ deb o‘zgartirsak, bu nuqtada uzluksiz bo‘lgan $F(x) = |x|$ funksiyaning hosil qilamiz. ◀

Umuman olganda $(a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_2)$ to‘plamda uzluksiz va a nuqtada bartaraf qilinadigan uzilishga ega funksiyaning grafigi sifatida

absissasi a bo'lgan nuqtasi o'yib olib tashlangan uzluksiz egri chiziq xizmat qiladi (2.21-rasm).



2.20-rasm



2.21-rasm

Uzilishi bartaraf qilinadigan a nuqtada $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limit mavjud bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limit mavjud bo'lmasa a nuqta bartaraf qilib bo'lmaydigan uzilish nuqtasi deb ataladi.

2.22-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chap va o'ng limitlarga ega bo'lib, ammo ular har xil bo'lsa

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning chekli sakrashli uzilish nuqtasi deb ataladi.

Uzilish nuqtasini bunday nomlashning ma'nosi shundan iboratki, x o'zgaruvchi a nuqta orqali o'tishda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng va chap limitlarining ayirmasi bilan o'lchanadigan sakrash yuz beradi.

2.23-Misol. Ushbu funksiyaning qaraymiz (2.22-rasm):

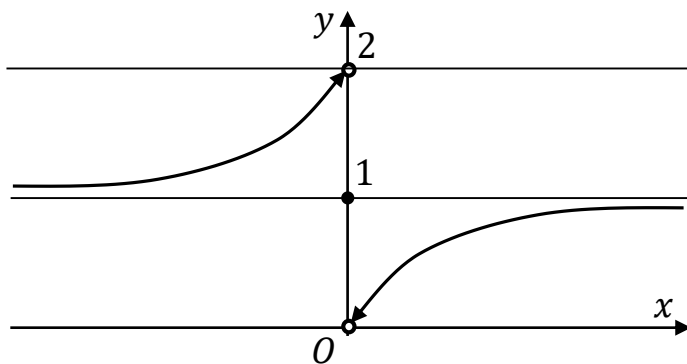
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

► Berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada 2 ga teng bo'lgan chekli sakrashga ega bo'ladi:

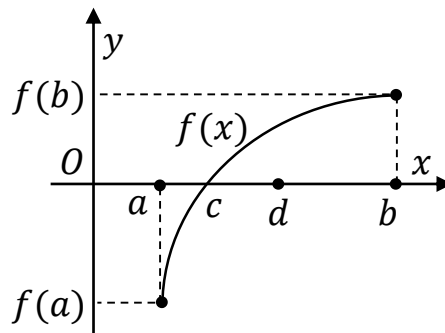
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Funksiyaning bartaraf qilinadigan va chekli sakrashli uzilish nuqtalari birinchi tur uzilish nuqtalari deb ataladi. $f(x)$ funksiyaning barcha 1-tur uzilish nuqtalari chap va o'ng limitlarning mavjudligi bilan tavsiflanadi.

2.23-Ta'rif. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o'ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, bu nuqta funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deb ataladi.



2.22-rasm



2.23-rasm

2.24-Misol. Ushbu funksiyaning qaraymiz:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

► $x = 0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Bir tomonli limitlarning ikkalasi ham chekli emas, ya'ni ta'rifga ko'ra $x = 0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi. ◀

2.25-Misol. $y = a^{1/x}$ funksiyaning $0 < a < 1$ bo'lganda qaraymiz.

► $x = 0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} a^{1/x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} a^{1/x} = +\infty.$$

$x = 0$ nuqtadagi o'ng limit cheksiz, ya'ni ta'rifga ko'ra $x = 0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi. ◀

2.10-Teorema. X oraliqda monoton bo'lgan $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzilishlarga ega bo'lsa, u holda bu uzilish nuqtalari albatta birinchi tur bo'ladi.

Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari. Nuqtaning kichik atrofida funksiyaning o'zgarishi bilan bog'liq bo'ladigan xossalar bu funksiyaning lokal xossalari deb ataladi (masalan, nuqtada limitga ega funksiyaning xossalari yoki berilgan nuqtada uzluksiz funksiyaning xossalari). Funksiyaning aniqlanish sohasi bilan yoki bu sohaning biror oralig'i bilan bog'liq xossalar global xossalar deb ataladi.

2.24-Ta'rif. Agar (a, b) oraliqning barcha nuqtalarida $y = f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, bu funksiya (a, b) oraliqda uzluksiz deyiladi. Agar funksiya (a, b) oraliqda uzluksiz, a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lsa bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

Masalan, $f(x) = 1/x$ funksiya $(0, 1)$ intervalda uzluksiz va $[0, 1]$ kesmada uzluksiz emas, chunki $x = 0$ nuqtada funksiya o'ngdan uzluksiz emas. $\sin x$ funksiya ixtiyoriy $[a, b] \subset \mathbf{R}$ kesmada uzluksiz. Agar funksiya barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u $(-\infty, +\infty)$ intervalda yoki $\mathbf{R}$ son o'qida uzluksiz deyiladi.

2.11-Teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsin. U holda (a, b) intervalda $f(c) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta topiladi.

Teorema oddiy geometrik ma'noga ega: agar funksiya grafigining uzluksiz chizig'i Ox o'qdan pastda ham, yuqorida ham yotsa, u holda egri chiziq Ox oqni albatta kesib o'tadi (2.23-rasm).

2.12-Teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya biror X oraliqda (yopiq yoki ochiq, chekli yoki cheksiz) aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu oraliqning ikkita a va b ($a < b$) nuqtalarida teng bo'lmagan $f(a) = A$ va $f(b) = B$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda (A, B) intervaldan olingan har qanday C nuqta uchun shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(c) = C$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2.13-Teorema (Veyershtassning birinchi teoremasi). Kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada chegaralangan ham bo'ladi, ya'ni shunday m va

M sonlar topilib, barcha $x \in [a, b]$ nuqtalar uchun $m \leq f(x) \leq M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

2.14-Teorema (Veyershtassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u bu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

Nazorat savollari

1. Sonli funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya qanday usullar bilan beriladi?
3. Qanday funksiyalarga davriy funksiya deyiladi?
4. Qanday funksiyalar monoton deyiladi?
5. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi?
6. Funksiyaning nuqtadagi chap va o‘ng limiti nima?
7. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar o‘rtasida qanday bog‘liqlik mavjud?
8. Limitga ega bo‘lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?
9. Qachon funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
10. Qachon funksiya kesmada uzluksiz deyiladi?

Mashqlar.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = x^3 + 5x^2 - x + 9.$

2. $y = \sqrt{2 - 5x - 3x^2}.$

3. $y = \sqrt{6x^2 + 7x - 5}.$

4. $y = \log_5(6 \sin x - 7).$

Limitlarni hisoblang:

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}.$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 - 3x + 7}{3x^4 + x^3 + 8x^2 - 5x + 1}.$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 7x + 6}{x^2 + 7x + 8}.$

8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}.$

9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 - 2x - 3}.$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{x-1}.$

11. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}.$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 2x}{7x}.$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x}{7x}.$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} \right)^{x^2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$$

Javoblar.

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$; 2. $D(y) = [-2; 1/3]$; 3. $D(y) = (-\infty; -17/12] \cup [3/4; +\infty)$; 4. $D(y) = \emptyset$; 5. $2/3$; 6. $1/3$; 7. ∞ ; 8. 7 ; 9. $-3/2$; 10. 1 ; 11. $1/56$; 12. 0 ; 13. $10/7$; 14. $3/7$; 15. e ; 16. e^2 .

III BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

3.1. Hosila

Kimyoviy reaksiyaning tezligi haqidagi masala. Kimyoviy reaksiyaga kirishayotgan moddaning t vaqt momentidagi miqdori $m = m(t)$ funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Vaqtning Δt orttirmasiga $m(t)$ funksiyaning

$$\Delta m = m(t + \Delta t) - m(t) \quad (3.1)$$

orttirmasi mos keladi va u Δt vaqt mobaynida modda miqdorining o‘zgarishini anglatadi. U holda

$$v_{o'rt} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (3.2)$$

nisbat Δt vaqt mobaynidagi kimyoviy reaksiyaning o‘rtacha tezligini beradi. Har doim ham o‘rtacha tezlik reaksiyaning t momentdagi tezligini beravermaydi. Masalan, Δt oraliqning boshida kimyoviy reaksiya juda tez, oxirida kelib juda sekin ro‘y bersa, vaqtning t momenridagi haqiqiy tezlikdan o‘rtacha tezlik ancha farq qilishi ravshan. Ana shu haqiqiy tezlikni o‘rtacha tezlik orqali ifodalash uchun Δt vaqt oralig‘ini imkon darajasida kichik qilib olish kerak.

Kimyoviy reaksiyaning t momentdagi v tezligi deb, Δt vaqt oralig‘idagi $v_{o'rt}$ o‘rtacha tezlikning Δt vaqt oralig‘i nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (3.3)$$

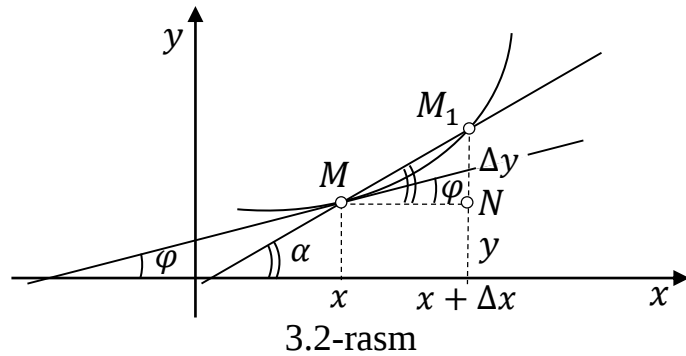
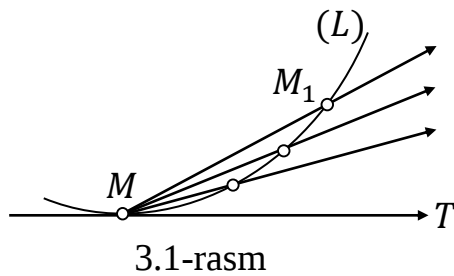
(3.3) tenglikni (3.1) tenglikdan foydalanib yozamiz:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Egri chiziqqa urinma o‘tkazish masalasi. Tekislikda (L) egri chiziq va uning ixtiyoriy M nuqtasi berilgan bo‘lsin (3.1-rasm). Ana shu M nuqtada urinma o‘tkazish masalasini, to‘g‘rirog‘i ana shu urinmaning burchak koeffisiyentini topish masalasini qaraymiz. Dastlab urinmaning umumiy

ta'rifni keltiramiz. (L) egri chiziqda M nuqtadan farqli yana M_1 nuqtani olamiz va MM_1 kesuvchini o'tkazamiz.

(L) egri chiziqqa M nuqtada o'tkazilgan urinma deb, M_1 nuqta (L) egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilganda MM_1 kesuvchining MT limitik holatiga aytiladi.



Endi $f(x)$ funksiya va Dekart koordinatalar sistemasida unga mos $y = f(x)$ egri chiziqni qaraymiz (3.2-rasm). Argumentning biror x qiymatida funksiya $y = f(x)$ qiymatni qabul qiladi. Ana shu x, y qiymatlarga egri chiziqning $M(x, y)$ nuqtasi mos keladi. x argumentga Δx ortirma beramiz va argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati mos keladi. Natijada egri chiziqda $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nuqta hosil bo'ladi. MM_1 kesuvchini o'tkazamiz va kesuvchi bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. 3.2-rasmdagi M_1MN uchburchakda $|M_1N| = \Delta y$, $|MN| = \Delta x$ tomonlar uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni M_1M kesuvchining burchak koeffitsiyenti $k_1 = \Delta y / \Delta x$ tenglik bilan aniqlanadi.

Agar Δx ortirma nolga intilsa, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intiladi. Urinmaning ta'rifiga ko'ra M_1M kesuvchining limitik holati qidiralyotgan urinma to'g'ri chiziq bo'ladi. Bu harakat jarayonida α burchak ham o'zgaradi va u biror φ burchakka intilsa, bu burchak urinmaning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagi bo'ladi. Shuning uchun urinmaning burchak koeffitsiyenti

$$k = tg\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} tg \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3.6)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Hosilaning ta’rifi. Agar yuqorida qaralgan masalalarni tahlil qiladigan bo‘lsak, o‘zgaruvchilarni talqin qilishni e’tiborga olinmasa, ularda muhim umumiylik mavjud. U ham bo‘lsa funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitidan iborat. Shunday qilib biz differensial hisobning asosiy tushunchasi-hosila tushunchasiga keldik.

Biror (a, b) oraliqda aniqlangan

$$y = f(x) \quad (3.7)$$

funksiya berilgan bo‘lsin. Bunda x argumentning bu oraliqdan olingan har bir qiymatiga $y = f(x)$ funksiyaning aniq bir qiymati mos keladi.

x argument biror Δx orttirma olsun. Bu orttirma musbatmi yoki manfiymi farqi yo‘q, muhimi $x + \Delta x$ qiymat qaralayotgan (a, b) oraliqda qolishi kerak. U holda y funksiya biror Δy orttirma oladi. Shunday qilib argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning yangi $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati mos keladi. Shu sababli funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (3.8)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Funksiya Δy orttirmasining mos $\Delta x \neq 0$ orttirmaga nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (\Delta x \neq 0). \quad (3.9)$$

Qo‘zg‘almas x qiymatda bu nisbat Δx orttirmaning funksiyasidan iborat bo‘ladi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x).$$

3.1-Ta’rif. Agar Δx orttirma nolga intilganda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti mavjud bo‘lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deb

ataladi va u $f'(x)$ yoki $y'(x)$ yoki y'_x yoki $\frac{dy}{dx}$ orqali belgilanadi. Hosilaning aniq bir a nuqtadagi qiymatini $f'(a)$, $y'(a)$, $y'_x|_{x=a}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$ ifodalardan biri orqali belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.10)$$

(3.10) limit chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Shu sababli chekli yoki cheksiz hosila haqida gapirish mumkin. Hozircha limit chekli bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda $f(x)$ funksiya x nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi.

Hosilani hisoblashga misollar.

3.1-Misol. $y = c$ ($c = \text{const.}$) o'zgarmas funksiyaning hosilasini topamiz.

► Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada $f(x) = c$, $f(x + \Delta x) = c$ bo'lganligi uchun $\Delta y = 0$ bo'ladi va hosilaning ta'rifiga ko'ra,

$$(c)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0. \blacktriangleleft$$

3.2-Misol. $y = x^2$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Shuning uchun:

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \blacktriangleleft$$

3.3-Misol. $y = \sin x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► Ortirmalar nisbatini olamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

$\cos x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalanib, hosil qilingan tenglikda limitga o'tsak

$$(\sin x)' = \cos x \quad (3.11)$$

hosilani topamiz. ◀

3.4-Misol. $y = \cos x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► Ortirmalar nisbati uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda ham $\sin x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalanib, hosil qilingan tenglikda limitga o‘tib

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (3.12)$$

hosilani topdik. ◀

3.5-Misol. $y = a^x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

$$\begin{aligned} \text{► } (a^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = a^{\Delta x} - 1; \\ \Delta x = \frac{1}{\ln a} \ln(1+t); \\ \Delta x \rightarrow 0, t \rightarrow 0; \end{array} \right| = a^x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{1}{\ln a} \ln(1+t)} = a^x \ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \\ &= a^x \ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}}. \end{aligned}$$

O‘ng tomondagi $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}}$ limitni hisoblash uchun $\ln x$ funksiyaning uzluksizligidan va ikkinchi ajoyib limitdan foydalanamiz: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\ln e} = 1$. U holda $(a^x)' = a^x \ln a$ tenglikka ega bo‘lamiz. ◀

Xususiyl holda $a = e$ bo‘lsa, $y = e^x$ funksiyaning hosilasi $(e^x)' = e^x$ tenglik bilan topiladi.

3.6-Misol. $y = \ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► Buning uchun logarifmning ma’lum xossalariidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x/x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{\Delta x}{x}}. \end{aligned}$$

O'ng tomondagi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{\Delta x}{x}}$ limitni hisoblash uchun logarifmik funksiyaning uzluksizligidan va ikkinchi ajoyib limitdan foydalanamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{\Delta x}{x}} = \ln e = 1.$$

Shuning uchun $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ bo'ladi. ◀

Endi yuqorida qaralgan kimyoviy reaksiya tezligi haqidagi masalaga qaytamiz.

(3.4) formulaga ko'ra reaksiyaga kirishayotgan moddaning t vaqt momentidagi miqdori $m = m(t)$ qonuniyat bilan aniqlansa, reaksiyaning t momentidagi v tezligi

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}$$

tenglik bilan aniqlanar edi. O'ng tomondagi limit $m(t)$ funksiyaning t nuqtadagi hosilasini beradi. Shuning uchun vaqtning t momentigacha moddaning o'zgarish miqdoridan olingan hosila vaqtning t momentidagi reaksiya tezligiga teng bo'ladi:

$$v = f'(t). \quad (3.13)$$

3.2. Hosila hisoblash qoidalari

O'zgarmas songa ko'paytirilgan funksiyaning hosilasi.

3.1-Teorema. Differensiallanuvchi funksiya bilan o'zgarmas sonning ko'paytirishdan iborat funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi bu funksiya hosilasi bilan ana shu o'zgarmas son ko'paytmasiga teng:

$$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x). \quad (3.14)$$

3.7-Misol. $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) funksiyaning hosilasini toping.

► Logarifmning ma'lum xossasidan $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ deb yozib olish mumkin. U holda 3.6-Misolga va (3.14) formulaga ko'ra

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}. \blacktriangleleft$$

Yig'indining hosilasi.

3.2-Teorema. Ikikita differensiallanuvchi funksiyalarning algebraik yig'indisi ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi bu funksiyalar hosilalarining algebraik yig'indisiga teng:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x) \quad (3.15)$$

3.8-Misol. $y = x^2 + 4 \sin x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► 3.2-misol va (3.15) formulaga ko'ra

$$y' = (x^2 + 4 \sin x)' = (x^2)' + (4 \sin x)' = 2x + 4 \cos x. \blacktriangleleft$$

Ko'paytmaning hosilasi.

3.3-Teorema. Ikikita differensiallanuvchi funksiya ko'paytmasi ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi quyidagi tenglik bilan topiladi:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (3.16)$$

3.9-Misol. $y = x^2 \ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► 3.6-Misolni inobatga olib (3.16) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = \\ &= 2x \ln x + x. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Bo'linmaning hosilasi.

3.4-Teorema. Ikikita differensiallanuvchi funksiyaning bo'linmasi ham bo'luvchi nolga aylanmaydigan nuqtalarda differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi bu nuqtalarda quyidagi tenglik bilan topiladi:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0. \quad (3.17)$$

3.10-Misol. $y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning hosilasini toping.

► Bu funksiyadan $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarning nisbati sifatida hosila olamiz. 3.3 va 3.4-Misollarga va (3.17) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

tenglikni hosil qildik.

3.11-Misol. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyaning hosilasini toping.

► Bu funksiyadan $\cos x$ va $\sin x$ funksiyalarning nisbati sifatida hosila olamiz. 3.3 va 3.4-Misollarga va (3.17) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \end{aligned}$$

tenglikga ega bo‘lamiz.

Murakkab funksiyaning hosilasi

3.5-Teorema. Agar $u = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi, $y = g(u)$ funksiya esa mos $A = f(a)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya ham a nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi va

$$[g(f(x))]'_{x|_{x=a}} = g'(A) \cdot f'(a) \quad (3.18)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

(3.18) tenglikni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ yoki } y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (3.19)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

3.12-Misol. $y = x^a$ funksiyaning hosilasini toping.

► Ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyaning ma’lum xossalaridan foydalanib, berilgan funksiyani $y = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bu yerda y erkin x argumentning murakkab funksiyasi: $y = e^u$ va $u = a \ln x$. Shuning uchun 3.5 va 3.6-Misollardan va (3.19) formuladan foydalansak

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = e^u \cdot \frac{a}{x} = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = e^{\ln x^a} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}. \blacktriangleleft$$

Giperbolik funksiyalarning hosilalari

Aniqlanilishiga ko‘ra giperbolik sinus sh $x = (e^x - e^{-x})/2$, giperbolik kosinus esa $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda hosila olish qoidalarini qo‘llab,

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$

hosilalarni topamiz.

Aniqlanilishiga ko'ra giperbolik tangens $\operatorname{th} x = (\operatorname{sh} x)/\operatorname{ch} x$ va giperbolik kotangens $\operatorname{cth} x = (\operatorname{ch} x)/\operatorname{sh} x$ ko'rinishda bo'ladi. Bo'linmani differensiallash qoidasidan va $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ayniyatdan foydalanib,

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x - (\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

giperbolik tangens va kotangens funksiyalarining hosilalarini topdik.

Funksiyaning differensiallashning asosiy formula va qoidalari.

Elementar funksiyalarning hosilalari .

$$1. (C)' = 0, (C = \text{const}).$$

$$2. (x^a)' = ax^{a-1},$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ bo'lsa } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$a = -1 \text{ bo'lsa } \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a, (a > 0, a \neq 1),$$

$$(e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (a > 0, a \neq 1).$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x.$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$13. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$14. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$15. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$16. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Differensiallashning asosiy qoidalari

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi, $f(u)$ funksiya esa u nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin.

$$y = Cu, (C = \text{const})$$

$$y' = Cu'.$$

$$\begin{array}{ll}
y = u \pm v & y' = u' \pm v'. \\
y = uv & y' = u'v + uv'. \\
y = \frac{u}{v}, (v \neq 0) & y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \\
y = f(u), u = u(x) & y'_u = f'_u \cdot u'
\end{array}$$

3.3. Differensial

Differensialning ta’rifi. $y = f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiyaning Δy orttirmasini

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (3.20)$$

ko‘rinishda tasvirlab bo‘lishini isbotlash mumkin, bu yerda $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik.

3.2-Ta’rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi dy differensial deb, funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi bilan argument orttirmasining ko‘paytmasiga aytiladi

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (3.21)$$

Funksiya differensial tushunchasi bilan bir qatorda erkin x o‘zgaruvchining dx differensial tushunchasini

$$dx = \Delta x \quad (3.22)$$

tenglik bilan kiritamiz. U holda $y = f(x)$ funksiya differensialini

$$dy = f'(x)dx \quad (3.23)$$

shaklda yozish mumkin. Bu yozuvdan o‘z navbatida $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ tenglikni hosil qilamiz. Hosilaning bunday belgilanishini 3.1-Ta’rifda kiritgan edik, uni dy funksiya differensialining dx argument differensialiga nisbati sifatida qarash mumkin.

Differensialni hisoblash qoidalari. $y = f(x)$ funksiyaning dy differensial y' hosiladan faqat dx ko‘paytuvchi bilangina farq qilganligi sababli, differensialni hisoblash uchun differensiallash qoidalaridan va elementar funksiyalar hosilalarning formulalaridan foydalanish mumkin.

1. $y = Cu, \quad (C = \text{const}) \quad dy = Cdu$
2. $y = u \pm v \quad dy = du \pm dv$
3. $y = uv \quad dy = u dv + v du$
4. $y = \frac{u}{v}, \quad (v \neq 0) \quad dy = \frac{v du - u dv}{v^2}$

Differensialning taqribiy hisoblashlarga tadbiri. $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin, u holda argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiyaning Δy orttirmasini

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik. Differensialning ta'rifiga ko'ra $f'(a)\Delta x = dy(a)$ ekanligini inobatga olsak, so'ngi tenglikni

$$\Delta y = dy(a) + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (3.24)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichikligidan va (3.24) tenglikdan

$$\Delta y \approx dy(a) \quad (3.25)$$

taqribiy tenglik kelib chiqadi. Agar $dy(a) \neq 0$ bo'lsa, bu taqribiy tenglikga (3.9) orttirma va (3.21) differensial formulalarini qo'llasak

$$f(a + \Delta x) - f(a) \approx f'(a)\Delta x$$

yoki

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x \quad (3.26)$$

formulani hosil qilamiz.

Masalan, $y = x^s, s \in \mathbf{R}$ bo'lsin. U holda

$$\Delta y = (a + \Delta x)^s - a^s, \quad dy(a) = sa^{s-1}\Delta x.$$

$|\Delta x|$ kichik qiymatlarni qabul qilganda

$$(a + \Delta x)^s \approx a^s + dy(a)$$

yoki

$$(a + \Delta x)^s \approx a^s + sa^{s-1}\Delta x$$

deb olamiz. Xususiyl holda, $s = 1/2$ bo'lsa

$$\sqrt{a + \Delta x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\Delta x, \quad a > 0. \quad (3.27)$$

3.13-Misol. Taqribiy hisoblang $\sqrt{3,996}$.

► $a = 4, \Delta x = -0,004$ deb olsak, (3.27) formulaga ko‘ra

$$\sqrt{3,996} = \sqrt{4 + (-0,004)} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0,004) = 1,999. \blacktriangleleft$$

3.4. Yuqori tartibli hosilalar

Yuqori tartibli hosilalar. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqning barcha nuqtalarida $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda $f'(x)$ ham x o‘zgaruvchining (a, b) oraliqda aniqlangan funksiyasi bo‘ladi. Bunday aniqlangan $f'(x)$ funksiya ham $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lishi mumkin. Bu hosilani biz $f(x)$ funksiyadan olingan ikkinchi tartibli hosila deb ataymiz va uni $f''(x)$ yoki $f^{(2)}(x)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Yuqoriroq tartibli hosilalar xuddi shu singari aniqlanadi, chunki, $f(x)$ funksiyaning $n -$ tartibli hosilasi uning $(n - 1) -$ tartibli hosilasidan hosila olib aniqlanadi:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \quad (3.28)$$

Hosilaning tartibini daraja bilan farqlash uchun u qavsga olingan.

$f^{(n)}(x)$ hosilani topish uchun dastlab $f'(x)$ hosila olinadi, so‘ngra $f'(x)$ hosiladan yana hosila olinib $f''(x)$ topiladi, va hokazo kerakli tartibli hosilani olmaguncha davom ettiriladi. Shunday qilib, yuqori tartibli hosilalar differensiallashning ma‘lum formula va qoidalari asosida hisoblanar ekan.

3.14-Misol. $y = e^{kx}, (k = \text{const})$ funksiyaning $n -$ tartibli hosilasini topamiz.

► Ketma-ket differensiallab

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots$$

Matematik induksiya metodiga ko‘ra, ixtiyoriy $n \in \mathbf{N}$ uchun

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}, n = 1, 2, \dots \blacktriangleleft$$

3.15-Misol. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning $n -$ tartibli hosilasini topamiz.

► Ketma-ket differensiallab

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \dots$$

hosilalarni topamiz. Matematik induksiya metodi bilan ixtiyoriy $n \in \mathbf{N}$ uchun

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Xuddi shu singari ixtiyoriy $n \in \mathbf{N}$ uchun

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

tenglikni hosil qilish mumkin. ◀

Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosi. Moddiy nuqta $s = S(t)$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakatlansin. U holda ma'lumki, vaqtning t momentidagi oniy tezligi $v(t) = S'(t)$ tenglikni qanoatlantiradi.

Vaqtning t momentida material nuqtaning tezligi v bo'lsin. Agar nuqta tekis harakatlanmayotgan bo'lsa, u holda t momentdan keyin o'tadigan Δt vaqt mobaynida tezlik o'zgaradi va Δv orttirma oladi.

Δt vaqt mobaynidagi *o'rtacha tezlanish* deb Δv tezlik orttirmasining Δt vaqt orttirmasiga nisbatiga aytiladi:

$$a_{o'rt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Δt orttirma qanchalik kichik bo'lsa, o'rtacha tezlanish shunchalik vaqtning t momentidai tezlanishiga yaqin bo'ladi.

t momentdagi tezlanish deb vaqt orttirmasi nolga intilganda tezlik orttirmasining vaqt orttirmasiga nisbatining limitiga aytiladi:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

boshqacha qilib aytganda vaqtning t momentidagi tezlanishi v tezlikdan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng ekan:

$$a = v'(t),$$

ammo biz yuqorida $v = S'(t)$ ekanligini ta'kidlab o'tgan edik, demak u holda

$$a = (S'(t))' = S''(t),$$

ya'ni to'g'ri chiziqli harakatning tezlanishi bosib o'tilgan yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng ekan.

3.16-Misol. Erkin tushayotgan jismning bosib o'tgan yo'li vaqtga

$$s(t) = gt^2/2 + v_0t + s_0 \quad (3.29)$$

qonuniyat bilan bog'langan, bu yerda $g = 9,8 \frac{m}{sek^2}$ — erkin tushish tezlanishi, s_0 bosib o'tilayotgan s yolning $t = 0$ vaqtdagi qiymati $s_0 = s|_{t=0}$.

► (3.29) tenglikni differensiallab

$$v = s'(t) = gt + v_0 \quad (3.30)$$

tezlikni topamiz. Bu tenglikdan $v_0 = v|_{t=0}$ kelib chiqadi. Yana bir marta differensiallab

$$a = v'(t) = s''(t) = g$$

tezlanishni topdik. Aksincha ham o'rinli ekanligini, ya'ni pastga qarab tushayotgan harakat tezlanishi o'zgarmas g bo'lsa, u holda $s_0 = s|_{t=0}$, $v_0 = v|_{t=0}$ shartda uning tezligi (3.30), bosib o'tilgan yo'l esa (3.29) tenglik orqali ifodalanilishini ta'kidlab o'tamiz. ◀

3.5. Aniqmasliklarni ochishning Lopitall qoidasi

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va $f(a) = g(a) = 0$ bo'lsin. U holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $x = a$ nuqtada ma'noga ega bo'lmaydi. Biroq bu nisbatning $x = a$ nuqtada limiti mavjud bo'lishi mumkin. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitni topish bu holda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish deb ataladi.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitni topish $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish degani.

$\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish deganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar uchun $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ ko'rinishdagi limitni topish tushuniladi.

$x \rightarrow \infty$ holda bu tushunchalar xuddi shu singari izohlanadi.

3.6-Teorema (Lopitall qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning o'zi kirmagan biror atrofida $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalrga ega va bu atrofda $g(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar nolga aylanmasin. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ va } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

va hosilalarning $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbati $x = a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega bo'lsa, u holda bu funksiylarning nisbati ham bu nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3.31)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(3.31) tenglik Lopitall qoidasini ifodalaydi. Bu qoidaga ko'ra funksiyalar nisbatning limitini (ma'lum shartlar o'rinli bo'lganda) bu funksiyalar hosilalari nisbatining limiti bilan almashtirish mumkin.

3.17-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Mulohaza. Agar Lopital teoremasining shartini $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalargina emas, balki ularning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham qanoatlantirsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblash uchun Lopital qoidasini ketm-ket ikiki marta qo'llash mumkin. Agar keyingi tartibli hosilalar ham teorema shartini qanoatlantirsa ularga ham Lopital qoidasini qo'llash mumkin.

3.18-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}. \text{ Bu yerda } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ birinchi ajoyib limitdan} \end{aligned}$$

foydalanildi. $\blacktriangleleft$

3.7-Teorema (Lopitalning ikkinchi qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning o'zi kirmagan biror atrofida $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalrga ega va bu atrofda $g(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar nolga aylanmasin. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ va } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

va hosilalarning $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbati $x = a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega bo'lsa, u holda bu funksiylarning nisbati ham bu nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. ◀

Bu yerda $x \rightarrow a - 0$ yoki $x \rightarrow a + 0$ bo'lgandagi limitlarni ham qarash mumkin.

3.19-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln \sin x}{\ln x}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln \sin x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

Bu yerda $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 1$ birinchi ajoyib limitdan foydalanildi.

3.8-Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar

- 1) x o'zgaruvchining mutlaq qiymati bo'yicha yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ va $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$;
- 3) x o'zgaruvchining mutlaq qiymati bo'yicha yetarlicha katta qiymatlarida $f'(x)$ va $g'(x) \neq 0$ hosilalar mavjud;
- 4) funksiyalar hosilalarining (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limiti mavjud. U holda funksiyalar nisbatining ham limiti mavjud bo'ladi va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.20-Misol. Lopital qoidasidan foydalanib limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0. \blacktriangleleft$$

Nazorat savollari

1. Kimyoviy reaksiyaning t momentdagi tezligi deb nimaga aytiladi?
2. Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma qanday chiziq bo'ladi?
3. Hosilaning ta'rifini bayon qiling.
4. O'zgarmasning hosilasi nimaga teng?
5. Yig'indining hosilasi nimaga teng?
6. Ko'paytmaning hosilasi nimaga teng?
7. Bo'linmaning hosilasi nimaga teng?
8. Murakkab funksiyaning hosilasi nimaga teng?
9. Funksiyaning x nuqtadagi differensialni qanday aniqlanadi?
10. Differensialni taqribiy hisoblashga qanday qo'llash mumkin?
11. Ikkinchi tartibli hosila qanday topiladi?
12. Aniqmaslikni ochishning Lopital qoidasi qanday qoida?

Mashqlar.

Bevosita hosilaning ta'rifidan foydalanib funksiyaning hosilasini toping:

1. $y = x^3$. 2. $y = 1/x$. 3. $y = \sqrt{x}$. 4. $y = 2x^2 - x$.

Funksiyalarning hosilalarini toping:

5. $y = x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x - 1$. 6. $y = \sin 2x \cdot e^x$. 7. $y = \sqrt{5x - 4}$.
 8. $y = x/(1 + x^2)$. 9. $y = \arcsin 5x$. 10. $y = 2^{-3x}$.

Funksiyaning differensialini toping.

11. $y = x^4$. 12. $y = \cos x$. 13. $y = 5^x$.
 14. $\arctg 1,02$ qiymatini taqribiy hisoblang.

Qayta differensiallashni bajaring:

15. $y = 4x^3 - 5x^2$; $y'' = ?$ 16. $y = \arctg x$, $y''(1) = ?$
 17. $y = a^{3x}$, $y''' = ?$ 18. $y = x^5$, $y''' = ?$

Lopital qoidasidan foydalanib quyidagi limitlarni toping.

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + 3x - 5}$ 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x}$ 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 5}$

Javoblar.

1. $3x^2$; 2. $-1/x^2$; 3. $1/2\sqrt{x}$; 4. $4x - 1$; 5. $5x^4 + 16x^3 - 6x^2 + 4$; 6. $\sin 2x e^x + 2 \cos 2x e^x$; 7. $5/2\sqrt{5x - 4}$; 8. $(1 - x^2)/(1 + x^2)$; 9. $5/\sqrt{1 - 25x^2}$; 10. $-3 \cdot 2^{-3x} \ln 2$; 11. $4x^3 dx$; 12. $-\sin x dx$; 13. $5^x \ln 5$; 14. 0,795; 15. $24x - 10$; 16. $-1/2$; 17. $27a^{3x} \ln^3 a$; 18. $60x^2$; 19. $10/7$; 20. 0; 21. 0.

IV BOB. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANI TEKSHIRISH

4.1. Funksiyaning o'sish va kamayish shartlari

Bir o'zgaruvchili funksiyalarning xossalarini o'rganishda monoton funksiyalarga ta'rif bergan edik. Bu yerda ham bu ta'riflarni kengroq ko'rinishda takrorlaymiz. $[a, b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

4.1-Ta'rif. $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ uchun $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaymaydigan funksiya deb ataladi. Agar $x_1 < x_2$ shartdan doimo $f(x_1) < f(x_2)$ kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'suvchi deyiladi.

4.2-Ta'rif. Agar $[a, b]$ kesmadagi $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'smaydigan, $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamayuvchi deyiladi.

4.3-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada faqat kamaymaydigan (xususiy holda o'suvchi) yoki faqat o'smaydigan (xususiy holda kamayuvchi) bo'lsa, uni biz $[a, b]$ kesmada monoton funksiya deb ataymiz. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarni qat'iy monoton funksiyalar deb ataymiz.

4.1-Teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va hech bo'lmaganda (a, b) oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaymaydigan bo'lishi uchun (a, b) oraliqning barcha x nuqtalarida $f'(x) \geq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

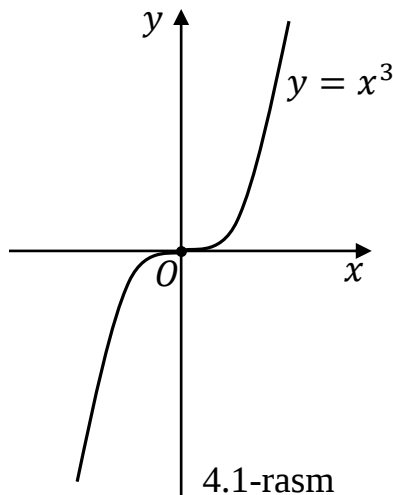
4.2-Teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va hech bo'lmaganda (a, b) oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'smaydigan bo'lishi uchun (a, b) oraliqning barcha x nuqtalarida $f'(x) \leq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Qaralgan teoremlar kesmada uzluksiz va oraliqning chekli sondagi nuqtalarida hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar uchun ham o'rinli. Buning uchun oraliq hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar yordamida uzluksiz hosilali kichik intervallarga ajratiladi.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosilaning oraliqda ishorasini o'zgartmasligi (oraliqning chekli sonidagi nuqtalaridagina nolga aylanadi degan shartda) $f(x)$ funksiyaning mazkur oraliqda qat'iy monoton bo'lishligi uchun yetarli shart bo'ladi.

4.3-Teorema. Agar $[a, b]$ kesmada uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning hosilasi ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) va hech qanday $E \subseteq (a, b)$ oraliqda $f'(x)$ hosila aynan nol bo'lmasa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o'sadi (kamayadi).

4.1-Misol. $f(x) = x^3$ funksiya $[-1, 1]$ kesmada o'sadi, ammo uning $f'(x) = 3x^2$ hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi (4.1-rasm). ◀

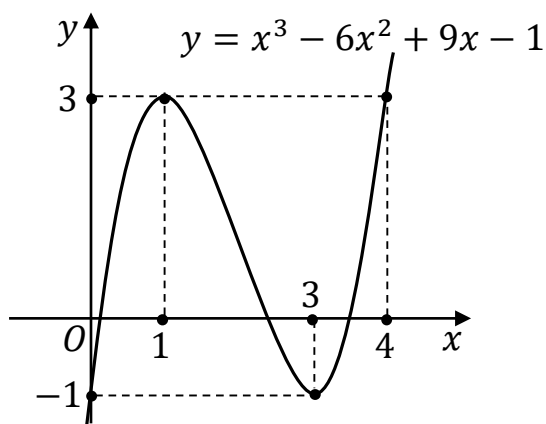


4.1-rasm

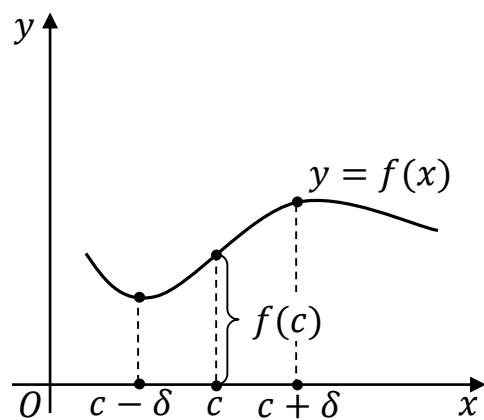
4.2-Misol. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini toping.

► Bu funksiya barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda aniqlangan. Uning $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$ hosilasi $(-\infty, 1)$ va $(3, +\infty)$ oraliqlarda musbat va $(1, 3)$ oraliqda manfiy. U holda 4.3-Teoremaga ko'ra funksiya $(-\infty, 1)$ va $(3, +\infty)$ oraliqlarda o'sadi va $(1, 3)$ oraliqda kamayadi (4.2-rasm).

4.4-Ta'rif. Agar c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topilib, bu oraliqdan olingan barcha $x < c$ uchun $f(x) < f(c)$ va barcha $x > c$ uchun $f(x) > f(c)$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada o'suvchi deyiladi (4.3-rasm).



4.2-rasm



4.3-rasm

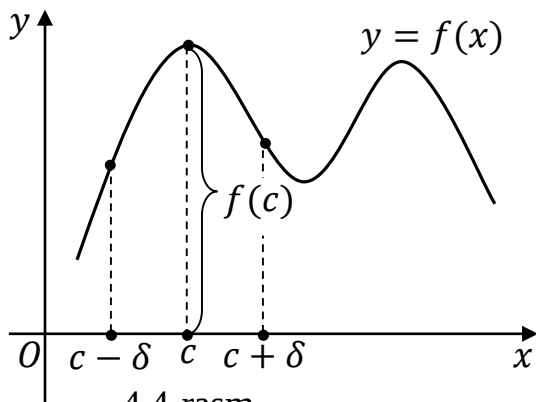
Agar c nuqtaning biror atrofidan olingan barcha $x < c$ uchun $f(x) > f(c)$ va barcha $x > c$ uchun $f(x) < f(c)$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayuvchi deyiladi.

Keyingi teorema funksiya nuqtada o'sishining va kamayishning yetarli shartini ifodalaydi.

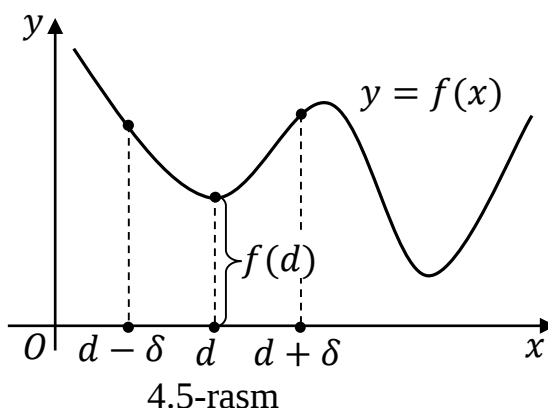
4.3-Teorema. $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar $f'(c) > 0$ bo'lsa, u holda funksiya $x = c$ nuqtada o'sadi; agar $f'(c) < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayadi.

4.2. Funksiyaning ekstremumi

$f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda aniqlangan bo'lsin.



4.4-rasm



4.5-rasm

4.5-Ta'rif. Agar $c \in (a, b)$ nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalarda

$$f(x) \leq f(c) \quad (4.1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning *lokal maksimum* nuqtasi deb ataladi (4.4-rasm). Agar $d \in (a, b)$ nuqtaning shunday $(d - \delta, d + \delta)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalarda

$$f(x) \geq f(d) \quad (4.2)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, d nuqta $f(x)$ funksiyaning *lokal minimum* nuqtasi deb ataladi (4.5-rasm). Agar (4.1) va (4.2) tengsizliklar qat’iy tengsizliklar bo‘lsa qat’iy lokal maksimum va qat’iy lokal minimum haqida gapirish mumkin bo‘ladi.

Lokal maksimum nuqtadagi $f(c)$ qiymatni $f(x)$ funksiyaning lokal maksimumi va lokal minimum nuqtadagi $f(d)$ qiymatni lokal minimumi deb ataladi. Lokal maksimum va lokal minimum tushunchalar birlashtirilib lokal *ekstremumlar* deb ataladi. Keyingi satrlarda lokal va qat’iy so‘zlarini ishlatmasdan faqat maksimum, minimum va ekstremum so‘zlarini ishlatamiz, hamda qat’iy maksimum va qat’iy minimum hollarni qaraymiz. Agar funksiya c va d nuqtalarda mos ravishda maksimum va minimum qiymatlarga erishsa biz ularni $f(c) = f_{max}$ va $f(d) = f_{min}$ orqali yozamiz.

Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti.

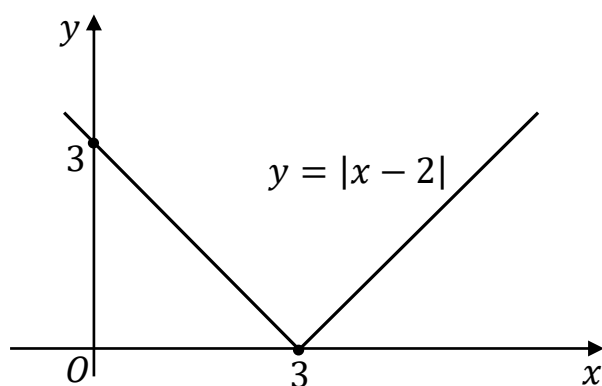
4.4-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya c nuqtada differensiallanuvchi va bu nuqtada ekstremumga erishsa, u holda $f'(c) = 0$ bo‘ladi.

4.4-Teorema oddiy geometrik talqinga ega: differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning c ekstremum nuqtasiga mos keluvchi $(c, f(c))$ nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqda o‘tkazilgan urinma Ox o‘qqa parallel bo‘ladi.

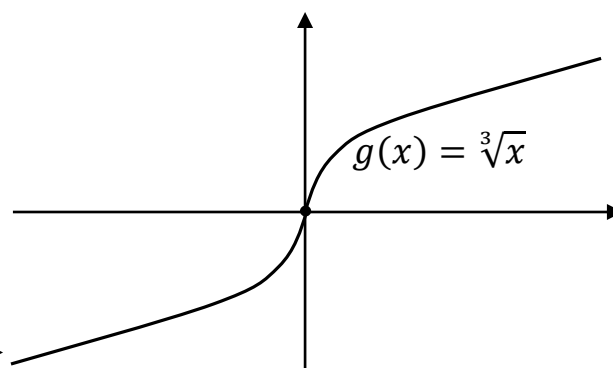
4.6-Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘ladigan nuqtalar bu funksiyaning statsionar nuqtalari deb ataladi.

4.4-Teorema ko‘ra differensiallanuvchi funksiya ekstremumga o‘zining statsionar nuqtalaridagina erishishi mumkin ekan. Biroq hamma statsionar nuqtalarda ham funksiya ekstremumga erishavermaydi. Buni $f(x) = x^3$ funksiyaning misolida ko‘rish mumkin (4.1-rasm). Uning $f'(x) = 3x^2$ hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi, ya’ni bu nuqta uning statsionar nuqtasi bo‘ladi, ammo funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Endi ayrim nuqtalarda hosilasi cheksiz yoki mavjud bo'lmagan funksiyalarni qaraymiz. Masalan $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga erishadi, uning hosilasi esa bu nuqtada cheksiz. $y = |x - 2|$ funksiya $x = 2$ nuqtada hosilaga ega emas, shunga qaramasdan funksiya bu nuqtada minimumga erishadi (4.6-arsm). Demak funksiyaning hosilasi cheksiz yoki mavjud bo'lmagan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga erishishi mumkin ekan. Ammo bu yerda ham hosilaning mavjud emasligi yoki cheksizga aylanishi ekstremum mavjudligiga kafolat bermaydi. Bunga $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbf{R}$ funksiyaning misol qilib ko'rsatish mumkin. U $x = 0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega, ammo funksiya mazkur nuqtada ekstremumga erishmaydi, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida ham manfiy ham musbat qiymatlarni qabul qiladi (4.7-rasm).



4.6-rasm



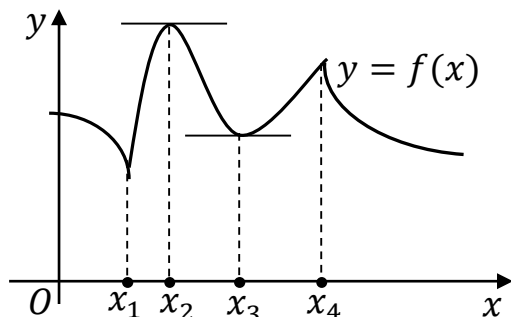
4.7-rasm

Shunday qilib, ekstremum mavjudligining zaruriy shartini quyidagicha ifodalash mumkin: agar $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada ekstremumga erishsa, u holda yoki funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi va uning hosilasi $f'(c) = 0$ yoki $x = c$ nuqtada funksiya differensiallanuvchi emas.

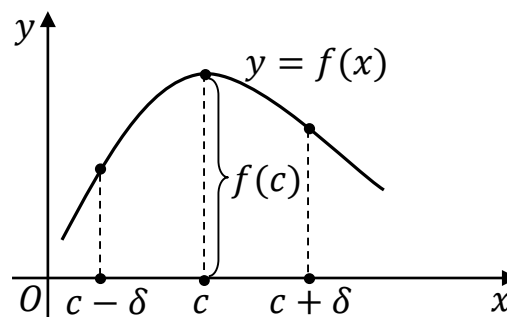
4.7-Ta'rif. $f(x)$ funksiyaning o'zi uzluksiz, uning hosilasi esa nol, cheksiz yoki umuman mavjud bo'lmagan nuqtalarni, funksiyaning *kritik nuqtalari* deb ataladi.

4.5-Teorema. $f(x)$ funksiya ekstremumga o'zining faqat kritik nuqtalarida erishishi mumkin.

Teoremaning geometrik talqini 4.8-rasmda keltirilgan. Grafigi bu rasmda tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_1, x_2, x_3, x_4 nuqtalarda ekstremumga erishadi; bunda x_1 va x_4 nuqtalarda $f'(x)$ hosila mavjud emas, x_2 va x_3 nuqtalarda uning qiymati nolga teng.



4.8-rasm



4.9-rasm

Funksiya ekstremumi mavjudligining yetarli sharti.

4.6-Teorema. $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin, ya'ni funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi yoki $f'(c) = 0$ yoki mavjud emas, funksiyaning o'zi esa c nuqtada uzluksiz. Shunday $\delta > 0$ son topilib, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) > 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f'(x) < 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin, ya'ni x o'zgaruvchi c nuqta orqali o'tganda $f'(x)$ hosila o'zining ishorasini plyusdan minusga o'zgartirsin. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi, ya'ni $f(c) = f_{\max}$.

► Teorema shartiga ko'ra $(c - \delta, c)$ oraliqda $f'(x) > 0$, shuning uchun $f(x)$ funksiya $[c - \delta, c]$ kesmada o'sadi; $(c, c + \delta)$ oraliqda esa $f'(x) < 0$, shu sababli $f(x)$ funksiya $[c, c + \delta]$ kesmada kamayadi. Demak $f(x)$ funksiyaning $f(c)$ qiymati c nuqtaning $(c - \delta, c + \delta)$ oraliqdagi uning eng katta qiymati bo'lar ekan (4.9-rasm), bu esa $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishishini anglatadi. ◀

Xuddi shu singari quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

4.7-Teorema. $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin, ya'ni funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi yoki $f'(c) = 0$ yoki mavjud emas, funksiyaning o'zi esa c nuqtada uzluksiz. Shunday $\delta > 0$ son topilib, $(c -$

$\delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) < 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f'(x) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin, ya'ni x o'zgaruvchi c nuqta orqali o'tganda $f'(x)$ hosila o'zining ishorasini minusdan plusga o'zgartirsin. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishadi, ya'ni $f(c) = f_{\min}$.

4.3-Misol. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumlarini toping.

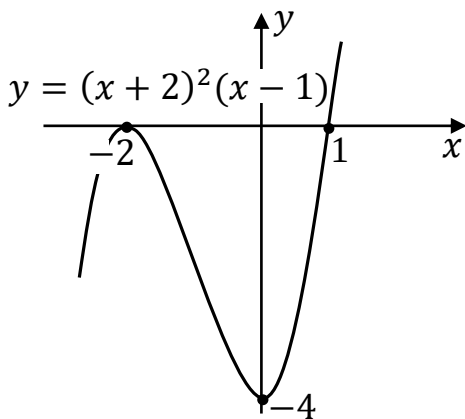
► Funksiya $\mathbf{R}$ son o'qida aniqlangan. Uning hosilasi $f'(x) = 2(x + 2)(x - 1) + (x + 2)^2 = 3x(x + 2)$, ya'ni ikkita $x_1 = -2$ va $x_2 = 0$ statsionar nuqtaga ega. Ular son o'qini uchta oraliqqa ajratadi: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$ va ularning har birida hosila o'zining ishorasini saqlaydi, ya'ni 4.3-Teorema ko'ra funksiya bu oraliqlarda monoton. Bu monotonliklar quyidagilardan iborat:

$(-\infty, -2)$ oraliqda $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda o'sadi;

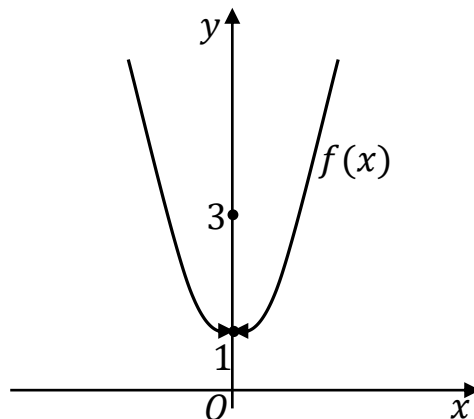
$(-2, 0)$ oraliqda $f'(x) < 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda kamayadi;

$(0, +\infty)$ oraliqda $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda o'sadi.

4.6 va 4.7-Teoremalarga ko'ra $f(x)$ funksiya $x_1 = -2$ nuqtada maksimumga, $x_2 = 0$ nuqtada esa minimumga erishadi: $f_{\max} = f(-2) = 0$ va $f_{\min} = f(0) = -4$. Funksiyaning grafigi 4.10-rasmda tasvirlangan.



4.10-rasm



4.11-rasm

4.4-Misol. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ tarkibli funksiyaning ekstremumga tahlil qiling.

► Funksiyaning $f'(x)$ hosilasi $x = 0$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda mavjud va $x = 0$ nuqtadan o'tishda hosila minusdan plyusga o'tadi. Shunga qaramasdan funksiya $x = 0$ nuqtadan maksimumga ham minimumga ham erishmaydi. Buni bevosita 4.11-rasmda ham ko'rish mumkin. 4.7-Teoremani bu funksiya qo'llab bo'lmaydi, chunki funksiya $x = 0$ nuqtada uzilishga ega. ◀

Shunday qilib, ekstremum mavjudligining yetarli sharti berilgan 4.6 va 4.7-Teoremlarni kritik nuqtada uzilishga ega bo'lgan funksiya qo'llab bo'lmas ekan.

Funksiya ekstremumini topishning 1-qoidasi. $f(x)$ funksiyaning maksimum, minimum nuqtalarini topish uchun:

1) funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topib, uni nolga tenglashtirib, hosil bo'lgan $f'(x) = 0$ tenglamani yechish kerak;

2) $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmaydigan nuqtalarni topish kerak. Bu nuqtalar va $f'(x) = 0$ tenglamaning ildizlari $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari bo'ladi;

3) har bir kritik nuqtaning chap va o'ng tomonlarida $f'(x)$ hosilaning ishoralarini tekshirish kerak. Agar x o'zgaruvchi $x = c$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ hosila o'zining ishoralarini plyusdan minusga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi; agar $f'(x)$ hosilaning ishorasi minusdan plyusa o'zgarsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishadi. Agar x o'zgaruvchi $x = c$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ hosila o'zining ishorasini o'zgartirmasa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga ham minimumga ham erishmaydi. ◀

4.5-Misol. $y = x^2 e^{-x}$ funksiyaning ekstremumga tekshiring.

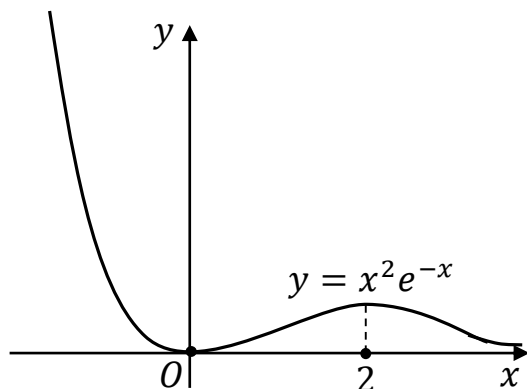
► 1) Hosilani topamiz: $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2 - x)x$.

2) y' hosilani nolga tenglashtirib funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz: $x = 0$, $x = 2$.

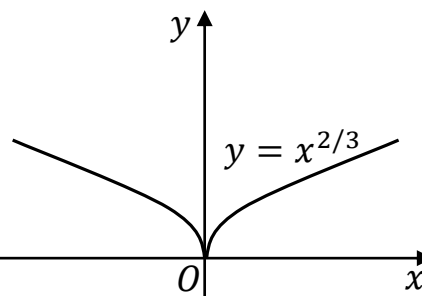
3) Har bir kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$y' < 0$	$y' > 0$	$y' < 0$
–	+	–

Shunday qilib $x = 0$ minimum nuqta, $x = 2$ esa maksimum nuqta bo'lar ekan (4.12-rasm). ◀



4.12-rasm



4.13-rasm

4.6-Misol. $y = x^{2/3}$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

► 1) Hosilani topamiz: $y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

2) Hosila hech qayerda nolga aylanmaydi, ammo $x = 0$ nuqtada mavjud emas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty.$$

3) $x = 0$ nuqtadan chapda va o'ngda y' hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$y' < 0$	$y' > 0$
–	+

Shunday qilib $x = 0$ nuqta funksiyaning minimum nuqtasi ekan (4.13-rasm).

Funksiyani ekstremumga yuqori tartibli hosilalar yordamida tekshirish.

Keyingi teorema ham ekstremumning yetarlilik shartini ifodalaydi.

4.8-Teorema. $x = c$ nuqtada $f(x)$ funksiya birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va bunda $f'(c) = 0$ va $f''(c) \neq 0$ bo'lsin. Agar $f''(c) < 0$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga, $f''(c) > 0$ bo'lsa, minimumga erishadi.

► $f'(c) = 0$ bo'lganligi uchun c nuqta berilgan funksiyaning kritik nuqtasi bo'ladi. $f''(c) < 0$ bo'lsin. Bundan $f'(x)$ funksiya c nuqtada kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi, ya'ni c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topiladiki, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) > f'(c) = 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) < f'(c) = 0$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Shunday qilib x o'zgaruvchi c nuqta orqali o'tganda $f'(x)$ hosila o'z ishorasini plyusdan minusga o'zgartirar ekan. Demak, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi.

Shunga o'xshash mulohazalar bilan, agar c kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(c) > 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishishini isbotlash mumkin. ◀

Bu yerdan funksiyaning ekstremumini topishning ikkinchi qoidasini hosil qilamiz.

Funksiya ekstremumini topishning 2-qoidasi. $f(x)$ funksiyaning maksimum va minimum nuqtalarini topish uchun, dastlab uning kritik nuqtalari topiladi. Bu 1-qoidadagi singari bajariladi. So'ngra $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila topiladi. Agar ikkinchi tartibli hosila c kritik nuqtada $f''(c) < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu nuqtada maksimumga, agar $f''(c) > 0$ bo'lsa, funksiya bu nuqtada minimumga erishadi.

Agar c kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila ham nolga aylansa, funksiyaning ekstremumga tekshirishga yuqori tartibli hosilalarni jalb qilish mumkin:

4.9-Teorema. $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada n marta differensiallanuvchi va bunda $(n - 1)$ -tartibgacha barcha hosilalar bu nuqtada nolga aylansin: $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ va $f^{(n)}(c) \neq 0$ bo'sin. U holda, agar n juft bo'lsa funksiya c nuqtada ekstremumga erishadi va $f^{(n)}(c) < 0$ bo'lsa, $f(c) = f_{\max}$; $f^{(n)}(c) > 0$ bo'lsa, $f(c) = f_{\min}$ bo'ladi.

4.7-Misol. $y = x^m, m \in \mathbf{N}$ funksiyaning $m - 1$ tartibgacha bo'lgan barcha hosilalar $x = 0$ nuqtada nolga teng va $f^{(m)}(0) = m! > 0$. Bunda m juft bo'lsa $x = 0$ bu funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi, m toq bo'lsa, $y = x^m$ funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas. ◀

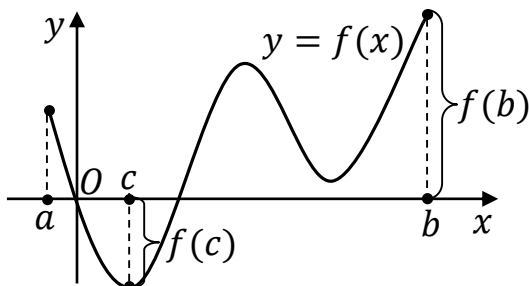
Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymati. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, Veyyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiya bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Agar $f(x)$ funksiya o'zining eng katta M qiymatini $[a, b]$ kesmaning ichki c nuqtasida qabul qilsa, $M = f(c)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning lokal maksimumi bo'ladi.

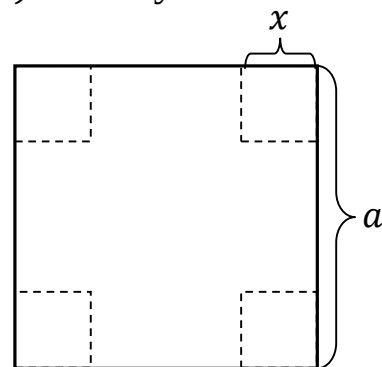
Biroq $f(x)$ funksiya o'zining eng katta M qiymatiga $[a, b]$ kesmaning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin.

Shu sababli $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning eng katta M qiymatini topish uchun $f(x)$ funksiyaning (a, b) oraliqdagi barcha maksimumlarini topish kerak, $[a, b]$ kesmaning chetki nuqtalaridagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlarini hisoblab va ular orasidan eng kattasini tanlash kerak. $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi m eng kichik qiymati bu funksiyaning (a, b) oraliqdagi barcha minimumlari va $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar orasidagi eng kichigi bo'ladi.

Grafigi 4.14-rasmda tasvirlangan $f(x)$ funksiya uchun $M = f(b)$ va $m = f(c)$ bo'ladi.



4.14-rasm



4.15-rasm

4.8-Misol. Tomoni a qiymatga teng bo'lgan kvadrat shaklidagi temir tunukaning burchaklaridan teng kvadratlar kesib olinib va chetlari qayrilib

to'g'ri burchakli ochiq quti yasaladi. Eng katta hajmli qutini qanday hosil qilish mumkin?

► x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida qutining v hajmi

$$v(x) = x(a - 2x)^2, \quad 0 \leq x \leq a/2$$

formula bilan hisoblanadi (4.15-rasm). Ana shu $v(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topishimiz kerak. Birinchi tartibli hosilasini topamiz:

$$v'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Bu yerda $v(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz: $x_1 = a/6$ va $x_2 = a/2$. $(a, a/2)$ oraliqda $x_1 = a/6$ kritik nuqta yotadi.

$v(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz

$$v''(x) = -2(a - 6x) - 6(a - 2x) = 24x - 8a.$$

va uning $x_1 = a/6$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$v''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0.$$

Demak $v(x)$ funksiya $x = a/6$ nuqtada maksimumga erishadi:

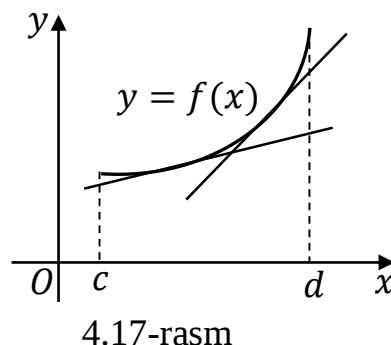
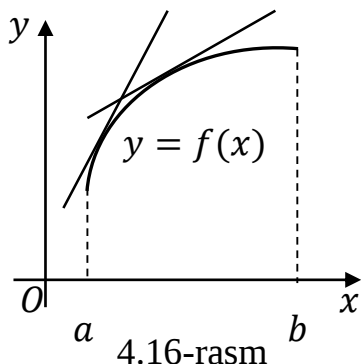
$$v\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6} \left(a - 2 \cdot \frac{a}{6}\right)^2 = \frac{a}{6} \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2a^3}{27}.$$

$[0, a/2]$ kesmaning chetki nuqtalarida $v(0) = v(a/2) = 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, agar $x = a/6$ deb olsak, quti eng katta hajmli bo'lar ekan va uning hajmi $2a^3/27$ bo'ladi. ◀

4.3. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi

4.8-Ta'rif. Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya grafigiga (a, b) oraliqning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urinma funksiya garfigidan yuqorida yotsa, funksiya grafigi bu oraliqda qavariq deyiladi (4.16-rasm)



4.9-Ta'rif. Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya grafigiga (c, d) oraliqning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urinma funksiya garfigidan pastda yotsa, funksiya grafigi bu oraliqda botiq deyiladi (4.17-rasm)

Funksiya grafigi qavariq (botiq) bo'ladigan har qanday oraliq funksiyaning qavariqlik (botiqlik) oralig'i deb ataladi.

4.10-Teorema (qavariqlik va botiqlikning yetarli sharti). Agar $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi ixtiyoriy $x \in (a, b)$ uchun $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) bo'lsa, funksiya bu oraliqda qavariq (botiq) bo'ladi.

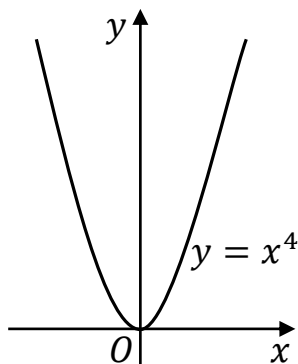
Ikkinchi tartibli hosilaning o'zgarmas ishoraliqlik sharti qavariqlik va botiqlik uchun faqat yetarli shart, ammo zaruriy shart emas: qavariqlik va botiqlik intervallarida ikkinchi tartibli hosila nolga ham aylanishi mumkin. Masalan, $y = x^4$ funksiya $\mathbf{R}$ son o'qida botiq, biroq uning $y'' = 12x^2$ ikkinchi tartibli hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi (4.18-rasm).

4.9-Misol. $f(x) = \arctg x$ funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping.

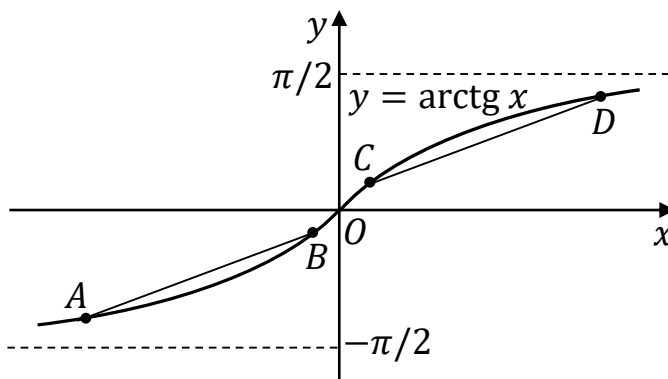
► Bu funksiya $\mathbf{R}$ son o'qida aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, (\arctg x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ko'rinib turibdiki $x < 0$ bo'lsa $(\arctg x)'' > 0$, ya'ni funksiya $(-\infty, 0)$ oraliqda botiq, $x > 0$ bo'lsa $(\arctg x)'' < 0$, ya'ni funksiya $(0, +\infty)$ oraliqda qavariq (4.19-rasm). ◀



4.18-rasm



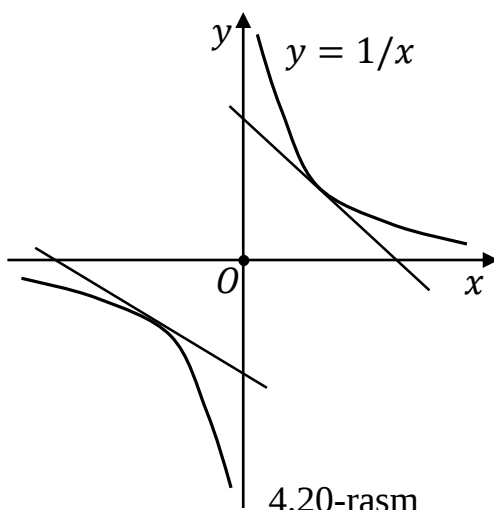
4.19-rasm

Funksiya grafigining bukilish nuqtasi.

4.10-Ta'rif. $f(x)$ funksiya c nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar x o'zgaruvchi c nuqtadan o'tishda $f(x)$ funksiyaning qavariqligi botiqlikka yoki botiqligi qavariqlikka o'tsa, c nuqta funksiyaning bukilish nuqtasi, $(c, f(c))$ nuqta esa $f(x)$ funksiya grafigining bukilish nuqtasi deb ataladi.

4.10-Misol. 4.1-rasmda $f(x) = x^3$ funksiyaning grafigi va 4.7-rasmda esa unga teskari $g(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning grafigi keltirilgan. $g(x)$ funksiyaning hosilasi $x = 0$ nuqtada cheksiz. $x = 0$ nuqta ikkala funksiya uchun ham bukilish nuqtasi bo'ladi. Haqiqattan ham, $x < 0$ bo'lsa $f''(x) = 6x < 0$ va $x > 0$ bo'lsa $f''(x) > 0$. Xuddi shunday, $x < 0$ bo'lsa $g''(x) = -2x^{-5/3}/9 < 0$ va $x > 0$ bo'lsa $g''(x) > 0$. 4.10-Teoremani inobatga olsak x o'zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o'tishda ikkala funksiya ham qavariqlik bilan botiqlik o'rinlarini almashishadi: $f(x)$ funksiya qavariqlik botiqlikka, $g(x)$ funksiya esa botiqlik qavariqlikka o'tadi. ◀

4.11-Misol. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega bo'ladi (4.20-rasm) va x o'zgaruvchi bu nuqtadan o'tganda qavariqlik botiqlikka o'tadi, chunki agar $x < 0$ bo'lsa, $f''(x) = 2/x^3 < 0$ va $x > 0$ bo'lsa, $f''(x) > 0$ bo'ladi. Biroq $x = 0$ nuqtada funksiya uzilishga ega va shuning uchun ham $x = 0$ nuqta bu funksiya uchun bukilish nuqtasi bo'lmaydi. ◀



4.12-Misol. $f(x) = x^{2/3}$ funksiya (4.13-rasm) uchun $x = 0$ bukilish nuqtasi bo'lmaydi, chunki x o'zgaruvchi bu nuqta orqali o'tganda funksiyaning qavariqligi botiqlikka o'tmasdan, qavariqligicha qoladi. Haqiqattan ham, $x < 0$ bo'lganda ham, $x > 0$ bo'lganda ham $f''(x) = -2x^{-4/3}/9 < 0$ bo'ladi. Funksiya grafigi $(0, 0)$ nuqtada “bukilmasdan” balki urinma orqali “orqaga qaytadi”. Bu holda uni funksiyaning qaytish nuqtasi (ba'zan o'tkirlanish nuqtasi) deb ataladi.

4.11-Teorema (bukilish nuqtasining zaruriy sharti). Funksiyaning bukilish nuqtasida ikkinchi tartibli hosila mavjud va uzluksiz bo'lsa, u nolga teng.

4.12-Teorema (bukilish nuqtasining birinchi yetarli sharti). Agar c nuqtada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(c) = 0$ yoki $f''(c)$ mavjud bo'lmasa va x o'zgaruvchi c nuqtadan o'tishda $f''(x)$ hosila o'z ishorasini o'zgartirsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning bukilish nuqtasi bo'ladi.

► 1) $x < c$ bo'lganda $f''(x) < 0$ va $x > c$ bo'lganda $f''(x) > 0$ bo'lsin. 4.10-Teoremaga ko'ra $x < c$ bo'lganda $f(x)$ qavariq va $x > c$ bo'lganda esa botiq bo'ladi. Demak 4.10-Ta'rifga ko'ra $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning bukilish nuqtasi bo'ladi.

2) $x < c$ bo'lganda $f''(x) > 0$ va $x > c$ bo'lganda $f''(x) < 0$ bo'lsin. 4.10-Teoremaga ko'ra $x < c$ bo'lganda $f(x)$ botiq va $x > c$ bo'lganda esa qavariq bo'ladi. Demak 4.10-Ta'rifga ko'ra $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning bukilish nuqtasi bo'ladi. ◀

4.13-Teorema (bukilish nuqtasining ikkinchi yetarli sharti). Agar biror c nuqtada $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi nolga teng: $f''(c) = 0$ va uchinchi tartibli hosilasi noldan farqli: $f'''(c) \neq 0$ bo'lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning bukilish nuqtasi bo'ladi.

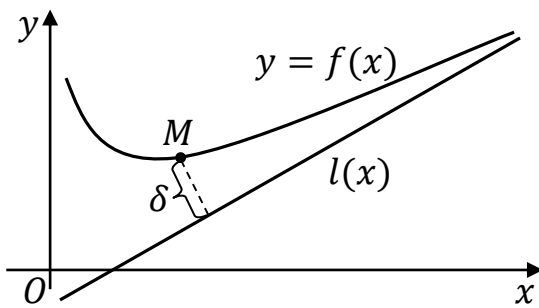
4.4. Funksiya grafigining asimptotalari

Agar $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning biror bo'lagi cheksizlikka intilsa, bu egri chiziqni cheksiz bo'lakli egri chiziq deb ataymiz.

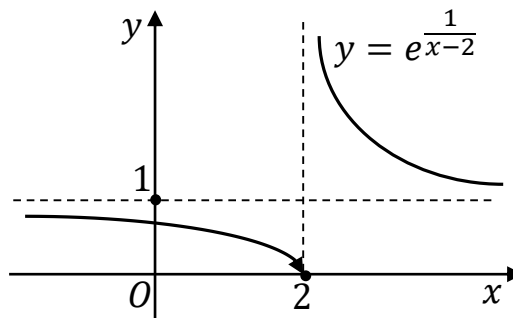
4.11-Ta'rif. Cheksiz bo'lakli $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi deb shunday $l(x)$ to'g'ri chiziqqa aytamizki, bunda $l(x)$ to'g'ri chiziqdan egri chiziqning M nuqtasigacha bo'lgan $\delta(M)$ masofa M nuqta egri chiziq bo'ylab cheksiz uzoqlashganda nolga intiladi (4.21-rasm).

Asimptotalar uch ko'rinishda: vertikal, og'ma va gorizontalar asimptotalar bo'ladi.

Vertikal asimptotalar. Agar $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$ va $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ bir tomonlama limitlarning kamida bittasi cheksiz bo'sa $x = c$ to'g'ri chiziqni $y = f(x)$ funksiya grafigining *vertikal asimptotasi* deb ataymiz.



4.21-rasm



4.22-rasm

$y = f(x)$ egri chiziqning asimptotalarini topish uchun:

- 1) $f(x)$ funksiyaning Ox o'qdagi uzilish nuqtalarini topamiz;
- 2) ular orasidan $f(x)$ funksiyaning kamida bitta limiti (chap yoki o'ng) $+\infty$ yoki $-\infty$ bo'ladiganlarini tanlaymiz. Bular $x_1, x_2, \dots, x_m$ bo'lsin. U holda $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_m$ to'g'ri chiziqlar $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotalari bo'ladi.

4.13-Misol. $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ funksiya grafigining vertikal asimptotalarini topamiz. Bu funksiya $\mathbf{R}$ son o'qining $x = 2$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarida aniqlangan. $x = 2$ nuqtadagi chap va o'ng limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = 0 \text{ va } \lim_{x \rightarrow 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty.$$

Demak, $x = 2$ to'g'ri chiziq qarayotgan funksiyaning x o'zgaruvchi $x = 2$ nuqtaga o'ngdan intilganda asimptotasi bo'lar ekan (4.22-rasm). ◀

4.14-Misol. $y = 1/(x^2 - 1)$ funksiyaning vertikal asimptotalarini toping.

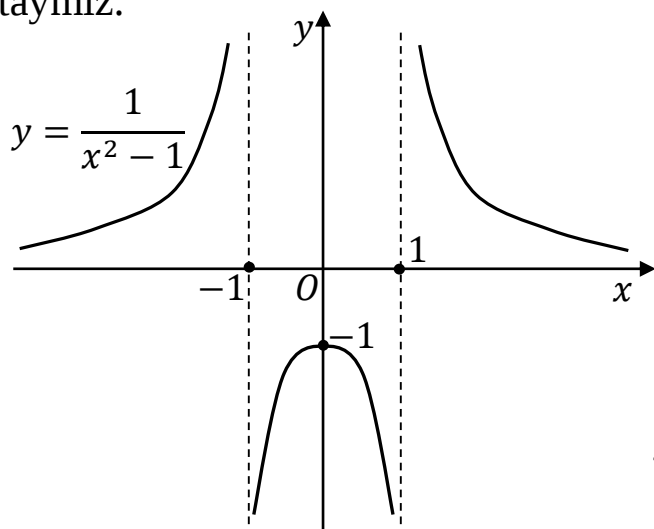
► Funksiya ifodasidagi kasr maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}.$$

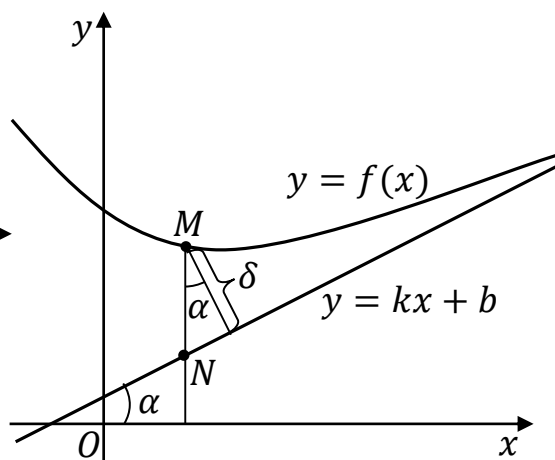
Ko‘rinib turibdiki $x = -1$ va $x = 1$ to‘g‘ri chiziqlar ikki tomonlama vertikal asimptotalar bo‘ladi (4.23-rasm), chunki

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x^2 - 1} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} &= +\infty. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Og‘ma asimptotalar. $y = f(x)$ funksiya barcha $x \geq a$ (yoki $x \leq a$) nuqtalarda aniqlangan bo‘lsin. $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo‘lsin. Bunday asimptotani *og‘ma asimptota* deb ataymiz.



4.23-rasm



4.24-rasm

Aniqlik uchun x argumentning musbat ishorali katta qiymatlarini qaraymiz. $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi degani ta‘rifga ko‘ra egri chiziqning $M(x, f(x))$ nuqtasidan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan δ masofa x o‘zgaruvchi musbat cheksizlikka intilganda: $x \rightarrow +\infty$, nolga intiladi.

α ($\alpha \neq \pi/2$) orqali asimptotaning Ox o‘q bilan tashkil qilgan burchagini belgilaymiz. 4.24-rasmda $\delta = |MN| \cos \alpha$ ekanligi ko‘rinib turibdiki. $\cos \alpha = \text{const} \neq 0$ bo‘lganligi uchun $x \rightarrow +\infty$ da δ miqdorning nolga intilishi $|MN|$ miqdorning ham nolga intilishini ta’minlaydi va aksincha. $|MN| = |f(x) - kx - b|$ ekanligini inobatga olsak, $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning $x \rightarrow +\infty$ da asimptotasi bo‘lishligi uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli degan xulosaga kelamiz. So‘ngi tenglikni cheksiz kichik miqdorlar orqali ifodalasak

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (4.8)$$

bu yerda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$.

$y = f(x)$ egri chiziqning $x \rightarrow +\infty$ da $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq asimptotasi bo‘ladi degan tasdiqning ma’nosi shundan iboratki, $x \rightarrow +\infty$ da $y = f(x)$ funksiya o‘zini “qaryib chiziqli funksiya singari” tutadi, ya’ni $y = kx + b$ chiziqli funksiya $x \rightarrow +\infty$ da cheksiz kichik miqdorga farq qiladi.

4.14-Teorema. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $x \rightarrow +\infty$ da $y = kx + b$ og‘ma asimptotaga ega bo‘lishligi uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b \quad (4.9)$$

ikkala limitning ham mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

4.15-Misol. $y = x^2/(x - 1)$ funksiyaning asimptotalarini toping.

► Funksiyaning ifodasidan uning grafigi $x = 1$ vertikal asimptotaga ega degan xulosaga kelamiz. Funksiyaning ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

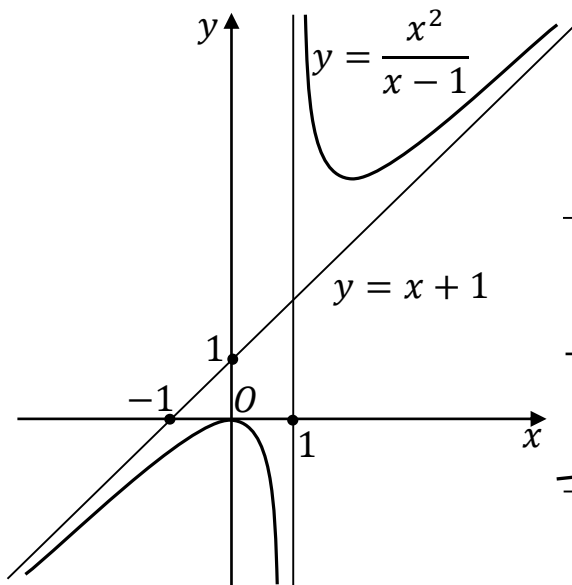
$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

So‘ngi $1/(x - 1)$ qo‘shiluvchi $x \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Shunday qilib, $f(x) = x^2/(x - 1)$ funksiyaning

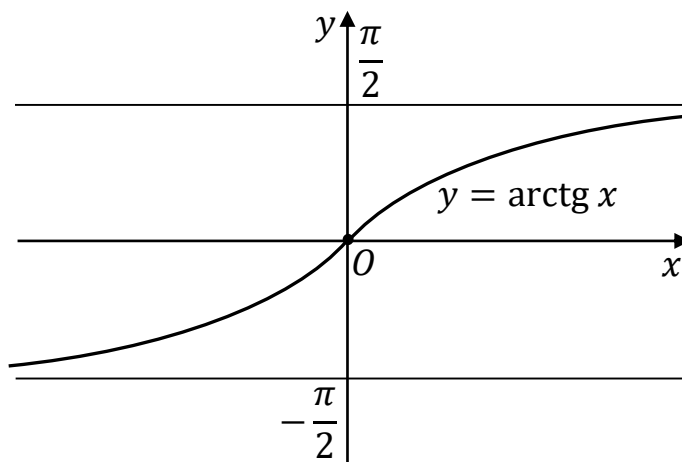
$$f(x) = x + 1 + \alpha(x),$$

ko‘rinishda yozish mumkin ekan, bu yerda $\alpha(x) = 1/(x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. 4.14-Teoremaga ko‘ra berilgan funksiya $y = x + 1$ og‘ma asimptotaga ega degan xulosaga kelamiz (4.25-rasm). ◀

$\Delta = f(x) - kx - b$ ayirmaning ishorasini tekshirish orqali muhim xulosalar chiqarish mumkin. Agar $\Delta > 0$ bo‘lsa, egri chiziq asimptotadan yuqorida; $\Delta < 0$ bo‘lsa, asimptotadan pastda joylashgan bo‘ladi.



4.25-rasm



4.26-rasm

Gorizontalar asimptotalar ($k = 0$ bo‘lgan xususiy hol). Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (\text{yoki} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

chekli limit mavjud bo‘lsa, $y = b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigi mos ravishda o‘ng yoki chap bo‘lagining *gorizontal asimptotasi* bo‘ladi.

4.16-Misol. $y = \arctg x$ funksiyaning gorizontalar asimptotalarini topamiz.

► Funksiyaning cheksizliklardagi limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

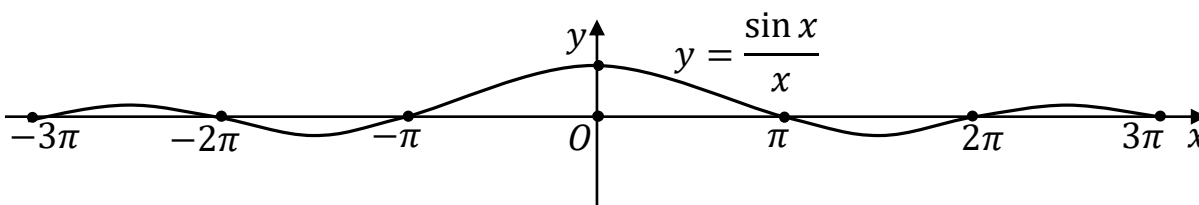
Shunday qilib, $y = \arctg x$ funksiyaning o‘ng bo‘lagi $y = \pi/2$, chap bo‘lagi esa $y = -\pi/2$ gorizontalar asimptotalarga ega bo‘lar ekan (4.26-rasm). ◀

4.17-Misol. $y = \frac{\sin x}{x}$, $y(0) = 1$ funksiyaning gorizontaal asimptotasini topamiz.

► Funksiyaning cheksizlikdagi limiti nolga teng:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Shuning uchun $y = 0$ to'g'ri chiziq $y = \frac{\sin x}{x}$, $y(0) = 1$ funksiyaning gorizontaal asimptotasi bo'ladi (4.27-rasm). ◀



4.27-rasm

4.17-Misoldan ko'rinib turibdiki $y = f(x)$ egri chiziq o'zining asimptotasini cheksiz ko'p marta ham kesib o'tishi mumkin ekan.

4.5. Funksiyaning tekshirishning umumiy sxemasi va funksiya grafigini yasash

Funksiyaning holati haqida eng yaxshi ko'rsatmali tasavvurni uning grafigi beradi. Funksiyaning grafigini yasashdan oldin uni limitlar nazariyasining va differensial hisobning metodlari bilan quyidagi bosqichlarda tekshiriladi:

- 1) funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, uning juftlik yoki toqlik xossasi va davriyligi aniqlanadi;
- 2) funksiyaning uzilish nuqtalari topiladi va ularning turlari aniqlanadi, funksiya grafigining vertikal asimptotalari va uzluksizlik oraliqlari aniqlanadi;
- 3) funksiya grafigining koordinata o'qlarini kesib o'tish nuqtalari topiladi, ya'ni $f(0)$ qiymat va $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlari topiladi;
- 4) funksiyaning kritik nuqtalari topiladi va ular orasidan ekstremum nuqtalar aniqlanadi, ekstremum nuqtalarda funksiyaning qiymatlari hisoblanadi, funksiyaning monotonlik oraliqlari aniqlanadi;

5) funksiyaning bukilish nuqtalari topiladi va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari hisoblanadi, qavariqlik va botiqlik oraliqlari aniqlanadi;

6) $x \rightarrow \pm\infty$ da funksiyaning o'zgarishi tekshiriladi, ya'ni funksiya grafigining og'ma va gorizontal asimptotalari topiladi.

Funksiyani tekshirishning sanab o'tilgan bosqichlarining natijalari funksiya grafigining xomaki chizmasini yasash inkonini beradi. Grafikning xomaki chizmasini yasashni osonlashtirish uchun bu natijalardan jadval tuzish maqsadga muvofiq bo'ladi.

4.18-Misol. $y = 1/(1 + x^2)$ funksiya grafigini yasang.

► 1) Funksiyaning aniqlanish sohasi $\mathbf{R}$ son o'qidan iborat: $D(y) = (-\infty, +\infty)$; funksiya juft: $f(-x) = f(x)$, shu sababli uning grafigi Oy o'qqa nisbatan simmetrik; davriy emas; funksiyaning juftligidan, uning grafigini $x \geq 0$ yarim o'qda yasash yetarli, so'ngra Oy o'qqa nisbatan simmetrik tasvirlanadi;

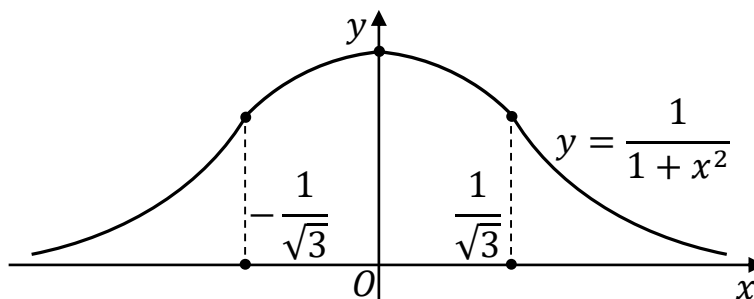
2) funksiyaning uzilish nuqtalari va vertikal asimptotalari yo'q; $\mathbf{R}$ son o'qida uzluksiz;

3) $x = 0$ bo'lganda $y = 1$; ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ uchun $y \neq 0, y > 0$, ya'ni funksiya grafigi $y > 0$ yuqori yarim tekislikda yotadi;

4) $y' = -2x/(1 + x^2)$. Hosilani nolga tenglashtirib $x = 0$ kritik nuqtani topamiz. $x < 0$ bo'lganda funksiya o'sadi va $x > 0$ bo'lganda funksiya kamayadi; x o'zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o'tganda $y'(x)$ hosila o'z ishorasini minusdan plyusga o'zgartiradi. Demak $x = 0$ maksimum nuqta ekan: $f_{\max} = f(0) = 1$.

5) Ikkinchi tartibli hosila $y'' = -2(1 - 3x^2)/(1 + x^2)^2$ va u $x = \pm 1/\sqrt{3}$ nuqtalarda nolga aylanadi. Simmetriyani inobatga olib $x = 1/\sqrt{3}$ nuqtada tekshiramiz. $x < 1/\sqrt{3}$ bo'lsa $y'' < 0$ shu sababli funksiya grafigi qavariq; $x > 1/\sqrt{3}$ bo'lsa $y'' > 0$ shu sababli funksiya grafigi botiq. Demak $x = 1/\sqrt{3}$ nuqta funksiya grafigining bukilish nuqtasi bo'lar ekan.

6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$. Demak $y = 0$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining gorizontali asimptotasi bo'lar ekan. Uning og'ma asimptotasi yo'q.



4.28-rasm

Olingan natijalardan quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-2	-	0	+
$f(x)$	↗	bukilish nuqtasi	↗	max	↘	bukilish nuqtasi	↘

Jadvalda “↗” strelka funksiyaning o'sishishini, “↘” strelka esa funksiyaning kamayishini anglatadi. Funksiyaning grafigi 4.28-rasmda tasvirlangan. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday shart bajarilganda funksiya oraliqda o'suvchi bo'ladi?
2. Qanday shart bajarilganda funksiya oraliqda kamayuvchi bo'ladi?
3. Lokal maksimum va lokal minimum nuqtalar deb qanday nuqtalarga aytiladi?
4. Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti nimadan iborat?
5. Qanday nuqtalar funksiyaning krtik nuqtalari deb ataladi?
4. Funksiya ekstremumi mavjudligining yetarli sharti nimadan iborat?
7. Qachon funksiya oraliqda qavariq deyiladi?
8. Qachon funksiya oraliqda botiq deyiladi?
9. Qavariqlik va botiqlikning yetarli sharti nimadan iborat?
10. Qanday nuqtalarga bukilish nuqtasi deyiladi?
11. Egri chiziqning asimptotasi nima?

12. Asimptotaning qanday turlari mavjud?

Mashqlar.

Funksiyani tekshiring va grafigini yasang:

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. 2. $y = xe^{-x}$. 3. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$.
4. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$. 4. $y = x - x^3$. 5. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$.
6. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$. 7. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. 8. $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$.
9. $y = 2 \ln \frac{x - 1}{x} + 1$.

Funksiyaning berilgan E kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping:

10. $y = 4 - x - 4/x^2, E = [1, 4]$. 11. $y = x^4 - 2x^2 + 5, E = [-2, 2]$.
12. $y = x + 2\sqrt{x}, E = [0, 4]$. 13. $y = \sqrt{100 - x^2}, E = [-6, 8]$.

Javoblar.

10. $M = 1, m = -1$. 11. $M = 13, m = 4$. 12. $M = 8, m = 0$. 13. $M = 10, m = 4$.

V BOB. ANIQMAS INTEGRAL

5.1. Boshlang'ch funksiya tushunchasi

Oldingi boblarda $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini topish masalasini qaradik. Ko'pincha, matematikada, fizikada va boshqa fanlarda teskari masala – agar funksiyaning $f'(x)$ hosilasi berilgan bo'lsa, ana shu $y = f(x)$ funksiyaning topish zaruriyati paydo bo'ladi.

5.1-Ta'rif. Agar chekli yoki cheksiz $(a; b)$ oraliqning barcha nuqtalarida $F(x)$ funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun bu nuqtalarda $F'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $F(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb ataladi.

5.1-Misol. $F(x) = x^3$ funksiya $f(x) = 3x^2$ funksiyaning boshlang'ichi bo'ladi, chunki ixtiyoriy x nuqtada $(x^3)' = 3x^2$ tenglik o'rinli. ◀

5.2-Misol. Ixtiyoriy $x \in [-1; 1]$ nuqtalarda $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tenglik o'rinli bo'lganligi uchun, $F(x) = \arcsin x$ funksiya $[-1; 1]$ kesmada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning boshlang'ichi bo'ladi.

5.1-Teorema. Agar biror $(a; b)$ oraliqda $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichlari bo'lsa, ularning ayirmasi birorta o'zgarmas songa teng bo'ladi:

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad C = \text{const}, x \in (a; b).$$

► Ixtiyoriy $x \in (a; b)$ uchun $F_1'(x) = f(x)$ va $F_2'(x) = f(x)$ bo'lsin. U holda $(F_1'(x) - F_2'(x))' = f(x) - f(x) = 0 = C'$ bo'lganligidan ixtiyoriy $x \in (a; b)$ uchun $F_1(x) - F_2(x) = C$ bo'ladi. ◀

5.2-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi mavjud.

5.2. Aniqmas integral va uning xossalari

5.2-Ta'rif. Agar $F(x)$ – funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi bo'lsa, $F(x) + C$ ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va u

$\int f(x)dx$ orqali belgilanadi: $\int f(x)dx = F(x) + C$, bu yerda C ixtiyoriy o'garmas son.

$\int f(x)dx$ belgilanishda $\int$ –aniqmas integral belgisi, $f(x)dx$ –integral osti ifoda, $f(x)$ –integral osti funksiya, x esa integrallash o'zgaruvchisi deb ataladi.

Funksiyaning aniqmas integralini topish amali bu *funksiyani integrallash* deb ataladi.

Aniqmas integralning xossalari. Aniqmas integralning ta'rifidan kelib chiqadigan bir qator xossalarni keltiramiz.

1. Aniqmas integralning differensial integral osti ifodaga, hosil sai esa integral osti funksiya teng:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx, (\int f(x)dx)' = f(x).$$

► Haqiqatdan ham

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx,$$

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x). \blacktriangleleft$$

Bu xossa tufayli integrallashning to'g'riligi differensiallash bilan tekshiriladi. Masalan,

$$\int (3x^2 + 4x + 5)dx = x^3 + 2x^2 + 5x + C$$

tenglik to'g'ri, chunki $(x^3 + 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 + 4x + 5$ tenglik o'rinli.

2. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali, shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

► Haqiqatdan ham,

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \blacktriangleleft$$

3. O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int Af(x)dx = A \cdot \int f(x)dx, \quad A \neq 0 \text{ — o'zgarmas.}$$

► Haqiqatdan ham,

$$(\int Af(x)dx)' = Af(x) = A(\int f(x)dx)'. \blacktriangleleft$$

Demak, $\int Af(x)dx = A \cdot \int f(x)dx. \blacktriangleleft$

4. Chekli sondagi uzluksiz funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

► Haqiqatdan ham, 2-xossadan foydalanib

$$(\int (f(x) \pm g(x))dx)' = f(x) \pm g(x) = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)'$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.



5. Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ va $u = \varphi(x)$ — uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, $\int f(u)dx = F(u) + C$ bo'ladi.

Shunday qilib, aniqmas integralning formulasi integrallash o'zgaruvchisi erkinmi yoki uning uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasimi, bunga farqsiz ravishda o'rinli bo'lar ekan.

Masalan, $\int 3x^2dx = x^3 + C$ formuladan, x o'zgaruvchini u ($u = \varphi(x)$) o'zgaruvchiga almashtirib $\int 3u^2du = u^3 + C$ tenglikni hosil qilamiz. Xususiyl holda

$$\int 3 \sin^2 x d(\sin x) = \sin^3 x + C,$$

$$\int 3 \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^3 x + C,$$

$$\int 3 \ln^2 x d(\ln x) = \ln^3 x + C$$

tengliklarni hosil qilamiz.

5.3-Misol. $\int (6x^2 + 4x - 7)dx$ integralni toping.

$$\blacktriangleright \int (6x^2 + 4x - 7)dx = 6 \int x^2dx + 4 \int xdx - 7 \int dx =$$

$$= 6 \frac{x^3}{3} + C_1 + 4 \frac{x^2}{2} + C_2 - 7x + C_3 = 2x^3 + 2x^2 - 7x + C,$$

bu yerda $C = C_1 + C_2 + C_3$. ◀

Asosiy integrallar jadvali. Integrallash amali differensiallash amaliga teskari amal bo'lganligi uchun, asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalidan kelib chiqqan holda asosiy integrallar jadvalini tuzish mumkin. Buning uchun jadvalning chap tomonidagi hosilalarni ifodalovchi shtrixlarni olib tashlab, o'ng tomoniga esa integral belgisini yozish kerak. Biz ham xuddi shunday qilamiz va bunda bir nechta murakkab bo'lmagan formulalarni

qo'shamiz. Ularning to'g'riligini differensiallash bilan oson tekshirish mumkin.

Natijada quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad (\int dx = x + C);$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int a^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^{ax}}{\ln a} + C;$
4. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C;$
5. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax + C;$
6. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax + C;$
5. $\int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln|\cos ax| + C;$
8. $\int \operatorname{ctg} ax dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|\sin ax| + C;$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{tg} ax + C;$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{ctg} ax + C;$
11. $\int \frac{1}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right| + C;$
12. $\int \frac{1}{\cos ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$
15. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
16. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$
15. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$
18. $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$
19. $\int \operatorname{sh} ax dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{ch} ax + C;$

$$20. \int \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{sh} ax + C;$$

$$21. \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 ax} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{th} ax + C;$$

$$22. \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 ax} \, dx = -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{cth} ax + C.$$

Yuqorida keltirilgan formulalarning haqqoniyligini differensiallab tekshirib ko‘rish mumkinligini yana bir marotaba ta’kidlaymiz. Bu tengliklar o‘ng tomonining hosilasi integral osti funksiyaga teng bo‘ladi.

Elementar funksiyalarni differensiallash har doim elementar funksiyalarga olib kelishini ko‘rgan edik. Ammo bu xususiyat integrallash amalida mavjud emas, ya’ni shunday elementar funksiyalar mavjudki, ularning aniqmas integrallarini elementar funksiyalarning chekli sondagi arifmetik amallari va superpozitsiyalari orqali ifodalab bo‘lmaydi. Masalan, quyidagi integrallarni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo‘lmasligi isbotlangan:

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} \, dx; & \quad (\text{Puasson integrali}), \\ \int \sin x^2 \, dx, \int \cos x^2 \, dx; & \quad (\text{Frenel integrali}), \\ \int \frac{1}{\ln x} \, dx; & \quad (\text{integral logarifm}), 0 < x \neq 1, \\ \int \frac{\sin x}{x} \, dx; & \quad (\text{integral sinus}), x \neq 0, \\ \int \frac{\cos x}{x} \, dx. & \quad (\text{integral kosinus}), x \neq 0. \end{aligned}$$

5.3. Integrallashning asosiy usullari

Asosiy formulalardan foydalanib integrallash (jadvalli integrallash).

Eng oddiy holda berilgan integral yuqorida keltirilgan formulalarning xususiy holi sifatida tasvirlangan bo‘ladi va integralni topish mos formulani qo‘llashga keltiriladi.

5.4-Misol. $\int \sqrt[3]{x^2} \, dx$ integralni toping.

► $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ bo‘lganligi uchun integrallar jadvalining 1-formulasini $\alpha = 2/3$ hol uchun qo‘llaymiz:

$$\int \sqrt[3]{x^2} \, dx = \int x^{\frac{2}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C. \blacktriangleleft$$

5.5-Misol. $\int 3^x dx$ integralni toping.

► 3-formulani $a = 3, \alpha = 1$ hol uchun qo'llaymiz: $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C. \blacktriangleleft$

5.6-Misol. $\int \frac{dx}{16+x^2}$ integralni toping.

► 15-formulani $a = 4$ hol uchun qo'llaymiz: $\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C. \blacktriangleleft$

5.7-Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$ integralni toping.

► Bu yerda $\frac{1}{\sqrt[3]{5x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{-\frac{1}{3}}$ tenglikni va 1-formulani $\alpha = -1/3$ hol uchun va o'zgaras ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkinligi haqidagi xossani qo'llaymiz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2\sqrt[3]{5}} \sqrt[3]{x^2} + C. \blacktriangleleft$$

Integral osti funksiyani aynan almashtirib integrallash. Bu usul quyidagidan iborat: integral osti funksiyaning aynan almashtirishlaridan va integralning xossalaridan foydalanib, dastlabki integral jadval integraliga (yoki jadval integrallarning chiziqli kombinatsiyasiga) keltiriladi.

5.8-misol. $\int (10x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 4x + 5) dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int (10x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 4x + 5) dx &= \int 10x^4 dx - \int 12x^3 dx + \\ &+ \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 5 dx = 10 \int x^4 dx - 12 \int x^3 dx + \\ &+ 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 5 \int dx = \\ &= 10 \cdot \frac{x^5}{5} - 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = \\ &= 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.9-Misol. $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx &= \int \left(\frac{x^6}{x^2} - \frac{x^5}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int (x^4 - x^3 + x^{-2}) dx = \\ &= \int x^4 dx - \int x^3 dx + \int x^{-2} dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.10-Misol. $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2 dx$ integralni toping.

$$\blacktriangleright \int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2 dx = \int (x - 2\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx = \int \left(x - 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \int x dx - 2 \int x^{\frac{5}{6}} dx + \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{12}{11} \cdot x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C. \blacktriangleleft$$

5.11-Misol. $\int \frac{x^2+6}{x^2+4} dx$ integralni toping.

$$\blacktriangleright \int \frac{x^2+6}{x^2+4} dx = \int \frac{x^2+4+2}{x^2+4} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2+4}\right) dx = \\ = \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+4} = x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \blacktriangleleft$$

O‘zgaruvchilarni almashtirib integrallash (yoki o‘rniga qo‘yish usuli).

5.3-Teorema. $x = \varphi(t)$ funksiya biror $(\alpha; \beta)$ oraliqda aniqlangan va differensiallanuvchi va $(a; b)$ uning qiymatlar sohasi bo‘lib, $f(x)$ funksiya bu oraliqda aniqlangan bo‘lsin. U holda, agar $f(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda boshlang‘ichga ega bo‘lsa,

$$\int f(x) dx|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (5.1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$\int f(x) dx$ integralni topish uchun (5.1) tenglikning o‘ng tomonidagi integral topilgandan so‘ng, integrallashning yangi t o‘zgaruvchisidan dastlabki x o‘zgaruvchiga qaytish kerak.

5.12-Misol. $\int e^{\frac{x}{5}} dx$ integralni toping.

$\blacktriangleright x = 5t$ deb olamiz, u holda $dx = 5dt$ bo‘ladi. Demak,

$$\int e^{\frac{x}{5}} dx = 5 \int e^t dt = 5e^t + C = 5e^{\frac{x}{5}} + C. \blacktriangleleft$$

5.13-Misol. $\int x(x+2)^{100} dx$ integralni toping.

$\blacktriangleright x = t - 2$ deb olamiz, u holda $dx = dt$. Bularni berilgan integralga qo‘yamiz:

$$\int x(x+2)^{100} dx = \int (t-2)t^{100} dt = \int t^{101} dt - 2 \int t^{100} dt = \\ = \frac{t^{102}}{102} - 2 \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C. \blacktriangleleft$$

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ ko‘rinishdagi integralni topishda yangi integrallash o‘zgaruvchisini $t = \varphi(x)$ ko‘rinishda kiritgan maqsadga muvofiq bo‘ladi, u holda berilgan integral $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$ ko‘rinishni oladi.

5.14-Misol. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralni toping.

► Dastlab berilgan integralni $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ko‘rinishda yozib olamiz va $t = \sqrt{x}$ deb yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. U holda $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, $2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ bo‘ladi. Ularni berilgan integralga qo‘yamiz:

$$\int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int e^t 2dt = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C. \blacktriangleleft$$

5.15-Misol. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ integralni toping.

► Bu yerda ham berilgan integralni $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int \ln^3 x \frac{1}{x} dx$ ko‘rinishda yozib olamiz va $t = \ln x$ deb yangi o‘zgaruvchi kiritamiz, u holda $dt = \frac{1}{x} dx$ bo‘ladi. Ularni berilgan integralga qo‘yamiz:

$$\int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \ln^4 x + C. \blacktriangleleft$$

5.16-Misol. $\int e^{\sin x} \cos x dx$ integralni toping.

► $t = \sin x$ deb yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. U holda $dt = \cos x dx$ bo‘ladi va ularni berilgan integralga qo‘yamiz:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C. \blacktriangleleft$$

Bo‘laklab integrallash.

5.4-Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar biror $(a; b)$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, ixtiyoriy $x \in (a; b)$ nuqta uchun

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \quad (5.2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1. Agar integral osti funksiya darajasi $m \geq 0$ bo‘lgan $P_m(x)$ ko‘phad bilan $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, $e^{\alpha x}$ funksiyalardan birining ko‘paytmasidan iborat bo‘lsa, $u(x) = P_m(x)$ deb olish kerak.

5.17-Misol. $\int x e^x dx$ integralni toping.

► Bu yerda $u = x$ va $dv = e^x dx$ deb olamiz. U holda $du = dx$ va $v = e^x$ bo‘ladi. Ularni (5.2) formulaga qo‘yib integrallashni bajaramiz:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx.$$

O‘ng tomonda jadval integralni hosil qildik. Uni jadvaldan topib

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

yoki

$$\int x e^x dx = e^x(x - 1) + C$$

javobni hosil qilamiz. Masalani yechishni boshqacha

$\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$
ko‘rinishda ham yozish mumkin. Yozishning bunday usulini quyidagi misolda ham qo‘llaymiz:

2. Agar integral osti funksiya teskari trigonometrik funksiyalar ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg } x$) yoki $\ln x$ logarifmik funksiya bilan $P_m(x)$, $m \geq 0$ ko‘phad ko‘paytmasidan iborat bo‘lsa $dv(x) = P_m(x)dx$ deb olish kerak.

5.18-Misol. $\int x^2 \ln x dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \text{► } \int x^2 \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C. \text{ ◀} \end{aligned}$$

Ayrim integrallarni topishda bo‘laklab integrallashni bir necha marta qo‘llash qulay bo‘ladi.

5.19-Misol. $\int x^2 \cos x dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \text{► } \int x^2 \cos x dx &= \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = \\ &= x^2 \sin x + \int 2x d(\cos x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int \cos x 2dx = \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C. \text{ ◀} \end{aligned}$$

Keyingi misolda bo‘laklab integrallashni qo‘llashning yana bir usulini keltiramiz.

5.20-Misol. $\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx$ integralni toping.

$$\text{► } \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \sqrt{x^2 + \alpha} x - \int x d(\sqrt{x^2 + \alpha}) = x \sqrt{x^2 + \alpha} -$$

$$\begin{aligned}
 - \int x \frac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} &= x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \frac{x^2+\alpha-\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}} dx = \\
 &= x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha} dx + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\int \sqrt{x^2+\alpha} dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha} dx + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

Bundan esa

$$2 \int \sqrt{x^2+\alpha} dx = x\sqrt{x^2+\alpha} + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

yoki

$$\int \sqrt{x^2+\alpha} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2+\alpha} + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}).$$

Tenglikning o'ng tomonidagi integral jadval integrali. Uni bu tenglikga qo'yib

$$\int \sqrt{x^2+\alpha} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}|) + C$$

qidirilgan integralni topdik. ◀

Nazorat savollari

1. Qaysi shart bajarilganda $F(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi deyiladi?
2. Bitta funksiyaning ikkita boshlang'ichi bir-biridan nima bilan farq qiladi?
3. Qanday funksiylarning boshlang'ichi mavjud?
4. Aniqmas integralning ta'rifini bering.
5. Aniqmas integralning differensialni nimaga teng?
6. Aniqmas integralning hosilasi nimaga teng?
7. Funksiya differensialining aniqmas integrali nimaga teng?
8. Yig'indining aniqmas integrali nimaga teng?
9. Integrallashning qanday usullarini bilasiz?
10. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash qanday bajariladi?
11. Bo'laklab integrallash qanday bajariladi?

Mashqlar.

Asosiy integrallar jadvalidan foydalanib quyidagi integrallarni toping:

1. $\int \sqrt{ax} dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$. 3. $\int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}} dx$. 4. $\int (2x + 3 \cos x) dx$. 5. $\int 2^x e^x dx$.
6. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. 5. $\int \frac{2 - \sin x}{\sin^2 x} dx$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}}$.

Quyidagi integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan toping:

9. $\int \frac{x dx}{3 + 5x^2}$. 10. $\int \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1 + 9x^2} dx$. 11. $\int \frac{(2 + \ln x)^4}{x} dx$. 12. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2 + x^2}}$. 13. $\int \frac{x^3 dx}{5 + 4x^4}$.
14. $\int \frac{x^3 dx}{1 + 4x^8}$. 15. $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 34}$. 16. $\int \frac{dx}{9 + 5x^2}$.

Quyidagi integrallarni bo'laklab integrallash usuli bilan integrallang:

15. $\int \arccos x dx$. 18. $\int x \cos x dx$. 19. $\int x \ln x dx$. 20. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$. 21. $\int e^x \sin x dx$. 22. $\int \operatorname{arctg} x dx$. 23. $\int \ln x dx$. 24. $\int e^{3x} \cos 5x dx$.

Javoblar.

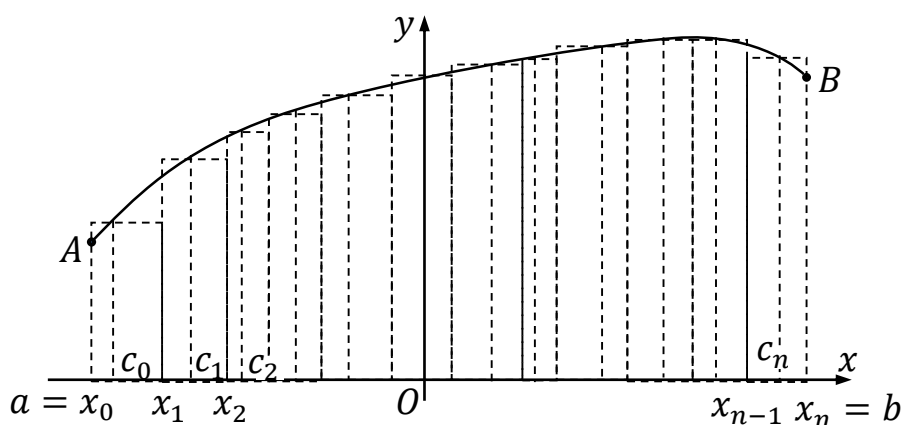
1. $\frac{2}{3} x \sqrt{ax} + C$. 2. $\frac{n}{n-1} x^{(n-1)/n} + C$. 3. $2\sqrt{ax} + 2x + \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} + C$. 4. $x^2 + 3 \sin x + C$. 5. $\frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$. 6. $-x + \operatorname{tg} x + C$. 5. $-2 \operatorname{ctg} x - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.
8. $\ln |x + \sqrt{x^2 - 7}| + C$. 9. $\frac{1}{10} \ln |3 + 5x^2| + C$. 10. $\frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{6} + C$. 11. $\frac{1}{5} (2 + \ln x)^5 + C$. 12. $\sqrt{2 + x^2} + C$. 13. $\frac{1}{16} \ln |5 + 4x^4| + C$. 14. $\frac{1}{8} \operatorname{arctg}(2x^4) + C$.
15. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{3} + C$. 16. $\frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5} \cdot x}{3} \right) + C$. 15. $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$.
18. $x \sin x + \cos x + C$. 19. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. 20. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \ln x - \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^2} + C$.
21. $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$. 22. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C$. 23. $x (\ln x - 1) + C$. 24. $\frac{1}{34} e^{3x} (3 \cos 5x + 5 \sin 5x) + C$.

VI BOB. ANIQ INTEGRAL

6.1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqida masala

Yuqoridan uzluksiz va nomanfiy $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bilan yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan, quyidan esa Ox o'q bilan chegaralangan yassi figurani *egri chiziqli trapetsiya* deb ataymiz.

6.1-rasmda tasvirlangan egri chiziqli trapetsiyaning S_{aABb} yuzini topish masalasini qaraymiz.



6.1-rasm

Qo'yilgan masalani yechish uchun, $[a; b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmalarga ajratamiz va ular uzunliklarini $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ orqali, bu uzunliklarning eng kattasini esa $d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ orqali belgilaymiz. Har bir $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmada c_i nuqta tanlaymiz. U holda $f(c_i) \cdot \Delta x_i$ ko'paytma tomonlari $f(c_i)$ va Δx_i bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzini beradi: $s_i = f(c_i) \cdot \Delta x_i$. Ularning

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

yig'indisi esa zinasimon shakldagi figuraning yuzini beradi. Ana shu zinasimon figuraning yuzi qaralayotgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga taqriban teng bo'ladi. Qisman kesmalar uzunliklari qanchalik kichik bo'lsa, bu taqribiy tenglik shunchalik aniq bo'ladi. Shunday qilib egri chiziqli trapetsiyaning yuzi sifatida

$$S_{aABb} = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \quad (6.1)$$

limitni olish mumkin.

6.2. Aniq integral

Integral yig'indi va uning limiti. $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasida qaralgan funksiya bilan farqli ravishda bu yerda $f(x)$ funksiya manfiy qiymatlarni ham qabul qilishi mumkin.

Bu yerda ham $[a; b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmalarga ajratamiz va ularning uzunliklarini $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ orqali, bu uzunliklarning eng kattasini esa $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ orqali belgilaymiz. Har bir $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmada c_i nuqta nuqta tanlaymiz va

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \quad (6.2)$$

yig'indini tuzamiz. Bu yig'indini $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha *integral yig'indisi* deb ataymiz.

6.1-Ta'rif. Agar $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmalar uzunliklarining eng kattasi d nolga intilganda S_n integral yig'indi chekli limitga intilsa va bu limit $[a; b]$ kesmani $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmalarga bo'linish usuliga, bu qisman kesmalarda c_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, uni biz $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesma bo'yicha *aniq integrali*, funksiyaning o'zini $[a, b]$ kesmada *integrallanuvchi* deb ataymiz. Bu aniq integralni $\int_a^b f(x) dx$ orqali belgilaymiz.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i. \quad (6.3)$$

6.1-Misol. $\int_a^b dx$ integralni hisoblang.

► Integral osti funksiya $f(x) \equiv 1$ bo'lganligi uchun, ixtiyoriy $c \in [a; b]$ nuqtada $f(c) = 1$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_a^b dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} (b - a) = b - a. \blacktriangleleft$$

$f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha aniq integrali sondan iborat bo'lib, u integrallash o'zgaruvchisining belgilanishiga bog'liq emas. Aniq integralning qiymatini $f(x)$ integral osti funksiya va integrallash oralig'i aniqlaydi. Integrallash oralig'ining chetlarini *integrallash chegaralari* (chap chetni *integrallashning quyi chegarasi*, o'ng chetni esa *integrallashning yuqori chegarasi*) deb ataymiz.

$f(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'lishining zaruriy sharti quyidagi teoremda keltirilgan.

6.1-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u bu kesmada chegaralangan bo'ladi.

Funksiyaning kesmada chegaralanganligi uning bu kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun faqat zaruriy shart, ammo yetarli shart emasligini ta'kidlab o'tamiz. Funksiya integrallanuvchi bo'lishining yetarli shartlari quyidagi uchta teoremda keltirilgan.

6.2-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u bu kesmada integrallanuvchi ham bo'ladi.

6.3-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va monoton bo'lsa, u bu kesmada integrallanuvchi ham bo'ladi.

6.4-Teorema. $[a; b]$ kesmada chegaralangan va bu kesmaning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya bu kesmada integrallanuvchi hamdir.

Endi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash masalasiga qaytadigan bo'lsak, (6.1) va (6.3) tengliklarni taqqoslab, qidirilayoytgan yuza

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x) dx \quad (6.4)$$

aniq integral bilan hisoblanishiga amin bo‘lamiz. Bu tenglik aniq integralning *geometrik ma’nosini* ham ifodalaydi.

6.3. Aniq integralning asosiy xossalari

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda

- 1) $f(x) + g(x)$ funksiya ham $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi va

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

- 2) $C \cdot f(x)$ funksiya ham integrallanuvchi bo‘ladi va

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

bu yerda C —o‘zgarmas son.

- 3) $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi;

- 4) $f(x)$ funksiya $[c; d]$ kesmada ham integrallanuvchi bo‘ladi, bu yerda $[c; d] \subset [a; b]$;

- 5) Agar $c \in [a; b]$ bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi;

- 6) Agar integrallash chegaralari ustma-ust tushsa, ya’ni $a = b$ bo‘lsa,

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

- 7) Integrallash chegaralarining o‘rni almashtirilsa, integral o‘z ishorasini o‘zgartiradi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

- 8) Agar ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtada $f(x) \geq 0$ bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo‘ladi va agar ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtada $f(x) \leq g(x)$ bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

9) $|f(x)|$ funksiya $[a; b]$ ($a < b$) kesmada integrallanuvchi bo'лади va

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

10) Agar m va M sonlar mos ravishda $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tengsizlik o'rinli bo'лади.

► $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. U

holda $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ va $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot \Delta x_i$ limitlar mavjud bo'лади.

1) Limitning xossalriga ko'ra

$$\begin{aligned} & \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot \Delta x_i = \\ & = \lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot \Delta x_i \right) = \\ & = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) + g(c_i)) \cdot \Delta x_i. \end{aligned}$$

Demak $f(x) + g(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi.

$$\begin{aligned} \text{Shunday qilib, } \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) + g(c_i)) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

1-xossa isbotlandi.

2) 2-xossa ham xuddi shu singari isbotlanadi.

3) Funksiyalarning ko'paytmasini

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4} ((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

1-xossaning isbotidagi singari limitlarning xossalaridan va 1-xossaning o'zidan foydalanib $H(x) = (f(x) + g(x))^2$ va $E(x) = (f(x) - g(x))^2$ funksiyalarning $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

1 va 2-xossalarga ko'ra $(H(x) - E(x))/4$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi. Demak, $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi bo'ladi. 3-xossa isbotlandi.

4) $[a; b]$ kesmaning bo'linishlari $[c; d]$ kesmaning ham bo'linishlarini o'zida saqlaydi, shu saababli $[a; b]$ kesma uchun tuzilgan integral yig'indilar limitining mavjudligidan, $[c; d]$ kesma uchun tuzilgan integral yig'indilar limitining mavjudligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $[c; d]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi. 4-xossa isbotlandi.

5) Xossaning birinchi qismini osongina isbotlash mumkin:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(c_i) \cdot \Delta x_i + \\ &+ \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \end{aligned}$$

bu yerda bo'linishlar quyidagicha olingan:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c < x_{m+1} < \dots < x_n = b.$$

5-xossa isbotlandi.

6) $[a; a]$ kesmaning bo'linishlari 0 ga teng va demak

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ bo'ladi. 6-xossa isbotlandi.}$$

7) Agar $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar $[a; b]$ kesmaning bo'linishi bo'lsa, $[b; a]$ kesmaning bo'linishi $b = x_n > x_{n-1} > \dots > x_0 = a$ nuqtalar bo'ladi. U holda $[a; b]$ kesma qisman kesmalarining uzunliklari uchun $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tenglik o'rinli bo'lsa, $[b; a]$ kesmaning qisman kesmalarining uzunliklari $\Delta x_i = -(x_i - x_{i-1}) = \Delta x'_i$ tenglik bilan topiladi.

Demak $\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = - \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x'_i$, bundan esa $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ tenglikni hosil qilamiz. 7-xossa isbotlandi.

8) $a < b$ bo'lsin. U holda $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i$. Bu tengsizlikda limitga o'tsak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \leq \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

qidirilgan tengsizlikni hosil qilamiz. 8-xossa isbotlandi.

9) Birinchidan, f funksiyaning chegaralanganligidan $|f|$ funksiyaning ham chegaralanganligi kelib chiqadi, ikkinchidan ixtiyoriy $c \in [a; b]$ va $d \in [a; b]$ nuqtalar uchun $||f(c)| - |f(d)|| \leq |f(c) - f(d)|$ tengsizli o'rinli bo'ladi, bundan esa $[a; b]$ kesmaning har qanday $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ bo'linishi uchun

$$\begin{aligned} |M_i| - |m_i| &= \sup_{c, c' \in [x_{i-1}; x_i]} ||f(c')| - |f(c)|| \leq \\ &\leq \sup_{c, c' \in [x_{i-1}; x_i]} |f(c') - f(c)| \leq M_i - m_i \end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa, agar $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i = 0$ bo'lsa,

u holda $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (|M_i| - |m_i|)\Delta x_i = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun $f(x)$ funksiyaning integrallanuvchanligidan $|f(x)|$ funksiyaning ham integrallanuvchanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $x \in [a; b]$ uchun $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ekanligidan, 8-xossaga ko'ra $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, ya'ni, (modulning xossasiga ko'ra) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. 9-xossa isbotlandi.

10) Shartga ko'ra ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtalarda $m \leq f(x) \leq M$, u holda 8-xossaga ko'ra

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

chap va o'ng tomondagi integrallarga 2-xossani qo'llab, 6.3-Misoldan foydalansak

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a), \int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M(b-a).$$

U holda $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. 10-xossa isbotlandi. ◀

6.5-Teorema (O'rta qiymat haqida teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad (6.5)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $c \in [a; b]$ nuqta mavjud.

► $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi m va M sonlar mavjud bo'ladi. U holda aniq integralning 10-xossasiga ko'ra

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

va bu yerdan

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

Agar $\int_a^b f(x) dx / (b-a) = \mu$ deb olsak $m \leq \mu \leq M$ bo'ladi, u holda Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasiga ko'ra, $[a; b]$ kesmada $f(c) = \mu$

tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta mavjud bo'ladi. Shuning uchun $\int_a^b f(x)dx/(b-a) = f(c)$ yoki $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ bo'ladi. ◀

6.4. Aniq integralni hisoblash

Nyuton-Leybnis formulasi. Aniq integralni integral yig'indilarning limiti sifatida hisoblash mumkin. Ammo bu usul katta hajmdagi hisoblash ishlarini olib borishni talab qiladi. Agar uzluksiz integral osti funksiyaning boshlang'ichi ma'lum bo'lsa, aniq integralni ana shu boshlang'ich yordamida hisoblash mumkinligi quyidagi teorema tasdig'ida keltirilgan.

6.6-Teorema (integral hisobning asosiy teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Agar $F(x)$ funksiya uning bu kesmadagi ixtiyoriy boshlang'ichi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (6.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu formula *Nyuton-Leybnis formulasi* deb ataladi.

► Teoremani isbotlash uchun dastlab yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral tushunchasini kiritamiz. Aniq integralning b yuqori chegarasini x o'zgaruvchi bilan almashtirsak

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (6.7)$$

funksiya hosil bo'ladi. Dastlab bu funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi ekanligini, ya'ni $\Phi'(x) = f(x)$ tenglikni isbotlaymiz. x argumentga Δx orttirma beramiz va $\Phi(x)$ funksiyaning orttirmasini topamiz:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Aniq integralning 5-xossasiga ko'ra

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Uni $\Delta\Phi(x)$ orttirmaga qo'llab

$$\Delta\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

tenglikni hosil qilamiz. O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra $[x, x + \Delta x]$ kesmada

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c) \cdot \Delta x$$

tenlikni qanoatlantiruvchi $c \in [x, x + \Delta x]$ nuqta mavjud bo'ladi va bu nuqta uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Shuning uchun

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x),$$

ya'ni $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi.

$F(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ichi bolsin. U holda ikkita $\Phi(x)$ va $F(x)$ boshlang'ichlar bir-biridan o'garmas bilan farq qiladi:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \quad (6.8)$$

C o'zgarmasni topish uchun $x = a$ nuqtada

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0, F(a) + C = 0$$

bo'lishidan foydalanamiz va bundan $C = -F(a)$ tenglikga ega bo'lamiz. Demak (6.8) tenglik

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda x o'rniga b qiymatni qo'ysak

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

tenglik hosil bo'ladi va bu yerda t o'zgaruvchini x bilan almashtirsak (6.6) Nyuton-Leybnis formulasi hosil bo'ladi. ◀

(6.6) tenglikning o'ng tomonidagi ayirma simvolik ravishda $F(x)|_a^b$ ko'rinishda yoziladi va natijada Nyuton-Leybnis formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

ko‘rinishni oladi.

6.2-Misol. $\int_1^3 4x^3 dx$ integralni hisoblang.

► Integral ostidagi funksiya $f(x) = 4x^3$ va uning boshlang‘ichi $F(x) = x^4$ bo‘ladi. Shuning uchun Nyuton-Leybnis formulasiga ko‘ra

$$\int_1^3 4x^3 dx = x^4|_1^3 = 3^4 - 1^4 = 81 - 1 = 80. \blacktriangleleft$$

Aniq integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish. (6.6) Nyuton-Leybnis formulasi aniq integral belgisi ostida o‘zgaruvchilarni almashtirish imkonini beradi.

6.7-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $\varphi(t)$ funksiya esa $[\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi, bunda $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ va $t \in [\alpha; \beta]$ bo‘lganda $\varphi(t) \in [a; b]$ bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (6.9)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu formula aniq integralda *o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi* deb ataladi.

6.3-Misol. $\int_1^e \frac{dx}{(1 + \ln^2 x)}$ integralni hisoblang.

► $\ln x = t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda $x = e^t, dx = e^t dt$. Integrallash chegaralarini hisoblaymiz: $\ln x = t$ tenglikda $x = 1$ bo‘lsa, $t = \ln 1 = 0$ va $x = e$ bo‘lsa $t = \ln e = 1$ bo‘ladi. Demak x o‘zgaruvchi $[1; e]$ kesmada o‘zgarsa, yangi t o‘zgaruvchi $[0; 1]$ kesmada o‘zgarar ekan. Shunday qilib

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \Rightarrow x = e^t, dx = e^t dt, \\ \text{agar } x = 1 \text{ bo'lsa, } t = 0, \\ \text{agar } x = e \text{ bo'lsa, } t = 1. \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{e^t dt}{e^t(1 + t^2)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Aniq integralda bo‘laklab integrallash.

6.8-Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (6.10)$$

Bu formula aniq integralda *bo‘laklab integrallash formulasi* deb ataladi.

6.4-Misol. $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$ integralni hisoblang.

► $u = x, dv = \cos x \, dx$ deb bo‘laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dx = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = (x \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \\ &= (x \sin x) \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_0^{\pi} = \pi \sin \pi - 0 + \cos \pi - \cos 0 = -2. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

6.5. Xosmas integrallar

Biz $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesma bo‘yicha aniq integrali tushunchasini kiritganimizda bu kesmani chekli deb faraz qilgan edik. Biroq nazariy muammolarni qarashda va amaliy masalalarni yechishda cheksiz oraliqlardan foydalanish zarurati paydo keladi. Bunday hollarda yuzaga keladigan integrallar *xosmas integrallar* deb ataladi. Ular xosmas integrallarning bir turi ekanligi va boshqa turdagi xosmas integrallar ham mavjudligini ta’kidlab o‘tamiz. Biz cheksiz oraliqlar bo‘yicha olinadigan xosmas integrallarni qarash bilan chegaralanamiz.

Cheksiz oraliq bo‘yicha integrallar. $f(x)$ funksiya $[a; +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy $[a; b]$ chekli kesmada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda $[a; +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integral sifatida

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx \quad (6.11)$$

funksiya aniqlangan.

6.2-Tarif. (6.11) tenglik bilan aniqlanuvchi $F(b)$ funksiyaning $b \rightarrow +\infty$ dagi limitini $f(x)$ funksiyaning $[a; +\infty)$ cheksiz oraliq bo'yicha olingan xosmas integrali deb ataladi va $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar aytib o'tilgan limit mavjud va chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda, ya'ni limit cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Shunday qilib, 6.5-Ta'rifga va (6.11) formulaga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (6.12)$$

6.5-Misol. $\int_a^{+\infty} e^{-x}dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{-x}dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-x}|_a^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^b} + 1\right) = 1.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va 1 ga teng. ◀

6.6-Misol. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln x|_a^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Demak, berilgan integral uzoqlashuvchi ekan. ◀

6.7-Misol. $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin x|_a^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b).$$

Biroq so'ngi limit mavjud emasligi ma'lum, shuning uchun ta'rifga ko'ra berilgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi. ◀

6.8-Misol. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ integral α parametrning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lishini aniqlang.

► $\alpha = 1$ bo'lganda $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ integralning uzoqlashuvchi bo'lishini 6.6-misolda ko'rdik.

$\alpha \neq 1$ bo'lganda ta'rifga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{agar } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{agar } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\alpha \leq 1$ bo'lsa, berilgan integral uzoqlashuvchi va $\alpha > 1$ bo'lsa yaqinlashuvchi bo'lar ekan. ◀

$f(x)$ funksiya $(-\infty; b]$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. U holda $(-\infty; b]$ cheksiz yarim oraliqda quyi chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral sifatida

$$\Psi(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (6.13)$$

funksiya aniqlangan.

6.3-Tarif. (6.13) tenglik bilan aniqlanuvchi $\Psi(a)$ funksiyaning $a \rightarrow -\infty$ dagi limitini $f(x)$ funksiyaning $(-\infty; b]$ cheksiz oraliq bo'yicha olingan *xosmas integrali* deb ataladi va $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ ko'rinishda belgilanadi. Agar aytib o'tilgan limit mavjud va chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda, ya'ni limit cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

6.9-Misol. $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta'rifga ko'ra

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^x|_a^0) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = 1.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va 1 ga teng. ◀

Nihoyat, agar $f(x)$ funksiya burun $\mathbf{R}$ son o'qida aniqlangan va ixtiyoriy $[a; b]$ chekli kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $c \in \mathbf{R}$ uchun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad (6.14)$$

tenglik bilan $f(x)$ funksiya cheksiz $(-\infty; +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integral aniqlanadi. Agar (6.14) tenglikning o'ng tomonidagi ikkala xosmas integral ham bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda yaqinlashuvchi bo'lsa, bunday xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda, ya'ni bu ikki xosmas integrallardan biri yoki ikkalasi ham uzoqlashuvchi bo'lsa, bu xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

6.10-Misol. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta'rifga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{2^2+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{2^2+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_a^0 \right) + \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^b \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va $\pi/2$ ga teng. ◀

6.6. Aniq integralning geometrik tadbiqlari

Integral hisob matematik tahlilning amaliyotda eng ko‘p qo‘llaniladigan bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Biz quyida uning geometrik tadbiqlarining ayrimlarini ko‘rib chiqamiz.

Yassi figuraning yuzi. 1) Biz egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash masalasini qarab chiqqanimizda yuqoridan $[a; b]$ kesmada manfiy bo‘lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan, yon tomonlardan $x = a, x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan va quyidan Ox bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (6.15)$$

formula bilan hisoblanishini keltirib chiqargan edik.

2) Endi $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada manfiy qiymatlarni qabul qilsin. U holda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi Ox o‘qdan pastda joylashgan bo‘ladi va

$$\int_a^b f(x)dx < 0$$

bo‘ladi. Shuning uchun bu funksiyaning grafigi hosil qilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S = - \int_a^b f(x)dx \text{ yoki } S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| \quad (6.16)$$

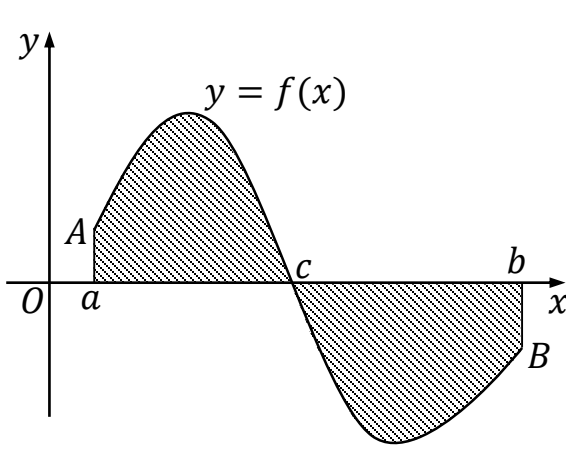
formula bilan hisoblanadi.

3) x o‘zgaruvchi $c \in (a; b)$ nuqtadan o‘tishda $f(x)$ funksiya o‘z ishorasini o‘zgartirsin, ya’ni $abAB$ egri chiziqli trapetsiyaning bir qismi Ox o‘qdan yuqorida, qolgan qismi esa Ox o‘qdan pastda joylashgan bo‘lsin (6.2-rasm). Bu holda aytib o‘tilgan yuza ikkita yuzaning yig‘indisidan iborat bo‘ladi:

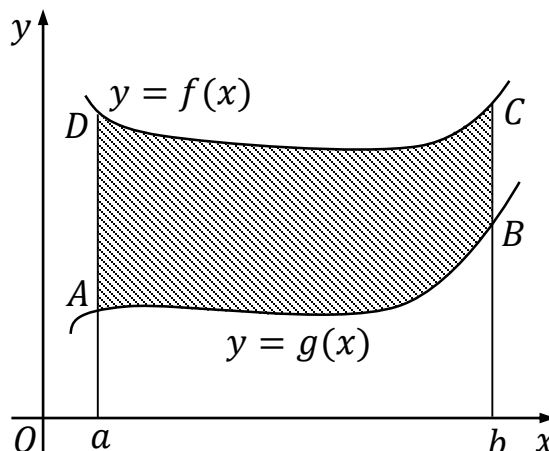
$$S = S_{aAc} + S_{cBb} = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^b f(x)dx \right|$$

yoki

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \quad (6.17)$$



6.2-rasm



6.3-rasm

4) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada uzluksiz va $f(x) > g(x) > 0$ bo'lsin. Yuqoridan $y = f(x)$ egri chiziq bilan, quyidan esa $y = g(x)$ egri chiziq bilan yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning S yuzi $aDCb$ rapetsiyaning S_{aDCb} yuzi bilan $aABb$ trapetsiyaning S_{aABb} yuzlarining ayirmasiga teng (6.3- rasm). Shunday qilib

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

yoki

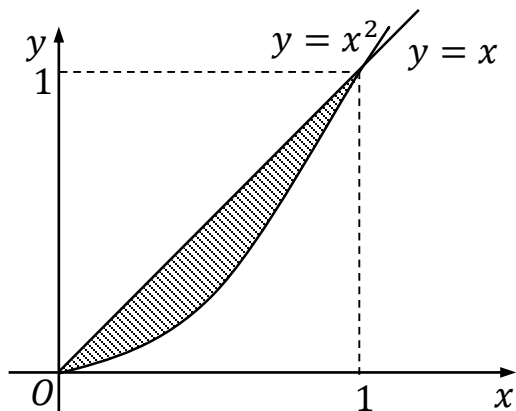
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad (6.18)$$

formulaga ega bo'lamiz.

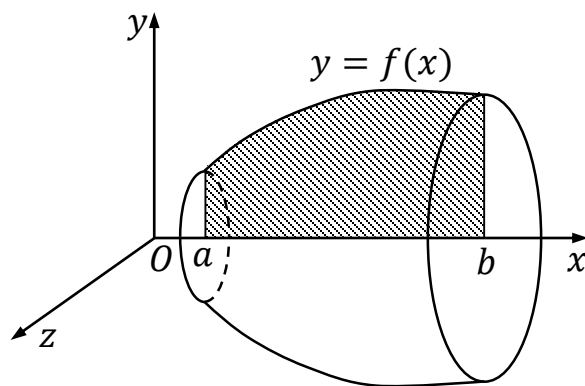
6.11-Misol. $y = x^2$ va $y = x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

► Bu chiziqlar kesishgan nuqtani topamiz: $x^2 = x$ yoki $x(x - 1) = 0$. Demak chiziqlar $O(0; 0)$ va $P(1; 1)$ nuqtalarda kesishar ekan. U holda integrallash chegaralari $a = 0$ va $b = 1$ bo'ladi (6.4-rasm). Shuning uchun qidirilayotgan yuzani (6.18) formula bo'yicha topsak

$$S = \int_a^b (x - x^2) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \blacktriangleleft$$



6.4-rasm

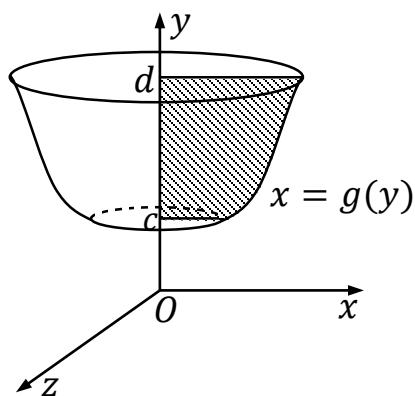


6.5-rasm

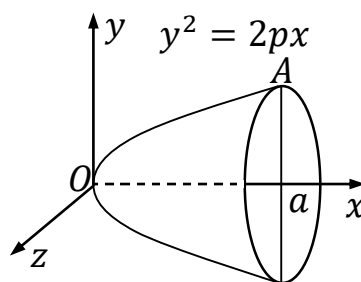
Jism hajmi. $[a; b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz nomanfiy funksiya grafigidan hosil bo'lgan egri chiziqli trapetsiyani Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma jism (6.5-rasm) hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (6.19)$$

formula bilan hisoblanadi.



6.6-rasm



6.7-rasm

Xuddi shu singari asosi $[c; d]$ kesma bo'lgan va bu kesmada uzluksiz nomanfiy $x = g(y)$ funksiya grafigi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning (6.6-rasm) hajmi

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y) dy \quad (6.20)$$

formula bilan hisoblanadi.

6.12-Misol. $y^2 = 2\pi x$ parabolaning OA yoyini Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping (6.7-rasm).

► Parabolaning OA yoyi tenglamasi $y = \sqrt{2\pi x}$, $p > 0$ bo'ladi.

Shuning uchun qaralayotgan jismning hajmi $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b 2\pi x dx = \pi^2 a^2$ bo'ladi. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday figuraga egri chiziqli trapetsiya deb ataymiz?
2. $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha integral yig'indisi qanday topiladi?
3. $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha aniq integrali qanday aniqlanadi?
4. Kesmada integrallanuvchi funksiya yana qanday xossaga ega?
5. Funksiya qachon integrallanuvchi bo'ladi?
6. Yig'indining aniq integrali nimaga teng?
7. Integrallash chegaralari ustma-ust tushsa integral nimaga teng?
8. Integrallash chegaralarining o'rnini almashtirilsa nima bo'ladi?
9. O'rta qiymat haqidagi teorema nima haqida?
10. Aniq integral qanday hisoblanadi?
11. Xosmas integrallar qanday ko'rinishda bo'ladi?
12. Aylanma jismning hajmi qanday topiladi?

Mashqlar.

O'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan quyidagi aniq integrallarni hisoblang:

1. $\int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx.$
2. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin^5 4x \cos 4x dx.$
3. $\int_4^9 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}.$
4. $\int_1^{22} \frac{dx}{4 + \sqrt{x + 3}}.$
5. $\int_0^2 x^3 \sqrt{4 + x^2} dx.$
6. $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{2 + 3 \ln x}}{x} dx.$
7. $\int_0^1 \frac{x^5}{1 + 4x^6} dx.$

$$\begin{aligned}
 &8. \int_0^{\pi/2} e^{3 \sin 5x} \cos 5x \, dx. \quad 9. \int_1^2 \frac{e^{2/x}}{x^2} \, dx. \quad 10. \int_{\pi^2/36}^{\pi^2/16} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx. \quad 11. \\
 &\int_0^{2/\sqrt[4]{3}} \frac{x}{9 + 25x^4} \, dx. \quad 12. \int_0^{\pi} \frac{1}{3 + 2 \cos x} \, dx.
 \end{aligned}$$

Bo‘laklab integrallash usuli bilan quyidagi aniq integrallarni hisoblang:

$$\begin{aligned}
 &13. \int_0^{\pi/6} x \cos 3x \, dx. \quad 14. \int_0^1 x^3 e^{2x^2+1} \, dx. \quad 15. \int_0^{\pi/2} (2x + 3) \sin 7x \, dx. \\
 &16. \int_0^e \ln(3x + 2) \, dx. \quad 17. \int_0^{\pi/12} (3x + 1) \operatorname{tg}^2 4x \, dx. \quad 18. \int_1^3 \operatorname{arctg} 7x \, dx. \\
 &19. \int_1^5 x e^{9x} \, dx. \quad 20. \int_0^1 x e^{-x} \, dx. \quad 21. \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx. \quad 22. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}. \\
 &23. \int_1^2 x \log_2 x \, dx. \quad 24. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx. \quad 25. \int_1^e \ln^3 x \, dx.
 \end{aligned}$$

Quyidagi chegarasi cheksiz xosmas integrallarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang va yaqinlashuvchi bo‘lsa, qiymatini hisoblang:

$$\begin{aligned}
 &26. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}. \quad 27. \int_2^{\infty} \frac{(x - 2) \, dx}{x^2 - 4x + 8}. \quad 28. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(2x + 3)^5}}. \quad 29. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln x}}. \\
 &30. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 17}. \quad 31. \int_e^{\infty} \frac{dx}{(2x + e) \ln^2(2x + e)}.
 \end{aligned}$$

32. $y = x^5$ va $y = x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

33. $y^2 = 3x + 4$ va $x - y - 2 = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

34. $x = 0, x = \pi/2, y = 0$ va $y = \sin x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

35. $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Ox o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

36. $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ va $y = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

37. $y = x^2$ va $y^2 = x$ egri chiziqlar bilan chegaralangan figurani Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

Javoblar.

1. 4. 2. $9/512$. 3. $29/3 - 2 \ln 4/3$. 4. $6 - 8 \ln 1,5$. 5. $6 - 3\sqrt[3]{4}/2$. 6. $(5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{2})/4$. 7. $(\ln 5)/24$. 8. $(e^3 - 1)/15$. 9. $(e^2 - 2)/2$. 10. $\sqrt{2}/3$.
 11. $\frac{1}{30} \arctg\left(\frac{20}{3\sqrt{3}}\right)$. 12. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 13. $\frac{\pi}{18} - \frac{1}{9}$. 14. $\frac{1}{8}(e^3 + e)$. 15. $\frac{19}{49}$. 16. $\frac{3e + 2}{3} \ln(3e + 2) - e - \frac{2}{3} \ln 2$. 17. $\frac{\pi + 4\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi^2}{96} - \frac{\pi}{12} - \frac{3 \ln 2}{16}$.
 18. $3 \arctg 21 - \arctg 7 - \frac{1}{16} \ln \frac{221}{15}$. 19. $\frac{1}{81}(44e^{45} + 1)$. 20. $1 - \frac{2}{e}$. 21. $\frac{\pi}{2} - 1$. 22. $\frac{\pi(9 - 4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 23. $2 - \frac{3}{4 \ln 2}$. 24. $\frac{e^\pi - 2}{5}$. 25. $6 - 2e$. 26. $\pi/4$.
 27. uzoql. 28. $\frac{\sqrt{3}}{27}$. 29. uzoql. 30. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \arctg \frac{1}{4}$. 31. $\frac{1}{2 \ln(3e)}$. 32. $1/3$. 33. $19\frac{1}{18}$. 34. 1. 35. $\pi^2/2$. 36. $4\pi/5$. 37. $3\pi/10$.

VII BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

Bir o'zgaruvchili funksiyalar tabiatda mavjud bo'lgan barcha bog'liqliklarni ochib bera olmaydi. Bunga bir necha misol keltiraylik:

7.1-Misol. Tomonlarining uzunliklari x va y bo'lgan to'g'ri to'rt burchakning yuzi

$$S = xy$$

formula bilan hisoblanadi. Har bir x va y juftlikka yuzning aniq bir S qiymati mos keladi, ya'ni S ikki o'zgaruvchining funksiyasi.

7.2-Misol. Qirralarining uzunliklari x, y, z bo'lgan parallelepiped hajmi

$$V = xyz$$

formula bilan hisoblanadi. Shuning uchun V uchta o'zgaruvchining funksiyasi.

7.3-Misol. Yer atmosferasi nuqtasidagi γ namlik darajasi uning joylashgan o'ri: x — kenglik, y — uzoqlik, z — balandlikka va nuqtadagi t temperaturaga bog'liq, ya'ni γ to'rt o'zgaruvchining funksiyasi.

Bunday bog'liqliklarni o'rganish uchun ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi kiritiladi. Biz ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishni ikki o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganish bilan chegaralanamiz, chunki ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga xos bo'lgan muhim xususiyatlar ikki o'zgaruvchili funksiyalardayoq namoyon bo'ladi. Bu xususiyatlar ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga hech qanday qiyinchiliksiz umumlashtiriladi. Bundan tashqari ikki o'zgaruvchili funksiyalarni va ularning xossalari geometrik talqin qilish mumkin.

7.1. Ikki o'zgaruvchili funksiya tushunchasi

$x, y \in \mathbf{R}$ haqiqiy sonlardan tashkil topgan tartiblangan (x, y) juftliklar to'plami $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar to'plamining dekart kvadrati deb ataladi va $\mathbf{R}^2$ ko'rinishda belgilanadi (agar x, y sonlar juftligida ulardan qaysinisi birinchi, qaysinisi ikkinchi ekanligi ko'rsatilgan bo'lsa, bu juftlik tartiblangan deyiladi, (x, y) juftlikda x — birinchi, y — ikkinchi son). $\mathbf{R}^2$ to'plamni dekart

koordinatalar tekisligi, (x, y) juftlikni esa bu tekislikning nuqtasi deb qarash mumkin. Bu tekislikda $M(x_1, y_1)$ va $N(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

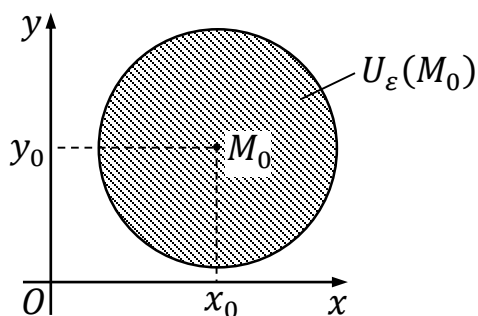
$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

tenglik bilan aniqlanadi..

7.1-Ta'rif. $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning ε atrofi deb

$$U_\varepsilon(M_0) = \{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}$$

to'plamga aytiladi. Ko'rinib turibdiki bu to'plam markazi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada va radiusi ε bo'lgan doiradan iborat (7.1-rasm).



7.1-rasm

Ikki o'zgaruvchili funksiya tushunchasi. Ikki o'zgaruvchili funksiya tushunchasi ham bir o'zgaruvchili funksiya singari kiritiladi.

7.2-Ta'rif. (x, y) tartiblangan sonlar juftligining $D \in \mathbf{R}^2$ to'plami va $E \in \mathbf{R}$ sonli to'plam berilgan bo'lsin. Har bir $(x, y) \in D$ juftlikka yagona $z \in E$ sonni mos qo'yuvchi f moslikka D to'plamda aniqlangan va qiymatlari E to'plamda bo'lgan *ikki o'zgaruvchili funksiya* deb ataladi va $z = f(x, y)$ ko'rinishda brlgilanadi. D to'plam funksiyaning *aniqlanish*, E to'plam esa *qiymatlari sohasi* deb ataladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiya yana $z = z(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ va hokazo ko'rinishda ham belgilanadi.

Har bir (x, y) tartiblangan sonlar juftligiga to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida tekislikning yagona M nuqtasi mos keladi va aksincha har bir M nuqtaga yagona tartiblangan (x, y) juftlik mos keladi. Shuning uchun ikki o'zgaruvchili funksiyaning M nuqtaning funksiyasi sifatida

qarash mumkin va ba'zan $z = f(x, y)$ o'rniga $z = f(M)$ belgilashdan foydalaniladi. Biz bundan keyin ana shu ikki belgilashdan foydalanamiz.

Ikki o'zgaruvchili funksiyalar bir o'zgaruvchili funksiyalar singari turli usullar bilan berilishi mumkin. Biz misollarda asosan funksiyalar formulalar yordamida beriladigan analitik usuldan foydalanamiz. Bunday hollarda funksiyaning aniqlanish sohasi formulalar ma'noga ega bo'ladigan nuqtalar to'plami hisoblanadi.

Ikki o'zgaruvchi funksiyalarga bir nechta misol qaraymiz.

7.4-Misol. $z = 1 + x^2 + y^2$ funksiya ixtiyoriy (x, y) juftlikda aniqlangan, shuning uchun uning aniqlanish sohasi butun Oxy tekislikdan iborat bo'ladi: $D = \{(x, y): (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$, qiymatlar sohasi esa $E = [1, +\infty)$ bo'ladi.

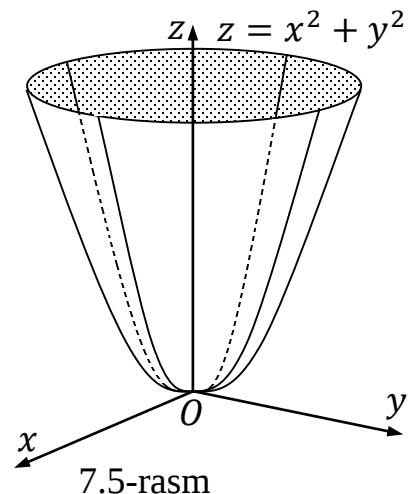
7.5-Misol. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ funksiya kvadrat ildiz ostidagi ifoda noldan kichik bo'lmaydigan, ya'ni $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 \leq 1$ bo'ladigan nuqtalarda aniqlangan. Shuning uchun uning aniqlanish sohasi markazi koordinatalar boshida va radiusi 1 ga teng bo'lgan doiradan iborat: $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$, qiymatlar sohasi $[0, 1]$ kesmadan iborat: $E = [0, 1]$.

7.6-Misol. $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ funksiya $x^2 + y^2 - 1 > 0$ yoki $x^2 + y^2 > 1$ bo'ladigan nuqtalar to'plamida aniqlangan. Shuning uchun bu funksiyaning aniqlanish sohasi markazi koordinatalar boshida va radiusi birga teng bo'lgan doiraning tashqi qismidan iborat bo'ladi: $D = \{(x, y): x^2 + y^2 > 1\}$, qiymatlar sohasi esa $E = (0, +\infty)$ bo'ladi.

Qaralga misollardan ko'rinib turibdiki, ikki o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi butun Oxy tekislik ham yoki uning ma'lum bir qismi ham bo'lishi mumkin ekan.

Ikki o'zgaruvchili funksiyalarni geometrik tasvirlash. Ma'lumki, bir o'zgaruvchili funksiya tekislikda $y = f(x)$ tenglama bilan aniqlanadigan chiziq ko'rinishida tasvirlanadi. Ikki o'zgaruvchili funksiya esa fazoda $z = f(x, y)$ tenglama bilan aniqlanadigan *sirt* ko'rinishida tasvirlanadi.

$z = f(x, y)$ funksiya Oxy tekislikning biror D sohasida aniqlangan bo'lsin. U holda har bir $(x, y) \in D$ nuqtaga uch o'lchovli fazoning $(x, y, f(x, y))$ nuqtasi mos keladi. Bunday $(x, y, f(x, y))$ nuqtalar to'plamiga $z = f(x, y)$ funksiyaning grafigi deb ataymiz. Masalan, $z = 4x + 3y + 2$ funksiyaning grafigi o'rganilgan $4x + 3y - z + 2 = 0$ tekislik bo'ladi. $z = x^2 + y^2$ funksiyaning grafigi aylanma paraboloid bo'ladi (7.5-rasm).



7.2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti

$f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U(M_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin (M_0 nuqtaning o'zida aniqlanmagan ham bo'lishi mumkin).

7.3-Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan farqli va $\rho(M_0, M) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$ nuqtalar uchun

$$|f(M) - A| < \varepsilon \quad (7.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $f(M)$ funksiyaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti deb ataladi va $A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ yoki $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifdan agar limit mavjud bo'lsa, M nuqta M_0 nuqtaga qanday yo'nalish bilan intilishiga (bunday yo'nalishlar soni cheksiz ko'p, bir o'zgaruvchili funksiyalarda esa $x \rightarrow x_0$ intilish faqat ikkita yo'nalish bo'yicha: chapdan va o'ngdan) bog'liq emasligi kelib chiqadi.

7.7-Misol. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ limitni hisoblang.

► $M(x, y)$ nuqtani $O(0, 0)$ nuqtaga $y = kx$ to'g'ri chiziq bo'ylab intiltiramiz, bu yerda k — o'zgarmas son. U holda

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2(1 - k^2)}{x^2(1 + k^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ funksiya $O(0,0)$ nuqtada limitga ega emas, chunki k

koeffitsiyentning turli qiymatlarida funksiyaning limiti bir xil emas. ◀

7.1-Teorema. Agar $f(M)$ va $g(M)$ funksiyalar M_0 nuqtada mos ravishda A va B limitlarga ega bo'lsa, ularning $f(M) + g(M)$ yig'indisi, $f(M) - g(M)$ ayirmasi, $f(M) \cdot g(M)$ ko'paytmasi va $B \neq 0$ bo'lganda $f(M)/g(M)$ nisbati ham M_0 nuqtada limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \pm g(M)] = A \pm B, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \cdot g(M)] = A \cdot B,$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

7.3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi tushunchasi limit tushunchasiga tayangan holda kiritiladi.

7.4-Ta'rif. Agar

i) $f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;

ii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ limit mavjud;

iii) bu limit $f(x, y)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \left(\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \right) \quad (7.2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar funksiya biror sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, funksiya bu sohada uzluksiz deyiladi. Funksiya uzluksiz bo'lmagan nuqtalarni (funksiyaning nuqtadagi uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmagan) uning

uzilish nuqtalari deb ataladi. Funktsiyaning uzilish nuqtalari butun bir *uzilish chiziqlarini* hosil qilishi ham mumkin. Masalan, $z = 1/(x^2 - y^2)$ funksiya ikkita $y = x$ va $y = -x$ uzilish chiziqlariga ega.

$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ tenglik bilan aniqlanadigan miqdorga $z = f(x, y)$ funksiyaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi *to'liq orttirmasi* deb ataladi. x va y argumentlarning orttirmalari esa mos ravishda $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ formulalar orqali hisoblanadi. Bu belgilashlardan foylanaib Δz to'liq orttirma uchun

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

formulani hosil qilamiz.

Uzluksizlikning yuqoridagi ta'rifiga teng kuchli bo'lgan boshqa ta'rifini beramiz:

7.5-Ta'rif. Agar $z = f(x, y)$ funksiyaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to'liq orttirmasi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ da cheksiz kichik, ya'ni

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

7.8-Misol. $z = x^2 y$ funksiyaning uzluksizlikka tekshiring.

► Funktsiyaning $M(x, y)$ nuqtadagi to'liq orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y \\ &= 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\Delta y. \end{aligned}$$

U holda $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ ekanligi ko'rinib turibdi. Bu esa 7.5-Ta'rifga ko'ra =

$x^2 y$ funksiyaning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtada uzluksiz ekanligini anglatadi. ◀

7.4. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari

$z = f(x, y)$ funksiya $M(x, y)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. M nuqtada x o'zgaruvchiga Δx orttirma beramiz, bunda y o'zgaruvchining qiymatini o'zgarmasdan qoldiramiz, ya'ni tekislikning $M(x, y)$ nuqtasidan $M_1(x + \Delta x, y)$ nuqtasiga o'tamiz. Δx orttirmaning

qiymatini shunday tanlaymizki, bunda M_1 nuqta M nuqtaning yuqorida aytib o'tilgan atrofida yotsin. U holda funksiyaning

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

mos orttirmasini funksiyaning $M(x, y)$ nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deb ataymiz.

y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirma xuddi shu singari aniqlanadi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

7.6-Ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (7.3)$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $z = f(x, y)$ funksiyaning $M(x, y)$ nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deb ataladi va u $z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$ orqali belgilanadi.

Xuddi shu singari

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (7.4)$$

limit mavjud bo'lsa, uni biz $z = f(x, y)$ funksiyaning $M(x, y)$ nuqtadagi y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deb ataymiz va $z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$ orqali belgilaymiz.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra ikki o'zgaruvchili funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi y o'zgaruvchining o'zgarmas qiymatida x ning bir o'zgaruvchili funksiya dan olingan oddiy hosiladan iborat ekan. Shuning uchun xususiy hosilalar bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilasini hisoblash formulalri va qoidalariga ko'ra hisoblanadi (bunda x bo'yicha xususiy hosila olinganda y o'zgarmas, va aksincha y bo'yicha xususiy hosila olinganda x o'zgarmas miqdor deb hisoblanadi).

7.9-Misol. $z = xy + \sin(x - y) + 5$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

$$\blacktriangleright z'_x = (xy + \sin(x - y) + 5)'_x = (xy)'_x + (\sin(x - y))'_x + (5)'_x =$$

$$\begin{aligned}
&= y + \cos(x - y) \cdot (x - y)'_x + 0 = y + \cos(x - y). \\
z'_y &= (xy + \sin(x - y) + 5)'_y = (xy)'_y + (\sin(x - y))'_y + (5)'_y = \\
&= x + \cos(x - y) \cdot (x - y)'_y + 0 = y - \cos(x - y). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

7.5. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy va to'la differensial

7.7-Ta'rif. Ikki o'zgaruvchili $z = f(x, y)$ funksiyaning $M(x, y)$ nuqtadagi birorta argumenti bo'yicha xususiy differensial deb, funksiyaning bu argument bo'yicha xususiy hosilasi bilan mos orttirmasining ko'paytmasiga aytiladi:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x,$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Bir o'zgaruvchili funksiylardagi singari bu yerda ham erkli o'zgaruvchining orttirmasi bilan differensial teng bo'ladi. Shuning uchun xususiy differensiallarni

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad (7.5)$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (7.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

7.8-Ta'rif. Ikki o'zgaruvchili $z = f(x, y)$ funksiyaning $M(x, y)$ nuqtadagi to'la differensial deb, bu nuqtadagi xususiy differensiallar yig'indisiga aytiladi:

$$dz = d_x z + d_y z$$

yoki

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (7.7)$$

7.10-Misol. $z = x \sin y + y \sin x$ funksiyaning xususiy va to'la differensialini toping.

► Dastlab funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$z'_x = (x \sin y + y \sin x)'_x = (x \sin y)'_x + (y \sin x)'_x = \sin y + y \cos x,$$

$$z'_y = (x \sin y + y \sin x)'_y = (x \sin y)'_y + (y \sin x)'_y = x \cos y + \sin x.$$

(7.5) va (7.6) formulalarga ko'ra xususiy differensiallar

$$d_x z = (\sin y + y \cos x)dx,$$

$$d_y z = (x \cos y + \sin x)dy$$

bo'ladi. To'la differensialni esa (7.7) formulaga ko'ta topamiz:

$$dz = (\sin y + y \cos x)dx + (x \cos y + \sin x)dy. \blacktriangleleft$$

7.6. Murakkab funksiyaning hosilalari

$z = f(x, y)$ ikki o'zgaruvchili funksiyaning x va y o'zgaruvchilari o'z navbatida erkli t o'zgaruvchining funksiyalari bo'lsin: $x = x(t), y = y(t)$. U holda $z = f[x(t), y(t)]$ funksiya erkli t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi va uning hosilasi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (7.8)$$

formulaga ko'ra hisoblanadi.

7.11-Misol. $z = x^3 y^4, x = 2t, y = t^2$ bo'lsa, $\frac{dz}{dt}$ hosilani toping.

► $z'_x(x, y) = 3x^2 y^4$, $z'_y(x, y) = 4x^3 y^3$, $x'(t) = 2$, $y'(t) = 2t$ hosilalarni (7.8) formulaga qo'yamiz:

$$\frac{dz}{dt} = 3x^2 y^4 \cdot 2 + 4x^3 y^3 \cdot 2t.$$

$x = 2t, y = t^2$ ekanligini inobatga olsak,

$$\frac{dz}{dt} = 3(2t)^2 (t^2)^4 2 + 4(2t)^3 (t^2)^3 2t = 88t^{10}.$$

Agar $z = F(u)$ funksiya u o'zgaruvchi o'z navbatida x va y o'zgaruvchilarning funksiyasi, ya'ni $u = u(x, y)$ bo'lsa, $z = F(u(x, y))$ murakkab funksiyaning xususiy hosilalari bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi

$$z'_x = F'(u)u'_x(x, y), \quad (7.9)$$

$$z'_y = F'(u)u'_y(x, y) \quad (7.10)$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

7.12-Misol. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

► Bu yerda $F(u) = \sqrt{u}$ va $u = x^2 + y^2$. U holda

$$F'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, u'_x = 2x, u'_y = 2y.$$

Topilganlarni (7.9) va (7.10) formulalarga qo'yib

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

xususiy hosilalarni topamiz. ◀

Nazorat savollari

1. Ikki o'zgaruvchili funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi qayerda yotadi?
3. Yig'indi, ayirma va ko'paytmaning limiti nimaga teng?
4. Qachon bo'linmaning limiti mavjud bo'ladi?
5. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning grafigi qanday figura bo'ladi?
6. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy va to'la orttirmalrining farqi nimada?
7. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi qanday aniqlanadi?
8. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy differensialni qanday aniqlanadi?
9. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning to'la differensialni qanday aniqlanadi?
10. Murakkab funksiyaning xususiy hosilalri qanday topiladi?

Mashqlar.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

1. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. 2. $z = e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$. 3. $z = \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2}$.

4. $z = \ln(x - y)$.

Limitlarni hisoblang.

5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$. 6. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 7}} \lg(x + y)$. 7. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}$ 8. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$.

Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini va to'la differensialini toping.

9. $z = \ln(x^2 + y^2) - xy$. 10. $z = e^{xy} + \operatorname{tg} x^2 y$.

11. $z = x\sqrt{y} - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Funksiyaning berilgan nuqtadagi xususiy hosilalarini hisoblang.

12. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(3; 4)$. 13. $z = \ln xy$, $M(1; 2)$.

14. $z = e^{x-y}$, $M(3; 1)$.

Javoblar

1. Oxy tekislikning barcha nuqtalari. 2. I chorak. 3. Oxy tekislikning barcha nuqtalari. 4. $x > y$ yarim tekislik. 5. 2. 6. 1. 7. 0. 8. 0. 9. $z'_x = 2x/(x^2 + y^2) - y$,

$$z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - x, \quad dz = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - y \right) dx + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} - x \right) dy.$$

10. $z'_x = ye^{xy} + 2xy/\cos^2 x^2 y$, $z'_y = xe^{xy} + x^2/\cos^2 x^2 y$, $dz = (ye^{xy} + 2xy/\cos^2 x^2 y)dx + (xe^{xy} + x^2/\cos^2 x^2 y)dy$.

11. $z'_x = \sqrt{y} - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $dz =$
 $= \left(\sqrt{y} - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy.$

12. $z'_x(M) = 3/5$, $z'_y(M) = 4/5$. 13. $z'_x(M) = 1$, $z'_y(M) = 1/2$.

14. $z'_x(M) = e^2$, $z'_y(M) = -e^2$.

VIII BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

8.1. Differensial tenglama tushunchasiga olib keladigan masalalar

Tabletka dori vositasi tarkibidagi faol moddalarning erish qonuni. Tabletka dori vositasi tarkibidagi faol moddalarning erish tezligi ana shu faol moddaning miqdoriga proporsional. Tabletkadagi faol modda miqdorining vaqt bo'yicha o'zgarishi qonuniyatini aniqlang.

m orqali vaqtning t momentida tabletkadagi faol modda miqdorini belgilaymiz. U holda faol moddaning erish tezligi m miqdordan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (8.1)$$

bu yerda k – erish tezligi o'zgarmasi. Tenglamadagi minus ishorasi vaqt o'tishi bilan faol modda miqdorining kamayishini anglatadi.

Vaqt o'tishi bilan bakteriyalarning ko'payish qonuni. Ayrim bakteriyalarning ko'payish tezligi qaralayotgan vaqt momentidagi bakterialar soniga proporsional. Bakterialar soni o'zgarishining vaqtga bog'liqlik qonuniyatini aniqlang.

Qaralayotgan t vaqt momentidagi bakteriyalar sonini x orqali belgilaymiz. U holda bakteriyalar sonining o'zgarish tezligi x miqdordan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng. Shuning uchun

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad (8.2)$$

tenglama o'rinli bo'ladi, bu yerda k – proporsionallik koeffitsiyenti.

Vaqt o'tishi bilan xujayraning o'sish qonuni. Sirti uning hajmiga nisbati o'zgarmas bo'lgan tayoqcha shakldagi xujayralarning o'sish tezligi qaralayotgan vaqt momentidagi xujayraning l uzunligiga proporsional:

$$\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l, \quad (8.3)$$

bu yerda α, β – sintez va bo'linishni tavsiflovchi o'zgarmaslar.

8.2. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari

8.1-Ta'rif. Noma'lum funksiyani, uning argumentlarini va bu funksiyaning turli argumentlari bo'yicha turli tartibli hosilalarini bog'lovchi tenglamaga *differensial tenglama* deb ataymiz.

Agar noma'lum funksiya ikki va undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, differensial tenglama *xususiy hosilali differensial tenglama* deb ataymiz.

Agar noma'lum funksiya bir o'zgaruvchili funksiya bo'lsa, tenglama *oddiy differensial tenglama* deb ataladi va

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

umumiy ko'rinishda yoziladi.

Biz quyida faqat oddiy differensial tenglamalarni qaraymiz.

8.2-Ta'rif. Tenglama tarkibiga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi, bu *differensial tenglamaning tartibi* deb ataladi.

Masalan, $xy' + y'' \sin x = 0$ tenglama ikkinchi, $y''' = x \ln x$ tenglama esa uchinchi tartibli tenglama bo'ladi. Yuqorida qaralgan (8.1)-(8.3) tenglamalar birinchi tartibli differensial tenglama hisoblanadi.

8.3-Ta'rif. Agar $y = \varphi(x)$ funksiya va uning hosilalarini differensial tenglamaga qo'yilganda tenglama ayniyatga aylansa, bu funksiya *differensial tenglamaning yechimi* deyiladi.

Masalan, $y = \sin x$ funksiya $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

8.4-Ta'rif. Agar tenglamaning yechimi o'shkormas ko'rinishda, ya'ni $\Phi(x, y) = 0$ tenglik bilan berilgan bo'lsa, bunday yechim berilgan *differensial tenglamaning integrali* deb ataladi.

Berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'lgan $y = \varphi(x)$ funksiyaning grafigi bu *tenglamaning integral chizig'i* deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimini topish jarayoni bu *tenglamani integrallash* deb yuritiladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

$$F(x, y, y') = 0$$

ko‘rinishda bo‘ladi, agar uni y' hosilaga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, u

$$y' = f(x, y) \quad (8.4)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Ushbu

$$xy' + y = 0 \quad (8.5)$$

tenglamani qaraylik. Uni

$$y' = -\frac{y}{x}$$

ko‘rinishda yozib olib, $1/x$, $2/x$, $-5/x$ funksiyalar va umuman ixtiyoriy $y = C/x$ funksiya uni qanoatlantirishini tekshirib ko‘rish mumkin, bu yerda C –ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Boshqa bir

$$y' = 5x - y + 9$$

tenglamani olaylik. $y = Ce^{-x} + 5x + 4$ funksiya uni qanoatlantirishini tekshiramiz, bu yerda C –ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Haqiqatan ham, bu funksiya uchun

$$y' = -Ce^{-x} + 5 = 5x - (Ce^{-x} + 5x + 4) + 9 = 5x - y + 9$$

tenglikni yozish mumkin, ya’ni u berilgan tenglamani qanoatlantirar ekan.

(8.4) ko‘rinishdagi ixtiyoriy tenglamaning yechimini umumiy holda

$$y = \varphi(x, C)$$

ko‘rinishda yozish mumkinligini ko‘rsatish mumkin, bu yerda C –ixtiyoriy o‘zgarmas son. Shuning uchun $y = \varphi(x, C)$ funksiya (8.4) *tenglamaning umumiy yechimi* deb ataladi.

C o‘zgarmasga aniq bir C^* qiymatni berib, aniq bir $y = \varphi(x, C^*)$ yechimni hosil qilamiz. Bu yechim berilgan *tenglamaning xususiy yechimi* deb ataladi. Shunday qilib, differensial tenglamaning umumiy yechimi barcha xususiy yechimlarning majmuasidan iborat ekan.

Umumiy yechimdan kerakli xususiy yechimni alohida ajratish uchun *boshlang‘ich sharlart* deb ataluvchi

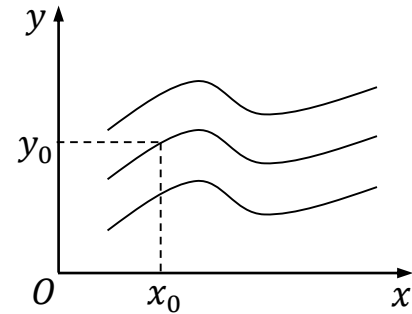
$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (8.6)$$

qo'shimcha shartlar beriladi, bu yerda x_0 va y_0 berilgan o'zgarmas sonlar. U holda umumiy yechimda $x = x_0, y = y_0$ deb olsak, C — o'zgarmasga nisbatan

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan C — o'zgarmasni topib, umumiy yechimga qo'ysak qidirilayotgan xususiy yechim hosil bo'ladi.

(8.4) tenglamaning integral chiziqlar oilasini bu tenglama umumiy yechimining geometrik talqini deb qarash mumkin. (8.6) boshlang'ich shartda (8.4) tenglamani integrallash deganda, integral chiziqlar to'plamidan (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi chiziqni tanlash degan ma'noni anglatadi (8.1-rasm).



8.1-rasm

8.3-Misol. (8.5) tenglamaning umumiy yechimi $y = C/x$ ko'rinishda bo'lishini ko'rgan edik. Ular tekislikda giperbolalar oilasini tashkil qiladi. Tenglamaga $y|_{x=3} = 2$ boshlang'ich shartni bersak, umumiy yechimdan $2 = C/3$ tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $C = 6$ qiymatga ega bo'lamiz. Shunday qilib, qidirilayotgan xususiy yechim

$$y = \frac{6}{x}$$

bo'lar ekan.

Endi boshqa bir

$$y|_{x=0} = 5 \tag{8.7}$$

shartni beramiz. Natijada umumiy yechimdan

$$5 = \frac{C}{0}$$

tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikdan C — o'zgarmasning mos qiymatini aniqlab bo'lmaydi, ya'ni mazkur tenglama uchun bunday boshlang'ich shart o'rinli emas. Geometrik talqinda bu hech bir integral chiziq $M(0,5)$ nuqtadan o'tmasligini anglatadi.

(8.4) tenglamaning (8.6) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topish Koshi masalasi deb yuritiladi.

Yuqoridagi misollardan xulosa chiqarib, quyidagi teoremaga kelimiz.

8.1-Teorema. $f(x, y)$ funksiya o'zining $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilasi bilan Oxy tekislikning biror D sohasida uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0) \in D$ nuqta uchun (8.4) tenglamaning $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud.

Bu teorema yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida Koshi teoremasi deb ataladi.

8.4-Misol. Yana (8.5) tenglamani qaraymiz. Uning uchun $f(x, y) = -y/x$ bo'ladi va $x = 0$ bo'lganda $f(x, y)$ funksiya mavjud emas. Xuddi shu sababli (8.7) boshlang'ich shartning (8.5) tenglama uchun o'rinli emasligi kelib chiqadi.

Endi 1-tartibli tenglamaning umumiy yechimi ta'rifini aniqlab olishimiz mumkin.

8.6-Ta'rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C)$ funksiya 1-tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb ataladi:

1. Har bir aniq $C = C^*$ qiymatda $y = \varphi(x, C^*)$ funksiya bu tenglamani qanoatlantiradi;
2. Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi D sohaning ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in D$ nuqtasi uchun shunday $C = C^*$ qiymat topiladiki, bunda $y = \varphi(x, C^*)$ funksiya $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

8.3. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar

(8.4) tenglamada $f(x, y)$ funksiya faqat x o'zgaruvchiga bog'liq funksiyaning faqat y o'zgaruvchiga bog'liq funksiyaga nisbati shaklda berilgan holni qaraymiz. Bu holda tenglama

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \quad (f_2(y) \neq 0)$$

ko'rinishda bo'ladi va uni hosila belgisining boshqa shklidan foydalanib

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Tenglikning ikkala tomonini $f_2(y)dx$ ifodaga ko‘paytirsak

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \quad (8.8)$$

tenglamani hosil qilamiz. $F_1(x)$ va $F_2(y)$ funksiyalar mos ravishda $f_1(x)$ va $f_2(y)$ funksiyalarning boshlang‘ichlari bo‘lsin. U holda (8.8) tenglama ikkita funksiyalar differensiallarining tengligini, ya’ni

$$dF_2(y) = dF_1(x)$$

ekanligini anglatadi. Shuning uchun bu tenglikdan

$$F_2(y) = F_1(x) + C$$

(8.8) tenglamaning umumiy integralini hosil qilamiz.

8.7-Ta’rif.

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (8.9)$$

ko‘rinishdagi tenglamalarni *o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama* deb ataladi.

Uning umumiy integrali

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo‘ladi.

8.5-Misol. Ushbu tenglamani qaraymiz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

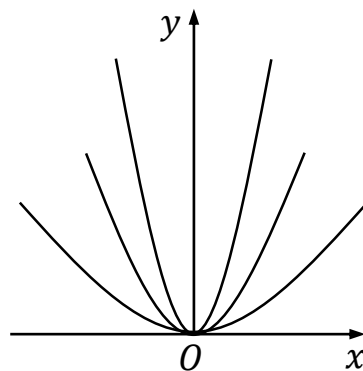
Bundan

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

tenglikni yozish mumkin. Uning ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

va demak



8.2-rasm

$$\ln y = 2 \ln x + \ln C$$

ya'ni $y = Cx^2$.

Shunday qilib keltirilgan tenglamani 8.2-rasmda tasvirlangan cheksiz ko'p parabolalar qanoatlantirar ekan. Bunda $y|_{x=0} = 0$ boshlang'ich shartni barcha xususiy yechimlar qanoatlantiradi. Bu esa mazkur holda

$$f(x, y) = \frac{2y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

bo'lib va ular $(0,0)$ nuqtada uzilishga ega ekanligidan, ya'ni yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema shartining bajarilmasligidan kelib chiqadi.

8.8-Ta'rif.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (8.10)$$

ko'rinishdagi tenglamalar *o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deb ataladi.

Bu tenglamaning ikkala tomonini $M_2(x)N_1(y)$ ifodaga bo'lsak, o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_1(y)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{M_2(x)N_1(y)}dy = 0$$

yoki

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

ya'ni (8.9) ko'rinishdagi tenglama hosil bo'ldi.

8.6-Misol. Koshi masalasini yeching:

$$y(1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0, \quad y(0) = 0.$$

► Tenglamaning ikkala tomonini $(1 + x^2)(1 + y^2)$ ko'paytmaga bo'lamiz, natijada tenglama

$$\frac{y}{1 + y^2}dy + \frac{dx}{1 + x^2} = 0$$

ko'rinishni oladi. Tenglikni integrallaymiz:

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy + \int \frac{dx}{1+x^2} = C$$

ya'ni

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) + \operatorname{arctg} x = C.$$

Boshlang'ich shart bo'yicha $x = 0, y = 0$ deb olcak, $C = 0$ qiymatni topamiz. Demak berilgan Koshi masalasining xususiy integrali $\ln \sqrt{1+y^2} + \operatorname{arctg} x = 0$ bo'ladi. ◀

8.4. Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar

Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

8.9-Ta'rif. Agar $f(x, y)$ funksiyaning har bir o'zgaruvchisi ixtiyoriy λ o'zgarmasga ko'paytirilganda funksiyaning o'zi λ^n ifodaga ko'paytirilsa, ya'ni

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n f(x, y)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya n – *tartibli bir jinsli funksiya* deb ataladi.

Masalan, $f(x, y) = xy^2 + x^3$ funksiya uchinchi tartibli bir jinsli funksiya bo'ladi, chunki

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = (\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda x)^3 = \lambda^3(xy^2 + x^3) = \lambda^3 f(x, y).$$

8.10-Ta'rif. Agar

$$y' = f(x, y) \tag{8.11}$$

tenglamada $f(x, y)$ funksiya nolinch tartibli bir jinsli funksiya bo'lsa, (8.11) tenglama *bir jinsli differensial tenglama* deb ataladi.

(8.11) tenglamani

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8.12}$$

ko'rinishda yozish mumkinligini ko'rastamiz.

► Agar $f(x, y)$ nolinch tartibli bir jinsli funksiya bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$f(x, y) = \lambda^0 \cdot f(\lambda x, \lambda y) = f(\lambda x, \lambda y)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikda $\lambda = 1/x$ deb olsak

$$f(x, y) = f\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

y/x nisbatning funksiyasini hodil qildik. ◀

(8.12) bir jinsli tenglama

$$y = u(x) \cdot x \tag{8.13}$$

almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Haqiqattan ham, $y = ux$ va $y' = u'x + u$ ifodalarni (8.12) tenglamaga qo‘ysak

$$u'x + u = \varphi(u)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Hosilaning boshqa belgilanishidan foydalansak,

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz. Uning umumiy yechimini (yoki umumiy integralini) topib, topilgan yechimda u o‘zgavchi o‘rniga y/x nisbatni qo‘ysak, dastlabki berilgan tenglamaning umumiy yechimini (integralni) topamiz.

8.7-Misol. Koshi masalasini yeching:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left(1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right), \quad y(1) = e.$$

► O‘zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$u = \frac{y(x)}{x}, \quad y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u.$$

ularni berilgan tenglamaga qo‘yamiz:

$$x \frac{du}{dx} + u = u(1 - \ln u).$$

Uni ixhchamlab, o‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$$

va integrallaymiz

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Integrallarni topamiz:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C \text{ yoki } |\ln u| = Cx$$

bundan esa $u = e^{Cx}$ tenglikni hosil qilamiz. Endi dastlabki y o'zgaruvchiga qaytamiz:

$$\frac{y}{x} = e^{Cx}$$

Natijada $y = xe^{Cx}$ berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini hosil qildik. Boshlang'ich shartni inobatga olgan holda C o'zgaruvchining qiymatini topamiz. $e = 1 \cdot e^1$, $C = 1$, ya'ni qidirilayotgan xususiy yechim $y = xe^x$ bo'ladi. ◀

Bir jinsli tenglama ba'zan

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (8.14)$$

differensial shaklda ham beriladi. Agar $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar bir xil tartibli bir jinsli funksiyalar bo'lsa (8.14) tenglama bir jinsli bo'ladi.

(8.14) tenglamani $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ ko'rinishda yozib olib, o'ng tomondagi kasrning surat va maxrajini $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalardagi x o'zgaruvchining eng katta darajasiga bo'lsak, $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ tenglamani hosil qilamiz.

8.8-Misol. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

► Tenglamani (8.11) ko'rinishda yozib olamiz:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

O'ng tomondagi kasrning surat va maxrajini x^2 ifodaga bo'lamiz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}}$$

natijada (8.12) shakldagi tenglama hosil bo'ldi. (8.13) almashtirishni olamiz:

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$$

va ularni so'ngi tenglamaga qo'yamiz

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{u^2 - 1}{2u}.$$

Uni ixchamlab, o'zgaruvchilarni ajratsak

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2u}{1+u^2} du$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Uni integrallasak

$$\ln|x| = -\ln(1+u^2) + \ln C \text{ yoki } \ln(|x| \ln(1+u^2)) = \ln C$$

tenglik hosil bo'ladi va dastlabki y o'zgaruvchiga qaytib, so'ngra ixchamlasak, berilgan tenglamaning $x^2 + y^2 = Cx$ umuiy integralini hosil qilamiz. ◀

Bir jinsliga keltiriladigan tenglamalar.

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \quad (8.15)$$

tenglama bir jinsliga keltiriladigan tenglama hisoblanadi, bu yerda a, b, c, a_1, b_1, c_1 — o'zgarmas sonlar. Bu tenglamani bir jinsliga keltirish uchun $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ tenglik orqali yangi u va v o'zgaruvchilar kiriritiladi, bu yerda α va β sonlar bo'lib, ular yuqorida berilgan tenglama bir jinsli bo'ladigan qilib tanlanadi. Buning uchun $dx = du$, $dy = dv$ tengliklarni va yuqoridagi almashtirishlarni (8.15) tenglamaga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} &= f\left(\frac{au + a\alpha + bv + b\beta + c}{a_1u + a_1\alpha + b_1v + b_1\beta + c_1}\right) \\ &= f\left(\frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right). \end{aligned}$$

α va β sonlarni

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

bo'ladigan qilib tanlaymiz. Natijada so'ngi tenglama bir jinsliga aylanib,

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right)$$

ko‘rinishni oladi. Uni yechib $u = x - \alpha$, $v = y + \beta$ formulalar orqali dastlabki x va y o‘zgaruvchilarga qaytsak (8.15) tenglamaning umuiy yechimini (integralini) hosil qilamiz.

Agar

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lsa, (8.16) sistema yechimga ega bo‘lmaydi. Biroq bu holda $a_1/a = b_1/b = \lambda$, ya’ni $a_1 = \lambda a$ va $b_1 = \lambda b$ bo‘ladi. Shuning uchun bu holda (8.15) tenglama

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right)$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglamada $z = ax + by$ almashtirish olsak, u o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga aylanadi.

Haqiqattan ham,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

va bundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}.$$

Ularni yuqorida hosil qilingan tenglamaga qo‘ysak, uning o‘zgaruvchilari ajraladi:

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right).$$

8.9-Misol. $(x + 2y + 1)dx - (2x + y - 1)dy = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

► Tenglamani

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ deb yangi u va v o‘zgaruvchilar kirirtamiz. U holda $dx = du$, $dy = dv$ va ularni tenglamaga qo‘yamiz:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + \alpha + 2v + 2\beta + 1}{2u + 2\alpha + v + \beta - 1} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}.$$

α va β noma'lumlarni

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0 \end{cases}$$

bo‘ladigan qilib tanlaymiz.

So‘ngi sistemani yechib $\alpha = 1$, $\beta = -1$ qiymatlarga ega bo‘lamiz. Natijada tenglama

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}$$

ko‘rinishni oladi va u bir jinsli bo‘ladi. Yuqoridagidek singari, $v = tu$ almashtirish yordamida hosil qilingan bu bir jinsli tenglama yechiladi. So‘ngra u va v o‘zgaruvchilar o‘rniga mos ravishda $x - 1$ va $y + 1$ ifodalarni qo‘yib, $(2 - x + 2)^3 = C(x + y)$ berilgan tenglamaning umumiy integralini topamiz. ◀

8.5. Yuqori tartibli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar

Tartibi birdan katta bo‘lgan har qanday differensial tenglama *yuqori tartibli differensial tenglama* deb aytiladi. n – tartibli differensial tenglama umumiy holda

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ko‘rinishda, agar uni n – tartibli hosilaga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (8.17)$$

ko‘rinishda yoziladi.

(8.17) tenglamaning umumiy yechimi x o‘zgaruvchidan tashqari yana n ta ixtiyoriy $C_1, C_2, \dots, C_n$ o‘zgarmaslarga bog‘liq bo‘lgan

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (8.18)$$

funksiya orqali belgilanadi. Ixtiyoriy o'zgarmaslarga aniq bir $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ qiymatlar berib, aniq bir $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$ yechimni hosil qilamiz. Bunday yechimlar (8.17) tenglamaning xususiy yechimlari deb ataladi.

(8.18) umumiy yechimlar orasidan kerakli xususiy yechimni aniqlash uchun

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (8.19)$$

boshlang'ich shartlar beriladi (ularning soni har doim tenglamaning tartibiga teng). (8.18) funksiyani $(n - 1)$ marta differensiallab va $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ deb olsak $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmaslarga nisbatan n ta

[illegible]

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib kerakli $C_1, C_2, \dots, C_n$ qiymatlar topiladi.

Bu sistema har doim ham yechimga egami (agar yechimga ega bo'lsa, u vagonami) degan savolga quyidagi Koshi teoremasi javob beradi.

8.2-Teorema. $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya va uning birinchi tartibli

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

xususiyl hosilalari $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ o'zgaruvchilarning biror D o'zgarish sohasida uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy $M(x_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ nuqta uchun (8.17) tenglamaning (8.19) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi va M nuqtaning biror atrofida aniqlangan yagona yechimi mavjud.

8.11-Ta'rif. (8.17) tenglamaning umumiy yechimi deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ funksiyaga aytiladi:

1) $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmaslarning ixtiyoriy $C_1 = C_1^*, C_2 = C_2^*, \dots, C_n = C_n^*$ qiymatlarida $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$ funksiya bu tenglamaning yechimi bo'ladi;

2) Ixtiyoriy $(x_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ nuqta uchun yagona ravishda shunday $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ sonlar topildiki, bunda $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$ funksiya (8.19) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi.

8.6. O'zgarmas koefitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar

O'zgarmas koefitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (8.20)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda p va q o'zgarmas sonlar.

Biror (a, b) oraliqda aniqlangan $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin.

8.12-Ta'rif. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarning nisbati $a < x < b$ oraliqda o'zgarmas songa teng, ya'ni

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \text{const}$$

bo'lsa, bu funksiyalar (a, b) oraliqda *chiziqli bog'liq* deyiladi.

Agar $a < x < b$ oraliqda

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$$

bo'lsa, ular bu oraliqda *chiziqli erkli* deyiladi.

8.3-Teorema. Agar y_1 va y_2 ikkinchi tartibli (8.20) tenglamaning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimlari bo'lsa,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (8.21)$$

(8.20) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi, bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Shunday qilib, keltirilgan teoremaga ko'ra, (8.20) tenglamaning umumiy

yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimlarini topish kifoya ekan.

(8.20) tenglamaning xususiy yechimlarini $y = e^{kx}$ ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k o‘zgarmas son. U holda

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$$

bo‘ladi va ularni (8.20) tenglamaga qo‘yib

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \text{ yoki } e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. $e^{kx} \neq 0$ bo‘lganligidan

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (8.22)$$

hosil bo‘ladi.

Demak, agar k soni (8.22) tenglamani qanoatlantirsa, e^{kx} ikkinchi tartibli (8.20) tenglamaning xususiy yechimi bo‘lar ekan. (8.22) tenglama (8.20) differensial tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deb ataladi.

Ko‘rinib turibdiki xarakteristik tenglama kvadrat tenglama va shuning uchun $D = p^2 - 4q$ diskriminant qiymatining ishorasiga qarab quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

1) $D > 0$, bu holda xarakteristik tenglama ikkita har xil

$$k_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad k_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

haqiqiy ildizga ega;

2) $D = 0$, bu holda xarakteristik tenglama o‘zaro teng $k_1 = k_2 = -p/2$ haqiqiy ildizga ega;

3) $D < 0$, bu holda xarakteristik tenglama haqiqiy ildizga ega emas.

Har bir holni alohida qarab chiqamiz.

1) Xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va har xil: $k_1 \neq k_2$. Bu holda (8.20) tenglamaning xususiy yechimlari $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ bo‘ladi. Bu xususiy yechimlar chiziqli erkli, chunki

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const.}$$

Shu sababli (8.20) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (8.23)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

8.10-Misol. $y'' + 3y' + 2y = 0$ tenglamani integrallang.

► Bu tenglamaning

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

xarakteristik tenglamasi ikkita $k_1 = -1$ va $k_2 = -2$ ildizlarga ega. Shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi (8.23) formulaga ko‘ra

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

funksiyadan iborat bo‘ladi. ◀

2) Xarakteristik tenglama ikkita bir xil $k_1 = k_2 = -p/2$ haqiqiy ildizga ega. Bu holga (8.20) tenglamaning bizga kerak bo‘lgan ikkita yechimdan biri $y_1 = e^{k_1 x}$ bo‘ladi. Bu yechim bilan chiziqli erkli bo‘ladigan ikkinchi yechimni topish kerak.

Ikkinchi yechimni $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$ ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $u(x)$ hozircha noma’lum funksiya. Uning hosilalarini olamiz:

$$y_2' = u' \cdot e^{k_1 x} + k_1 u \cdot e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u);$$

$$y_2'' = k_1 e^{k_1 x}(u' + k_1 u) + e^{k_1 x}(u'' + k_1 u') = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u)$$

va ularni (8.20) tenglamaga qo‘yamiz:

$$e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u) + p e^{k_1 x}(u' + k_1 u) + q e^{k_1 x} = 0$$

yoki

$$e^{k_1 x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

k_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun $2k_1 + p = 0$ va $k_1^2 + pk_1 + q = 0$ bo‘ladi.

Demak $u(x)$ funksiyaning topish uchun $e^{k_1 x}u'' = 0$ yoki $u'' = 0$ tenglamani yechish kerak. Bu tenglamaning yechimi esa $y = Ax + B$ funksiya bo‘ladi. Biz xususiy holda $A = 1$ va $B = 0$ deb olamiz. Shuning uchun (8.20) tenglamaning ikkinchi xususiy yechimi $y_2 = x e^{k_1 x}$ funksiya bo‘ladi. Bu yechim y_1 yechim bilan chiziqli erkli, chunki

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{x e^{k_1 x}} = \frac{1}{x} \neq \text{const.}$$

Shuning uchun (8.20) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x) \quad (8.24)$$

funksiyadan iborat bo'ladi.

8.11-Misol. $y'' - 6y' + 9y = 0$ tenglamani integrallang.

► Berilgan differensial tenglamaning

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

xarakteristik tenglamasi ikkita bir xil $k_1 = k_2 = 3$ ildizga ega. Demak berilgan tenglamaning umumiy yechimi (8.24) formulaga ko'ra

$$y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$$

bo'ladi. ◀

3) Xarakteristik tenglamaning diskriminanti manfiy bo'lsin. U holda

$$\alpha = -p/2, \quad \beta = \sqrt{|D|}/2 = \sqrt{4q - p^2}/2 = \sqrt{q - p^2/4} \quad (8.25)$$

deb belgilash kiritamiz va

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

funksiyalar (8.20) tenglamaning xususiy yechimlari bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham, y_1 funksiyaning hosilalarini topamiz:

$$\begin{aligned} y_1' &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x \\ &= e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'' &= \alpha e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + e^{\alpha x} (-\alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - \alpha \beta \sin \beta x - \alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} ((\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x). \end{aligned}$$

y_1 funksiyaning va uning hosilalarini (8.20) tenglamaga qoyamiz va ixchamlaymiz:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} ((\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x) + p e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + \\ + q e^{\alpha x} \cos \beta x = 0, \end{aligned}$$

yoki

$$e^{\alpha x} ((\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) \cos \beta x - \beta(2\alpha + p) \sin \beta x) = 0.$$

Agar $\cos \beta x$ va $\sin \beta x$ funksiylar oldidagi $\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q$ va $\beta(2\alpha + p)$ ko'paytuvchilar nolga tengligini ko'rsatsak $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ funksiya (8.20) tenglamani qanoatlantirishini isbotlagan bo'lamiz. Haqiqatdan

ham (8.25) belgilashlarga ko‘ra

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2}\right) + q = \\ &= \frac{p^2}{4} - q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = 0,\end{aligned}$$

va

$$\beta(2\alpha + p) = \sqrt{q - p^2/4} \left(2\left(-\frac{p}{2}\right) + p\right) = 0,$$

ya'ni $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ funksiya (8.20) tenglamaning xususiy yechimi bo‘lar ekan.

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ funksiya ham (8.20) tenglamaning xususiy yechimi bo‘lishi xuddi shu singari isbotlanadi. Buni tekshirib ko‘rishni kitobxonga havola qilamiz.

y_1 va y_2 funksiyalar chiziqli erkli, chunki

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \operatorname{const}.$$

Demak, xarakteristik tenglamaning diskriminanti manfiy bo‘lganda (8.20) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

yoki

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (8.26)$$

funksiyadan iborat bo‘ladi, bu yerda α va β koeffitsiyentlar (8.25) tengliklar bilan aniqlanadi.

8.12-Misol. $y'' - 4y' + 13y = 0$ tenglamani integrallang.

► Berilgan differensial tenglama

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

xarakteristik tenglamasining diskriminanti $D = p^2 - 4q = (-4)^2 - 4 \cdot 13 = -36$ manfiy son ekan. Shuning uchun α va β koeffitsiyentlar (8.25) tengliklar bilan aniqlaymiz:

$$\alpha = -\frac{p}{2} = -\frac{-4}{2} = 2, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \sqrt{13 - \frac{(-4)^2}{4}} = 3$$

va ularni (8.26) formulaga qoyib, berilgan differensial tenglamaning

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

umumiy yechimini hosil qilamiz. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday tenglamalarga differensial tenglama deb ataymiz?
2. Qanday qiymatga differensial tenglamaning tartibi deb ataladi?
3. Differensial tenglamaning yechimi nima bo'ladi?
4. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi qanday bo'ladi?
5. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi nechta o'zgarmasga bog'liq bo'ladi?
6. Qanday yechimga differensial tenglamaning xususiy yechimi deyiladi?
7. O'zgaruvchilari ajralgan birinchi tartibli differensial tenglama qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. Qanday funksiyalarni n –tartibli bir jinsli funksiya deb ataymiz?
9. Qanday tenglamani birinchi tartibli bir jinsli tenglama deb ataymiz?
10. O'zgarmas ko'effitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar qanday ko'rinishda bo'ladi?
11. Qanday tenglamaga o'zgarmas ko'effitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deb ataladi?
12. O'zgarmas ko'effitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday topiladi?

Mashqlar.

Quyidagi differensial tenglamalarning tartibini aniqlang:

1. $5y''' + y'' \sin x = 0$. 2. $y^{IV} \cos x + x^2 y''' + y'' + 5y' + y = 0$.

Quyidagi o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamalarni integrallang:

3. $x^2 dx + y^3 dy = 0$. 4. $\sin x dx - \cos y dy = 0$. 5. $6x^5 dx + 5y^4 dy = 0$.

Quyidagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarni integrallang:

6. $xy^3 dx - y^2 x^4 dy = 0$; 7. $x\sqrt{1-y^2} dx - y\sqrt{1+x^2} dy = 0$.

Quyidagi birinchi tartibli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini toping:

8. $y' = y/x + 1/\sin(y/x)$. 9. $y' = y/x + 1/(1 + (y/x)^2)$.

Quyidagi o'zgaras koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

10. $y'' + 11y' + 30y = 0$. 11. $y'' - 12y' + 36y = 0$. 12. $y'' - 10y' + 74y = 0$.

Javoblar.

1. 3; 2. 4; 3. $x^3/3 + y^4/4 = C$; 4. $\cos x dx + \sin y dy = C$;

5. $y = \sqrt[5]{C - x^6}$; 6. $y = Cy^{-1/2x^2}$; 7. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$;

8. $\cos(y/x) + \ln x = C$; 9. $3x^2y + y^3 - 3x^3 \ln|x| = C$;

10. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-6x}$; 11. $y = (C_1 + xC_2)e^{6x}$;

12. $y = e^{-5x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)$.

IX BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

Ehtimollar nazariyasi bu matematik fan bo'lib, u o'zaro qandaydir ko'rinishda bog'langan hodisalardan birining ehtimolini boshqalarining ehtimollari bo'yicha topish imkonini beradi.

Ehtimollar nazariyasi ma'lum bir shart-sharoitda ko'p marta takrorlanadigan tasodifiy hodisalarning xususiyatlarini o'rganadi.

9.1. Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

Ma'lum bir shart-sharoitda yuz berishi ham, yuz bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisalarga *tasodifiy hodisa* deb ataymiz. Ana shu shart-sharoitni yuzaga keltirish uchun bajarilgan harakatlar majmuasi *tajriba* deb yuritiladi.

Tajriba o'tkazilganda albatta yuz beradigan hodisa *muqarrar hodisa*, hech qachon yuz bermaydigan hodisa esa *mumkin bo'lmagan hodisa* deb ataladi.

Tasodifiy hodisalar $A, B, C, \dots$ harflar bilan, muqarrar hodisa Ω orqali va mumkin bo'lmaga hodisa esa $\emptyset$ orqali belgilanadi.

9.1-Misol. Tanga uch marta tashlandi. Mazkur tajriba natijasida yuz berishi mumkin bo'lgan barcha hodisalarni toping.

► Tanga tashlanganda tanganing yuqori qismiga gerb tushishini G orqali, raqam tushishini esa R orqali belgilaymiz. U holda

$$\Omega = \{GGG, GGR, GRG, RGG, GRR, RGR, RRG, RRR\}.$$

Shunday qilib, mazkur tajriba natijasida 8 ta hodisa yuz berishi mumkin ekan. ◀

Agar tajriba natijasida A va B hodisalardan birining yuz berishi ikkinchisining yuz berishini istisno qilsa, ya'ni bir vaqtda yuz berishmasa, ular *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi. Aks holda *birgalikda bo'lgan hodisalar* deyiladi.

9.2-Misol. O'yin toshi (narda toshi) tashlandi. Toshning ustki qismiga tushgan raqam kuzatiladi. $A = \{5 \text{ raqami tushdi}\}$, $B = \{\text{tushgan raqam juft}\}$, $C = \{\text{tushgan raqam 3 soniga karrali}\}$ hodisalardan A va B hamda A va C

birgalikda bo'lmagan hodisalar, 6 raqami tushsa B hodisa ham C hodisa ham yuz beradiganligi tufayli, ular birgalikda bo'lgan hodisalar.

Ixtiyoriy ikkitasi birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi.

Tajriba natijasida albatta bittasi yuz beradigan birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisa *hodisalarning to'liq guruhi* deyiladi.

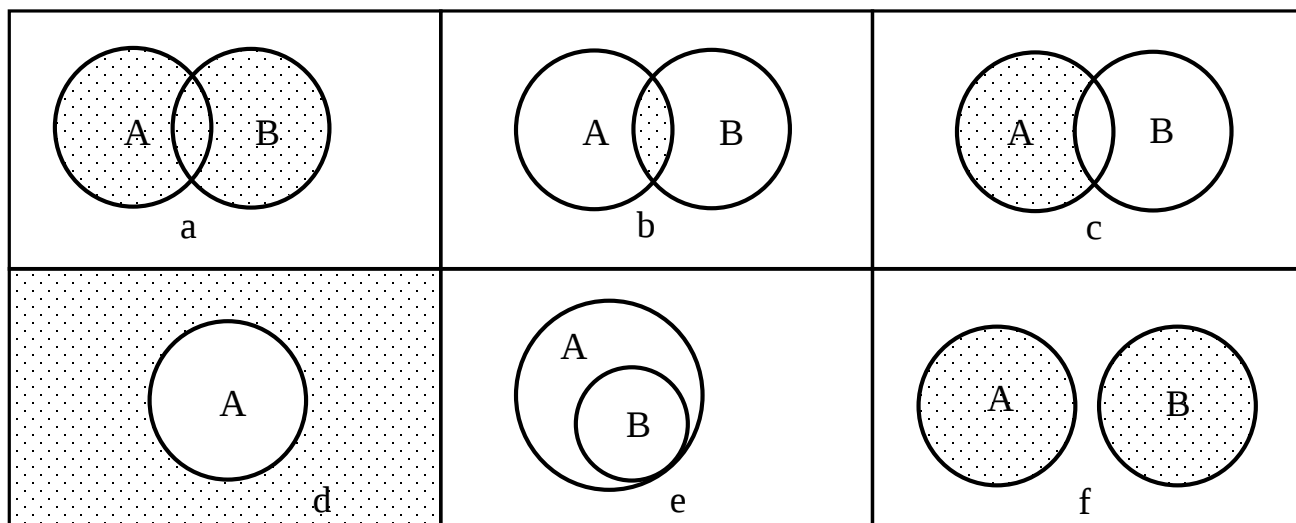
9.3-Misol. O'yin toshi tashlandi. $A_i = \{i \text{ raqami tushdi}\}$ hodisalarni kiritamiz. U holda $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar va ular to'liq guruhni tashkil qiladi.

Endi tasodifiy hodisalar ustida amallarni geometrik talqini bilan kiritamiz. To'g'ri to'rtburchak bilan chegaralangan sohaga ixtiyoriy ravishda nuqta qo'yamiz, A va B orqali ana shu nuqtaning mos ravishda A va B doiralarga tushish hodisasini belgilaymiz (9.1a-9.1e rasmlar).

A va B hodisalardan hech bo'lmaganda biri yuz beradigan hodisaga A va B *hodisalarning yig'indisi* deyiladi va $A + B$ yoki $A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi (9.1a-rasm).

A va B hodisalarning birgalikda yuz berishidan iborat hodisaga A va B *hodisalarning ko'paytmasi* deyiladi va AB yoki $A \cap B$ ko'rinishda belgilanadi (9.1b-rasm).

A yuz berib, B esa yuz bermaydigan hodisaga A va B *hodisalarning ayirmasi* deyiladi va $A - B$ yoki $A \setminus B$ ko'rinishda belgilanadi (9.1c-rasm).



9.1-rasm

A yuz bermagandagina yuz beradigan hodisaga A hodisaga *qarama-qarshi hodisa* deyiladi va u $\bar{A}$ orqali belgilanadi (9.1d-rasm).

Agar A hodisa yuz berganda albatta B hodisa ham yuz bersa, B hodisa A hodisaning qismi deyiladi va $B \subseteq A$ ko‘rinishda yoziladi (9.1e-rasm).

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lsa, A va B hodisalar *teng* yoki *ekvivalent hodisalar* deyiladi va $A = B$ ko‘rinishda yoziladi.

Birgalikda bo‘lmagan A va B hodisalar 9.1f-rasmda tasvirlangan.

Tasodifiy hodisalar ustida kiritilgan amallar quyidagi xossalarga ega:

- $A + B = B + A$, $AB = BA$ (o‘rin almashtirish);
- $(A + B)C = AC + BC$ (taqsimot);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (guruhlash);
- $A + A = A$, $AA = A$;
- $A + \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$;
- $A + \bar{A} = \Omega$, $A\bar{A} = \emptyset$;
- $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$, $\bar{\bar{A}} = A$;
- $A - B = A\bar{B}$;
- $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ –De Morgan qonuni.

9.2. Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi va statistik ehtimoli

n marta takrorlanuvchi tajribalarda A hodisa m^* marta yuz bersin.

9.1-Ta’rif. A hodisa m^* yuz berishlar sonining n barcha tajribalar soniga nisbatiga A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi va

$$P^*(A) = m^*/n \quad (9.1)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Nisbiy chastota quyidagi xossalarga ega:

- Har qanday hodisaning nisbiy chastotasi nol va bir oralig‘ida yotadi:

$$0 \leq P^*(A) \leq 1.$$

- Mumkin bo‘lmagan hodisaning nisbiy chastotasi nolga teng:

$$P^*(\emptyset) = 0.$$

- Muqarrar hodisaning nisbiy chastotasi birga teng:

$$P^*(\Omega) = 1.$$

9.4-Misol. Tanga tashlanganda gerb tomoni tushishlar sonini tahlil qilish uchun 8 qismdan iborat tajribalar o'tkazildi:

1-qismda tanga 3 marta tashlandi va gerb tomoni 2 marta tushdi,
 2-qismda tanga 7 marta tashlandi va gerb tomoni 3 marta tushdi,
 3-qismda tanga 10 marta tashlandi va gerb tomoni 5 marta tushdi,
 4-qismda tanga 50 marta tashlandi va gerb tomoni 26 marta tushdi,
 5-qismda tanga 100 marta tashlandi va gerb tomoni 49 marta tushdi,
 6-qismda tanga 200 marta tashlandi va gerb tomoni 102 marta tushdi,
 7-qismda tanga 500 marta tashlandi va gerb tomoni 253 marta tushdi,
 8-qismda tanga 1000 marta tashlandi va gerb tomoni 495 marta tushdi.

Tajribalar o'tkazilgan har-bir qismda gerb tushishlarning nisbiy chastotasi mos ravishda $1 \rightarrow 2/3 \approx 0,67$; $2 \rightarrow 3/7 \approx 0,43$; $3 \rightarrow 5/10 = 0,5$; $4 \rightarrow 26/50 = 0,52$; $5 \rightarrow 49/100 = 0,49$; $6 \rightarrow 102/200 = 0,51$; $7 \rightarrow 253/500 = 0,506$; $8 \rightarrow 495/1000 = 0,495$ qiymatlarni qabul qiladi.

Olingan natijalarni tahlil qiladigan bo'lsak, tajribalar soni nisbatan kichik bo'lganda nisbiy chastotalar bir-biridan sezilarli farq qilar ekan. Tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda nisbiy chastotalar bir-biridan juda kam farq qiladi va tajribalar soni oshgan sari bu farq kamayib boradi. Shuning uchun tajribalar soni keskin osha boshlagan sari nisbiy chastota o'zining tasodifiyligini yo'qota boshlaydi deb xulosa qilish mumkin.

Kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, shunday bir p soni mavjudki, tajribalar soni katta bo'lganda ayrim hollarni istisno qilgan ko'pchilik hollarda A hodisaning nisbiy chastotasi bu sondan kam farq qiladi. Ana shu sonni A hodisaning *statistik ehtimoli* yoki qisqacha A hodisaning *ehtimoli* deb ataymiz.

A hodisaning yuz berish ehtimolini $P(A)$ orqaqli belgilaymiz. Shunday qilib, $P(A) = p$ deb yozish mumkin. Tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganda

$$P(A) \approx P^*(A) = m^*/n \quad (9.2)$$

Tajribalar soni n oshgan sari A hodisaning $P^*(A)$ nisbiy chastotasi uning $P(A)$ yuz berish ehtimoliga yaqinlashsadi.

$P(A)$ statistik ehtimol ham nisbiy chastota singari quyidagi xossalarga ega:

- Har qanday hodisaning ehtimoli nol va birning oralig'ida joylashgan, ya'ni

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

- Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng, ya'ni

$$P(\emptyset) = 0.$$

- Muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng, ya'ni

$$P(\Omega) = 1.$$

9.3. Ehtimolning klassik ta'rifi

Ko'pgina hollarda qaralayotgan hodisaning ehtimolini o'tkazilayotgan tajribaning tahlilidan kelib chiqqan holda bevosita hisoblash mumkin.

9.3-Misolda qaralgan tajribani tahlil qilamiz. O'yin toshi simmetrikligidan A_i hodisalar bir xil imkoniyatga ega. Shuning uchun biz ularni *teng imkoniyatli hodisalar* deb ataymiz. O'yin toshi ko'p marta tashlanganda ixtiyoriy $i = \overline{1,6}$ qiymatda A_i hodisa taxminan $n/6$ marta yuz beradi, ya'ni $P^*(A)$ nisbiy chastota $1/6$ qiymatga yaqin bo'ladi. Shuning uchun o'yin toshining yuqori qismiga i raqamining tushish ehtimoli $1/6$ nisbatga teng deb hisoblash mumkin.

Birgalikda bo'lmagan teng imkoniyatli n ta hodisalarning to'liq guruhini qaraymiz. Bu guruhdan olingan hodisaning yuz berish natijasida A hodisa ham yuz bersa, bunday hodisani A hodisaga *imkoniyat yaratuvchi hodisa* deb ataymiz.

9.2-Ta'rif. A tasodifiy hodisaning $P(A)$ ehtimoli deb, A hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalar m sonining barcha yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalar n soniga nisbatiga aytiladi:

$$P(A) = m/n. \quad (9.3)$$

A hodisaning ehtimoli uning statistik ehtimoli bilan bir xil xossalarga ega.

9.5-Misol. Qutida 8 ta oq va 3 ta qora shar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda olingan shar oq rangda bo‘lish ehtimolini toping.

► $A = \{\text{qutidan oq rangli shar olindi}\}$ hodisani kiritamiz. Teng imkoniyatli hodisalarning soni $n = 8 + 3 = 11$ ekanligi ravshan. Oq rangli sharlar soni 8 ta bo‘lganligi tufayli, A hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni $m = 8$ bo‘ladi. Shuning uchun (9.3) formulaga ko‘ra $P(A) = 8/11$ bo‘ladi. ◀

9.4. Kombinatorika elementlari

Ehtimolning klassik ta’rifiga ko‘ra A hodisaning ehtimolini hisoblash unga imkoniyat yaratuvchi hodisalarning sonini hisoblashga, aniqrog‘i kombinatorika masalalarini yechishga keltirilar ekan. Biz quyida tez-tez ishlatiladigan kombinatorika formulalarini keltiramiz.

Turli guruhlar elementlarining kombinatsiyasi. Elementlarning r guruhi berilgan bo‘lsin: birinchi guruh n_1 ta $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}$ elementdan, ikkinchi guruh n_2 ta $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n_2}$ elementdan va hokazo r – guruh n_r ta $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn_r}$ elementdan iborat. r ta elementdan iborat kombinatsiyalar shunday tuziladiki, bunda har bir kombinatsiyaga har bir guruhdan bittadan element qatnashadi. Barcha $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ri_r}$ kombinatsiyalar soni

$$N = n_1 n_2 \dots n_r \quad (9.4)$$

formula bilan aniqlanadi.

Xususiyl holda birinchi guruh $a_1, a_2, \dots, a_k$ elementlardan, ikkinchi guruh esa $b_1, b_2, \dots, b_l$ elementlardan iborat bo‘lsa, barcha (a_i, b_j) kombinatsiyalar soni $N = k \cdot l$ tenglik bilan aniqlanadi.

9.6-Misol. Birinchi guruhda 19 ta, ikkinchisida 21 ta va uchinchi guruhda 20 ta talaba bor. Har bir guruhga bittadan dam olish uyiga yo‘llanma ajratilgan. Har bir guruhdan bittadan talabani tanlab, dam olishga necha usul bilan “uchlik”larni jo‘natish mumkin?

► Shartga ko‘ra $n_1 = 19, n_2 = 21$ va $n_3 = 20$. U holda (9.4) formulaga ko‘ra “uchliklar” soni $N = n_1 n_2 n_3 = 19 \cdot 21 \cdot 20 = 7980$, ya’ni uchta

yo‘llanma bilan uch guruhdan 7980 usul bilan uchta talabani jo‘natish mumkin ekan. ◀

O‘rinlashtirishlar. n ta $a_1, a_2, \dots, a_n$ element berilgan. Ularni r tadan qilib joylashish tartibini inobatga olgan holda barcha $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiyalarini tuzamiz, boshqacha qilib aytganda n elementning r tasini r ta o‘ringa joylashtiriladi. Bunday kombinatsiyalar (o‘rinlashtirishlar) soni

$$N = A_n^k = n!/(n - r)! \quad (9.5)$$

formulaga ko‘ra hisoblanadi.

9.7-Misol. Guruhda 20 ta talaba bor. Guruh sardorini, yoshlar harakati yetakchisini, kasaba uyushmasi a‘zosini va guruh tashkilotchisini saylash kerak. Agar har bir talaba faqat bitta lavozimni egallash mumkin bo‘lsa, necha usul bilan bu lavozimlarni guruh talabalari o‘rtasida taqsimlash mumkin?

► Bu holda 20 elementni 4 tadan qilib o‘rinlashtirishlar sonini topish kerak. (9.5) formulaga ko‘ra $N = A_{20}^4 = 20!/(20 - 4)! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$, ya‘ni 20 talabadan to‘rtta lavozimga to‘rt kishini 116280 usul bilan saylash mumkin ekan. ◀

Takroriy o‘rinlashtirishlar. n ta elementan iborat $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to‘plam berilgan. Bu to‘plamdan ketma-ket a_i elementlardan bittasi tanlanadi va yana to‘plamga qaytariladi. Natijada r – qadamda $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiya ro‘yxatga olinadi. Bunday barcha $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiyalar soni

$$N = n^r \quad (9.6)$$

formula bilan hisoblanadi, bunda k – qadamda a_{i_k} element D to‘plamdan olingan. Bunday kombinatsiyalarda bitta element 1 tadan r tagacha ham qatnashishi mumkin, biroq kombinatsiyalar elementlarning o‘rni bilan farq qilishi mumkin.

9.8-Misol. 1, 2, 3 raqamlaridan tuzilgan barcha ikki xonali sonlarning soni nechta va ularni yozib chiqing.

► Bu yerda 3 ta elementni 2 tadan qilib takroriy o‘rinlashtirishlar sonini topish kerak: $N = 3^2 = 9$. Endi bu raqamlardan tuzilgan barcha ikki xonali sonlarni yozamiz: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. ◀

Guruhlashlar. $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to‘plamning r ta elementidan tuzilgan $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiyalarda elementning tartibi inobatga olinmaydi va bitta element bitta kombinatsiyada faqat bir marta qatnashadi. Demak bir xil elementlardan tashkil topgan kombinatsiyalar teng hisoblanadi. Bunday kombinatsiyalarning soni

$$N = C_n^r = n! / [(n - r)! r!] \quad (9.7)$$

formulaga ko‘ra hisoblanadi.

9.9-Misol. Guruhda 20 ta talaba bor. Guruhga dam olish uyiga borish uchun uchta yo‘llanma ajratilgan. Necha usul bilan guruh talabalaridan uchtasini dam olish uyiga jo‘natish mumkin.

► 20 ta elementni 3 tadan qilib guruhlashlar sonini topish kerak: $N = C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = 1140$. Demak 25 talabani uchtdan guruhlab 1140 usul bilan dam olish uyiga jo‘natish mumkin ekan. ◀

O‘rin almashtirishlar. Bunda n ta turli elementli $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to‘plam elementlaridan faqat elementlarning tartibi bilan farq qiladigan barcha $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ kombinatsiyalar qaraladi. Har bir kombinatsiyada bitta element faqat bir marta qatnashadigan bunday kombinatsiyalar soni

$$N = P_n = n! \quad (9.8)$$

formula bilan hisoblanadi.

Boshqacha qilib aytganda $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to‘plam elementlarining o‘rinlarini almashtirishlar soni $N = n!$ Tenglik bilan aniqlanadi.

9.10-Misol. Axmedov, Botirov va Vohidov familiyalaridan necha usul bilan uchta familiyalai ro‘yxat tuzish mumkin va bu ro‘yxatlarni keltiring.

► 3 ta elementning o‘rin almashtirishlar sonini topish kerak: $N = P_3 = 3! = 6$. Endi bu familiyalarning bosh harflaridan tuzilgan ro‘yxatlarni keltiramiz: $\{A, B, V\}, \{A, V, B\}, \{B, A, V\}, \{B, V, A\}, \{V, A, B\}, \{V, B, A\}$. ◀

Stirling formulasi. Yuqorida keltirilgan formulalarning ko‘p qismida $n!$ ifoda qatnashadi. n ning katta qiymatlarida uni hisoblash ko‘p mehnatni talab qiladi. $n!$ ifodaning taqribiy qiymatini beruvchi sodda formula mavjud: n ning katta qiymatlarida

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \quad (9.9)$$

munosabat o‘rinli. Bu formula *Stirling formulasi* deb yuritiladi. Stirling formulasining nisbiy xatoligi ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun

$$0 < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} - 1 < e^{\frac{1}{12n}} - 1$$

tengsizlik bilan baholanadi.

9.11-Misol. Qutida 100 ta tayyor mahsulot bor. Ulardan 10 tasi ixtiyoriy ravishda tanlanib olinib, sifat nazorati tekshiruviga jo‘natildi. Agar tanlangan mahsulotlar orasida sifatsizi chiqmasa, barcha 100 ta mahsulot qabul qilinadi, aks holda ularning barchasi qo‘shimcha nazoratga yuboriladi. Agar qutida 10 ta sifatsiz mahsulot mavjud bo‘lsa, 100 ta mahsulotning qabul qilinish ehtimolini toping.

► 100 ta mahsulotdan 10 tadan qilib tanlashlar soni 100 dan 10 talab guruhlashlar soniga teng: $n = 100!/[10! \cdot 90!]$ va $A = \{\text{barcha tayyor mahsulot nazoratchi tomonidan qabul qilinadi}\}$ hodisasi 10 tanlangan mahsulotning barchasi sifatli bo‘lgandagina yuz beradi. Masala shartiga ko‘ra bunday sifatli mahsulotlarning umumiy soni 90 ga teng. Shuning uchun A hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni 90 dan 10 talab guruhlashlar soniga teng bo‘ladi: $m(A) = 90!/[10! \cdot 80!]$. U holda (9.3) formulaga ko‘ra qidirilayotgan ehtimol uchun

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{\frac{90!}{10! \cdot 80!}}{\frac{100!}{10! \cdot 90!}} = \frac{81 \cdot 82 \cdot \dots \cdot 90}{91 \cdot 92 \cdot \dots \cdot 100} \approx \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 0,349$$

qiymatni hosil qilamiz. ◀

9.5. Geometrik ehtimol

Tajriba natijasi chekli sondagi teng imkoniyatli hodisalardan iborat bo'lsa, mazkur tajriba bilan bog'liq A hodisaning $P(A)$ ehtimoli bu hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalarning “ulushi” sifatida aniqlanadi. Natijalari cheksiz sanoqsiz to'plamdan iborat bo'lgan murakkab tajribalarda ham ehtimollar ana shu “ulushlar”dan foydalanilib hisoblanadi.

Tekislikda yuzasi S_Ω bo'lgan Ω soha va bu sohaning qismi bo'lgan D soha berilgan bo'lsin. D qismaniy sohaning yuzi S_D bo'lsin. Ω sohaga ixtiyoriy ravishda X nuqta tashlansin, bunda X nuqtaning Ω sohaga tushishi muqarrar, D sohaga tushishi esa tasodifiy hodisa deb faraz qilamiz. Ω sohaning barcha nuqtalari “teng huquqli” deb hisoblaymiz. Ushbu $A = \{X \text{ nuqta } D \text{ sohaga tegishli: } X \in D\}$ hodisasini kiritamiz.

A hodisaning geometrik ehtimoli deb D soha yuzining Ω soha yuzi nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A) = S_D/S_\Omega. \quad (9.10)$$

Ehtimolning geometrik ta'rifini Ω va D sohalarning ikkalasi ham chiziqli yoki hajmli bo'lganda ham qo'llash mumkin: birinchi holda

$$P(A) = L_D/L_\Omega \quad (9.11)$$

va ikkinchi holda

$$P(A) = V_D/V_\Omega \quad (9.12)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda L mos sohaning uzunligi, V esa hajmi.

9.12-Misol. Uzunligi L bo'lgan kesmaga x nuqta ixtiyoriy ravishda tashlanmoqda. Tashlangan nuqtaning kesma markazidan chetlanishi l dan oshmaslik ehtimolini toping.

► x nuqta kesmaning ixtiyoriy nuqtasiga tushishi mumkinligi tufayli, tajriba cheksiz ko'p natijaga ega. Bundan tashqari masala shartidan kesmaning barcha nuqtalari teng imkoniyatli.

$A = \{x \text{ nuqtaning kesma markazidan chetlanishi } l \text{ dan oshmaydi}\}$ hodisasini kiritamiz. Bu hodisa x nuqta kesma markazidan uzog'i bilan l masofada yotgan holdagina yuz beradi. Bunday nuqtalarning “ulushi” $L(A)/L$

nisbat sifatida aniqlanadi. Bu yerda L butun kesmaning uzunligi, $L(A) = 2l$ esa A hodisaga imkoniyat yaratuvchi kesmaning uzunligi. Shunday qilib

$$P(A) = \begin{cases} \frac{2l}{L}, & \text{agar } 2l < L, \\ 1, & \text{agar } 2l \geq L \end{cases}$$

tenglikni hosil qilamiz. ◀

9.6. Ehtimollarni qo'shish

Birgalikda bo'lmagan A_1, A_2 hodisalar va ularning $A = A_1 + A_2$ yig'indisini qaraymiz. Tajriba natijasida birgalikda bo'lmagan hodisalarining to'liq guruhini tashkil qiluvchi n hodisadan biri yuz bersin. $m(A), m(A_1)$ va $m(A_2)$ mos ravishda bu tajriba natijasida A, A_1 va A_2 hodisalar yuz berishlariga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni bo'lsin. Agar tajriba natijasida A hodisa yuz bersa, bu yoki A_1 hodisa yoki A_2 hodisa yuz berganligini anglatadi (A_1 va A_2 hodisalar bir vaqtda yuz bermaydi, chunki shartga ko'ra ular birgalikda bo'lmagan hodisalar). Shuning uchun $m(A), m(A_1)$ va $m(A_2)$ sonlar o'zaro

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2)$$

tenglik bilan bog'langan. U holda ularning ehtimollari uchun

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{m(A_1) + m(A_2)}{n} = \frac{m(A_1)}{n} + \frac{m(A_2)}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shunday qilib quyidagi teoremani isbot qildik.

9.1-Teorema. Birgalikda bo'lmagan A_1, A_2 hodisalar yig'indisining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (9.13)$$

Natija. Birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalar yig'indisining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) \quad (9.14)$$

A va $\bar{A}$ birgalikda bo'lmagan hodisalar va ular to'liq guruhni tashkil qiladi. Shuning uchun

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1,$$

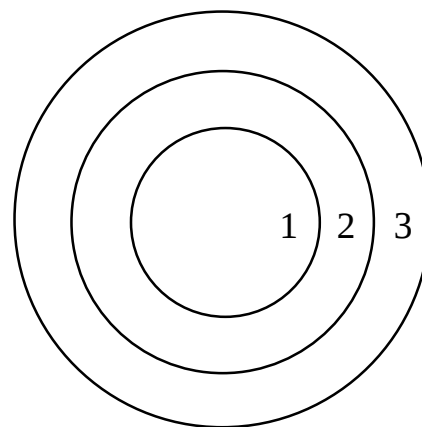
ya'ni qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng.

Hodisalar kombinatsiyalarining ehtimollari. Agar hodisalar o'rtasidagi munosabatlar 9.1- rasm bo'yicha geometrik talqin qilinadigan bo'lsa, hodisalar ehtimollarining xossalari rasmdagi figuralar yuzalarining xossalariга o'xshash bo'ladi. Xususan

$$\left. \begin{aligned} P(A \setminus B) &= P(A) - P(AB) \\ P(A + B) &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

9.13-Misol. O'zaro kesishmaydigan uch qismdan iborat nishonga qarab o'q uzilmoqda (9.2-rasm). O'q 1-qismga $P(B) = 0,04$, 2-qismga $P(C) = 0,09$ va 3-qismga $P(D) = 0,2$ ehtimol bilan tegadi. O'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

► $A = \{\text{o'q nishonga tegdi}\}$ hodisasini kiritamiz. U holda (9.14) formulaga ko'ra $P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = 0,04 + 0,09 + 0,2 = 0,33$. ◀



9.2-rasm

9.7. Hodisalarning bog'liqligi. Shartli ehtimol

Bitta tajriba bilan bog'liq bo'lgan ikkita A va B hodisalarni qaraymiz. Tajriba natijasida B hodisaning yuz berishi A hodisaning yuz berishiga qanday ta'sir qiladi degan savol tug'iladi. A va B hodisalar orasidagi bog'liqlikni quyidagi ikkita muhim holni misolda ko'rish mumkin: B hodisaning yuz berishi A hodisaning albatta yuz berishiga olib keladi yoki aksincha B hodisaning yuz berishi A hodisaning yuz berishini istisno qiladi.

9.3-Ta'rif. A hodisaning yuz berish ehtimoli B hodisaning yuz bergan yoki yuz bermaganligiga bog'liq bo'lsa, A hodisa B hodisaga *bog'liq* deyiladi.

Ehtimollar nazariyasida A va B hodisalar orasidagi bog'liqlikni B hodisa yuz bergan shartda A hodisaning $P(A|B)$ *shartli ehtimoli* tavsiflaydi va u

$$P(A|B) = P(AB)/P(B) \quad (9.16)$$

formulaga ko'ra hisoblanadi (B hodisaning ehtimoli noldan farqli deb faraz qilinadi).

A hodisa yuz bergan shartda B hodisaning $P(B|A)$ shartli ehtimolligi ham xuddi shu singari aniqlanadi:

$$P(B|A) = P(AB)/P(A), \quad P(A) \neq 0. \quad (9.17)$$

9.4-Ta'rif. A hodisaning B hodisa yuz bergan shartda $P(A|B)$ shartli ehtimol uning shartsiz ehtimolga teng, ya'ni

$$P(A|B) = P(A) \quad (9.18)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A hodisa B hodisaga *bog'liq emas* deyiladi.

9.2-Teorema. Agar A hodisa B hodisaga bog'liq bo'lmasa, B hodisa ham A hodisaga bog'liq bo'lmaydi.

► (9.18) tenglikni inobatga olgan holda (9.16) va (9.17) tengliklardan

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(AB)/P(A) = P(A|B)P(B)/P(A) = \\ &= P(A)P(B)/P(A) = P(B), \end{aligned}$$

ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli uning shartsiz ehtimoliga teng. ◀

Shunday qilib ikkita hodisadan biri ikkinchisiga bog'liq bo'lmasa, ikkinchisi ham birinchisiga bo'g'liq bo'lmaydi, ya'ni ular *o'zaro bog'liq bo'lmagan* hodisalar.

9.5-Ta'rif. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning har biri qolganlarining har biriga va ularning ixtiyoriy ko'paytmasiga bog'liq bo'lmasa, bu hodisalarni *o'zaro bog'liq bo'lmagan* hodisalar deb ataymiz.

Oddiy ehtimol qanday xossalarga ega bo'lsa shartli ehtimol ham xuddi shunday xossalarga ega, ya'ni

$$0 \leq P(A|B) \leq 1.$$

Agar B hodisa yuz berishi natijasida A hodisa ham albatta yuz bersa: $B \subseteq A$, u holda

$$P(A|B) = 1.$$

Agar B hodisa yuz berishi A hodisaning yuz berishini inkor qilsa: $AB = \emptyset$, u holda

$$P(A|B) = 0.$$

Agar A hodisa birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisalarning yig'indisidan iborat bo'lsa: $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, u holda

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^k P(A_i|B).$$

9.14-Misol. Qutida 5 ta oq va 4 ta qora rangli shar bor. Qutidan ketma-ket ikki marta bittadan shar olindi. Ushbu $B = \{\text{birinchi olinishda oq rangli shar bo'lgan}\}$, $A = \{\text{ikkinchi olinishda oq rangli shar bo'lgan}\}$ hodisalar uchun, $P(A|B)$ shartli ehtimolni toping.

► Masala shartiga ko'ra qutidajami 9 ta shar bo'lib, ulardan 5 tasi oq rangda bo'lgan. U holda birinchi olinishdan so'ng qutida 8 ta shar qoladi va ulardan 4 tasi oq rangda. Shuning uchun $P(A|B) = 4/8 = 1/2$.

Endi $P(A|B)$ ehtimollikni (9.16) formulaga ko'ra topamiz. $P(B) = 5/9$ ekanligi ravshan. $P(AB)$ ehtimolni topamiz: $n = 9 \cdot 8 = 72$ va $m(AB) = 5 \cdot 4 = 20$. Demak $P(AB) = 20/72 = 5/18$. U holda (9.16) formuladan $P(A|B) = (5/18) : (5/9) = 1/2$ yuqorida topilgan ehtimolga ega bo'lamiz. ◀

9.8. Hodisalar ko'paytmasining ehtimoli

Shartli ehtimolning (9.16) va (9.17) formulalaridan

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \quad (9.19)$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni ikkita hodisa ko'paytmasining ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining birinchisi yuz bergan shartdagi shartli ehtimoliga ko'paytmasiga teng.

(9.19) tenglik ehtimollarni ko'paytirish teoremasi yoki qoidasi deb ataladi. Bu qoida n ta hodisa uchun quyidagi tenglik bilan umumlashtiriladi:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (9.20)$$

(9.19) tenglikdan o'zaro bog'liq bo'lmagan A va B hodisalarning ko'paytmasi uchun

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (9.21)$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar ko'paytmasining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng ekan.

O'zaro bog'liq bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar ychun (9.20) tenglikdan

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \quad (9.22)$$

tenglikni hosil qilamiz.

9.15-Misol. Nishonga qarab uchta mergan o'q uzishmoqda. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,3 , ikkinchisiniki 0,4 va uchinchisiniki 0,6 ga teng bo'lsa, uchta mergan ham nishonga tekkizish ehtimolini toping. Bu yerda har bir mergan o'qining nishonga tegishi boshqalari o'qining nishonga tekkan yoki tegmaganligiga bog'liq emas deb faraz qilinadi.

►Quyidagi hodisalarni kiritamiz: $A_i = \{i - \text{merganning o'qi nishonga tegdi}\}$. Masala sahrtdan A_1, A_2, A_3 hodisalarning o'zaro bog'liq emasligi kelib chiqadi. Shuning uchun (9.22) formulaga ko'ra uchala merganning ham o'qlarining nishonga tegish ehtimoli

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,072$$

bo'ladi. ◀

9.9. To'la ehtimol va Bayyes formulalari

Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlarini birgalikda qo'llashning natijalaridan biri sifatida to'la ehtimollik formulasini ko'rsatish mumkin.

9.3-Teorema. Agar A hodisa birgalikda bo'lmagan $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalarning to'liq guruhidagi birorta hodisa yuz bergandagina yuz bersa, bu hodisaning yuz berish ehtimolli

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n) \quad (9.23)$$

formulaga ko'ra hisoblanadi.

(9.23) formula *to'la ehtimol formulasi* deb ataladi.

► Teorema shartidan A hodisa birgalikda bo‘lmagan $H_1A, H_2A, \dots, H_nA$ hodisalaridan biri yuz bergandagina yuz berishi kelib chiqadi, ya’ni $A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA$, u holda (9.14) formulaga ko‘ra

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikning har bir hadiga (9.19) tenglikni qo‘llasak (9.23) tenglik hosil bo‘ladi. ◀

(9.23) formulada $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalar ko‘pincha taxminlar (farazlar) deb ataladi.

9.16-Misol. Birinchi qutida 4 ta oq va 8 ta qora, ikkinchi qutida esa 6 ta oq va 7 ta qora rangli shar bor. Ikkinchi qutidan ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi va birinchi qutiga solindi. So‘ngra birinchi qutidagi sharlar yaxshilab aralashtirildi va ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi. Sharining oq rangda bo‘lish ehtimolini toping.

► Ushbu hodisalarni kiritamiz: $H_1 = \{\text{ikkinchi qutidan birinchi qutiga oq rangli shar olib solindi}\}$, $H_2 = \{\text{ikkinchi qutidan birinchi qutiga qora rangli shar olib solindi}\}$, $A = \{\text{birinchi qutidan tanlangan shar oq rangda}\}$.

Kiritilgan H_1 va H_2 hodisalar to‘liq guruhni tashkil qilishi ravshan. U holda masala shartiga ko‘ra $P(H_1) = 6/13$, $P(H_2) = 7/13$, $P(A|H_1) = 5/13$ va $P(A|H_2) = 4/13$ bo‘ladi va ularni (9.23) formulaga qo‘yib

$$P(A) = \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{58}{169}$$

ehtimolni topamiz. ◀

To‘la ehtimol formulasining natijasi Bayyes formulasi yoki farazlar teoremasi bo‘ladi. Bu formula tajribagacha qilingan H_i farazning ehtimolini tajribaning erishilgan natijasi A hodisa bo‘yicha baholash imkonini beradi, ya’ni $P(H_i|A)$ shartli ehtimolni aniqlab beradi.

9.4-Teorema. $H_1, H_2, \dots, H_n$ birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq guruhini tashkil qilsin. U holda A hodisa yuz bergan shartda H_i ($i = \overline{1, n}$) hodisaning shartli ehtimoli

$$P(H_i|A) = P(H_i)P(A|H_i)/P(A) \quad (9.24)$$

formulaga ko‘ra hisoblanadi. (9.24) formula *Bayyes formulasi* deb ataladi.

► (9.19) formulaga ko‘ra

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

bu yerda $P(A)$ ehtimol (9.23) to‘la ehtimol formulasi bo‘yicha topiladi:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n). \blacktriangleleft$$

9.17-Misol. Yuqorida qaralgan 9.16-Misoldagi birinchi qutidan tanlangan shar dastlab ikkinchi qutidan bo‘lganlik ehtimolini toping.

► H_1 farazning A hodisa (birinchi qutida tanlangan shar oq rangda) yuz bergan shartdagi $P(H_1|A)$ shartli ehtimolini topamiz:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{13} \cdot \frac{5}{13}}{\frac{58}{169}} = \frac{30}{58} = \frac{15}{29}$$

ehtimolni hosil qilamiz. ◀

9.10. Bernulli sxemasi

Takroriy tajriba deganda bitta tajribani n marta ketma-ket o‘tkazish yoki bir vaqtda n ta bir xil tajriba o‘tkazish tushuniladi. Masalan, uskunaning ishonchliligini nazorat qilishda bitta uskuna ustida n marta tajriba o‘kaziladi yoki n ta uskuna ustida tajriba o‘tkaziladi.

9.6-Ta’rif. *Bernulli sxemasi* (yoki *bir-biriga bog‘liqsiz bir xil tajribalar ketma-ketligi* yoki *tajribalarning binomial sxemasi*) deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi tajribalar ketma-ketligiga aytiladi:

1) har bir tajribada faqat ikkita natija: birorta A hodisa yoki unga qarama-qarshi $\bar{A}$ hodisa yuz beradi;

2) tajribalar bir-biriga bog‘liqsiz, ya’ni k – tajriba natijasi k – gacha bo‘lgan tajribalar natijalariga bog‘liq emas;

3) barcha tajribalarda A hodisa yuz berish ehtimoli o‘zgarmas va

$$P(A) = p$$

bo‘ladi.

$\bar{A}$ hodisa yuz berish ehtimolini q orqali belgilaymiz, ya’ni

$$P(\bar{A}) = 1 - p = q.$$

Bernulli sxemasiga “tushadigan” bir nechta tajribalarga misol keltiramiz.

1. Simmetrik tangani n marta tashlash (bu yerda A hodisa sifatida ehtimoli $p = 1/2$ bo‘lgan “gerb”ning tushishi olinadi) yoki simmetrik o‘yin toshini n marta tashlash (bu yerda A hodisa sifatida ehtimoli $p = 1/6$ bo‘lgan olti raqamining tushishi olinadi). Bu ikki tajriba Bernulli sxemasiga to‘liq mos tushadi.

2. Nishonga qarab n marta o‘q uzishni Bernulli sxemasiga “taxminan” tushadi deb qarash mumkin, chunki o‘q uzishning natijasi mergannning jismoniy holatiga qarab o‘zgarishi mumkin, bu esa tajriba natijalarining bog‘liqsizligi buzilishini anglatadi.

3. Uskunaning ishonchliligini nazorat qilishda n ta uskunani tajribadan o‘tkazish Bernulli sxemasiga aynan mos keladi.

Bernulli sxemasini qarashda n marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa k , $k = \overline{0, n}$ marta yuz berishining $P_n(k)$ ehtimolini topish asosiy masala hisoblanadi. Bu masalaning yechimi quyidagi teoremda keltirilgan.

9.5-Teorema. n marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa k , $k = \overline{0, n}$ marta yuz berishining $P_n(k)$ ehtimoli *Bernulli formulasi* deb ataluvchi ushbu

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (9.25)$$

formula bilan hisoblanadi.

(9.25) formulaning o‘ng tomoni

$$1 = (p + q)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n p^n$$

Nyuton binomining $(k + 1)$ –hadi ko‘rinishida bo‘lganligi uchun bu formula yana *binomial formula* ham deb ataladi. $P_n(k)$, $k = \overline{0, n}$ ehtimollar birgalkda ehtimollarning binomial taqsimoti deb ataladi.

Bernulli formulasidan ikkita muhim natija kelib chiqadi.

1. n marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta yuz berish ehtimoli

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad (9.26)$$

formula bilan hisoblanadi.

2. $k_1 = 1$ va $k_2 = n$ bo'lgan xususiyl holda (9.26) formuladan n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa kamida 1 marta yuz berish ehtimoli uchun

$$P(k \geq 1) = 1 - q^n \quad (9.27)$$

formulani hosil qilamiz.

9.18-Misol. O'yin toshi 8 marta tashlandi. Toshning ustki qismiga 6 raqamining:

- 1) 3 marta;
- 2) ko'pi bilan 3 marta;
- 3) kamida bir marta tushish ehtimollarini hisoblaymiz.

► 1) Bu yerda $p = 1/6$ va $q = 5/6$ bo'ladi, u holda (19.25) Benulli formulasiga ko'ra

$$P_8(3) = C_8^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{175000}{1679616} \approx 0,1042;$$

2) $k_1 = 0$ va $k_2 = 3$ va (9.26) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} P(k \leq 3) &= C_8^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^8 + C_8^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^7 + C_8^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^6 + C_8^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \\ &= \\ &= \frac{5^8 + 8 \cdot 5^7 + 28 \cdot 5^6 + 56 \cdot 5^5}{1679616} = \frac{1206250}{1679616} \approx 0,718; \end{aligned}$$

3) (9.27) formulaga ko'ra

$$P(k \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{1288991}{1679616} \approx 0,767$$

talab qilingan ehtimollarni topdik. ◀

9.19-Misol. Har 100 lotareya biletidan bittasida yutuq bo'lsa, kamida bitta biletga yutuq chiqish ehtimoli berilgan $P_0 = 0,9$ qiymatdan kam bo'lmasligi uchun nechta lotareya bileti sotib olish kerak.

► Faraz qilaylik n ta bilet sotib olingan bo'lsin. Masala shartiga ko'ra har biletida boshqa biletarga bog'liq bo'lmagan holda $p = 0,01$ ehtimol bilan yutuq bor va $q = 1 - 0,01 = 0,99$ ehtimol bilan yutuq yo'q. U holda ana shu

sotib olingan n ta biletdan kamida bittasida yutuq bo‘lish ehtimolini (19.27) formulaga ko‘ra hisoblaymiz: $P(k \geq 1) = 1 - 0,99^n$. Masala shartiga ko‘ra bu ehtimol $P_0 = 0,9$ qiymatdan kam bo‘lmasligi kerak. Shuning uchun $1 - 0,99^n \geq 0,9$ tengsizlikni n ga nisbatan yechamiz: $0,99^n \leq 0,1$ yoki bundan

$$n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,99} \approx 230,$$

ya’ni kamida 230 bilet sotib olinsa, bu biletlardan kamida bittasiga yutuq chiqish ehtimoli 0,9 qiymatdan kam bo‘lmaydi. ◀

Agar $P_n(k)$ ehtimol $k = k_0$ bo‘lganda eng katta qiymatni qabul qilsa, ya’ni $k = 0, 1, 2, \dots, n, k \neq k_0$ quymatlarda $P_n(k_0) \geq P_n(k)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, k_0 soni n marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa yuz berishlarining *eng ehtimolli soni* deb ataladi.

Endi ana shu eng ehtimolli sonni topamiz. Buning uchun $P_n(k + 1)$ va $P_n(k)$ ehtimollarning nisbatini qaraylik:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(k + 1)}{P_n(k)} &= \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \\ &= \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q} \end{aligned}$$

tenglikka ega bo‘ldik. Shuning uchu bu tengsizlikdan agar $(n-k)p > (k+1)q$ ya’ni $np - q > k$ bo‘lsa, $P_n(k + 1) > P_n(k)$ bo‘lishi, agar $k = np - q$ bo‘lsa $P_n(k + 1) = P_n(k)$ bo‘lishi va nihoyat $k > np - q$ bo‘lsa $P_n(k + 1) < P_n(k)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Ko‘rinib turibdiki $P_n(k)$ ehtimol k yuz berishlar soni osishi bilan o‘sib boradi, so‘ngra u o‘zining maksimum qiymatiga erishadi va nihoyat kamayib boradi. Shuning bilan birga agar $np - q$ butun son bo‘lsa, $P_n(k)$ ehtimollik k ning ikkita qiymatida, aniqrog‘i $k_0 = np - q$ va $k'_0 = np - q + 1 = np + p$ bo‘lganda maksimal qiymatga erishadi. Agarda $np - q$ butun son bo‘lmasa $P_n(k)$ ehtimol $np - q$ sonidan katta eng kichik butun sonda maksimal

qiymatga erishadi. Shunday qilib, n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa yuz berishlarning eng ehtimolli k_0 soni

$$np - q \leq k_0 \leq np + p \quad (9.28)$$

tengsizlik orqali aniqlanar ekan.

9.20-Misol. Teng kuchli raqibni to'rt partiyadan uchta yutishmi yoki sakkiz partiyadan beshta yutish ehtimollimi? Bu yerda partiyada durang natija istisno deb faraz qilinadi.

► Masala shartiga ko'ra raqiblar teng kuchli, shuning uchun har bir partiyada yutish ham yutqazish ham teng: $p = q = 1/2$. To'rt partiyadan uchta yutish ehtimolini Bernulli formulasiga ko'ra hisoblaymiz:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Xuddi shu singari sakkiz partiyadan beshta yutish ehtimolligini hisoblaymiz:

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}.$$

$1/4 > 7/32$ bo'lganligi uchun, to'rt partiyadan uchta yutish ehtimolliroq. ◀

9.21-Misol. Sifat nazoratidan o'tayotgan 20 ta detallardan har birining sifatli bo'lish ehtimoli 0,92 ga teng bo'lsa, sifatli detallarning eng ehtimolli sonini toping.

► Bu misolda $n = 20, p = 0,92, q = 0,08$. U holda $np - q = 20 \cdot 0,92 - 0,08 = 18,32$ va $np + p = 20 \cdot 0,92 + 0,08 = 19,32$ bo'ladi, natijada (9.28) tengsizlik $18,32 \leq k_0 \leq 19,32$ ko'rinishda bo'ladi. Bu tengsizliklarning yechimi-sifatli detallarning eng ehtimolli soni esa $k_0 = 19$ bo'ladi. ◀

9.11. Bernulli sxemasida taqribiy formulalar

Tajribalar soni n va k katta bo'lganda Bernulli formulasidan foydalanish juda mushkul bo'ladi, chunki bu yerda juda katta sonlar ustida amallar bajarishga to'g'ri keladi. Masalan, $n = 150, k = 100, p = 0,6$ bo'lganda

Bernulli formulasi $P_{200}(150) = C_{150}^{100}(0,6)^{100}(0,4)^{50}$ ko'rinishda bo'ladi va uni hisoblash amaliy jihatdan juda ham qiyin. Bu holda $P_n(k)$ ehtimolni hisoblash uchun taqribiy formulalar juda qo'l keladi.

Puasson formulasi. Bernulli sxemasida tajribalar soni n yetarlicha katta, A hodisaning yuz berish p ehtimoli esa yetarlicha kichik va shuning bilan birga $\lambda = np$ ko'paytma ham kichik bo'lsin. U holda $P_n(k)$ ehtimol *Puasson formulasi* deb ataluvchi

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = \overline{0, n} \quad (9.29)$$

taqribiy formula bilan hisoblanadi. $P(k; \lambda) \approx \lambda^k e^{-\lambda} / k!, k = 0, 1, \dots$ ehtimollar birgalikda *Puasson taqsimoti* deb ataladi.

λ parametrning ayrim qiymatlarida $P(k; \lambda)$ Puasson taqsimotining qiymatlari jadvali 1-ilovada keltirilgan.

9.20-Misol. Shisha idish qopqog'ini sifatsiz tayyorlash ehtimoli $p = 0,015$ ga teng. Bir o'ramga 100 ta qopqoq joylashtiriladi. Ixtiyoriy ravishda tanlangan o'ramda sifatsiz tayyorlangan qopqoq bo'lmaslik ehtimolligini toping.

► Bernulli sxemasida tajribalar soni katta va hodisaning yuz berish ehtimoli kichik bo'lganligi tufayli, Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz. Bu yerda $n = 100, p = 0,015$ va $k = 0$, u holda $\lambda = np = 100 \cdot 0,015 = 1,5$ bo'ladi. Berilgan va hisoblangan qiymatlarni (9.29) formulaga qo'yib

$$P \approx \frac{1,5^0 e^{-1,5}}{0!} = P(0; 1,5)$$

tenglikka ega bo'lamiz. 1-ilovadan $P(0; 1,5) = 0,22313$ qiymatni, ya'ni qidirilayotgan ehtimolni topamiz. ◀

Muavr-Laplasning lokal formulasi. Agar Bernulli sxemasida tajribalar soni n yetarlicha katta, A hodisaning yuz berish p ehtimoli va yuz bermaslik q ehtimoli ham katta bo'lsa, u holda barcha k uchun

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \quad (9.30)$$

Muavr-Laplasning lokal formulasi o‘rinli bo‘ladi, bu yerda

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$\varphi(x)$ funksiya *standart normal* (yoki *gauss*) taqsimotining zichlik funksiyasi deb ataladi.

x o‘zgaruvchining ayrim qiymatlarida $\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari 2- ilovada keltirilgan. $\varphi(x)$ funksiya juftligi tufayli x o‘garuvchining manfiy qiymatlarida $\varphi(x)$ funksiyaning qiymati

$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

tenglikdan foydalanilib aniqlanadi.

9.21-Misol. Agar har bir tajribada A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lsa, 243 marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa 70 marta yuz berish ehtimolini toping.

► Masala shartiga ko‘ra $n = 243, k = 70, p = 0,25, q = 0,75$ bo‘ladi. x ning qiymatini topamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37.$$

2-ilovadagi jadvaldan $\varphi(1,37) = 0,1561$ qiymatni topamiz. Uni (9.30) formulaga qo‘yib, qidirilayotgan

$$P_{243}(70) = 0,1561/6,75 = 0,0231$$

ehtimolni topamiz. ◀

9.22-Misol. Bir marta o‘q uzilganda o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. Nishonga qarab 400 marta o‘q uzilganda 300 ta o‘qning nishonga tegish ehtimolini toping.

► Tajribalar soni $n = 400$ va $p = 0,8$ yuz berishlar va $q = 1 - p = 0,2$ yuz bermasliklar ehtimollari nisbatan katta qiymatni qabul qilgan. Shuning

uchun $k = 300$ bo'lganda Muavr-Laplasning lokal formulasidan foydalanamiz. Kerakli qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 8, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 320}{8} = -2,5.$$

$\varphi(x)$ funksiyaning juftligini inobatga olib, 2-ilovadagai jadvaldan $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5) \approx 0,01753$ qiymatni topamiz. Uni (9.30) formulaga qo'yib

$$P \approx 0,01753/8 \approx 0,0022$$

qidirilayotgan ehtimolni topamiz. ◀

Muavr-Laplasning integral formulasi. Bernulli sxemasi bo'yicha tajribalar soni n va har bir tajribada A hodisaning yuz berish p va yuz bermaslik $q = 1 - p$ ehtimollari nisbatan katta qiymatlarni qabul qilsa, k yuz berishlar soni k_1 va k_2 qiymatlar oralig'ida yotish $P(k_1 \leq k \leq k_2)$ ehtimoli uchun

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (9.31)$$

taqribiy tenglik o'rinli. Bu yerda

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

va

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

(9.31) formula *Muavr-Laplasning integral formulasi*, $\Phi(x)$ esa *Laplas funksiyasi* deb ataladi. 3-ilovada x o'zgaruvchining $[-3,4; 3,4]$ kesmadagi qiymatlari uchun $\Phi(x)$ – Laplas funksiyasining qiymatlari jadvali keltirilgan.

Laplas funksiyasi uchun

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad (9.32)$$

tenglik o'rinli.

9.23-Misol. Fabrikada ishlab chiqarilgan maxsulotning 96% oliy navli. Sifat nazorati uchun 200 ta maxsulot tanlandi. Agar ular orasidan 10 ta maxsulot past navli bo'lib chiqsa, ularning barchasi sexga qaytariladi. Tanlangan 200 ta maxsulotning sifat nazoratidan o'tish ehtimolini toping.

► Masala shartiga ko‘ra $n = 200, p = 0,04$ (past navli maxsulot ishlab chiqarish ehtimoli), $q = 0,96$. Tanlangan 200 maxsulotning sifat nazoratidan o‘tish ehtimolini, ya’ni $P_{200}(0 \leq k \leq 100)$ ehtimolni (9.31) formula bo‘yicha topamiz. Bu yerda $k_1 = 0$ va $k_2 = 10$, hamda kerakli qiymatlarni hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 200 \cdot 0,04}{\sqrt{200 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} \approx -2,89;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 200 \cdot 0,04}{\sqrt{200 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} \approx 0,72$$

va ularni (9.31) formulaga qo‘yamiz:

$P(0 \leq k \leq 10) \approx \Phi(0,72) - \Phi(-2,89) = 0,7642 - 0,0019 = 0,7623$. Shunday qilib, tanlangan maxsulotlarning sifat nazoratidan o‘tish ehtimoli $P = 0,7623$ ga teng ekan. ◀

9.24-Misol. O‘yin toshi 540 marta tashlanganda “olti” raqami 80 martadan 100 martagacha tushish ehtimolini hisoblang.

► Demak, masala shartiga ko‘ra $n = 540, p = 1/6, q = 5/6$ va $k_1 = 80, k_2 = 100$ bo‘ladi. U holda

$$x_1 = \frac{80 - 540 \cdot 1/6}{\sqrt{540 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx -1,16, x_2 = \frac{100 - 540 \cdot 1/6}{\sqrt{540 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx 1,16$$

va ularni (9.31) formulaga qo‘yib, 3-ilovadagi jadval qiymatlaridan foydalanib

$$P \approx \Phi(1,16) - \Phi(-1,16) = 0,8770 - 0,1230 = 0,7540,$$

“olti” raqamining 80 martadan 100 martagacha tushish ehtimolini topdik. ◀

$\Phi(x)$ funksiya yordamida n marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa yuz berishlar soni $m(A)/n$ nisbiy chastotasining bu hodisa p ehtimolidan chetlanish ehtimolini topish mumkin.

$|m(A)/n - p| \leq \varepsilon$ tengsizlikdan $-\varepsilon \leq m(A)/n - p \leq \varepsilon$ va undan $np - n\varepsilon \leq m(A) \leq np + n\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi, bu yerda $\varepsilon > 0$ birorta son. Shuning uchun

$$P(|m(A)/n - p| \leq \varepsilon) = P(np - n\varepsilon \leq m(A) \leq np + n\varepsilon)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. O‘ng tomondagi ehtimollikda $k_1 = np - n\varepsilon, k_2 = np + n\varepsilon$ deb,

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}, x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

qiymatlarni aniqlab olamiz. U holda (9.31) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} P(np - n\varepsilon \leq m(A) \leq np + n\varepsilon) &= \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 \end{aligned}$$

va demak $m(A)/n$ nisbiy chastotaning bu hodisa p ehtimolidan chetlanish ehtimoli

$$P(|m(A)/n - p| \leq \varepsilon) = 2 \cdot \Phi(\varepsilon \sqrt{n/pq}) - 1 \quad (9.33)$$

formula bilan hisoblanar ekan.

9.25-Misol. O‘qning nishonga tegish ehtimoli $p = 0,6$ ga teng. Nishonga qarab $n = 900$ marta o‘q uzilganda nishonga tegishlar soni nisbiy chastotasining p ehtimoldan chetlanishi modul bo‘yicha $\varepsilon = 0,05$ dan oshmaslik ehtimolini toping.

► Masala shartiga ko‘ra $n = 1200, p = 0,6, q = 1 - p = 0,4$ va $\varepsilon = 0,05$. Ularni (9.33) formulaga qo‘yamiz va:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m(A)}{900} - 0,6\right| \leq 0,05\right) &= 2 \cdot \Phi\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{900}{0,6 \cdot 0,4}}\right) - 1 = \\ &= 2 \cdot \Phi(3,06) - 1 = 2 \cdot 0,9989 - 1 = 0,9978 \end{aligned}$$

ehtimolga ega bo‘lamiz. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday hodislarga tasodifiy hodisa deb ataymiz?
2. Qanday hodislarga muqarrar hodisa deb ataymiz?

3. Qachon A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi?
4. Ikkita A va B hodisalarining yig'indisi deb qanday hodisaga aytiladi?
5. Ikkita A va B hodisalarining ko'paytmasi deb qanday hodisaga aytiladi?
6. Ikkita A va B hodisalarining A/B ayirmasi deb qanday hodisaga aytiladi?
7. Hodisaning nisbiy chastotasiga ta'rif bering.
8. Hodisa ehtimolining klassik ta'rifini bering.
9. Geometrik ehtimol nima?
10. Birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indining ehtimoli nimaga teng?
11. O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar ko'paytmasining ehtimoli nimaga teng?
12. To'la ehtimol va Bayyes formulalarini yozing.
13. Bernulli sxemasi deganda nimani tushunasiz?
14. Bernulli formulasi nima haqida?
15. Puasson formulasi qachon qo'llaniladi?
16. Muavr-Laplasning lokal va integral formulalarini yozing.

Mashqlar.

1. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ va $B = \{5,6,7,8,9,10,11,12\}$ to'plamlar berilgan. $A + B$ yigindi, AB ko'paytma, $A \setminus B$, $B \setminus A$ ayirma to'plamlarni toping.
2. Qutida 4 ta oq va 5 ta qora rangli shar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi. Tanlangan sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.
3. Qutida 5 ta oq, 6 ta qora, 4 ta qizil va 3 ta ko'k rangli shar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi. Tanlangan sharning oq yoki qora rangda bo'lish ehtimolini toping.
4. Tomonlari 120 sm va 160 sm bo'lgan stol ustida tomonlari 20 sm va 30 sm bo'lgan to'gh'ri to'rtburchakli quti turibdi. Stol ustiga igna ixtiyoriy ravishda tashlandi. Tashlangan ignaning qutiga tushish ehtimolini toping.
5. Guruhda 8 ta o'g'il bola va 12 ta qiz bola bor. Guruhga konsertga ikkita chipta ajratilgan. Talabalar orasidan konsertga boruvchilarni ixtiyoriy ravishda tanlanilsa, konsertga faqat qizlar borishi ehtimolini toping.
6. Birinchi kitob javonida 30 ta badiiy, 15 ta matematikaga va 20 ta kimyoga oid, ikkinchi javonda esa 20 ta badiiy, 10 ta matematikaga, 12 ta kimyoga va

12 ta biologiyaga oid kitoblar bor. Har bir javondan ixtiyoriy ravishda bittadan kitob tanlandi. Tanlangan kitoblarning ikkalasi ham kimyoga oid bo'lish ehtimolini toping.

7. Birinchi qutida 4 ta oq va 5 ta qora, ikkinchi qutida esa 6 ta oq va 5 ta qora rangdagi sharlar bor. Ikkinchi qutidan ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi va birinchi qutiga solindi. So'ngra birinchi qutidagi sharlar yaxshilab aralashtirildi va ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi. Tanlangan shar oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

8. 7-misoldagi shartlarda birinchi qutidan tanlangan shar dastlab birinchi qutidan bo'lganlik ehtimolini toping.

9. Bernulli sxemasi bo'yicha o'tkazilgan har bir tajribada A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,6 ga teng. Tajribalar 5 marta o'tkazilganda A hodisaning 3 marta yuz berish ehtimolini toping.

10. Bernulli sxemasi bo'yicha o'tkazilgan har bir tajribada A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,011 ga teng. Tajribalar 100 marta o'tkazilganda A hodisaning 4 marta yuz berish ehtimolini toping.

11. Bernulli sxemasi bo'yicha o'tkazilgan har bir tajribada A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,3 ga teng. Tajribalar 150 marta o'tkazilganda A hodisaning 42 marta yuz berish ehtimolini toping.

12. Bernulli sxemasi bo'yicha o'tkazilgan har bir tajribada A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,4 ga teng. Tajribalar 120 marta o'tkazilganda A hodisaning kamida 50 marta va ko'pi bilan 65 marta yuz berish ehtimolini toping.

Javoblar.

1. $A + B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, $AB = \{5,6,7,8\}$, $A \setminus B = \{1,2,3,4\}$, $B \setminus A = \{9,10,11,12\}$; 2. $4/9$; 3. $11/18$; 4. $1/32$; 5. $14/95$; 6. $6/91$; 7. $5/11$; 8. $2/5$; 9. 0,3456; 10. 0,02; 11. 0,0616; 12. 0,3537.

X BOB. TASODIFIY MIQDORLAR

IX bobda qandaydir tajribaning natijasi bo'lgan birorta A tasodifiy hodisaning ehtimoli xossalarini o'rgandik. Biroq ehtimollar nazariyasining fan sifatida yuzaga kelganidan buyon tajribalarning natijasi bo'lgan tasodifiy hodisalarning ehtimoli xossalarini o'rganish asosiy masala bo'lmasdan, balki bu tajribalar bilan bog'liq *tasodifiy miqdorlar* deb ataluvchi sonli miqdorlarni o'rganish asosiy masala deb hisoblash mumkin. Mazkur va keyingi boblarda aynan shu tasodifiy miqdorlarni o'rganamiz.

10.1. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

10.1-Ta'rif. Tajriba natijasida oldindan qaysi qiymatini qabul qilishi noma'lum bo'lgan miqdorlarga *tasodifiy miqdor* deb ataymiz.

Tasodifiy miqdorlar bosh lotin $X, Y, Z, \dots$ harflari bilan (yoki kichik grek ξ (ksi), η (eta), θ (teta), ψ (psi),... harflari bilan) belgilanadi. Ularning qabul qiladigan qiymatlari esa mos kichik $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ harflar bilan belgilanadi. Tasodifiy miqdorlarga misol sifatida o'yin toshi tashlanganda toshning ustki qismiga tushgan raqamni, nishonga birinchi marta tekkunga qadar otiladigan o'qlar soni, havoning temperaturasi, odamning bo'yi va shunga o'xshashlarni ko'rsatish mumkin.

10.2-Ta'rif. Chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarni *diskret tasodifiy miqdor*, sanoqsiz sondagi qiymatlarni cheksiz yoki cheksiz oraliqlarni to'ldirib qabul qiluvchi miqdorlar esa *uzluksiz tasodifiy miqdor* deb ataladi.

Demak, diskret tasodifiy miqdor bir-biridan ajralgan qiymatlarni, uzluksiz tasodifiy miqdor esa birorta oraliqning ixtiyoriy qiymatini (masalan, kesmadagi yoki son o'qidagi ixtiyoriy qiymatni) qabul qilishi mumkin. O'yin toshida tushgan raqam, nishonga qarab otilgan o'qlar soni – diskret tasodifiy miqdor va havo temperaturasi, odamning bo'yi uzluksiz tasodifiy miqdor bo'ladi.

Tasodifiy miqdorning ehtimoli xossalarini o'rganish uchun tasodifiy miqdor o'zining qiymatlari to'plamidan qiymatni qabul qilish ehtimolini

topish qoidasini bilish kerak bo‘ladi. Har qanday bunday qoidani tasodifiy miqdor *ehtimollarining taqsimot qonuni* yoki tasodifiy miqdor (*ehtimollarining*) *taqsimoti* deb ataladi. Ko‘pgina hollarda “ehtimol” so‘zi qoldirib ketiladi.

Taqsimot funksiyasi barcha tasodifiy miqdorlarga xos bo‘lgan umumiy taqsimot qonuni bo‘ladi.

10.3-Ta’rif. X tasodifiy miqdor *ehtimollarining taqsimot funksiyasi* deb, x nuqtadagi qiymati $\{X < x\}$ hodisaning ehtimoliga teng bo‘lgan $F(x)$ funksiyaga aytiladi:

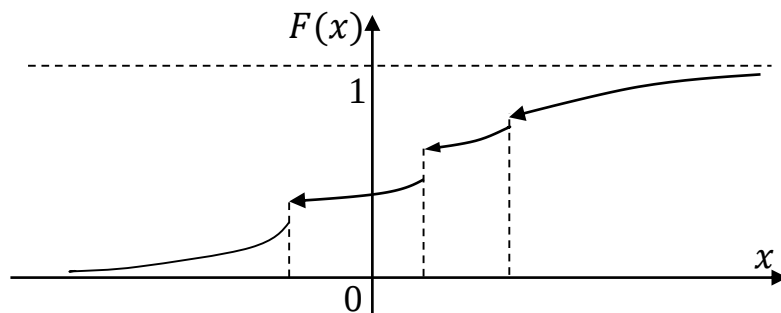
$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (10.1)$$

Ko‘pincha taqsimot funksiyasining x nuqtadagi qiymati X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymatni qabul qilish ehtimoliga teng deb aytiladi.

10.1-Teorema. Ehtimollarning taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $x_1 < x_2$ bo‘lsa, $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo‘ladi (ya’ni $F(x)$ – kamaymaydi);
3. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
4. $P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;
5. $F(x)$ chapdan uzluksiz funksiya.

10.3-rasmda taqsimot funksiyasiga xos bo‘lgan funksiya grafigi keltirilgan.



10.1-rasm

Ushbu

$$F(-\infty) = 0 \text{ va } F(+\infty) = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday kamaymaydugan chapdan uzluksiz $F(x)$ funksiya birorta X tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi bo‘ladi.

10.2. Diskret tasodifiy miqdorlar

X – diskret tasodifiy miqdor o‘zining chekli yoki sanoqli sondagi $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymatlarini mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ehtimollar bilan qabul qilsin. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tajriba natijasida X tasodifiy miqdor x_i qiymatini qabul qilish ehtimolini aniqlovchi $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots, n, \dots$ formula orqali berish qulay. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

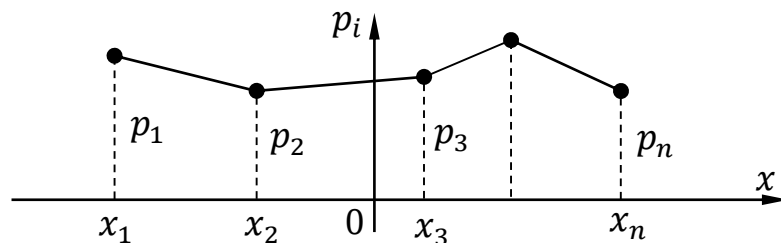
X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

taqsimot jadvali ko‘rinishida berilishi mumkin, bu yerda birinchi satrda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari (ko‘pincha ular o‘sib borish tartibida joylashtiriladi), ikkinchi satrga esa ularning mos ehtimollari joylashtiriladi. Bunday jadvalni diskret tasodifiy miqdor *taqsimot qatori* deb ataymiz.

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots$ hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq guruhini tashkil qiladi, shu sababli ular ehtimollarining yig‘indisi birga teng, ya’ni

$$\sum_i p_i = 1 \quad (10.2)$$

bo‘ladi.



10.2-rasm

Diskret tasodifiy miqdor qiymatlarini absissa o‘qiga, ularning ehtimollarini esa ordinata o‘qiga joylashtirib, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini grafik ko‘rinishda tasvirlash mumkin. $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$

nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqni taqsimotning *poligoni* deb ataymiz (10.2-rasm).

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qatori bo'yicha uning $F(x)$ taqsimot funksiyasi

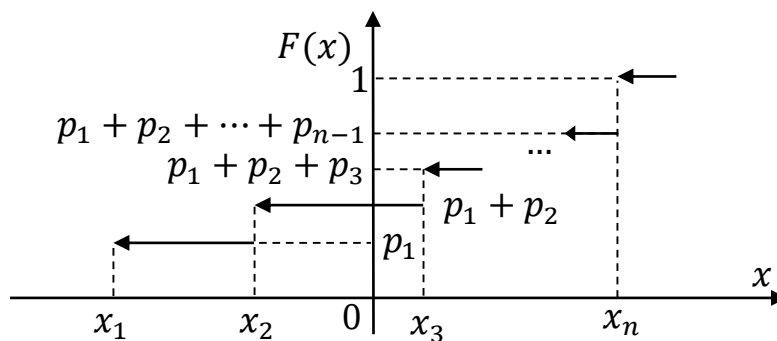
$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \quad (10.3)$$

tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda yig'indi $x_i < x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha i bo'yicha olinadi. (10.3) tenglik (10.1) tenglikdan bevosita kelib chiqadi.

Xususiyl holda X diskret tasodifiy miqdor chekli sondagi qiymatlarni qabul qilsin va

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

taqsimot qatorida qiymatlar o'sib boorish tartibida joylashtirilgan bo'lsin. U holda barcha $x \leq x_1$ larda $\{X < x\}$ mumkin bo'lmagan hodisa va shuning uchun (10.3) formulaga ko'ra $F(x) = 0$ bo'ladi (10.3-rasm). Agar $x_1 < x \leq x_2$ bo'lsa, $\{X < x\}$ hodisa $\{X = x_1\}$ bo'lgandagina yuz beradi, shuning uchun $F(x) = P\{X = x_1\} = p_1$ bo'ladi. Xuddi shunday $x_2 < x \leq x_3$ bo'lsa, $\{X < x\}$ hodisa yoki $\{X = x_1\}$ bo'lganda, yoki $\{X = x_2\}$ bo'lganda yuz beradi, ya'ni



10.3-rasm

$$\{X < x\} = \{X = x_1\} + \{X = x_2\}$$

va demak

$$F(x) = P\{X = x_1\} + P\{X = x_2\} = p_1 + p_2$$

va hokazo. Nihoyat $x > x_n$ bo'lsa, $\{X < x\}$ muqarrar hodisa bo'ladi va $F(x) = 1$.

Shunday qilib, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $(-\infty; x_1]$ oraliqda 0 qiymatni, $(x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i < n$ oraliqlarda $p_1 + p_2 + \dots + p_i$ va $(x_n, +\infty)$ oraliqda 1 qiymatni qabul qiluvchi bo'lakli o'zgarmas funksiya bo'lar ekan.

10.1-Misol. Taqsimot qatori

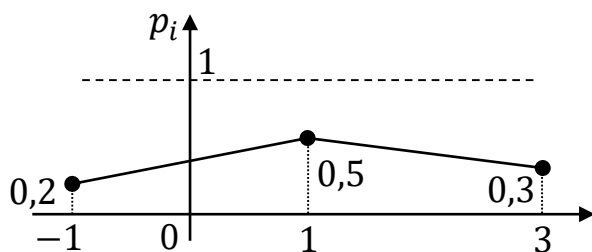
X	-1	1	3
P	0,2	0,5	0,3

jadvalda berilgan X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing va taqsimot poligoni hamda taqsimot funksiyasining grafigini yasang.

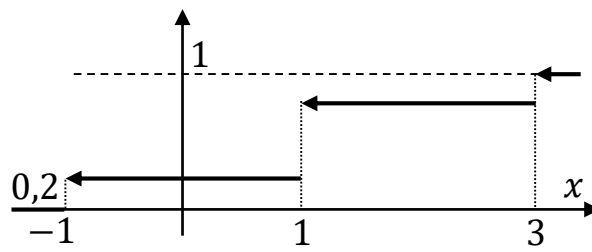
► Yuqorida keltirilgan usul bo'yicha taqsimot funksiyasini tuzamiz. Unga ko'ra agar $x \leq -1$ bo'lsa, $F(x) = 0$ va $-1 < x \leq 1$ bo'lsa, $F(x) = 0,2$ hamda $1 < x \leq 3$ bo'lsa, $F(x) = 0,2 + 0,5 = 0,7$ va nihoyat $3 < x$ bo'lsa, $F(x) = 0,2 + 0,5 + 0,3 = 1$ bo'ladi. Bularni umumlashtirib,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -1, \\ 0,2, & \text{agar } -1 < x \leq 1, \\ 0,7, & \text{agar } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{agar } x > 3 \end{cases}$$

taqsimot funksiyasini hosil qildik.



10.4-rasm



10.5-rasm

X tasodifiy miqdor taqsimot poligoni 10.4-rasmda va taqsimot funksiyasining grafigi 10.5-rasmda tasvirlangan. ◀

Ayrim diskret tasodifiy miqdorlar. Biz quyida amaliyotda ko'p uchraydigan ayrim tasodifiy miqdorlarni qarab chiqamiz.

Binomial taqsimot. Agar X tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n$ qiymatlarni

$$P\{X = i\} = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}, i = \overline{0, n} \quad (10.4)$$

formulaga ko'ra hisoblanadigan ehtimollar bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor *binomial taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataladi, bu yerda $0 < p, q < 1$ va $p + q = 1$. Uning taqsimot qatori

X	0	1	2	...	i	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^i p^i q^{n-i}$	...	p^n

ko'rinishda bo'ladi.

Bu taqsimot uchun (10.2) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\sum_{i=0}^n P_n(i) = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} = (p + q)^n = 1.$$

Ehtimollar taqsimoti formulasiga e'tibor beradigan bo'lsak, binomial taqsimot yuz berish ehtimoli p bo'lgan Bernulli sxemasidagi yuz berishlar soni ehtimollarining taqsimoti ekanligiga amin bo'lamiz.

Puasson taqsimoti. Butun nomanfiy qiymatlarni ehtimollari

$$P\{X = i\} = \lambda^i e^{-\lambda} / i!, i = 0, 1, 2, \dots \quad (10.5)$$

formulaga ko'ra hisoblanadigan tasodifiy miqdorlarga λ parametrli *Puasson taqsimotli diskret tasodifiy miqdor* deb ataymiz. Bu tasodifiy miqdor taqsimot qatori

X	0	1	2	...	i	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$	...

ko'rinishda bo'ladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimoti uchun (10.2) tenglikning bajarilishini tekshiramiz.

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Geometrik taqsimot. Bernulli sxemasini qaraymiz. Har bir tajribada A hodisa p ehtimol bilan yuz bersin va $q = 1 - p$ ehtimol bilan yuz bermasin. A hodisa yuz bergunga qadar o'tkazilgan tajribalar soni X bo'lsin. U holda X

diskret tasodfiy miqdor bo'lib, u $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ qiymatlarni qabul qiladi. $\{X = n\}$ hodisaning ehtimolini topamiz. Agar birinchi tajribada A hodisa yuz bersa, $X = 0$ ekanligi ravshan. Shuning uchun

$$P\{X = 0\} = p.$$

$X = 1$ bo'lishi uchun birinchi tajribada A hodisa yuz bermagan, ikkinchisida esa yuz bergan bo'lishi kerak. Bunday hodisaning ehtimoli qp ga teng bo'ladi, ya'ni

$$P\{X = 1\} = qp.$$

Xuddi shu singari, agar dastlabki ikki tajribada A hodisa yuz bermasa va uchinchi tajribada yuz bersa $X = 2$ bo'ladi va demak

$$P\{X = 2\} = qqp.$$

Bu mulohazalarni davom ettirib,

$$P\{X = i\} = q^i p, k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.6)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qatori

X	0	1	2	...	i	...
P	p	qp	$q^2 p$	...	$q^i p$	...

ko'rinishda bo'ladi. Taqsimot qatori bu jadvalda berilgan tasodifiy miqdorni *geometrik taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataymiz. Bu tasodifiy miqdor uchun ham (10.2) tenglik o'rinli:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} q^i p = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i = p \cdot \frac{1}{1 - q} = 1.$$

10.3. Uzlusiz tasodifiy miqdorlar

10.4-Ta'rif. Agar X tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funksiyasini ixtiyoriy x uchun

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (10.7)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, uni biz *uzlusiz tasodifiy miqdor* deb ataymiz, bu yerda nomanfiy $f(x)$ funksiya X tasodifiy miqdor ehtimollari

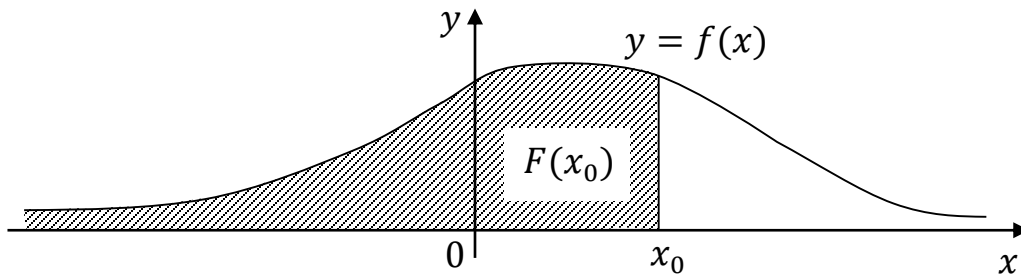
taqsimotining *zichlik funksiyasi* deb ataladi yoki qisqacha *zichlik funksiyasi* deb ataymiz.

Amaliyotda uchraydigan barcha taqsimotlarning zichlik funksiyalari uzluksiz bo‘ladi (chekli sondagi nuqtalardan tashqari). Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari butun son o‘qida uzluksiz bo‘ladi va yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integralning xossalriga ko‘ra $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining uzluksizlik nuqtalarida

$$f(x) = F'(x) \quad (10.8)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Amaliyotda ko‘pincha $F(x)$ taqsimot funksiyasini tasodifiy miqdor *taqsimotining integral qonuni*, taqsimotning $f(x)$ zichlik funksiyasini esa tasodifiy miqdor *taqsimotining differensial qonuni* deb ataladi. Bunday ishlatiladigan terminologiyani (10.7) va (10.8) tengliklar izohlaydi.



10.6-rasm

Taqsimotning zichlik funksiyasi uchun $f(x) \geq 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligi sababli aniq integralning geometrik talqiniga ko‘ra

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(y)dy$$

integralning qiymati yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi, quyidan Ox o‘q va o‘ng yon tomondan $x = x_0$ to‘g‘ri chiziq kesmasi bilan chegaralangan cheksiz figuraning yuziga teng (10.6-rasm).

10.2-Teorema. Taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

$$1) P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx;$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

3) Zichlik funktsiya uzluksiz bo'lgan nuqtalarda

$$P\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x.$$

► 1) Taqsimot funksiyasining 4-xossasiga binoan

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Bundan esa uzluksiz tasodifiy miqdorning ta'rifiga va xosmas integralning xossalriga ko'ra

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

2) Xususiyl holda $x_1 = -\infty$ va $x_2 = +\infty$ bo'lganda $\{x_1 \leq X < x_2\}$ hodisa muqarrar bo'ladi va shu sababli ikkinchi tasdiq o'rinli.

3) Taqsimot funksiyasining 4-xossasiga binoan

$$P\{x \leq X < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Differensiallanuvchi funktsiyaning orttirmasi yetarli kichik Δx larda uning differensialiga teng: $\Delta F(x) \approx dF(x) = f'(x)\Delta x$. ◀

Ayrim uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Biz quyida amaliyotda ko'p uchraydigan ayrim tasodifiy miqdorlarni qarab chiqamiz.

Tekis taqsimot. Agar tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a \text{ yoki } x > b \end{cases}$$

tenglik bilan berilsa, bunday tasodifiy miqdorni $[a, b]$ kesmada *tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataymiz.

$F(x)$ taqsimot funktsiyasini (10.7) formulaga ko'ra topamiz. Agar $x < a$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^x 0dy = 0,$$

agar $a \leq x \leq b$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^a 0dy + \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a},$$

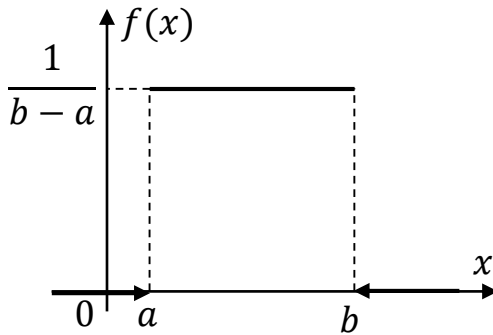
va nihoyat $x > b$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^a 0dy + \int_a^b \frac{1}{b-a} dy + \int_b^x 0dy = 1$$

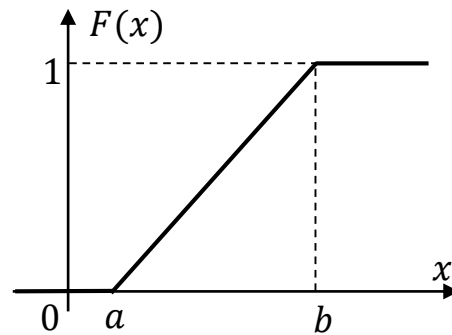
bo'ladi. Shunday qilib ularni umumlashtirib

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

taqsimot funksiyasini hosil qilamiz.



10.7-rasm



10.8-rasm

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasi va $F(x)$ taqsimot funksiyasining grafiklari 10.7 va 10.8-rasmlarda berilgan.

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning $[a, b]$ kesmaning ichida yotgan (x_1, x_2) oraliqqa tushish ehtimoli $F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)/(b - a)$ tenglik bilan aniqlanadi, ya'ni bu ehtimol (x_1, x_2) oraliq uzunligiga proporsional. Demak tekis taqsimot nuqtani $[a, b]$ kesmaga tashlanganda hisoblanadigan geometrik ehtimol bilan bir xil ekan.

Eksponensial taqsimot. Agar tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlansa, bunday tasodifiy miqdor *eksponensial* (ko'rsatkichli) *qonun* bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deb ataladi, bu yerda $\lambda > 0$ —eksponensial taqsimotning parametri.

Ekspontensial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini (10.7) formula bo'yicha topamiz. Agar $x < 0$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^x 0dy = 0,$$

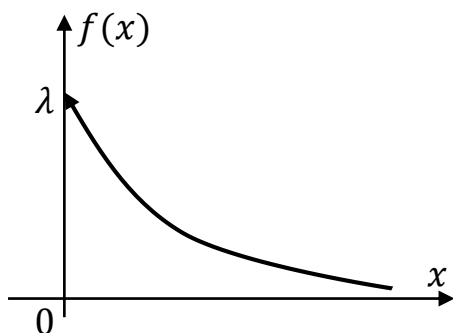
va agar $x \geq 0$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^0 0dy + \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = -e^{-\lambda y} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

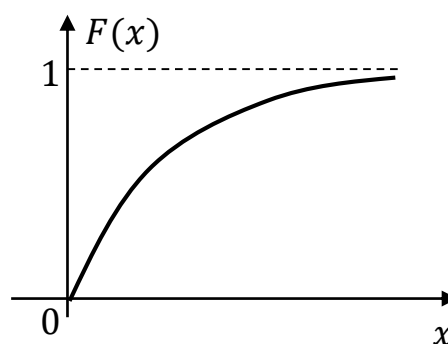
bo'ladi. Ularni umumlashtirib

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

taqsimot funksiyasining formulasini hosil qildik.



10.9-rasm



10.10-rasm

Ekspontensial taqsimlangan tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasi va $F(x)$ taqsimot funksiyasining grafiklari 10.9 va 10.10-rasmlarda berilgan.

Ekspontensial taqsimlangan tasodifiy miqdor faqat musbat qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

Ekspontensial taqsimot bilan Puasson taqsimoti bir-biriga bog'liq. Agar birorta hodisaning ketma-ket yuz berishlari orasidagi vaqt oraliqlari o'zaro bog'liq bo'lmagan ekspontensial taqsimlangan (bir xil λ parametrli) tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda bu hodisaning t vaqt oralig'ida yuz berishlari soni λt parametrli Puasson taqsimotli diskret tasodifiy miqdor bo'ladi.

Normal taqsimot. Taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0)$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan tasodifiy miqdor *normal (gauss) qonuni* bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Bu funksiya uchun zichlikning 2-xossasi bajarilishini tekshiramiz. Buning uchun Puasson integrali deb ataluvchi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

integraldan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}, dx = \sqrt{2}\sigma dt \\ x = -\infty, t = -\infty; x = \infty, t = \infty \end{array} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1. \end{aligned}$$

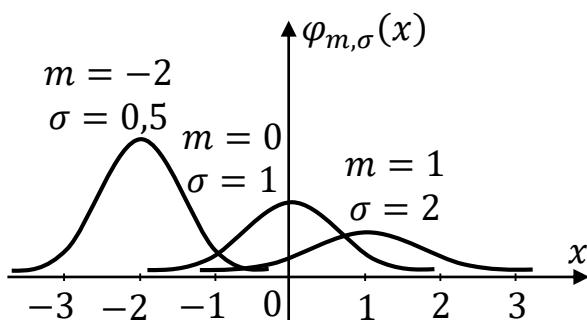
$\varphi_{m,\sigma}(x)$ funksiyaning boshlang‘ichini elementar funksiyalar orqali ifodalab bo‘lmaydi. Shuning uchun normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

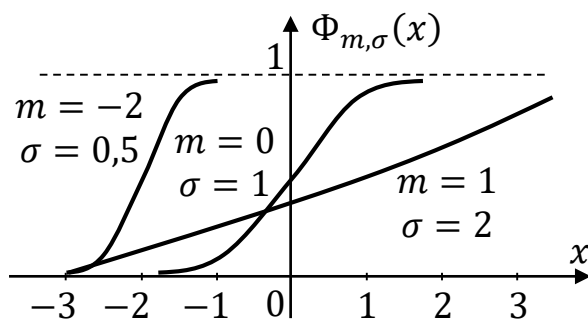
ko‘rinishda bo‘ladi.

m va σ parametrlarning turli qiymatlarida normal taqsimotning $\varphi_{m,\sigma}(x)$ zichlik funksiyasi va $\Phi_{m,\sigma}(x)$ taqsimot funksiyasining grafiklari 10.11 va 10.12-rasmlarda keltirilgan.

Rasmlardan ko‘rinib turibdiki, m parametr normal taqsimot zichlik funksiyasining simmetriya markazini aniqlar ekan, ya’ni normal taqsimot zichlik funksiyasining grafigi $x = m$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi, σ — esa tasodifiy miqdor qiymatlarining simmetriya markaziga nisbatan sochilishini aniqlar ekan. Agar $m = 0$ va $\sigma = 1$ bo‘lsa, taqsimot *normal standart taqsimot* deb ataladi va taqsimot funksiyasini $\Phi(x)$ orqali, zichlik funksiyasini esa $\varphi(x)$ orqali belgilanadi. Standart normal taqsimot funksiyasini Laplas funksiyasi sifatida va zichligini Muavr-Laplasning lokal va integral formulalarida ko‘rgan edik.



10.11-rasm



10.12-rasm

m va σ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni $X = N[m, \sigma]$ orqali belgilaymiz.

Bir o'zgaruvchili funksiyalarning integral kursidan ma'lumki $\int e^{-x^2/2} dx$ integralni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi. Shuning uchun ko'pgina oily matematikaga oid adabiyotlarda standart normal taqsimot funksiyasining qiymatlari berilgan. 3-ilovadan foydalanib ixtiyoriy m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning (a, b) intervalga tushish ehtimolini topishni ko'rsatamiz.

Taqsimot zichlik funksiyasining 1) xossasiga binoan m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning (a, b) intervalga tushish ehtimoli

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b \varphi_{m,\sigma}(y) dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda $x = (y - m)/\sigma$ almashtirish olsak, so'ngi integralni

$$P\{a < X < b\} = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \varphi(x) dx$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan esa oxirgi asosiy

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \quad (10.9)$$

formulani hosil qilamiz.

Veybulla taqsimoti. Agar tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, bunday tasodifiy miqdor *Veybulla qonuni* bo‘yicha taqsimlangan deyiladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ko‘rinishda bo‘lishini oson tekshirish mumkin.

Veybulla taqsimotlari oilasi ikki α, β –parametrli bo‘lib, ular musbat tasodifiy miqdorlarni aniqlaydi.

Ko‘pgina texnik jihozlarning buzilmasdan ishlash vaqti Veybulla taqsimotiga bo‘ysinadi. Agar $\beta = 1$ bo‘lsa, Veybulla taqsimoti eksponensial taqsimotga aylanadi.

$\beta = 2$ bo‘lganda

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2\alpha x e^{-\alpha x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

Releya taqsimotiga ega bo‘lamiz.

Gamma-taqsimot. Ko‘pgina texnik jihozlarning buzilmasdan ishlash vaqtini tasvirlovchi boshqa bir taqsimot *gamma-taqsimot* bo‘lib, uning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0, \gamma > 0)$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx$$

bo‘lib, u Eyler gamma-funksiasi deb ataladi. Bu funksiya ushbu muhim xossalarga ega: $\Gamma(\gamma + 1) = \gamma\Gamma(\gamma)$ va butun n uchun $\Gamma(n) = (n - 1)!$ bo‘ladi.

Bu yerda $\gamma = n$ –natural son bo‘lsa, n –tartibli *Erlang taqsimotini*, $\gamma = 1$ bo‘lsa, yuqorida qaralgan eksponensial taqsimotni hosil qilamiz.

Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar.

χ^2 (xi kvadrat) taqsimot (yoki K.Pirson taqsimoti).

10.5-Ta'rif. $X_1, X_2, \dots, X_n$ – o'zaro bog'liq bo'lmagan standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda $\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ tasodifiy miqdorning taqsimotini erkinlik darajasi n bo'lgan χ^2 (xi kvadrat) taqsimot, tasodifiy miqdorning o'zi esa erkinlik darajasi n bo'lgan xi kvadrat miqdor deb ataladi.

Bu tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Ko'rinib turibdiki bu taqsimot gamma taqsimotning $\gamma = n/2$ va $\lambda = 1/2$ bo'lgandagi xususiy holi ekan.

n erkinlik darajasi oshishi bilan χ^2 taqsimot normal taqsimotga yaqinlashib boradi ($n > 30$ bo'lganda normal taqsimot bilan qaryib ustma-ust tushadi).

Student taqsimoti (t – taqsimot).

10.6-Ta'rif. X – normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, χ_n^2 – erkinlik darajasi n bo'lgan xi kvadrat miqdor, hamda X va χ_n^2 o'zaro bog'liq bo'lmasin. U holda

$$t(n) = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$$

tasodifiy miqdorning taqsimotini erkinlik darajasi n bo'lgan Student (yoki $t(n)$) taqsimoti, tasodifiy miqdorning o'zini esa erkinlik darajasi n bo'lgan t – miqdor deb ataladi.

Student taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f_{t(n)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}; x \in (-\infty; \infty),$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$n \rightarrow \infty$ da Styudent taqsimoti normal taqsimotga yaqinlashadi ($n > 30$ bo‘lganda qariyb ustma-ust tushadi).

10.2-Misol. X tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} A \cos x, & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

tenglik bilan berilgan bo‘lsa,

- 1) A koeffitsiyentni toping;
- 2) $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining grafigini yasang;
- 3) $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini yasang;
- 4) X tasodifiy miqdorning $(0, \pi/4)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

► 1. A koeffitsiyentni toppish uchun zichlik funksiyasining 2-xossasidan foydalanamiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A \cos x dx = 2A = 1,$$

va bundan $A = 1/2$ qiymatni topamiz.

2. $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining grafigi 10.13-rasmda tasvirlangan.

3. $F(x)$ taqsimot funksiyasini (10.7) formulaga ko‘ra topamiz:

agar $x < -\pi/2$ bo‘lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^x 0 dy = 0;$$

agar $|x| \leq \pi/2$ bo‘lsa,

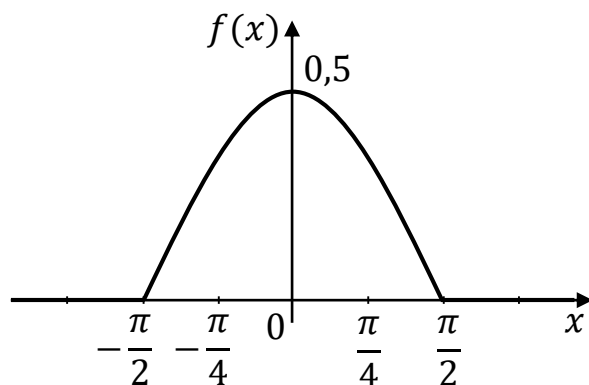
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^x \frac{1}{2} \cdot \cos y dy = \frac{1}{2} (\sin x + 1);$$

agar $x > \pi/2$ bo‘lsa,

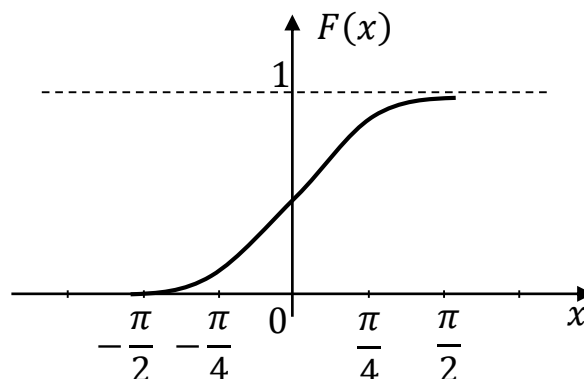
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot \cos y dy + \int_{\pi/2}^x 0 dy = 1$$

bo‘ladi. Bu uchta ifodani birlashtirib taqsimot funksiyasining

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



10.13-rasm



10.14-rasm

formulasini hosil qilamiz, uning grafigi 10.14-rasmda tasvirlangan.

4. X tasodifiy miqdorning $(0, \pi/4)$ oraliqqa tushish ehtimolligini taqsimot funksiyasining 4-xossasiga binoan topamiz:

$$P\left\{0 \leq X < \frac{\pi}{4}\right\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sin \frac{\pi}{4} + 1\right) - (\sin 0 + 1)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

10.4. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristiklari

Taqsimot qonuni tasodifiy miqdorni to'liq tavsiflab beradi. Biroq ko'pgina amaliy masalalarni yechishda tasodifiy miqdor taqsimot qonunining alohida muhim xususiyatlarini tavsiflovchi sonli parametrlarni bilish yetarli. Bunday sonlar tasodifiy miqdorlarning *sonli xarakteristiklari* deb ataladi.

Ular orasida matematik kutilma (tasodifiy miqdor taqsimotining markazi), moda, mediana, dispersiya (tasodifiy miqdor qiymatlarining uning markazidan chetlanishi), o'rtacha kvadratik chetlanish muhim hisoblanadi.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi.

10.7-Ta'rif. $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ taqsimot qonuniga ega bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning *matematik kutilmasi* (yoki *o'rtacha*

qiymati) deb bu tasodifiy miqdor barcha qiymatlarining mos ehtimollariga ko‘paytmalarining yig‘indisiga aytiladi.

Matematik kutilma MX (yoki $M[X], M(X), EX, m_X, a_X$) orqali belgilanadi.

Shunday qilib ta’rifga ko‘ra

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (10.10)$$

Agar X diskret tasodifiy miqdorning qiymatlari soni cheksiz bo‘lsa, u holda

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad (10.11)$$

o‘ng tomondagi qator yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi (aks holda X tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo‘lmaydi).

10.3-Misol. Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=0}^n i P_n(i) = \sum_{i=0}^n i C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} = \\ &= \sum_{i=1}^n np \frac{(n-1)!}{(i-1)! (n-i)!} p^{i-1} q^{n-i} = np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j q^{n-1-j} = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = np. \end{aligned}$$

10.4-Misol. Puasson taqsimoti bo‘yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$MX = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

10.5-Misol. Geometrik taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz, bu yerda $i q^{i-1} = (q^i)'_q$ hosiladan foydalanamiz:

$$MX = \sum_{i=0}^{\infty} i p q^i = p q \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} = p q \sum_{i=0}^{\infty} (q^i)'_q = p q \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)'_q =$$

$$= pq \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

10.8-Ta'rif. X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (10.12)$$

integralga ayiladi, bu yerda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < +\infty,$$

ya'ni matematik kutilmani aniqlovchi xosmas integral mutlaq yaqinlashadi deb faraz qilinadi.

10.6-Misol. $[a, b]$ kesmada tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz.

► $x < a$ va $x > b$ bo'lganda $f(x) = 0$ bo'lganligi uchun

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2},$$

ya'ni MX matematik kutilma $[a, b]$ kesmaning o'rtasi bilan ustma-ust tushar ekan. ◀

10.7-Misol. Eksponensial taqsimotning matematik kutilmasini topamiz.

► Bu yerda ham $x < 0$ bo'lganda $f(x) = 0$ ekanligini inobatga olib,

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^b x e^{-\lambda x} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{\lambda x} \left(x + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{\lambda b} \left(b + \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} \right] = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

ya'ni eksponensial taqsimotning matematik kutilmasi λ parametrga teskari proporsional ekan. ◀

10.8-Misol. m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz.

► Normal taqsimotning aniqlanishiga ko'ra,

$$\begin{aligned}
MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}, \\ dx = \sqrt{2}\sigma dt \end{array} \right| = \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma t + m) e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt,
\end{aligned}$$

birinchi integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegaralari esa nolga nisbatan simmetrik, ikkinchisi esa Puasson integrali va u $\sqrt{\pi}$ ga teng, ya'ni $MX = m$. Shunday qilib, m –parametr matematik kutilma ekan. ◀

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarmasning matematik kutilmasi o'ziga teng, ya'ni

$$Mc = c.$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$M(cX) = cMX.$$

3. Yig'indining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

4. Tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilmasidan chetlanishining matematik kutilmasi nolga, ya'ni

$$M(X - MX) = 0.$$

5. O'zaro bog'liq bo'lmagan ikkita tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng, ya'ni agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa,

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

► 1. O'zarmasni faqat bitta c qiymatni 1 ehtimol bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin. Shuning uchun $Mc = c \cdot P\{X = c\} = c \cdot 1 = c$.

2. cX tasodifiy miqdor cx_i ($i = \overline{1, n}$) qiymatlarni p_i ehtimollar bilan qabul qiladi, shu sababli

$$M(cX) = \sum_{i=1}^n cx_i p_i = c \sum_{i=1}^n x_i p_i = cMX.$$

3. X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda x_i ($i = \overline{1, m}$) va y_j ($j = \overline{1, n}$) qiymatlarni qabul qilsin, u holda

$$\sum_{j=1}^n \{X = x_i, Y = y_j\} = \left\{ X = x_i, \sum_{j=1}^n \{Y = y_j\} \right\} = \{x = x_i, \Omega\} = \{x = x_i\},$$

Bundan esa

$$\begin{aligned} p_i &= P\{x = x_i\} = P\left(\sum_{j=1}^n \{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_{j=1}^n P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \end{aligned}$$

tenglikni yozish mumkin. 3-xossani ana shu tenglikdan foydalanib isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n p_{ij} + \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^m p_{ij} = \sum_{i=1}^m x_i p_i + \sum_{j=1}^n y_j p_j = MX + MY. \end{aligned}$$

4. 1 va 3-xossalarga binoan $M(X - MX) = MX - M(MX) = MX - MX = 0$ bo'ladi. Bu yerda qaralayotgan $X - MX$ ayirma X tasodifiy miqdorning MX matematik kutilmadan chetlanishi deb ataladi va $\dot{X}$ orqali belgilanadi:

$$\dot{X} = X - MX.$$

Bu $\dot{X}$ tasodifiy miqdor yana *markazlashtirilgan* tasodifiy miqdor ham deb ataladi.

5. Shartga ko'ra X va Y o'zaro bog'liq emas, u holda $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j$ bo'ladi. Demak

$$\begin{aligned} M(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i p_i \sum_{j=1}^n y_j p_j = MX \cdot MY. \blacktriangleleft$$

Diskrett asodifiy miqdorlarga isbotlangan barcha xossalar uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli. Masalan,

$$M(cX) = \int_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = c \cdot MX.$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi.

10.9-Ta’rif. X tasodifiy miqdorning DX dispersiyasi deb, bu tasodifiy miqdorning MX matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$DX = M(X - MX)^2. \quad (10.13)$$

Endi (10.10)-(10.13) formulalar yordamida dispersiyani hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz. Agar X diskret tasodifiy miqdor chekli sondagi qiymatlarni qabul qilsa,

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 p_i \quad (10.14)$$

va agar cheksiz sondagi qiymatlarni qabul qilsa,

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i. \quad (10.15)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun esa

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \quad (10.16)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Amalda dispersiya uchun

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \quad (10.17)$$

formuladan foydalanish qulay. Bu formula (10.13) formuladan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} DX &= M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) = \\ &= MX^2 - M(2X \cdot MX) + (MX)^2 = \\ &= MX^2 - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2. \end{aligned}$$

O‘z navbatida (10.17) formula dispersiyani hisoblash uchun

$$DX = \sum_i x_i^2 p_i - (MX)^2 \quad (10.18)$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (MX)^2 \quad (10.19)$$

formulalardan foydalanish imkonini beradi.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarmasning dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$Dc = 0.$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga ko'tarib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$D(cX) = c^2 DX.$$

3. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalari yig'indisiga teng, ya'ni agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

4. Agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda

$$D(XY) = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2.$$

► 1. $Dc = M(c - Mc)^2 - M(c - c)^2 = M0 = 0.$

2. $D(cX) = M(cX - M(cX))^2 = M(cX - cMX)^2 =$
 $= M(c^2(X - MX)^2) = c^2 M(X - MX)^2 = c^2 DX.$

3. (10.17) formuladan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M(X + Y)^2 - (M(X + Y))^2 = \\ &= MX^2 + 2M(XY) + MY^2 - (MX)^2 - 2MX \cdot MY - (MY)^2 = \\ &= MX^2 + 2MX \cdot MY + MY^2 - (MX)^2 - 2MX \cdot MY - (MY)^2 = \\ &= MX^2 - (MX)^2 + MY^2 - (MY)^2 = DX + DY. \end{aligned}$$

4. Agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, X^2 va Y^2 ham o'zaro bog'liq bo'lmaydi. U holda (10.17) formuladan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} D(XY) &= M(XY)^2 - (M(XY))^2 = M(X^2 Y^2) - (MX \cdot MY)^2 = \\ &= MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi.

DX dispersiya X tasodifiy miqdor kvadrati o'lchovi bilan bir xil, bu esa taqqoslash uchun noqulay. Tasodifiy miqdor sochilishini baholovchi miqdor tasodifiy miqdorning o'lchovi bilan bir xil bo'lishi uchun yana bir sonly xarakteristikani-o'rtacha kvadratik chetlanish tushunchasini kiritamiz.

10.10-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* yoki *standart chetlanishi* deb, uning dispersiyasidan olingan kvadratik ildizga aytiladi va σ_X (yoki $\sigma[X]$, σ) orqali belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga ko'ra

$$\sigma_X = \sqrt{DX}. \quad (10.20)$$

Dispersiyaning xossalariidan o'rtacha kvadratik chetlanishning quyidagi xossalari kelib chiqdi: $\sigma_X c = 0$, $\sigma_{cX} = |c|\sigma_X$, $\sigma(c + X) = \sigma_X$.

$Z = (X - MX)/\sigma_X$ tasodifiy miqdorni standart tasodifiy miqdor deb ataymiz. Uning matematik kutilmasi 0 va dispersiyasi 1 ga teng, haqiqatdan ham:

$$\begin{aligned} MZ &= M\left(\frac{X - MX}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} M(X - MX) = 0, \\ DZ &= D\left(\frac{X - MX}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2} D(X - MX) = \frac{DX}{DX} = 1. \end{aligned}$$

10.8-Misol. Binomial qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► 10.3-Misolda $MX = np$ ekanligini ko'rgan edik. U holda

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{i=0}^n i^2 P_n(i) = \sum_{i=0}^n i^2 C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n i^2 \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n i^2 \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} - \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} + \\ &+ \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n (i^2 - i) \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} + np = \\ &= \sum_{i=0}^n i(i-1) \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} + np = \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{n!}{(i-2)! (n-i)!} p^i q^{n-i} + np = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^n n(n-1)p^2 \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} p^{i-2} q^{n-i} + np = \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^j p^j q^{n-2-j} + np = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} P_{n-2}(j) + np = \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

va (10.49) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned}
DX &= MX^2 - (MX)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = \\
&= np(1-p) = npq.
\end{aligned}$$

O'rtacha kvadratik chetlanishi esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{npq}$ bo'ladi. ◀

10.9-Misol. Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Bu taqsimot uchun $MX = \lambda$ ekanligini ko'rgan edik. Bundan tashqari

$$\begin{aligned}
MX^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{(i-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \right] = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

va (10.17) formulaga ko'ra

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

O'rtacha kvadratik chetlanishi esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{\lambda}$ bo'ladi. ◀

10.10-Misol. Geometrik taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Bu yerda $iq^{i-2} = (q^i)'_q$, $i(i-1)q^{i-2} = (q^i)''_q$ hosilalardan foydalanamiz. Dastlab MX^2 matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
MX^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p q^i = p q^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-2} = p q^2 \sum_{i=0}^{\infty} [i(i-1)q^{i-2} + iq^{i-2}] = \\
&= p q^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)q^{i-2} + \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-2} \right) \\
&= p q^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)q^{i-2} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= pq^2 \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)_q'' + \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)_q' \right] = pq^2 \left[\left(\frac{1}{1-q} \right)'' + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{1-q} \right)' \right] = \\
&= pq^2 \left(\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \right) = \frac{q(1+q)}{p^2}
\end{aligned}$$

va (10.17) formulaga ko'ra

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{q(1+q)}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

O'rtacha kvadratik chetlanishi esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{q}/p$ bo'ladi. ◀

10.11-Misol. $[a, b]$ kesmada tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► $x < a$ va $x > b$ bo'lganda $f(x) = 0$ bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned}
DX &= \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} \left(x - \frac{b+a}{2} \right)^3 \Big|_a^b = \\
&= \frac{1}{3(b-a)} \left(\left(b - \frac{b+a}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{b+a}{2} \right)^3 \right) = \frac{(b-a)^2}{12},
\end{aligned}$$

o'rtacha kvadratik chetlanish esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = (b-a)/2\sqrt{3}$ bo'ladi. ◀

10.12-Misol. Eksponensial taqsimotning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Bu yerda ham $x < 0$ bo'lganda $f(x) = 0$ ekanligini inobatga olib,

$$\begin{aligned}
DX &= \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2, du = \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) dx \\ dv = \lambda e^{-\lambda x}, v = -e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(- \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^b + \int_0^b \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} dx \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} u = x - \frac{1}{\lambda}, du = dx \\ dv = e^{-\lambda x}, v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \end{array} \right| = \\
&\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} \Big|_0^b + \int_0^b \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right) = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \left(b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \Big|_0^b \right) = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda} \left(b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

va o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma_X = \sqrt{DX} = 1/\lambda$ bo'ladi. ◀

10.13-Misol. m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Normal taqsimotning aniqlanishiga ko'ra,

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

va bu yerda $y = (x - m)/\sigma$ deb almashtirish olamiz. U holda

$$DX = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

bo'ladi va bu yerda $u = y/\sqrt{2\pi}$, $dv = ye^{-y^2/2} dy$ deb bo'laklab integrallasak

$$DX = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = \sigma^2$$

qiymatni hosil qilamiz, undan kvadrat ildiz chiqarib, $\sigma_X = \sigma$ o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz. Shunday qilib normal taqsimot qonunining σ parametri tasodifiy miqor o'rtacha kvadratik chetlanishiga teng ekan. ◀

10.14-Misol. χ_n^2 va $t(n)$ tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun

$$M\chi_n^2 = n, D\chi_n^2 = 2n, Mt(n) = 0, Dt(n) = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

tengliklar o‘rinli.

Tasodifiy miqdorning momentlari.

10.11-Ta’rif. X tasodifiy miqdorning k – tartibli m_k momenti deb X tasodifiy miqdor k – darajasining matematik kutilmasiga aytiladi, ya’ni:

i) agar X diskret tasodifiy miqdor bo‘lsa,

$$m_k = MX^k = \sum_i x_i^k p_i;$$

ii) agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa,

$$m_k = MX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Ba’zan k – tartibli momentni k – tartibli boshlang‘ich moment ham deb aytiladi.

10.12-Ta’rif. X tasodifiy miqdorning k – tartibli $\dot{m}_k$ markaziy momenti (k – markaziy moment) deb markazlashtirilgan $\dot{X} = X - MX$ tasodifiy miqdor k – darajasining matematik kutilmasiga aytiladi, ya’ni diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun mos ravishda:

$$\dot{m}_k = M(X - MX)^k = \sum_i (x_i - MX)^k p_i,$$

$$\dot{m}_k = M(X - MX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k f(x) dx.$$

Birinchi tartibli moment matematik kutilma bilan, birinchi tartibli markaziy moment nolga, ikkinchi tartibli markaziy moment dispersiya bilan ustma-ust tushishini ta’kidlab o‘tamiz.

10.15-Misol. Taqsimot qonuni

X	-2	3	6	7	8
P	0,1	0,15	0,35	0,11	0,09

jadvalda keltirilgan X tasodifiy miqdorning 3-tartibgacha bo‘lgan momentlari va markaziy momentlarini hisoblang.

$$\blacktriangleright m_1 = MX = -2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,15 + 6 \cdot 0,35 + 7 \cdot 0,11 + 8 \cdot 0,09 = 3,84; \dot{m}_1 = 0;$$

$$m_2 = MX^2 = (-2)^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,15 + 6^2 \cdot 0,35 + 7^2 \cdot 0,11 +$$

$$+8^2 \cdot 0,09 = 25,5;$$

$$\dot{m}_2 = DX = MX^2 - (MX)^2 = 25,5 - (3,84)^2 = 10,7544;$$

$$m_3 = (-2)^3 \cdot 0,1 + 3^3 \cdot 0,15 + 6^3 \cdot 0,35 + 7^3 \cdot 0,11 + \\ + 8^3 \cdot 0,09 = 162,66;$$

$$\dot{m}_3 = (-2 - 3,84)^3 \cdot 0,1 + (3 - 3,84)^3 \cdot 0,15 + (6 - 3,84)^3 \cdot 0,35 + \\ + (7 - 3,84)^3 \cdot 0,11 + (8 - 3,84)^3 \cdot 0,09 = -6,5291712. \blacktriangleleft$$

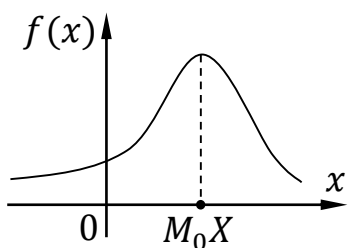
Agar ixtiyoriy x uchun

$$P\{X < MX - x\} = P\{X > MX + x\}$$

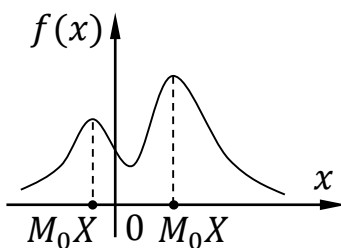
tenglik o'rinli bo'lsa, X tasodifiy miqdorni o'zining matematik kutilmasiga nisbatan *simmetrik taqsimlangan* deyiladi.

Tasodifiy miqdorning boshqa sonly xarakteristikalar.

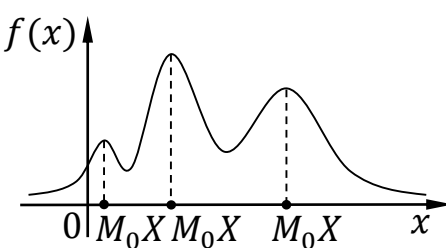
10.13-Ta'rif. $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining maksimum nuqtasini *uzluksiz tasodifiy miqdorning modasi* deb ataymiz va M_0X orqali belgilanadi.



10.15-rasm



10.16-rasm



10.17-rasm

Agar moda yagona bo'lsa, tasodifiy miqdorning taqsimoti *unimodal* (10.15-rasm), ikkita bo'lsa *bimodal* (10.16-rasm) va bir nechta bo'lsa *multimodal* (10.17-rasm) deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdorning modasiga ta'rif berish uchun dastlab uning $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari o'sib boorish tartibida joylashgan deb faraz qilamiz.

10.14-Ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor x_i qiymatining p_i ehtimoli uchun

$$p_{i-1} < p_i \text{ va } p_{i+1} < p_i$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, x_i qiymatni *diskret tasodifiy miqdorning modasi* deb ataymiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarda ham moda unimodal, bimodal va multimodal bo'lishi mumkin.

10.15-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning

$$P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = 1/2 \quad (10.21)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi x_p qiymatiga uning *medianasi* deyiladi.

10.16-Misol. Normal taqsimotning zichlik funksiyasi $x = m$ nuqtada yagona maksimumga erishadi. Shuning uchun normal taqsimotning modasi uning matematik kutilmasi bilan ustma-ust tushadi. U yana tasodifiy miqdorning medianasi hamdir.

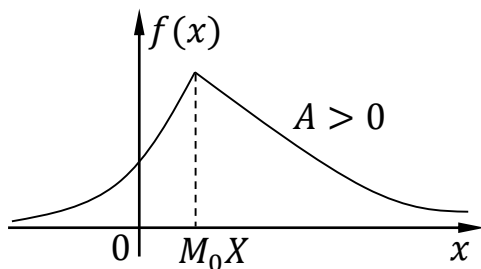
10.16-Ta'rif. X tasodifiy miqdor m_3 markaziy momentining σ o'rtacha kvadratik chetlanishi kubiga nisbati bu tasodifiy miqdorning *asimmetriyasi* deyiladi va u A orqali belgilanadi:

$$A = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{M(X - MX)^3}{(DX)^{\frac{3}{2}}}.$$

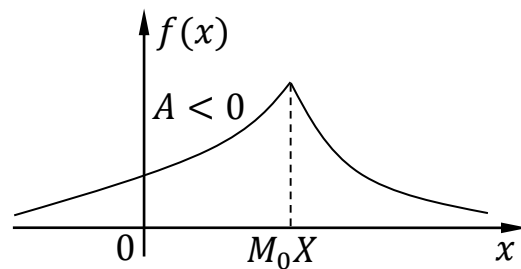
Agar matematik kutilmasiga nisbatan simmetrik taqsimlangan X tasodifiy miqdorning uchinchi tartibli momenti mavjud bo'lsa, uning asimmetriyasi nolga tengligini ta'kidlab o'tamiz.

Agar $A > 0$ bo'lsa, taqsimot egri chizig'i M_0X modadan o'ngda sekin kamayadi (10.18-rasm).

Agar $A < 0$ bo'lsa, taqsimot egri chizig'i M_0X modadan chapda sekin o'sadi (10.19-rasm).



10.18-rasm

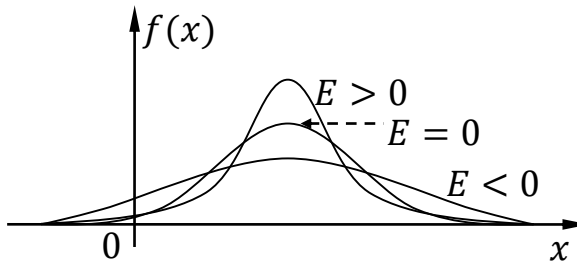


10.19-rasm

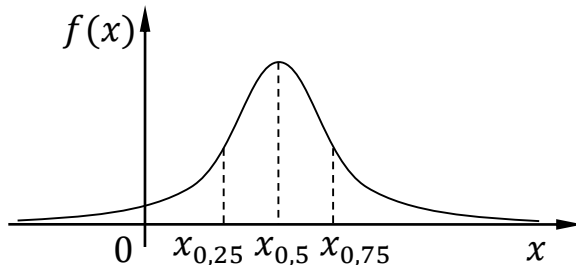
10.17-Ta'rif. X tasodifiy miqdor m_4 markaziy momentining σ o'rtacha kvadratik chetlanishi to'rtinchi darajasiga nisbatidan uchni ayirishdan hosil bo'lgan E miqdorga bu tasodifiy miqdorning *ekssessi* deyiladi:

$$E = \frac{\dot{m}_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M(X - MX)^4}{(DX)^2}.$$

E miqdor taqsimot zichligining o'tkir uchligini yoki yassi uchligini tavsiflaydi. Normal taqsimot uchun $A = 0$ va $E = 0$ ekanligini keyingi misolda ko'ramiz; qolgan taqsimotlar normal taqsimot bilan taqqoslanadi: agar $E > 0$ bo'lsa o'tkir uchli va $E < 0$ bo'lsa yassi uchli bo'ladi (10.20-rasm).



10.20-rasm



10.21-rasm

10.17-Misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning asimmetriyasi va eksessini hisoblang.

► Dastlab $\dot{m}_3$ va $\dot{m}_4$ markaziy momentlarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \dot{m}_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^3 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^3}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} y = x - m, \\ dy = dx \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^3 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \end{aligned}$$

va integral ostidagi funksiya toqligi, integrallash chegaralari nolga nisbatan simmetrikligi tufayli so'ngi integral nolga teng, ya'ni $\dot{m}_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{m}_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^4 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^4}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{(x - m)^3}{\sqrt{2\pi}}, du = 3 \cdot \frac{(x - m)^2}{\sqrt{2\pi}} \\ dv = \frac{x - m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx, v = -\sigma e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right| = \\ &= -\sigma \frac{(x - m)^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \end{aligned}$$

$$= 0 + 3\sigma^2\sigma^2 = 3\sigma^4.$$

U holda yuqoridagi ta'riflarga ko'ra

$$A = \frac{\dot{m}_3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sigma^3} = 0, \quad E = \frac{\dot{m}_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Shunday qilib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning asimmetriyasi va eksessi nolga teng ekan. ◀

10.18-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning

$$F(x_p) = P(X < x_p) = p$$

tenglikni qanoatlantiruvchi x_p qiymatiga p saviyali kvantil deb ataladi, bu yerda $0 < p < 1$.

Tasodifiy miqdorning yuqorida kiritilgan medianasi 0,5 saviyali kvantil, ya'ni $Me(X) = x_{0,5}$ ekanligi ta'rifdan bevosita kelib chiqadi. $x_{0,25}$ va $x_{0,75}$ mos ravishda quyi va yuqori kvantillar deb ataladi. $x_{0,25}$, $x_{0,5}$, $x_{0,75}$ kvantillar son o'qini 4 bo'lakka bo'ladi va X tasodifiy miqdorning bu har bir bo'lakka tushish ehtimoli 0,25 ga teng (10.21-rasm).

10.18-Misol. Standart normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning $p = 0,1131$ saviyali kvantilini toping.

► Standart normal taqsimot funksiyasining qiymatlari jadvali aks ettirilgan 3-Ilovadan $x_{0,1131} = -1,21$ kvantilni topamiz. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday miqdorlarga tasodifiy miqdor deb ataymiz?
2. Tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot funksiyasi qanday aniqlanadi?
3. Tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining xossalarini bayon qiling.
4. Diskret tasodifiy miqdor qiymatlari ehtimollarining yig'indisi nimaga teng?
5. Qanday diskret tasodifiy miqdorlarni bilasiz?
6. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bilan zichlik funksiyasi o'zaro qanday bog'langan?
7. Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasining xossalarini bayon qiling.
8. Qanday uzluksiz tasodifiy miqdorlarni bilasiz?
9. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi qanday topiladi?

10. Uzlüksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi qanday topiladi?
11. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb nimaga aytiladi?
12. Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi qanday aniqlanadi?
13. Tasodifiy miqdorning modasi va medianasi deb nimaga aytiladi?

Mashqlar.

1. Taqsimot qatori ushbu jadvalda berilgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing, hamda taqsimot poligoni va taqsimot funksiyasining grafigini yasang.

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,15	0,25	0,3	0,2

2. $[0; 1]$ kesmada tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik va taqsimot funksiyalarini tuzing.

3. $[3; 6]$ kesmada tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdor qiymatlarining $[4; 5]$ kesmaga tushish ehtimolini toping.

4. $\lambda = 2$ parametrli eksponensial taqsimlangan tasodifiy miqdor qiymatlarining $[1; 2]$ kesmaga tushish ehtimolini toping.

5. $m = 2, \sigma = 3$ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor qiymatlarining $[1; 2]$ kesmaga tushish ehtimolini toping.

6. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \notin [0; 4], \\ ax, & \text{agar } x \in [0; 2], \\ a(4 - x), & \text{agar } x \in [2; 4], \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsa, a parametrni va tasodifiy miqdor qiymatlarining $[1; 2]$ kesmaga tushish ehtimolini toping.

7. Taqsimot qatori ushbu jadvalda berilgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	-1	1	4	5	6
P	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

8. $[2; 6]$ kesmada tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va oʻrtacha kvadratik chetlanishini toping.

9. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \notin [-3; 3], \\ a(x+3), & \text{agar } x \in [-3; 0], \\ a(3-x), & \text{agar } x \in [0; 3], \end{cases}$$

koʻrinishda boʻlsa, a koeffitsiyentni, MX matematik kutilmani, DX dispersiyani toping.

10. Standart normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning $p = 0,8665$ saviyali kvantilini toping.

Javoblar.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,1, & 1 < x \leq 2, \\ 0,25, & 2 < x \leq 3, \\ 0,5, & 3 < x \leq 4, \\ 0,8, & 4 < x \leq 5, \\ 1, & 5 < x. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x \notin [0,1]; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. $p = 1/3$; **4.** $p = (e^2 - 1)/e^4$; **5.** $p = 0,2486$; **6.** $a = 1/4$; **7.** $MX = 2,45$; $DX = 5,8475$; $\sigma_X = 2,4182$. **8.** $MX = 4$; $DX = 4/3$; $\sigma_X = 2/\sqrt{3}$. **9.** $MX = 0$; $DX = 3/2$; $\sigma_X = \sqrt{3/2}$. **10.** $t_{0,8665} = 1,11$.

XI BOB. IKKI O‘LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR

Amaliy masalalarda ko‘pincha tajriba natijasi sifatida bir nechta tasodifiy miqdorlarni kuzatishga to‘g‘ri keladi. Bir nechta tasodifiy miqdorni birgalikda qarash ko‘p olchovli tasodifiy miqdorlarga olib keladi.

11.1. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlar

Bitta tajribaning natijalari bo‘lgan X_i , ($i = \overline{1, n}$) tasodifiy miqdorlarning $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tartiblangan to‘plamini n o‘lchovli tasodifiy miqdor deb ataymiz.

Bir o‘lchovli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar n o‘lchovli $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tasodifiy miqdorning komponentalari deb ataladi.

Bir o‘lchovli tasodifiy miqdorlarga ta‘lluqli bo‘lgan barcha tushuncha va ta‘riflar qaryib o‘zgarishsiz ko‘p olchovli tasodifiy miqdorlarga o‘tkaziladi. Bayon qilish sodda bo‘lganligi tufayli biz ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlarni qarash bilan chegaralanamiz va komponentalari soni ko‘p bo‘lgan holga hech qiyinchiliksiz umumlashtiriladi.

11.1-Misol. Ikkita o‘yin toshi tashlanmoqda. X tasodifiy miqdor-birinchi toshga tushgan raqam, Y tasodifiy miqdor esa ikkinchisiga tushgan raqam bo‘lsin. U holda barcha yuz berishi mumkin bo‘lgan hodisalar

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$$

to‘plamdan iborat bo‘ladi. $(3,4)$ hodisaga $x = 3$, $y = 4$ sonlari mos keladi.

Komponentalarining turiga qarab, ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlar diskret, uzluksiz va aralash bo‘lishi mumkin.

(X, Y) tasodifiy miqdorning to‘liq tavsifi uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari sohasini va bu qiymatlarning ehtimollarini ko‘rsatuvchi ehtimollarning taqsimot qonuni hisoblanadi. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlar oddiy tasodifiy miqdorlar singari turli ko‘rinishdagi taqsimot qonunlari (jadval, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiyasi, ...) orqali tavsiflanishi mumkin.

Bir o‘lchovli tasodifiy miqdorlarni o‘rganishni uning taqsimot qonunining berilish usullarini muhokama qilishdan boshlaganimizni eslatib

o'tamiz. Xususan bir o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini taqsimot funksiyasi yordamida berish mumkin. Buni ikki o'lchovli tasodifiy miqdorga nisbatan ham aytish mumkin.

11.1-Ta'rif. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning $F(x, y) = F_{X,Y}(x, y)$ taqsimot funksiyasi deb, $(x, y) \in R^2$ nuqtadagi qiymati $\{X < x\}$, $\{Y < y\}$ hodisalarning birgalikda yuz berish ehtimoliga teng, ya'ni

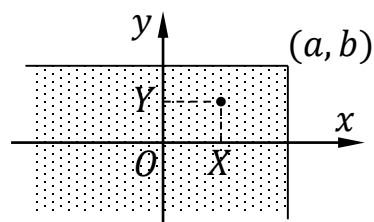
$$F(x, y) = F_{X,Y}(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$

funksiyaga aytiladi.

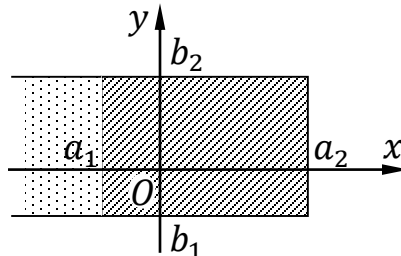
$F(x, y)$ funksiyani yana X, Y tasodifiy miqdorlarning *birgalikdagi taqsimot funksiyasi* ham deb ataladi.

Ikki o'lchovli taqsimot funksiyasining (a, b) nuqtadagi qiymati koordinatalari (X, Y) bo'lgan nuqtaning 11.1-rasmda tasvirlangan uchi (a, b) nuqtada bo'lgan kvadrantga tushish ehtimoliga teng.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi xossalari bir o'lchovli taqsimot funksiyasi xossalariga o'xshash va ular quyidagi teormada keltirilgan.



11.1-rasm



11.2-rasm

11.1-Teorema. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

- 1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
- 2) $F(x, y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarning har biri bo'yicha kamaymaydigan funksiya;
- 3) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$;
- 4) $F(+\infty, +\infty) = 1$;
- 5) $P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\} = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) -$

$$-F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1)$$

6) $F(x, y)$ funksiya ixtiyoriy $(x, y) \in R^2$ nuqtada x va y o'zgaruvchilarning har biri bo'yicha chapdan uzluksiz;

$$7) F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x), F_{X,Y}(+\infty, y) = F_Y(y);$$

► 5) va 7) xossalarni isbotlaymiz, chunki boshqa barcha xossalar bir o'lchovli tasodifiy miqdordagi singari isbotalanadi.

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $\{a_1 \leq x < a_2, b_1 \leq y < b_2\}$ to'g'ri to'rtburchakga (11.2-rasmda shtrixlangan qism) tushish ehtimolini topish uchun dastlab $\{x < a_2, b_1 \leq y < b_2\}$ cheksiz yarim yo'lga (11.2-rasmda nuqtali qilib ajratilgan qismi) tushish ehtimolini topamiz. Bu ehtimol esa $\{x < a_2, y < b_2\}$ kvadrantga tushish ehtimolidan $\{x < a_2, y < b_1\}$ kvadrantga tushish ehtimolini ayirganiga teng, ya'ni

$$P\{x < a_2, b_1 \leq y < b_2\} = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1). \quad (11.1)$$

Yuqoridagidek mulohazalarni yuritib, $\{x < a_1, b_1 \leq y < b_2\}$ cheksiz yarim yo'lga tushish ehtimoli uchun

$$P\{x < a_1, b_1 \leq y < b_2\} = F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1) \quad (11.2)$$

tenglikni yozish mumkin.

11.2-rasmdan ko'rinib turibdiki $\{a_1 \leq x < a_2, b_1 \leq y < b_2\}$ to'g'ri to'rtburchakga tushish ehtimoli $\{x < a_2, b_1 \leq y < b_2\}$ cheksiz yarim yo'lga tushish ehtimolidan $\{x < a_1, b_1 \leq y < b_2\}$ cheksiz yarim yo'lga tushish ehtimolini ayirilganiga teng:

$$\begin{aligned} P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\} &= \\ &= P\{x < a_2, b_1 \leq y < b_2\} - P\{x < a_1, b_1 \leq y < b_2\}. \end{aligned}$$

So'ngi tenglikning o'ng tomoniga (11.1) va (11.2) tengliklarning o'ng tomonlarini qo'yib, 5) xossani hosil qilamiz.

7) xossani isbotlaymiz. $\{Y < +\infty\}$ hodisaning muqarrarligidan

$$\{X < x, Y < +\infty\} = \{X < x\} \cap \{Y < +\infty\} = \{X < x\}$$

ekanligi kelib chiqadi va xuddi shu singari

$$\{X < +\infty, Y < y\} = \{X < +\infty\} \cap \{Y < y\} = \{Y < y\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu ikki tenglikdan 7) xossa kelib chiqadi. ◀

Oxirgi xossa (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $F_{X,Y}$ taqsimot funksiyasi yordamida bir o'lchovli F_X , F_Y taqsimot funksiyalarni topish imkonini beradi. Biroq aksi har doim ham o'rinli emas, aniqrog'i bir o'lchovli F_X , F_Y taqsimot funksiyalari asosida (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $F_{X,Y}$ taqsimot funksiyasini ular *o'zaro bog'liq bo'lmagan* hollardagina topib bo'ladi.

11.2-Ta'rif. Agar ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlarda $\{X < x\}$ va $\{Y < y\}$ o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsa, X va Y *o'zaro bog'liq bo'lmagan* tasodifiy miqdorlar deb ataladi.

11.2-Teorema. X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi uning komponentalari taqsimot funksiyalarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad (11.3)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

► Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda $\{X < x\}$ va $\{Y < y\}$ hodisalar o'zaro bog'liq emas. Shuning uchun $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}$, ya'ni $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

(11.3) o'rinli ekanligidan $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emasligini anglatadi. ◀

11.2. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlar

11.3-Ta'rif. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning har bir X va Y komponentalari diskret bo'lsa, uni biz diskret tasodifiy miqdor deb ataymiz.

Bayon qilish oson bo'lishi uchun X va Y diskret tasodifiy miqdorlar chekli sondagi qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilamiz.

Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \quad (11.2)$$

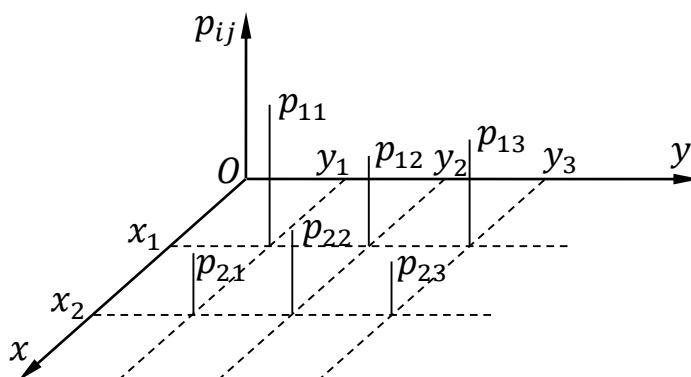
formula orqali, yoki

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2m}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	$\dots$	p_{nm}

11.1-jadval

jadval ko‘rinishida berilishi mumkin. Bunda birgalikda bo‘lmagan va to‘liq guruh tashkil qiluvchi $\{X = x_i, Y = y_j\}$ hodisalarning ehtimollari sifatida barcha p_{ij} ehtimollarning yig‘indisi birga teng:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1. \quad (11.3)$$



11.3-rasm

11.3-rasmda ikki o‘lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdor taqsimotining grafigiga misol keltirilgan.

11.1-Teoremaning 7) xossasiga ko‘ra ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilgan holda har bir komponentasining taqsimot qonunini topish mumkin. $\{X = x_1, Y = y_1\}$, $\{X = x_1, Y = y_2\}$, $\dots$, $\{X = x_1, Y = y_m\}$ hodisalar birgalikda emas va shu tufayli birgalikda bo‘lmagan hodisalarni qo‘shish teoremasiga ko‘ra

$$p_{x_1} = P\{X = x_1\} = p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1m}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Xuddi shu singari

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^n p_{ij}. \quad (11.4)$$

11.2-Misol. Qutida 3 ta oq, 2 ta qora, 1 ta qizil va 1 ta ko‘k shar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda tanlangan 4 ta shar olindi. X –tanlamadagi oq sharlar soni, Y –tanlamadagi qora sharlar soni. (X, Y) ikki o‘lchovli hamda X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini tuzing.

► X tasodifiy miqdor 0,1,2,3 qiymatlarni, Y esa 0,1,2 qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanib bu qiymatlarning ehtimollarini topamiz. Barcha yuz berishi mumkin bo‘lgan hodisalar soni $n = C_7^4 = 35$. Ikkalasi ham nol bo‘lgan holga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni $m\{X = 0, Y = 0\} = 0$, chunki tanlangan to‘rtta sharning ikkitasi qizil va ko‘k bo‘lsa, qolgan ikkitasida albatta oq yoki qora shar bo‘lishi kerak. Xuddi shunday mulohaza yuritib, $m\{X = 1, Y = 0\} = m\{X = 0, Y = 1\} = 0$ ekanligiga amin bo‘lamiz. Bundan tashqari tanlangan sharlar soni to‘rtta bo‘lganligi uchun $m\{X = 3, Y = 2\} = 0$ bo‘ladi. $X = 1$ va $Y = 1$ bo‘lishi uchun tanlamada qizil va ko‘k sharlar bo‘lishi kerak hamda jami oq sharlar soni uchta bo‘lganligi uchun oq sharni $C_3^1 = 3$ usul bilan, qora sharni esa $C_2^1 = 2$ usul bilan tanlash mumkin. Shuning uchun $m\{X = 1, Y = 1\} = 3 \cdot 2 = 6$ bo‘ladi. Xuddi shu singari hulohaza yuritib, $m\{X = 1, Y = 2\} = 3 \cdot 2 = 6$, $m\{X = 2, Y = 0\} = 3$, $m\{X = 2, Y = 1\} = 12$, $m\{X = 2, Y = 2\} = 3$, $m\{X = 3, Y = 0\} = 2$, $m\{X = 3, Y = 1\} = 2$ imkoniyat yaratuvchi hodisalar sonini topamiz. U holda mos ehtimollar $p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = m\{X = 0, Y = 0\}/n = 0/35 = 0$, $p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = 0$, $p_{13} = P\{X = 0, Y = 2\} = 1/35$, $p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$, $p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = 6/35$, $p_{23} = P\{X = 1, Y = 2\} = 6/35$, $p_{31} = P\{X = 2, Y = 0\} = 3/35$, $p_{32} = P\{X = 2, Y = 1\} = 12/35$, $p_{33} = P\{X = 2, Y = 2\} = 3/35$, $p_{31} = P\{X = 3, Y = 0\} = 2/35$, $p_{32} = P\{X = 3, Y = 1\} = 2/35$, $p_{33} = P\{X = 3, Y = 2\} = 0$ bo‘ladi va ulardan 11.1-jadvalni tuzamiz:

Y X	0	1	2
0	0	0	1/35
1	0	6/35	6/35
2	3/35	12/35	3/35
3	2/35	2/35	0

Bu jadvaldan esa (11.4) formulalarga ko'ra $P\{X = 0\} = 1/35$, $P\{X = 1\} = 6/35 + 6/35 = 12/35$, $P\{X = 2\} = 3/35 + 12/35 + 3/35 = 18/35$, $P\{X = 3\} = 2/35 + 2/35 = 4/35$, $P\{Y = 0\} = 3/35 + 2/35 = 5/35$, $P\{Y = 1\} = 6/35 + 12/35 + 2/35 = 20/35$, $P\{Y = 2\} = 1/35 + 6/35 + 3/35 = 10/35$ ehtimollarni topamiz. Bu ehtimollardan X va Y tasodifiy miqdorlarning

X	0	1	2	3
P	1/35	12/35	18/35	4/35

Y	0	1	2
P	5/35	20/35	10/35

taqsimot qatorlarini tuzamiz. ◀

11.3-Teorema. Ikki o'lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdorning X va Y komponentalari o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun ixtiyoriy $i = 1, 2, \dots, m$ va $j = 1, 2, \dots, n$ larda

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \quad (11.5)$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

(11.5) tengliklarni

$$p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \quad (11.6)$$

ko'rinishda ham ifodalash mumkin.

11.1-jadvaldan foydalanib ikki o'lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdorning $F_{X,Y}(x, y)$ taqsimot funksiyasini topish mumkin. Buning uchun $x_i < x$, $y_j < y$ bo'ladigan barcha i va j bo'yicha p_{ij} ehtimollarning yigindisini olish kerak:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\substack{i: x_i < x \\ j: y_j < y}} p_{ij} \quad (11.7)$$

Agar X va Y diskret tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa (11.7) tenglik

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{i:x_i < x} p_{x_i} \cdot \sum_{j:y_j < y} p_{y_j}$$

ko‘rinishni oladi.

11.3. Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar

11.4-Ta’rif. Agar (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X < x, Y < y\}$$

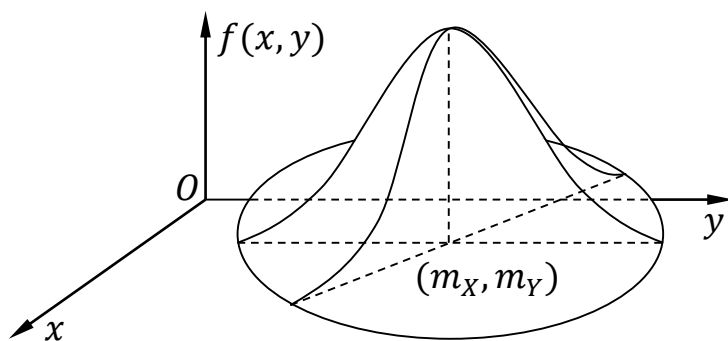
taqsimot funksiyasini yaqinlashuvchi

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) du dv \quad (11.8)$$

xosmas integral ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘lsa, uni biz *ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor* deb ataymiz.

$f(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$ funksiyani (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi deb ataladi.

Geometrik jihatdan (X,Y) tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining $f(x,y)$ zichlik funksiyasi *taqsimot sirti* deb ataluvchi sirtni tasvirlaydi (11.4-rasm).



11.4-rasm

Ikki o‘lchovli integralda integrallash sohasi uchi (x,y) nuqtada bo‘lgan $\{s < x, t < y\}$ kvadrantdan iborat. Shuning uchun ikki o‘lchovli integralni karrali integral ko‘rinishida tasvirlash mumkin:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y f(u, v) dv = \int_{-\infty}^y dv \int_{-\infty}^x f(u, v) du.$$

Bu yerda ham bir o'lchovlidagi singari $f(x, y)$ funksiyani uzluksiz (ayrim nuqta va chiziqlardan tashqarida) deb faraz qilamiz. U holda yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integralning xossalriga ko'ra $f(x, y)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalarida $F(x, y) = F_{X,Y}(x, y)$ taqsimot funksiyasi ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilalarga ega bo'ladi va

$$f(x, y) = F''_{xy} = F''_{yx} \quad (11.9)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

11.4-Teorema. Ikki o'lchovli taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

$$1) f(x, y) \geq 0;$$

$$2) P\{a_1 < X < a_2, b_1 < Y < b_2\} = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy;$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1;$$

$$4) P\{x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y;$$

$$5) P\{X = x, Y = y\} = 0;$$

$$6) P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy;$$

$$7) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy;$$

$$8) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

11.3-Misol. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \frac{A}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, 1) A o‘zgarmasni; 2) $F(x, y)$ taqsimot funksiyasini; 3) $P\{1 \leq X \leq \sqrt{3}, 1 \leq Y \leq \sqrt{3}\}$ ehtimolni; 4) X va Y tasodifiy miqdorlarning $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ zichlik funksiyalarini toping.

► 1) Ikki o‘lchovli taqsimotning zichlik funksiyasining 3-xossasiga binoan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = 1,$$

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)} dy = A \cdot \arctg x \Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \arctg y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = A \cdot \pi^2.$$

Demak, $A = 1/\pi^2$ bo‘lar ekan.

2) $F(x, y)$ taqsimot funksiyasini (11.8) formulaga ko‘ra topamiz:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1+s^2)(1+t^2)} ds dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^x \frac{ds}{1+s^2} \cdot \int_{-\infty}^y \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctg s \Big|_{-\infty}^x \cdot \frac{1}{\pi} \arctg t \Big|_{-\infty}^y = \left(\frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \arctg y + \frac{1}{2} \right).$$

3) Taqsimot funksiyasining 5-xossasiga binoan

$$P\{1 \leq X \leq \sqrt{3}, 1 \leq Y \leq \sqrt{3}\} =$$

$$= F(\sqrt{3}, \sqrt{3}) - F(\sqrt{3}, 1) - F(1, \sqrt{3}) + F(1, 1) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{144}.$$

4) Zichlik funksiyasining 7 va 8-xossalariga binoan

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \arctg y \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} \arctg x \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2(1+y^2)} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. ◀

11.5-Teorema. X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun ixtiyoriy x va y qiymatlarda (X, Y) ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Ayrim ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Biz quyida amaliyotda ko'p uchraydigan ayrim ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarni qarab chiqamiz.

Tekislikdagi tekis taqsimot qonuni. Agar (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlansa, (X, Y) tasodifiy miqdor tekislikda *tekis taqsimlangan* deyiladi, bu yerda c — o'zgarmas son, D esa Oxy tekislikning biror sohasi. U holda zichlik funksiyasining 3-xossasidan $c = S_D$ kelib chiqadi, bu yerda S_D berilgan D sohaning yuzi.

Berilgan soha $D = \{(x, y): a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$ to'g'ri to'rt burchakdan iborat bo'lsa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

bo'ladi. Uning taqsimot funksiyasini (11.8) formulaga ko'ra topamiz. Agar $a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2$ bo'lsa,

$$F(x, y) = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \int_{a_1}^x \int_{b_1}^y dudv = \frac{(x - a_1)(y - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)},$$

agar $x \leq a_1, y \leq b_1$ bo'lsa, $F(x, y) = 0$ va $x \geq a_2, y \geq b_2$ bo'sa, $F(x, y) = 1$ bo'ladi. Shunday qilib ularni umumlashtir ushbu taqsimot funksiyasini hosil qilamiz:

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - a_1)(y - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}, & a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2 \\ 0, & x \leq a_1, y \leq b_1 \\ 1, & x \geq a_2, y \geq b_2 \end{cases}$$

Zichlik funksiyasining 7 va 8-xossalaridan foydalanib ikki o'lchovli tasodifiy miqdor X va Y komponentalarining

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 < x < a_2, \\ 0, & x < a_1 \text{ yoki } x > a_2 \end{cases},$$

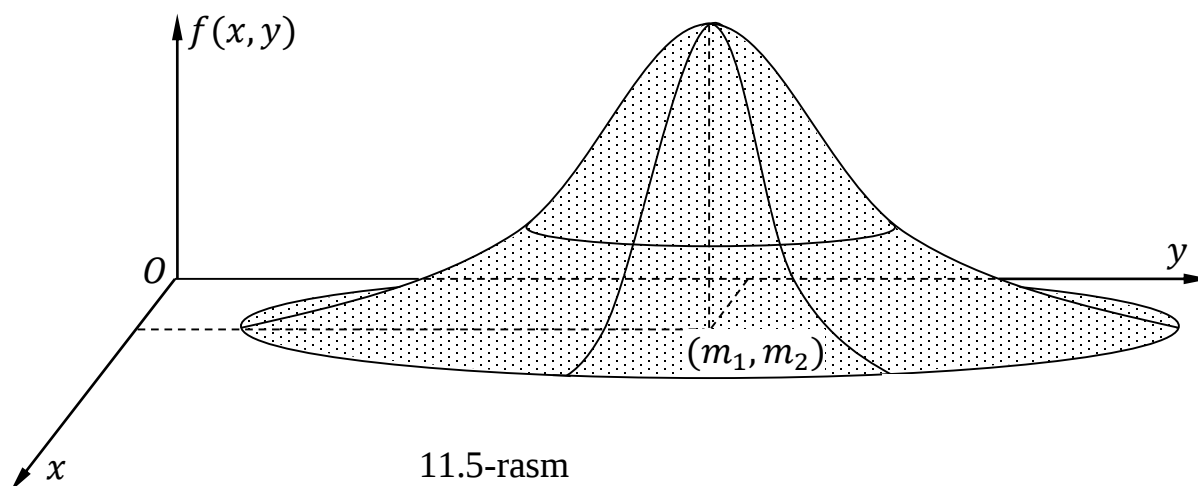
$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{y - b_1}{b_2 - b_1}, & b_1 < y < b_2, \\ 0, & y < b_1 \text{ yoki } y > b_2 \end{cases}$$

taqsimot funksiyalarini hosil qilamiz. Demak, $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, ya'ni 11.5-teoremaga ko'ra X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas ekan.

Ikki o'lchovli normal taqsimot qonuni. Agar (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

ko'rinishda bo'lsa, u *normal taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataladi.



Ikki o'ldchovli normal taqsimot tarkibida beshta parameter: $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ bor. Ularning dastlabki m_1, m_2 – ikkitasi (m_1, m_2) taqsimot simmetriya markazini aniqlaydi. Bu nuqtaga taqsimot sirti cho'qqisi proyeksiyalanadi. Bu sirt esa to'ldaligicha Oxy tekislikdan yuqorida yotadi va (m_1, m_2) nuqta orqali Oxy tekislikka perpendikulyar bo'lib o'tuvchi to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik (11.5-rasm).

Normal taqsimot sirtining Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimida markazi simmetriya o'qida bo'lgan ellipslar, Oxy tekislikka perpendikulyar tekisliklar bilan kesimida esa normal egri chiziqlar hosil bo'ladi.

Zichlik funksiyasining 7-xossasiga binoan X tasodifiy miqdor ehtimollarining $f_X(x)$ zichlik funksiyasini topamiz:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)} dy = \\
 &= \left| t = \frac{x-m_1}{\sqrt{2}\sigma_1}, z = \frac{y-m_2}{\sqrt{2}\sigma_2} \right| = \\
 &\quad dy = \sqrt{2}\sigma_2 dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{t^2}{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}(z^2 - 2rtz)} dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{t^2}{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}((z-rt)^2 - r^2t^2)} dz = \\
 &= \frac{e^{-\frac{t^2}{1-r^2} + \frac{r^2t^2}{1-r^2}}}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-rt)^2}{1-r^2}} dz = \left| u = \frac{z-rt}{\sqrt{1-r^2}}, dz = \sqrt{1-r^2} du \right| = \\
 &= \frac{e^{-t^2}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_1} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}},
 \end{aligned}$$

ya'ni

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

Shunday qilib, X matematik kutilmasi m_1 va dispersiyasi σ_1^2 bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ekan. Biz bu yerda $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ Puasson integralidan foydalandik.

Xuddi shu singari Y matematik kutilmasi m_2 va dispersiyasi σ_2^2 bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ekanligini va uning zichlik funksiyasi

$$f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

ko'rinishda bo'lishini ko'rsatish mumkin.

11.4. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

Amaliyotda qaralayotgan Y sonli miqdor boshqa bir X yoki bir nechta $X_1, X_2, \dots, X_n$ sonli miqdorlarning funksiyasi bo'lgan hol ko'p uchraydi, ya'ni bu holda Y miqdor bu miqdor yoki miqdorlar bilan $Y = Y(X)$ yoki $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksional bog'langan bo'ladi. Agar X miqdor yoki $X_1, X_2, \dots, X_n$ miqdorlar tasodifiy miqdorlar bo'lsa, Y ham tasodifiy miqdor bo'lishi ravshan. Shunday qilib biz bitta X tasodifiy miqdorning yoki bir necha o'lchovli $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tasodifiy miqdorning funksiyasi tushunchasiga keldik.

Bitta tasodifiy miqdorning funksiyasi. Agar X tasodifiy miqdorning har bir qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatiga biror qonun yoki qoidaga ko'ra Y tasodifiy miqdorning qabul qiladigan birorta qiymati mos qo'yilsa, Y miqdorni X tasodifiy miqdorning funksiyasi deyiladi va $Y = \varphi(X)$ ko'rinishda yoziladi.

Diskret tasodifiy miqdorning funksiyasi. X — diskret tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimollar bilan qabul qilsin, ya'ni $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$. U holda Y tasodifiy miqdor o'zining $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n)$ qiymatlarini mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n$

ehtimollar bilan qabul qilishi ravshan, ya'ni $p_i = P\{Y = y_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$.

X tasodifiy miqdorning turli qiymatlariga Y tasodifiy miqdorning bitta qiymati mos kelishi mumkin. Bu holda takrorlanadigan qiymatlarning ehtimollari qo'shiladi.

Y tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyai

$$MY = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)p_i, DY = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - MY)^2 p_i$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

11.4-Misol. X diskret tasodifiy miqdor o'zining

X	-2	1	2	5
P	0,2	0,1	0,3	0,4

taqsimot qatori bilan berilgan. Agar 1) $Y = X^2$, 2) $Y = 1/X$ bo'lsa, MY matematik kutilmani toping.

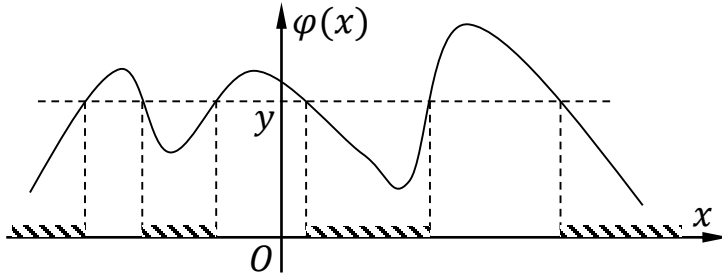
► 1) Y tasodifiy miqdor $y_1 = \varphi(x_1) = (-2)^2 = 4, y_2 = 1^2 = 1, y_3 = 2^2 = 4, y_4 = 5^2 = 25$ qiymatlarni qabul qiladi. y_1 va y_3 qiymatlar teng. Shuning uchun mos ehtimollar qo'shiladi: $p_1 = P\{Y = 4\} = P\{X = -2\} + P\{X = 2\} = 0,2 + 0,3 = 0,5$. Qolgan qiymatlar esa X tasodifiy miqdor mos qiymatining ehtimoli bilan bir xil bo'ladi: $p_2 = P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} = 0,1, p_3 = P\{Y = 25\} = P\{X = 5\} = 0,4$. Shuning uchun $MY = 4 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 = 12,1$.

2) Bu holda Y tasodifiy miqdorning qiymatlari $y_1 = 1/(-2) = -0,5, y_2 = 1, y_3 = 0,5$ va $y_4 = 0,2$ qiymatlarni mos ravishda $p_1 = 0,2, p_2 = 0,1, p_3 = 0,3, p_4 = 0,4$ ehtimollar bilan qabul qiladi. U holda $MY = -0,5 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,23$ bo'ladi. ◀

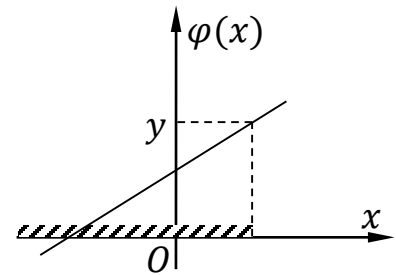
Uzluksiz tasodifiy miqdorning funksiyasi. X uzluksiz tasodifiy miqdor $F_X(x)$ taqsimot funksiyasi bilan berilgan va $Y = \varphi(X)$ uning funksiyasi bo'lsin. Agar $F_Y(y)$ yangi Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsa,

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X \in \varphi^{-1}(-\infty; y)\} \quad (11.10)$$

bo‘ladi, bu yerda $\varphi^{-}(-\infty; y)$ orqali $(-\infty; y)$ oraliqning $y = \varphi(x)$ akslantirishdagi asl obrazi belgilangan. 11.6-rasmda bu asl obraz to‘plam shtrixlab ko‘rsatilgan.



11.6-rasm



11.7-rasm

Tasodifiy miqdorni monoton almashtirish. $\varphi(x)$ –funksiya X tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarining (a, b) oralig‘ida (u cheksiz $(-\infty; +\infty)$ oraliq bo‘lishi ham mumkin) o‘suvchi va differensiallanuvchi va $\varphi^{-}(y)$ –uning teskarisi bo‘lsin. $Y = \varphi(X)$ tasodifiy miqdorning $F_Y(y)$ taqsimot funksiyasi uchun

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X < \varphi^{-}(y)\} = F_X(\varphi^{-}(y)) \quad (11.11)$$

tenglikni yozish mumkin. Xuddi shunday mulohaza yuritib, kamayuvchi $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$F_Y(y) = 1 - F_X(\varphi^{-}(y)) \quad (11.12)$$

formulani yozish mumkin. Xususiyl holda $\varphi(x) = ax + b$ chiziqli bo‘lsin, u holda $\varphi^{-}(y) = (y - b)/a$ bo‘ladi. Shuning uchun $a > 0$ bo‘lganda (11.7-rasm)

$$F_Y(y) = F_{aX+b}(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

va $a < 0$ bo‘lganda

$$F_Y(y) = F_{aX+b}(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

bo‘ladi.

(11.11) va (11.12) formulalardan foydalanib Y tasodifiy miqdor taqsimotining $f_Y(y)$ zichlik funksiyasini X tasodifiy miqdor taqsimotining $f_X(x)$ zichlik funksiyasiga bog‘lash mumkin:

$\varphi(x)$ –o‘suvcchi bo‘lgan holda

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= (F_Y(y))' = (F_X(x))' \Big|_{x=\varphi^-(y)} (\varphi^-(y))' = \\ &= f_X(\varphi^-(y))(\varphi^-(y))'; \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ –kamayuvchi bo‘lgan holda

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= (F_Y(y))' = - (F_X(x))' \Big|_{x=\varphi^-(y)} (\varphi^-(y))' = \\ &= -f_X(\varphi^-(y))(\varphi^-(y))'. \end{aligned}$$

Ikkala holni ham bitta

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^-(y)) \left| (\varphi^-(y))' \right| \quad (11.13)$$

tenglik bilan yozish mumkin.

Nihoyat $\varphi(x)$ funksiya (a, b) oraliqda monoton bo‘lmasin. U holda bu oraliqni har birida $\varphi(x)$ funksiya monoton bo‘ladigan qilib n qisman oraliqlarga ajratamiz. Har bir i –qisman oraliqda $\varphi(x)$ funksiyaning $\varphi_i^-(y)$ teskarisini topamiz va bu qisman oraliqda taqsimotning zichlik funksiyasi $f_X(\varphi_i^-(y)) \left| (\varphi_i^-(y))' \right|$ ko‘rinishda bo‘ladi. Ularning yig‘indisi esa Y tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasini beradi:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n f_X(\varphi_i^-(y)) \left| (\varphi_i^-(y))' \right|.$$

$X = N[m, \sigma]$ normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni chiziqli almashtirish. $a > 0$ bo‘lganda $Y = aX + b$ tasodifiy taqsimot funksiyasini topamiz:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_{aX+b}(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(y-b)/a} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \left| \begin{matrix} u = ax + b \\ du = a dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(u-am-b)^2}{2a^2\sigma^2}} du, \end{aligned}$$

ya’ni, $Y = aX + b$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimlangan bo‘lib, uning parametrlari $am + b, a\sigma$ bo‘ladi: $Y = N[am + b, a\sigma]$. Xususiyl holda $Y = (X - m)/\sigma$ bo‘lsa, $Y = N[0,1]$ bo‘ladi.

Zichlik funksiyasi $f(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdordan tuzilgan $Y = \varphi(X)$ tasodifiy miqdorning sonly xarakteristikalarini topish uchun uning taqsimot funksiyasini topish shart emas. Matematik kutilma va dispersiya uchun

$$MY = M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx,$$

$$DY = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - MY)^2 f(x)dx$$

formulalardan foydalanish mumkin.

11.5-Misol. Agar X tasodifiy miqdor standart normal taqsimlangan bo'lsa, $Y = X^2$ tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

► Demak bu yerda $\varphi(x) = x^2$ va shuning uchun

$$F_Y(y) = \int_{x^2 < y} f_X(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^2 < y} e^{-x^2/2} dx.$$

$y \leq 0$ bo'lganda $x^2 < y$ bo'ladigan x o'zgaruvchining qiymatlari yo'q, va demak $Y = X^2 < y$ bo'ladigan X tasodifiy miqdorning qiymatlari ham yo'q. U holda

$$F_Y(y) = 0 \text{ agar } y \leq 0.$$

Agar $y > 0$ bo'lsa, $\{x^2 < y\}$ soha $\{-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\}$ soha bilan bir xil bo'ladi, va demak

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx,$$

$\varphi(x)$ funksiya juftligi tufayli

$$F_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx.$$

So'ngi integralda $z = x^2$ deb yangi o'zgaruvchi kiritsak, $y > 0$ bo'lganda

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z/2} dz$$

bo'ladi. Shuning uchun

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy,$$

bu yeda

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-y/2}, & y > 0. \end{cases}$$

$\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$, bu yerda $\Gamma(x)$ – Eylerning gamma-funksiyasi bo‘lganligi uchun, Y tasodifiy miqdor taqsimotining $f_Y(y)$ zichlik funksiyasi parametrlari $\lambda = 1/2$ va $\gamma = 1/2$ bo‘lgan gamma-taqsimot bilan bir xil bo‘ladi. ◀

Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning funksiyasi. Ikki o‘lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning har bir qiymatiga biror qonun-qoida asosida boshqa bir Z tasodifiy miqdorning bitta qiymatini mos qo‘yuvchi moslikka ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning funksiyasi deb ataladi va $Z = \varphi(X, Y)$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning funksiyasi. Ikki o‘lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdorning $\varphi(X, Y)$ funksiyasi ham diskret tasodifiy miqdor bo‘lishi ravshan. Bu tasodifiy miqdor $\varphi(x_i, y_j)$ qiymatlarini

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m,$$

ehtimollar bilan qabul qiladi, bu yerda x_i va y_j – mos ravishda X va Y tasodifiy miqdorlarning qiymatlari.

$Z = \varphi(X, Y)$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qatorini tuzishda bir xil $\varphi(x_i, y_j)$ qiymatlarni birlashtirib, ularning ehtimollarini qo‘shish kerak. Uning matematik kutilmasi esa bir o‘zgaruvchili singari topiladi:

$$MZ = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$$

Endi diskret tasodifiy miqdorlar ustida *arifmetik amallarni* kiritamiz.

$p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ ehtimollar bilan x_i qiymatlarni qabul qiluvchi X va $\bar{p}_j = P\{Y = y_j\}, j = 1, 2, \dots, m$ ehtimollar bilan y_j qiymatlarni qabul qiluvchi Y tasodifiy miqdorlarning yig‘indisi (*ayirmasi, ko‘paytmasi*) deb barcha ko‘rsatilgan i va j uchun $z_{ij} = x_i + y_j$ ($z_{ij} = x_i - y_j, z_{ij} = x_i y_j$)

qiymatlarni $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi $Z = X + Y$ ($Z = X - Y, Z = XY$) diskret tasodifiy miqdorga aytiladi. Bir nechta $x_i + y_j$ yig'indi ($x_i - y_j$ ayirma, $x_i y_j$ ko'paytma) teng bo'lib qolsa, mos ehtimollar qo'shiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning c o'zgarmas songa ko'paytmasi deb cX qiymatlarni $p_i = P\{X = x_i\}$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi cX miqdorga aytiladi.

11.6-Misol. Taqsimot qatorlari

X	-1	1	3
P	0,2	0,5	0,3

Y	2	3	5	6
P	0,1	0,4	0,3	0,2

va o'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorlar berilgan. $X + Y$, XY va $4X$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qatorlarini tuzing.

► $Z = X + Y$ yig'indi $z_{11} = x_1 + y_1 = -1 + 2 = 1$, $z_{12} = x_1 + y_2 = -1 + 3 = 2$, $z_{13} = -1 + 5 = 4$, $z_{14} = -1 + 6 = 5$, $z_{21} = 1 + 2 = 3$, $z_{22} = 1 + 3 = 4$, $z_{23} = 1 + 5 = 6$, $z_{24} = 1 + 6 = 7$, $z_{31} = 3 + 2 = 5$, $z_{32} = 3 + 3 = 6$, $z_{33} = 3 + 5 = 8$, $z_{34} = 3 + 6 = 9$ qiymatlarni mos ravishda $p_{11} = P\{X = -1, Y = 2\} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 2\} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$, $p_{12} = P\{X = -1, Y = 3\} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 3\} = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$, $p_{13} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$, $p_{14} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$, $p_{21} = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$, $p_{22} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$, $p_{23} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$, $p_{24} = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$, $p_{31} = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$, $p_{32} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$, $p_{33} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$, $p_{34} = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$ ehtimollar bilan qabul qiladi.

Bu yerda $z_{13} = z_{22} = 4$ bo'lganligi uchun mos ehtimollar qo'shiladi, ya'ni $P\{Z = X + Y = 4\} = p_{13} + p_{22} = 0,06 + 0,2 = 0,26$, xuddi shunday $z_{14} = z_{31} = 5$ va $z_{23} = z_{32} = 6$ bo'lganligi sababli $P\{Z = 5\} = p_{14} + p_{31} = 0,04 + 0,03 = 0,07$, $P\{Z = 6\} = p_{23} + p_{32} = 0,15 + 0,12 = 0,27$ bo'ladi. Qolgan qiymatlar turlicha, shuning uchun taqsimot qatori 2 ta satr va $3 \cdot 4 - 3 = 9$ ta ustundan iborat bo'ladi:

$Z = X + Y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,02	0,08	0,05	0,26	0,07	0,27	0,1	0,09	0,06

Ehtimolliklar uchun (11.3) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 0,02 + 0,08 + 0,05 + 0,26 + 0,07 + \\ + 0,27 + 0,1 + 0,09 + 0,06 = 1.$$

Xuddi shu singari $Z = XY$ ko'paytmaning qiymatlarini topamiz:

$z_{11} = x_1 y_1 = -1 \cdot 2 = -2$, $z_{12} = x_1 y_2 = -1 \cdot 3 = -3$, $z_{13} = -1 \cdot 5 = -5$,
 $z_{14} = -1 \cdot 6 = -6$, $z_{21} = 1 \cdot 2 = 2$, $z_{22} = 1 \cdot 3 = 3$, $z_{23} = 1 \cdot 5 = 5$, $z_{24} =$
 $1 \cdot 6 = 6$, $z_{31} = 3 \cdot 2 = 6$, $z_{32} = 3 \cdot 3 = 9$, $z_{33} = 3 \cdot 5 = 15$, $z_{34} = 3 \cdot 6 =$
11. Bu qiymatlarni yig'indidagi singari mos ravishda

$p_{11} = P\{X = -1, Y = 2\} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 2\} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$,
 $p_{12} = P\{X = -1, Y = 3\} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 3\} = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$,
 $p_{13} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$, $p_{14} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$, $p_{21} = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$,
 $p_{22} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$, $p_{23} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$, $p_{24} = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$, $p_{31} =$
 $0,3 \cdot 0,1 = 0,03$, $p_{32} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$, $p_{33} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$, $p_{34} = 0,3 \cdot$
 $0,2 = 0,06$ ehtimollar bilan qabul qiladi.

Bu yerda teng qiymatlar faqat bitta: $z_{24} = z_{31} = 6$, shuning uchun
 $P\{Z = XY = 6\} = p_{24} + p_{31} = 0,1 + 0,03 = 0,13$ bo'ladi. U holda taqsimot
qatori 11 ta ustundan iborat bo'ladi. Manfiy ko'paytuvchining hisobiga
qiymatlarning o'sib borish tartibi buzildi, lekin biz ularni o'sib borish tartibida
joylashtiramiz:

$Z = XY$	-6	-5	-3	-2	2	3	5	6	9	15	18
P	0,04	0,06	0,08	0,02	0,05	0,2	0,15	0,13	0,12	0,09	0,06

Ehtimollar uchun (11.3) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 0,04 + 0,06 + 0,08 + 0,02 + 0,05 + 0,2 + 0,15 + \\ + 0,13 + 0,12 + 0,09 + 0,06 = 1.$$

$4X$ tasodifiy miqdor $z_1 = 4x_1 = 4 \cdot (-1) = -4$, $z_2 = 4 \cdot 1 = 4$, $z_3 =$
 $4 \cdot 3 = 12$ qiymatlarni mos ravishda $p_1 = P\{X = -1\} = 0,2$, $p_2 = P\{X =$

$1\} = 0,5$, $p_3 = P\{X = 3\} = 0,3$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Shuning uchun bu ko'paytma tasodifiy miqdorning taqsimot qatori

$Z = 4X$	-4	4	12
P	0,2	0,5	0,3

ko'rinishda bo'ladi. ◀

11.7-Misol. a parametrli X va b parametrli Y Puasson taqsimotli diskret tasodifiy miqdorlar $Z = X + Y$ yig'indisining taqsimotini toping.

► X va Y tasodifiy miqdorlar

$$P\{X = i\} = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, i = 0, 1, 2, \dots; P\{Y = j\} = \frac{b^j}{j!} e^{-b}, j = 0, 1, 2, \dots$$

taqsimot qonunlari bilan berilgan bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emasligini e'tiborga olsak

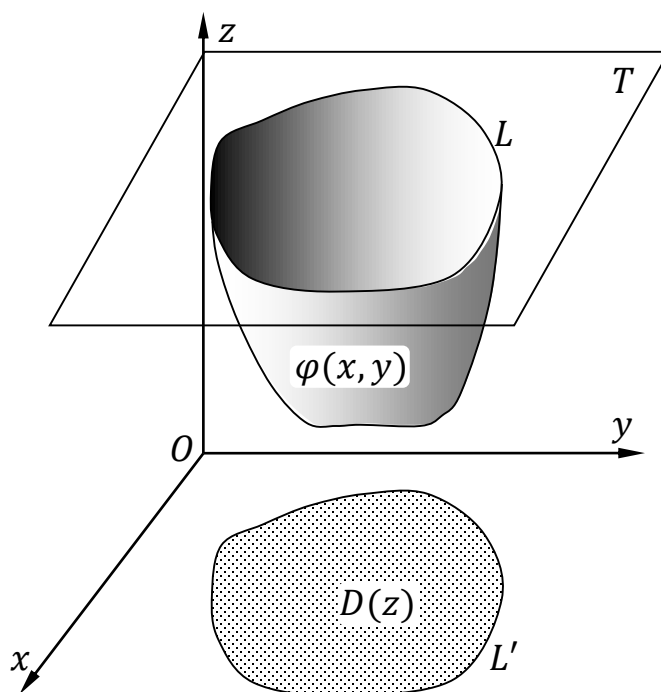
$$\begin{aligned} P\{Z = k\} &= \sum_i \sum_j P\{X = i, Y = j\} = \sum_{i+j=k}^k P\{X = i, Y = k - i\} = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{a^i}{i!} e^{-a} \frac{b^{k-i}}{(k-i)!} e^{-b} = e^{-(a+b)} \sum_{i=0}^k \frac{a^i b^{k-i}}{i! (k-i)!} \\ &= \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i! (k-i)!} a^i b^{k-i} = \\ &= \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i} = \frac{(a+b)^k}{k!} e^{-(a+b)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ya'ni yig'indi ham $(a + b)$ parametrli Puasson taqsimotli tasodifiy miqdor bo'lar ekan. ◀

Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning funksiyasi. Agar (X, Y) – ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi $f_{X,Y}(x, y)$ bo'lsa, $Z = \varphi(X, Y)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_Z(z) = \iint_{\varphi(x,y) < z} f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (11.14)$$

tenglik bilan aniqlanadi.



11.8-rasm

(11.14) tenglikni geometrik talqin bilan izohlaymiz. $z = \varphi(x, y)$ funksiya bilan aniqlangan sirt “piyola” shaklda bo‘lsin (11.8-rasm) va z yuqorida aniqlangan $Z = \varphi(X, Y)$ tasodifiy miqdorning ixtiyoriy qiymati bo‘lsin. $(0, 0, z)$ nuqta orqali Oz o‘qqa perpendikulyar qilib T tekislik o‘tkazamiz. T tekislik bilan $z = \varphi(x, y)$ sitrning kesishuvidan hosil bo‘lgan chiziqni L orqali va uning Oxy tekislikdagi proyeksiyasini esa L' orqali belgilaymiz. Oxy tekislikning L' chiziq bilan chegaralangan qismi $D(z)$ bo‘lsin. U holda (X, Y) tasodifiy nuqtaning $D(z)$ sohaga tushishi $\{Z < z\}$ hodisaning yuz berishiga olib keladi. $Z = \varphi(X, Y)$ ekanligini inobatga olsak

$$D(z) = \{(x, y): \varphi(x, y) < z\} = \{\varphi(x, y) < z\}$$

Shunday qilib, $\{Z < z\}$ va $\{(X, Y) \in D(z)\}$ hodisalar teng kuchli hodisalar ekan. U holda ikki o‘lchovli taqsimot zichlik funksiyasining 6-xossasiga binoan

$$P\{Z < z\} = P\{(X, Y) \in D(z)\} = \iint_{\varphi(x, y) < z} f_{X, Y}(x, y) dx dy$$

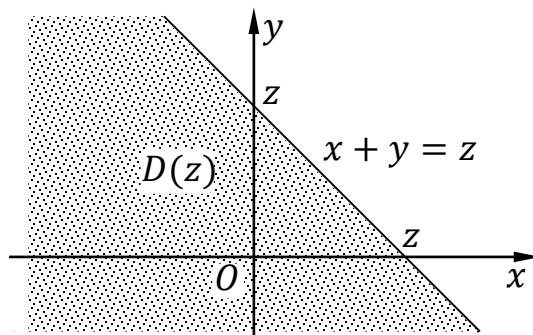
tenglik o‘rinli bo‘ladi. $P\{Z < z\} = F_Z(z)$ ekanligidan (11.14) kelib chiqadi.

$Z = \varphi(X, Y)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$MZ = M\varphi(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X, Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

formulaga ko'ra topiladi.

Ikki tasodifiy miqdor yig'indisining, ya'ni $Z = X + Y$ tasodifiy miqdor taqsimot qonunini topamiz.



11.9-rasm

$f_{X,Y}(x, y)$ ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi bo'lsin. (11.14) formulaga ko'ra

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint_{D(z)} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

bu yerda $D(z) = \{(x, y): x + y < z\}$ (11.9-rasm).

O'ng tomondagi ikki o'chovli integralni hisoblaymiz:

$$\iint_{D(z)} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx$$

Demak

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx,$$

bu tenglikni ichki integralning yuqori chegarasiga kirgan z o'zgaruvchi bo'yicha differensiallasak, $Z = X + Y$ tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasini hosil qilamiz:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z - x) dx. \quad (11.15)$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ bo‘lishi ma’lum. U holda (11.15) formula

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (11.16)$$

ko‘rinishni oladi. Bu holda Z tasodifiy miqdor taqsimotining $f_Z(z)$ zichlik funksiyasi X va Y tasodifiy miqdorlar $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ zichlik funksiyalarining *kompozitsiyasidan* iborat deyiladi yoki boshqaqacha qilib aytganda ikkita o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar yigindisining taqsimot qonuni qo‘shiluvchilar taqsimot qonunlarining *kompozitsiyasiga* teng.

11.8-Misol. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan ikkita $X = N[m_X, \sigma_X]$, $Y = N[m_Y, \sigma_Y]$ normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar $Z = X + Y$ yig‘indisi taqsimotining zichlik funksiyasini toping.

► (11.16) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m_X, \sigma_X}(x) \varphi_{m_Y, \sigma_Y}(z-x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(Ax^2-2Bx+C)} dx, \end{aligned}$$

bu yerda

$$A = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}, \quad B = \frac{m_X}{\sigma_X^2} + \frac{z - m_Y}{\sigma_Y^2}, \quad C = \frac{m_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^2}.$$

U holda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(Ax^2-2Bx+C)} dx &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}\left(x^2-2\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)} dx = \\ \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}\left(\left(x-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)} dx &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}\left(x-\frac{B}{A}\right)^2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| t = \sqrt{\frac{A}{2}} \left(x - \frac{B}{A} \right), dx = \sqrt{\frac{2}{A}} dt \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} \sqrt{\frac{2}{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} \sqrt{\frac{2}{A}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sigma_Y} \sqrt{\frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} e^{\frac{B^2-AC}{2A}}.
\end{aligned}$$

Endi $(B^2 - AC)/2A$ ifodaga yuqoridagi mos ifodalarni qo'yamiz:

$$\begin{aligned}
&\frac{B^2 - AC}{2A} = \\
&= \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \left(\left(\frac{m_X}{\sigma_X^2} + \frac{z - m_Y}{\sigma_Y^2} \right)^2 - \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \left(\frac{m_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right) \right) = \\
&= \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \left(\frac{m_X^2}{\sigma_X^4} + 2\frac{m_X(z - m_Y)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} + \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^4} - \frac{m_X^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} - \frac{m_X^2}{\sigma_X^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^4} - \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \right) = \\
&= -\frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \left(\frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} - 2\frac{m_X(z - m_Y)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} + \frac{m_X^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \right) = \\
&= -\frac{(z - m_X - m_Y)^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}.
\end{aligned}$$

Demak

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} e^{-\frac{(z-m_X-m_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}},$$

bu esa $Z = X + Y$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimlanganligini anglatadi va uning parametrlari $(m_X + m_Y), \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ bo'ladi: $Z = N[m_X + m_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}]$. ◀

11.5. Tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi va korrelyatsiya koeffitsiyenti

(X, Y) – ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor bo‘lsin.

11.5-Ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning $\text{cov}(X, Y)$ kovariatsiyasi (korrelyatsion momenti) deb markazlashtirilgan $\dot{X} = X - m_X$ va $\dot{Y} = Y - m_Y$ tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\text{cov}(X, Y) = M(\dot{X}\dot{Y}) = M((X - m_X)(Y - m_Y)). \quad (11.17)$$

Kovariatsiyani hisoblash formulalarini keltiramiz.

Diskret X va Y tasodifiy miqdorlar uchun

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij}, \quad (11.18)$$

uzluksiz X va Y tasodifiy miqdorlar uchun

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y)f_{X,Y}(x, y)dx dy. \quad (11.19)$$

11.6-Teorema. Kovariatsiya quyidagi xossalarga ega:

1. $\text{cov}(X, X) = DX$;
2. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan X va Y tasodifiy miqdorlar uchun $\text{cov}(X, Y) = 0$;
3. Agar $X = a_1U + b_1$ va $Y = a_2V + b_2$ bo‘lsa, $\text{cov}(X, Y) = a_1a_2\text{cov}(U, V)$ bo‘ladi;
4. $D(X + Y) = DX + DY + 2\text{cov}(X, Y)$
5. $-\sqrt{DX \cdot DY} \leq \text{cov}(X, Y) \leq \sqrt{DX \cdot DY}$
6. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro zhiziqli bog‘langan, ya’ni shunday o‘zgarmas a va b sonlar topilib, ular uchun $Y = aX + b$ bo‘lsa,

$$|\text{cov}(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$$

bo‘ladi.

$$7. \text{cov}(X, Y) = M(XY) - m_X \cdot m_Y.$$

Agar $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ bo‘lsa, 2-xossaga binoan X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liq bo‘ladi. Biroq $\text{cov}(X, Y) = 0$ ekanligidan ularning o‘zaro bog‘liq emasligi kelib chiqmaydi.

Kovariatsiyaning xossalariidan u tasodifiy miqdorlarning bog‘liqlik darajasini va ularning (m_X, m_Y) nuqta atrofida qanday darjada sochilishini tavsiflashi kelib chiqadi.

Kovariatsiyaning muhim bir kamchiligi shundan iboratki, uning o‘lchovi tasodifiy miqdorlar o‘lchovlari ko‘paytmasiga teng. Tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘liqlikni ifodalovchi xarakteristika o‘lchovsiz bo‘lsa, bog‘liqlikni izohlash ancha oson kechadi. Bu muammoni oson hal qilish mumkin-tasodifiy miqdorlar kovariatsiyasini ularning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari ko‘paytmasiga bo‘lish yetarli.

11.7-Ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyenti deb, bu tasodifiy miqdorlar kovariatsiyasining ularning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari ko‘paytmasiga nisbatiga aytiladi:

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (11.20)$$

11.6-Ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsiyenti nolga teng, ya’ni $r(X, Y) = 0$ bo‘lsa, ular *korrelyatsiyalanmagan*, aks holda *korrelyatsiyalangan* deyiladi.

11.7-Teorema. Korrelyatsiya koeffitsiyenti quyidagi xossalarga ega:

1. $r(X, X) = 1$;
2. Korrelyatsiya koeffitsiyenti mutlaq qiymati bo‘yicha birdan oshmaydi, ya’ni

$$|r(X, Y)| \leq 1;$$

3. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, u holda

$$r(X, Y) = 0$$

bo‘ladi.

4. X va Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun

$$|r(X, Y)| = 1$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

11.9-Misol. (X, Y) ikki o'lvchovli diskret tasodifiy miqdor

Y X	0	2	3
-1	0,1	0,15	0,09
3	0,11	0,14	0,11
4	0,09	0,11	0,1

taqsimot qatori bilan berilgan. Uning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

► Uning X va Y komponentalarining taqsimot qatorlarini tuzamiz:

X	-1	3	4
P	0,34	0,36	0,3

va

Y	0	2	3
P	0,3	0,4	0,3

Bu komponentalarning matematik kutilmasi va dispersiyalarini topamiz:

$$MX = -1 \cdot 0,34 + 3 \cdot 0,36 + 4 \cdot 0,3 = 1,94;$$

$$MY = 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 1,7;$$

$$DX = (-1)^2 \cdot 0,34 + 3^2 \cdot 0,36 + 4^2 \cdot 0,3 - 1,94^2 = 4,6164;$$

$$DY = 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,3 - 1,7^2 = 1,41.$$

$$\text{Demak } \sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{4,6164} \approx 2,15, \sigma_Y = \sqrt{DY} = \sqrt{1,41} \approx 1,11.$$

Endi $M(XY)$ matematik kutilmani X va Y tasodifiy miqdorlar qiymatlarining ko'paytmasini mos ehtimollarga ko'paytirib, so'ngra qo'shib topamiz:

$$\begin{aligned} M(XY) &= -1 \cdot 0 \cdot 0,1 - 1 \cdot 2 \cdot 0,15 - 1 \cdot 3 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0 \cdot 0,11 + \\ &+ 3 \cdot 2 \cdot 0,14 + 3 \cdot 3 \cdot 0,11 + 4 \cdot 0 \cdot 0,09 + 4 \cdot 2 \cdot 0,11 + 4 \cdot 3 \cdot 0,1 = \\ &= 3,34. \end{aligned}$$

$\text{cov}(X, Y)$ kovariatsiyani 7-xossaga asosan topamiz:

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY) - m_X \cdot m_Y = 3,34 - 1,94 \cdot 1,7 = 0,042$$

va nihoyat

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0,042}{2,15 \cdot 1,19} = 0,0103$$

X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘liqlik darajasini ifodalovchi korrelyatsiya koeffitsiyentini hosil qildik va u musbat korrelyatsiyani tashkil qilar ekan. ◀

11.10-Misol. (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

taqsimotning zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu yerda $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Bu tasodifiy miqdorning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

► Dastlab X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalarini topamiz:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^1 (x + y) dy = \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2};$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^1 (x + y) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + yx \right) \Big|_0^1 = y + \frac{1}{2}.$$

Endi bu zichliklar yordamida X va Y tasodifiy miqdorlarning matematik kutilma va dispersiyalarni topamiz:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12};$$

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \left(y + \frac{1}{2} \right) dy = \left(\frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12};$$

$$DX = MX^2 - (m_X)^2 = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx - \frac{49}{144} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{11}{144};$$

$$DY = MY^2 - (m_Y)^2 = \int_0^1 y^2 \left(y + \frac{1}{2} \right) dy - \frac{49}{144} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}.$$

Demak, $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{11}/12$ ekan. Endi $M(XY)$ matematik kutilmani

$$\begin{aligned} \text{topamiz: } M(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y) dy = \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Kovariatsiyaning 7-xossasiga binoan

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY) - m_X \cdot m_Y = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{3}{144}$$

va nihoyat korrelyatsiya koeffitsiyentini

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{3}{144}}{\frac{\sqrt{11}}{12} \frac{\sqrt{11}}{12}} = -\frac{3}{11}$$

topamiz, manfiy korrelyatsiya ekan. ◀

11.6. Tasodifiy miqdorlarning shartli taqsimot qonunlari va sonli xarakteristiklari

Tasodifiy miqdorlarning shartli taqsimot qonunlari. Birorta tasodifiy miqdorning boshqa bir tasodifiy miqdor o'zgarishiga ta'sirini o'rganish uchun shartli taqsimot tushunchasi kiritiladi. Bu tushunchalar ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor uchun dastlab diskret so'ngra uzlusiz hol uchun kiritamiz.

Diskret hol. Ikki o'chovli (X, Y) tasodifiy miqdor

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \quad (11.21)$$

taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin.

Agar tajriba natijasida X tasodifiy miqdor o'zining birorta x_i qiymatini qabul qilsa, Y tasodifiy miqdorligicha qoladi va o'zining $y_1, y_2, \dots, y_m$ qiymatlaridan birini $p(x_i, y_1), p(x_i, y_2), \dots, p(x_i, y_m)$ ehtimollar bilan qabul qilishi mumkin. $p(y_j|x_i)$ shartli ehtimolni shartsiz ehtimollar orqali har bir $i = 1, 2, \dots, n$ da barcha $j = 1, 2, \dots, m$ uchun

$$p(y_j|x_i) = p(x_i, y_j)/p(x_i) \quad (11.22)$$

formula bilan ifodalash mumkin.

Xuddi shu singari har bir $j = 1, 2, \dots, m$ da barcha $i = 1, 2, \dots, n$ uchun

$$p(x_i|y_j) = p(x_i, y_j)/p(y_j)$$

formulani yozish mumkin.

(11.22) formulaga ko‘ra hisoblanadigan $p(y_1|x_i), p(y_2|x_i), \dots, p(y_m|x_i)$ shartli ehtimollar to‘plamiga Y tasodifiy miqdorning $X = x_i$ shartdagi *shartli taqsimoti*, $p(x_1|y_j), p(x_2|y_j), \dots, p(x_n|y_j)$ to‘plamga esa X tasodifiy miqdorning $Y = y_j$ shartdagi *shartli taqsimoti* deb ataladi. Shartli ehtimollar yig‘indisi birga teng:

$$\sum_{j=1}^m p(y_j|x_i) = 1 \text{ va } \sum_{i=1}^n p(x_i|y_j) = 1.$$

11.11-Misol. (X, Y) ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	-1	2	3	P_X
0	0,1	0,15	0,09	0,34
2	0,11	0,14	0,11	0,36
3	0,09	0,11	0,1	0,3
P_Y	0,3	0,4	0,3	

taqsimot qatori bilan berilgan. Bu taqsimot qatori asosida $p(y_j|x_i)$ va $p(x_i|y_j)$ shartli taqsimotlar qatorini tuzing.

► $p(y_j|x_i)$ shartli taqsimotlarni (11.22) formulaga ko‘ra topamiz:

$$P\{Y = -1|X = 0\} = P\{X = 0, Y = -1\}/P_X\{X = 0\} = 0,1/0,34 = 0,29,$$

$$P\{Y = 2|X = 0\} = P\{X = 0, Y = 2\}/P_X\{X = 0\} = 0,15/0,34 = 0,44, \dots$$

Xuddi shu singari $p(x_i|y_j)$ shartli taqsimotlarni topamiz:

$$P\{X = 0|Y = -1\} = P\{X = 0, Y = -1\}/P_Y\{Y = -1\} = 0,1/0,3 = 0,33,$$

$$P\{X = 2|Y = -1\} = P\{X = 2, Y = -1\}/P_Y\{Y = -1\} = 0,11/0,3 =$$

0,37, ... topilgan qiymatlardan

$$p(y_j|x_i) \text{ – shartli taqsimot}$$

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	-1	2	3	P_X
0				
2				
3				

$$p(x_i|y_j) \text{ – shartli taqsimot}$$

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	-1	2	3
0			
2			
3			

0	0,29	0,44	0,27	1
2	0,31	0,39	0,3	1
3	0,3	0,37	0,33	1

0	0,33	0,38	0,30
2	0,37	0,35	0,37
3	0,30	0,27	0,33
P_Y	1	1	1

jadvallarni hosil qilamiz. ◀

Uzluksiz hol. Ikki o'lovli (X, Y) uzluksiz tasodifiy miqdor uchun shartli taqsimot asosan mos $f(y|x)$ va $f(x|y)$ zichliklar bilan beriladi. Ularni aniqlovchi formulalarni (11.22) formuladagi $p(y_j|x_i)$, $p(x_i|y_j)$, $p(x_i)$, $p(y_j)$ ehtimollarni mos zichliklar bilan almashtirib

$$\begin{aligned} f_Y(y|x) &= f_{X,Y}(x, y)/f_X(x) \\ f_X(x|y) &= f_{X,Y}(x, y)/f_Y(y) \end{aligned} \quad (11.23)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Shartsiz taqsimotlar zichlik funksiyalari qanday xossalarga ega bo'lsa ikki o'lovli tasodifiy miqdor komponentalarining shartli taqsimotlari zichlik funksiyalari ham xuddi shunday xossalarga ega.

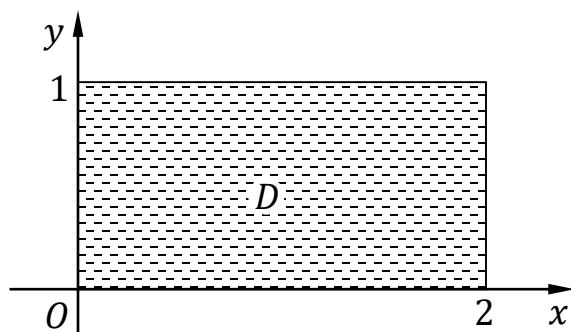
(X, Y) ikki o'lovli tasodifiy miqdor komponentalarining shartli taqsimot funksiyasi (10.7) formula asosida (11.23) formulalardan bevosita hosil qilinadi:

$$\begin{aligned} F_Y(y|x) &= \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, v) dv, \\ F_X(x|y) &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du \end{aligned}$$

11.12-Misol. (X, Y) ikki o'lovli tasodifiy miqdor

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

taqsimotning zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu yerda $D = \{(x, y): 0 < x < 2, 0 < y < 1\}$ (11.10-rasm). X va Y tasodifiy miqdorlarning shartli va shartsiz taqsimot zichliklarini toping.



11.10-rasm

► Dastlab c koeffitsiyentni zichlik funksiyasining 3-xossasiga binoan topamiz:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1. \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^1 c(x + y) dy = c \int_0^2 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \\
 &= c \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = c \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right) \Big|_0^2 = 3c.
 \end{aligned}$$

Demak, $c = 1/3$ bo'ldi.

Shartsiz taqsimot zichliklarini zichlik funksiyasining 7 va 8-xossalaridan topamiz:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (x + y) dy = \\
 &= \frac{1}{3} \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (2x + 1),
 \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (x + y) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} x^2 + xy \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (1 + y),$$

ya'ni,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} (2x + 1), & x \in (0, 2), \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} (1 + y), & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Topilgan zichlik funksiyalar uchun $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = 1$ shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{6}(2x+1)dx = \left(\frac{1}{6}(x^2+x) \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{6} \cdot (4+2) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(1+y)dy = \left(\frac{2}{3}(y + \frac{1}{2}y^2) \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = 1.$$

$f_X(x|y), f_Y(y|x)$ shartli taqsimot zichlik funksiyalarini (11.23) formulaga ko'ra topamiz:

$$f_X(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{2}{3}(1+y)} = \frac{x+y}{2(1+y)}, \quad (x,y) \in D,$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{1}{6}(2x+1)} = \frac{2(x+y)}{1+2x}, \quad (x,y) \in D$$

X, Y – tasodifiy miqdorlarning shartsiz $f_X(x), f_Y(y)$ va shartli $f_X(x|y), f_Y(y|x)$ zichlik funksiyalari teng emas ekan. Shuning uchun ular o'zaro bog'liq. ◀

Tasodifiy miqdorlarning shartli sonly xarakteristikalarini. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarni o'rganishda faqat X va Y komponentalarining sonly xarakteristikalarini o'rganmasdan, balki shartli taqsimotning sonli xarakteristikalarini-shartli matematik kutilma va shartli dispersiya ham o'rganiladi.

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorni qaraymiz. Y tasodifiy miqdorning $M[Y|X=x] = M_x Y$ shartli matematik kutilmasi

$$M[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x,y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx} \quad (11.24)$$

formulaga ko'ra topiladi.

x o'zgarganda $A(x, M[Y|X = x])$ nuqta Y tasodifiy miqdorning X bo'yicha *regressiya chizig'i* deb ataluvchi $y = M_x Y$ chiziqni tasvirlaydi.

Shunday qilib Y tasodifiy miqdorning X bo'yicha regressiya chizig'i x o'zgarganda Y miqdorning o'rtacha qiymati qanday o'zgarishini ko'rsatar ekan.

O'zgaras $Y = y$ qiymatda X tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasi ham xuddi shu singari kiritiladi:

$$M[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy} \quad (11.25)$$

$x = M_y X$ egri chiziq X tasodifiy miqdorning Y bo'yicha *regressiya chizig'i* deb ataladi va u y o'zgarganda X tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymati qanday o'zgarishini ko'rsatadi.

Agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, chiziqli regressiyaga ega bo'lamiz. Bunda $f_Y(y|x) = f_{X,Y}(x, y)/f_X(x) = f_X(x)f_Y(y)/f_X(x) = f_Y(y)$ va $M[Y|X = x] = MY$.

Xuddi shu singari $f_X(x|y) = f_X(x)$ va $M[X|Y = y] = MX$.

Endi diskret holda qisqacha to'xtalib o'taylik. X tasodifiy miqdor qiymatlarining birorta $X = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ qiymatini qo'zg'almas deb qarab, Y tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasini

$$M[Y|X = x_i] = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j|x_i) = \frac{\sum_{j=1}^m y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_{ij}}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu formula Y tasodifiy miqdor o'rtacha qiymatining x_i qiymatga qanaday bog'liqligini aniqlaydi. Uzluksiz holdan farqli ravishda bu bog'liqlik diskret bo'ladi. $i = 1, 2, \dots, n$ uchun Oxy tekislikda $(x_i, M[Y|X = x_i])$ nuqtalarni olamiz. Qo'shni nuqtalarni to'g'ri chiziq

kesmalari bilan tutashtirsak siniq chiziq hosil bo‘ladi va uni biz Y tasodifiy miqdorning X bo‘yicha *regressiya chizig‘i* deb ataymiz.

Xuddi shu singari, X tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasini

$$M[X|Y = y_j] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i|y_j) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_{ij}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}, (j = 1, 2, \dots, m)$$

formula bilan aniqlaymiz.

Agar X va Y o‘zaro bog‘liq bo‘lamasa, $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}$ bo‘ladi va ixtiyoriy i va j uchun $M[Y|X = x_i] = MY$ va $M[X|Y = y_j] = MX$ ekanligini osongina ko‘rsatish mumkin.

Yuqorida kiritilgan regressiya chiziqlari o‘rtacha kvadratik ma’noda minimallikning muhim xossasiga ega.

X tasodifiy miqdor x qiymatni qabul qilgan bo‘lsin. Bu shartda Y komponenta uchun barcha notasodifiy $\tau(x)$ funksiyalar orasidan $M[(Y - \tau(x))|X = x]$ matematik kutilma minimal bo‘ladigan $\tau_{min}(x)$ funksiyani topishga harakat qilamiz. Natijada X tasodifiy miqdorning $\tau(X)$ funksiyasi o‘rtacha kvadratik ma’nosida Y tasodifiy miqdorga eng yaxshi yaqinlashadi.

► Matematik kutilmaning xossalarini ketma-ket qo‘llab,

$$\begin{aligned} M[(Y - \tau(x))^2|X = x] &= M[\{(Y - M_x Y) + (M_x Y - \tau(x))\}|X = x] = \\ &= M[(Y - M_x Y)^2|X = x] + 2(M_x Y - \tau(x))M[(Y - M_x Y)|X = x] + \\ &\quad + (M_x Y - \tau(x))^2 = M[(Y - M_x Y)^2|X = x] + (M_x Y - \tau(x))^2 \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda

$$M[(Y - M_x Y)|X = x] = M[Y|X = x] - M[Y|X = x] = 0$$

tenglikdan foydalandik. $(M_x Y - \tau(x))^2 \geq 0$ ekanligini inobatga olsak

$$M[(Y - \tau(x))^2|X = x] \geq M[(Y - M_x Y)^2|X = x]$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bundan esa o‘rtacha kvadratik ma’nosida eng yaxshi yaqinlashish Y tasodifiy miqdorning X bo‘yicha regressiya funksiyasi, ya’ni $\tau_{min}(x) = M_x Y$ ekanligi kelib chiqadi. ◀

11.13-Misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

bo‘lgan ikki o‘lchovli (X, Y) normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning regressiya chizig‘ini toping.

► (11.23) formulalardan murakkab bo‘lmagan almashtirishlardan so‘ng

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_2\sqrt{1-r^2})^2}\left(y-m_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)\right)^2}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ko‘rinib turibdiki, o‘ng tomondagi ifoda $m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$ va $\sigma_2\sqrt{1-r^2}$ parametrli normal taqsimot zichlik funksiyasidan iborat. Bu esa $M_x Y$ shartli matematik kutilma va demak regressiya funksiyasi uchun

$$y = M_x Y = m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$$

formula o‘rinli ekanligini anglatadi. Hosil qilingan Y tasodifiy miqdorning X bo‘yicha regressiya tenglamasini yanada simmetrikroq bo‘lgan

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = r \frac{x - m_1}{\sigma_1}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Xuddi shu singari X tasodifiy miqdorning Y bo‘yicha regressiya tenglamasi

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x - m_1}{\sigma_1}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Tekislikdagi normal taqsimot uchun regressiya chiziqli bo‘lar ekan. Regressiya to‘g‘ri chiziqlari (m_1, m_2) sochilish markazi orqali o‘tadi va bu

to'g'ri chiziqlar $k_{y|x} = r\sigma_2/\sigma_1$, $k_{x|y} = \sigma_2/(r\sigma_1)$ burchak koeffitsiyentlarga ega (bitta Ox o'qqa nisbatan). ◀

11.8-Ta'rif. Agar Y tasodifiy miqdorning X bo'yicha va X tasodifiy miqdorning Y bo'yicha regressiya chiziqlari to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlik *chiziqli korrelyatsiya* deb ataladi.

Biz yuqoridagi misolda (X, Y) ikki o'chovli normal taqsimotning X va Y komponentalari orasidagi bogliqlik chiziqli korrelyatsiya ekanligini ko'rsatdik.

To'liq matematik kutilma formulasi. Oddiy matematik kutilma qanday xossalarga ega bo'lsa shartli matematik kutilma ham xuddi shunday xossalarga ega bo'lishini osongina tekshirib ko'rish mumkin. Biz bu yerda faqat shartli matematik kutilmalargagina xos bo'lgan xossada to'xtalamiz. (11.23) formulaga ko'ra $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y|x)$. U holda

$$\begin{aligned} MY &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} M[Y|X = x] f_X(x) dx. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Agar $M[Y|X = x] = \varphi(x)$ deb olsak, (11.26) formulaning o'ng tomonidagi integralni $\varphi(X)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb qarash mumkin va biz uni $M[Y|X]$ orqali belgilaymiz: $M[Y|X] = \varphi(x)$. Shunday qilib,

$$\begin{aligned} M[Y|X] &= M[Y|X = x] \\ MY &= M[M[Y|X]]. \end{aligned} \quad (11.27)$$

(11.27) formula *to'liq matematik kutilma* formulasi deb ataladi.

Nazorat savollari

1. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi qanday aniqlanadi?
2. Ikki o'chovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining xossalarini bayon qiling.

3. Ikki o'chovli tasodifiy miqdorning to'g'ri to'rtburchakga tushish ehtimoli qanday topiladi?
4. Agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Ikki o'chovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi bilan zichlik funksiyasi o'zaro qanday bog'lnagan?
6. Ikki o'chovli tasodifiy miqdor zichlik funksiyasining xossalarini bayon qiling.
7. Tekislikda tekis taqsimlangan ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. Tekislikda normal taqsimlangan ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
9. X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqliklar qanday miqdorlar bilan o'lchanadi?
10. X va Y tasodifiy miqdorlar qachon korrelyatsiyalanmagan deyiladi?
11. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning shartli taqsimoti qanday aniqlanadi?
12. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning shartli $M[Y|X = x]$ matematik kutilmasi qanday aniqlanadi?

Mashqlar.

1. Qutida 2 ta oq, 2 ta qora rangli shar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda tanlangan 2 ta shar olindi. X –tanlamadagi oq sharlar soni, Y –tanlamadagi qora sharlar soni. (X, Y) ikki o'lchovli hamda X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini tuzing.
2. $D = \{(x; y): 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ kvadratda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik va taqsimot funksiyalarini tuzing.
3. $D = \{(x; y): 1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 5\}$ to'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning $D = \{(x; y): 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ kvadratga tushish ehtimolini toping.
4. X diskret tasodifiy miqdor o'zining

X	2	3	4	5
P	0,4	0,1	0,2	0,3

taqsimot qatori bilan berilgan. Agar $Y = 3X^2 + 1$ tasodifiy miqdorning MY matematik kutilmani toping.

5. Agar X tasodifiy miqdor $[1; 2]$ kesmada tekis taqsimlangan bo'lsa, $Y = 3X + 2$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing, va uning $[3; 2]$ kesmaga tushish ehtimolini toping.

6. O'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qatorlari

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

Y	6	7	8	9
P	0,1	0,4	0,3	0,2

ko'rinishda bo'lsa, $Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qatorini tuzing.

7. (X, Y) ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor

$X \backslash Y$	3	4	5
0	0,11	0,13	0,08
1	0,12	0,1	0,11
2	0,1	0,12	0,13

taqsimot qatori bilan berilgan. Uning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

8. (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} axy, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

taqsimotning zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu yerda $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Bu tasodifiy miqdorning a koeffitsiyentni va $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

Javoblar.

1.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	1/6
1	0	1/3	0
2	1/6	0	0

3. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x; y) \in D; \\ 0, & (x; y) \notin D; \end{cases}$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, y \leq 1; \\ (x-1)(y-1), & 1 < x < 2, 1 < y < 2; \\ 1, & x \geq 2, y \geq 2. \end{cases}$$

3. $p = 1/20$; 4. $MY = 40,6$; 5. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 5, \\ y, & 5 \leq y \leq 8, \\ 1, & y > 8. \end{cases}$ $MY = 13/2$;

6.

$Z = X + Y$	8	9	10	11	12	12	14
P	0,01	0,08	0,19	0,19	0,28	0,15	0,1

7. $r(X, Y) = 0,0102$; $DX = 5,8475$; $\sigma_X = 2,4182$. 8. $a = 4$; $r(X, Y) = 0$.

XII BOB. TANLAMA NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI

Matematik statistika – matematikaning bir bo‘limi bo‘lib, u kuzatishlar yoki tajribalar natijasida olingan ma’lumotlar asosida ommaviy hodisalar va jarayonlar haqida ilmiy asoslangan xulosalar chiqarishning usullarini ishlab chiqish bilan shug‘ullanadi.

Matematik statistikada olingan ma’lumotlar tasodifiylik xususiyatiga ega deb faraz qilinadi va shu sababli ehtimollar nazariyasining tushunchalariga va usullariga tayanadi. Matematik statistika masalalarini qandaydir ma’noda ehtimollar nazariyasi masalalariga teskari deb hisoblash mumkin. Agar ehtimollar nazariyasida biror tasodifiy hodisaning ehtimoliy modeli berilgan deb hisoblab, bu model asosida bizni qiziqtiruvchi hodisalarning ehtimollarini hisoblasak, matematik statistikada esa ehtimoliy model berilmagan, biroq tajriba natijasida qandaydir tasodifiy hodisaning amalga oshgani ma’lum deb faraz qilinadi. Statistik ma’lumot asosida qaralayotgan hodisa yoki jarayon haqida xulosa olish uchun matematik statistika mos ehtimoliy modelni tanlaydi.

12.1. Bosh va tanlama to‘plam

Biror shart-sharoitda o‘tkaziladigan tajribalarning mumkin bo‘lgan natijalari to‘plamiga *bosh to‘plam* deb ataladi.

Bosh to‘plam chekli va cheksiz bo‘lishi mumkin. Bosh to‘plam chekli sondagi elementdan iborat bo‘lsa, u chekli bo‘ladi. Cheksiz bosh to‘plamda cheksiz sondagi element bo‘ladi.

Masalan, N ta tayyor mahsulotning sifati nazorat qilinayotgan bo‘lsin. Bunda tajriba tayyor mahsulotlar to‘plamidan nazorat uchun bittasi tanlanishidan iborat. Barcha tayyor mahsulotlar to‘plami bosh to‘plamni tashkil qiladi, chunki tajriba natijasi N ta mahsulotdan ixtiyoriy bittasining tanlanishidan iborat. Mazkur misolda bosh to‘plam chekli.

Detal o‘lchamining haqiqiy o‘lchamdan chetlanishining barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari to‘plami cheksiz bosh to‘plamdan iborat.

Biror T tajriba natijasida o'rganilayotgan X tasodifiy miqdorning x qiymatlari kuzatilayotgan bo'lsin.

12.1-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamiga *bosh to'plam* deb ataladi.

Bevosita o'tkazilgan tajribalardan olingan natijalar to'plamiga bosh to'plamdan olingan *tanlama* deb ataladi. Tanlamadagi elementlar soni n chekli bo'lib, tanlamaning hajmi deb ataladi.

12.2-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning kuzatilgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari to'plamiga *tanlama* deb ataymiz.

Boshqacha qilib aytganda, tanlama bu bosh tasodifiy miqdor deb ataluvchi X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan o'zaro bog'liq bo'lmagan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari to'plamidan iborat.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar *tanlamaning elementlari*, ularning n soni esa *tanlamaning hajmi* deb ataladi.

Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorni o'rganish uchun sonlar juftligining $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ chekli ketma-ketligi tuziladi. Xuddi shu singari ixtiyoriy o'lchamli tanlama tuzish mumkin.

Bosh to'plamning xarakteristikalarini yaxshi baholash uchun tanlama bosh to'plamning o'rganilayotgan belgilarini yetarlicha to'liq tasvirlamog'i lozim. Buning uchun bosh to'plamning barcha elementlari tanlamada bir xil imkoniyat bilan qatnashishini ta'minlash kerak.

Tanlamalar *qaytariladigan* va *qaytarilmaydigan* ko'rinishda bo'ladi. Birinchi holda tanlangan element keyingi elementni tanlashdan oldin bosh to'plamga qaytariladi; ikkinchi holda esa qaytarilmaydi.

Qaytariladigan tanlamada agar bitta element ikki marta tanlansa, u bir marta hisobga olinadi.

12.2. Variatsion va statistik qator. Taqsimotning empirik funksiyasi

X tasodifiy miqdor o'rganilayotgan bo'lsin. Shu maqsadda X tasodifiy miqdor ustida qator tajribalar o'tkaziladi. Har bir tajribada X tasodifiy miqdor u yoki bu qiymatni qabul qiladi.

Bu tajribalar natijasida X tasodifiy miqdor x_1 qiymatni n_1 marta, x_2 qiymatni n_2 marta, ..., x_m qiymatni n_m marta qabul qilsin va bunda $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ bo'lib, n tanlamaning hajmi bo'lsin. $x_1, x_2, \dots, x_m$ qiymatlar X tasodifiy miqdorning *variantalari* deb ataladi.

12.3-Ta'rif. Tanlama elementlarining kamaymaydigan tartibda joylashtirilishiga *variatsion qator* deb ataladi, bunda bir xil elementlar takrorlanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra X tasodifiy miqdorning $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlaridan tuzilgan $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ variatsion qatori uchun $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ va $x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i, \dots, x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ munosabatlar o'rinli bo'lar ekan.

Tanlamaning minimal va maksimal elementlari *chetki elementlar* deb ataladi. Boshqacha qilib aytganda, variatsion qatorda ekstremal elementlar $x_{\min} = x_{(1)}, x_{\max} = x_{(n)}$ bo'ladi. Tanlamaning maksimal va minimal elementlari orasidagi

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (12.1)$$

farqni *tanlamaning kengligi* deb ataymiz.

12.1-Misol. Fevral oyining kunlari bo'yicha o'rtacha kunlik temperaturalardan $n = 28$ hajmli tanlama tuzildi:

-4, -6, -9, -8, -6, -6, -5, -3, -3, 0, 1, 2, 2, 0, -3, -6, -8, -9, -11, -8, -6, -4, -3, -1, 1, 2, 2, 3.

Bu tanlamaning variatsion qatorini tuzing va tanlama kengligini aniqlang.

► Tanlamaning variatsion qatori

-11, -9, -9, -8, -8, -8, -6, -6, -6, -6, -6, -5, -4, -4, -3, -3, -3, -3, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3

ko'rinishda bo'ladi va $x_{\min} = -11; x_{\max} = 3; R = 3 - (-11) = 14$. ◀

$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ variatsion qator elementlari orasida tenglari ham bo‘lishi mumkin. Bu variatsion qatordan m ta turli qiymatli variantalarni ajratamiz va ularni $x_1, x_2, \dots, x_m$ orqali belgilaymiz (belgilashlarni ko‘paytirmaslik uchun, yana x_i belgilashdan foydalandik). Ularning har biri $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ variatsion qatorda mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_m$ marta uchrasin.

12.4-Ta’rif. Tanlamadagi x_i variantaning necha marta uchrashini ko‘rsatuvchi n_i songa bu *variantaning chastotasi*, uning tanlama hajmiga nisbati p_i^* *nisbiy chastota* deyiladi, ya’ni

$$p_i^* = n_i/n, \quad (12.2)$$

bu yerda $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

12.5-Ta’rif. Variantalar va ularga mos chastota yoki nisbiy chastotalardan iborat

x	x_1	x_2	$\dots$	x_m	yoki	x	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n	n_1	n_2	$\dots$	n_m		p^*	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_m^*

ko‘rinishdagi jadvalga *statistik qator* yoki *tanlamaning statistik taqsimoti* deb ataladi.

12.2-Misol. 12.1-Misoldagi variatsion qator uchun statistik qator

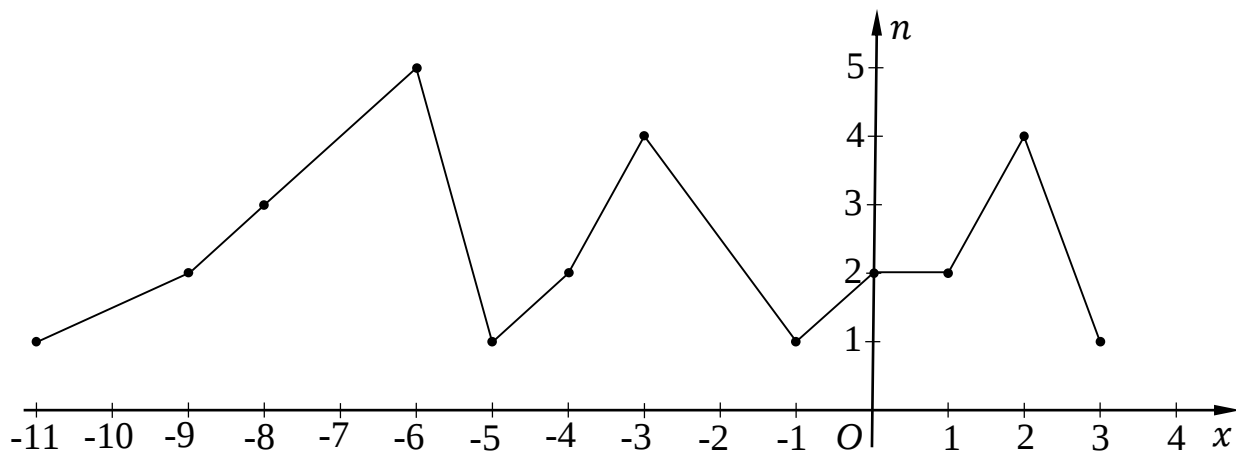
x	-11	-9	-8	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	2	3
n	1	2	3	5	1	2	4	1	2	2	4	1

jadvaldan iborat bo‘ladi.

Ox o‘qqa statistik qatorning x_i elementlarini, Oy o‘qqa esa ularning n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) chastotalarini joylashtirib statistik qatorni *chastotalarning poligoni* sifatida tasvirlash mumkin. Hosil qilingan nuqtalarning yonmayonlarini kesmalar bilan tutashtirib sinq chiziq hosil qilinadi.

12.3-Misol. 12.2-Misoldagi statistik qator uchun chastotalar poligoni 12.1-rasmda tasvirlangan.

Tanlamaning statistik taqsimoti noma'lum taqsimotga taqriban teng bo'ladi, ya'ni n tanlama hajmi katta bo'lganda statistik taqsimot haqiqiy taqsimotdan kam farq qiladi.



12.1-rasm

12.6-Ta'rif. *Empirik* (grekcha “empeiria” – tajribaga asoslangan degan ma’noni anglatadi) *taqsimot funksiyasi* deb, har bir x uchun berilgan tanlama bo’yicha $\{X < x\}$ hodisaning nisbiy chastotasiga aytiladi:

$$F_n^*(x) = P^*\{X < x\}. \quad (12.3)$$

Empirik funksiyaning qiymatlarini hisoblash uchun $F_n^*(x)$ funksiyaning

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

ko‘rinishda yozish qulay, bu yerda n –tanlamaning hajmi, n_x –tanlamaning x qiymatdan kichik elementlari soni.

Tajribalar soni n oshgan sayin $\{X < x\}$ hodisaning nisbiy chastotasi bu hodisaning ehtimoliga yaqinlashadi. $F_n^*(x)$ empirik funksiya $\{X < x\}$ hodisa ehtimolining baholovchisi, ya’ni $F_n^*(x) \approx P\{X < x\}$ bo’ladi.

12.1-Teorema. Ixtiyoriy o‘zgarmas x qiymatda n cheksiz oshganda $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasi X tasodifiy miqdorning $F_X(x)$ taqsimot funksiyasiga ehtimol bo’yicha intiladi, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|F_n^*(x) - F_X(x)| > \varepsilon\} = 0$$

bo’ladi.

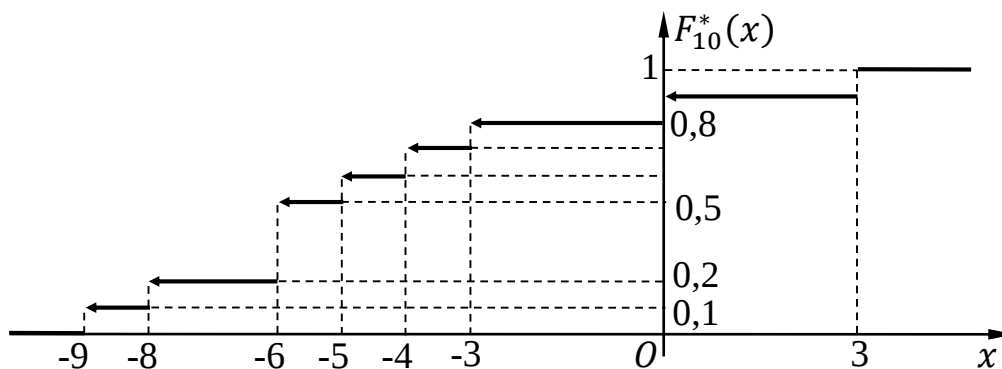
Bu teoremdan $F_n^*(x)$ empirik funksiya X tasodifiy miqdor $F_X(x)$ taqsimot funksiyasiga taqriban teng, ya'ni $F_n^*(x) \approx F_X(x)$ ekanligi kelib chiqadi.

12.5-Misol. 12.1-Misolda qaralgan Fevral oyining dastlabki 10 kuni bo'yicha o'rtacha kunlik temperaturalardan $n = 10$ hajmli tanlama tuzildi: -4, -6, -9, -8, -6, -6, -5, -3, -3, 0. Bu tanlama bo'yicha empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

► Dastlab tanlamaning variatsion qatorini tuzamiz: -9, -8, -6, -6, -6, -5, -4, -3, 0, 3. Bu yerda $n = 10$. Demak, $x \leq -9$ bo'lsa, $F_{10}^*(x) = 0/10 = 0$ (-9 dan kichik qiymat yo'q); $-9 < x \leq -8$ bo'lsa, $F_{10}^*(x) = 1/10 = 0,1$ (bu yerda $n_x = 1$); $-8 < x \leq -6$ bo'lsa, $F_{10}^*(x) = 2/10 = 0,2$ (bu yerda $n_x = 2$) va hokazo. Ularni umumlashtirib

$$F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -9, \\ 0,1, & -9 < x \leq -8, \\ 0,2, & -8 < x \leq -6, \\ 0,5, & -6 < x \leq -5, \\ 0,6, & -5 < x \leq -4, \\ 0,7, & -4 < x \leq -3, \\ 0,8, & -3 < x \leq 0, \\ 0,9, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

empirik taqsimot funksiyasini hosil qilamiz, uning grafigi 12.2-rasmda tasvirlangan.



12.2-rasm

X tasodifiy miqdor qiymatlarining soni katta yoki u uzluksiz bo‘lganda *intervalli statistik qator* tuziladi. Jadvalning birinchi satriga uzunliklari bir xil $h = x'_1 - x'_0 = x'_2 - x'_1 = \dots = x'_m - x'_{m-1}$ bo‘lgan $[x'_0, x'_1)$, $[x'_1, x'_2)$, ..., $[x'_{m-1}, x'_m)$ qismaniy oraliqlar yoziladi. Intervallarning sonini $m = [\log_2 n] + 1$ deb olish maqsadga muvofiq bo‘ladi, intervalning uzunligini esa $h = R/m$ deb olish kerak, bu yerda $[\log_2 n]$ sonning butun qismi va $R = x_{\max} - x_{\min}$ tanlamaning kengligi, $x'_0 = x_{\min}$.

Jadvalning ikkinchi satriga har bir intervalga tushgan qiymatlarning n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) soni yoki ularning $p_i^* = n_i/n$ nisbiy chastotasi yoziladi.

12.7-Ta’rif. $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ tanalamaga mos taqsimotning *empirik zichlik funksiyasi* deb

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{p_i^*}{h}, & x \in [x'_{i-1}, x'_i), i = \overline{1, m} \\ 0, & x \notin [x'_{i-1}, x'_i) \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaga aytiladi.

$[x_1, x_m]$ kesmada bo‘lakli o‘zgarmas bo‘lgan $f_n(x)$ funksiyaning grafigi *gistogramma* deb aytiladi.

Taqsimotning empirik zichlik funksiyasi taqriban X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasiga teng bo‘ladi: $f_n(x) \approx f_X(x)$.

12.4-Misol. Bambuk daraxtining o‘shish tezligi kuzatildi. 30 kunlik o‘lchash natijalari o‘rganildi va har kungi o‘shish 0,01 santimetrgacha aniqlikda quyidagicha bo‘lgan (bir kungi o‘shish santimetrlarda):

5,63	6,38	7,58	4,78	5,15	4,45	7,35	5,57	4,21	5,67
6,15	5,44	4,91	5,27	5,39	4,32	6,47	6,23	6,61	5,03
4,63	4,93	6,89	5,78	6,96	5,84	7,06	5,97	6,02	4,82

Bu tanlamaning intervalli statistik qatorini tuzing, empirik zichlik funksiyasini toping va gistogrammasini yasang.

► Tanlamaning variatsion qatorini tuzamiz:

4,21	4,32	4,45	4,63	4,78	4,82	4,91	4,93	5,03	5,15
5,27	5,39	5,44	5,57	5,63	5,67	5,78	5,84	5,97	6,02
6,15	6,23	6,38	6,47	6,61	6,89	6,96	7,06	7,35	7,58

Bambukning bir kunlik o'sishi X – uzluksiz tasodifiy miqdor va bu qiymat takrorlanmaydi (turli kunlarda o'sish miqdori bir xil bo'lish ehtimoli nolga teng).

Variatsion qatordan ko'rinib turibdiki $x_{\min} = 4,2$ va $x_{\max} = 7,5$; qisman oraliqlarning soni $m = [\log_2 30] + 1 = 6$, oraliqlarning uzunligi esa $h \approx (7,5 - 4,2)/6 \approx 0,55$ bo'ladi.

Demak yuqoridagi variatsion qatorni uzunliklari $h = 0,55$ bo'lgan 6 oraliqqa ajratamiz: $[4,2; 4,75)$, $[4,75; 5,3)$, $[5,3; 5,85)$, $[5,85; 6,4)$, $[6,4; 6,95)$, $[6,95; 7,5]$.

Har bir intervalga tushgan o'sish miqdorining n_i sonini hisoblab, tanlamaning:

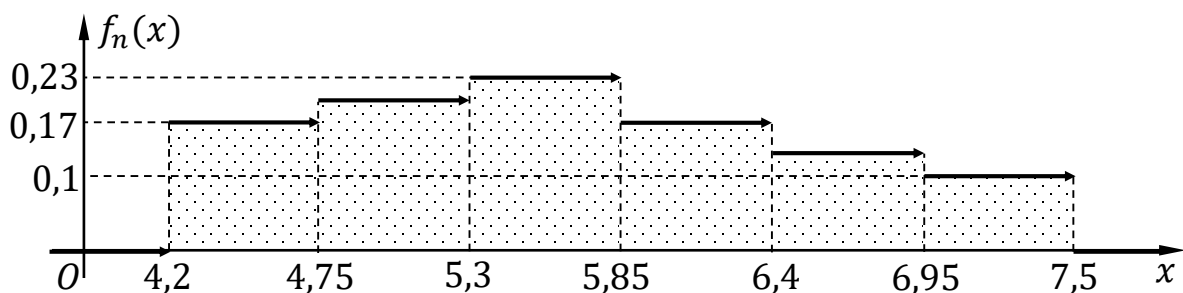
x_i	$[4,2; 4,75)$	$[4,75; 5,3)$	$[5,3; 5,85)$	$[5,85; 6,4)$	$[6,4; 6,95)$	$[6,95; 7,5]$
n_i	5	6	7	5	4	3
p_i^*	0,17	0,2	0,23	0,17	0,13	0,1

intervalli statistik qatorini hosil qilamiz.

Empirik zichlik funksiyasini intervalli statistik qator jadvaliga qarab tuzamiz:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0,17, & x \in [4,2; 4,75), \\ 0,2, & x \in [4,75; 5,3), \\ 0,23, & x \in [5,3; 5,85), \\ 0,17, & x \in [5,85; 6,4), \\ 0,13, & x \in [6,4; 6,95), \\ 0,17, & x \in [6,95; 7,5], \\ 0, & x \notin [4,2; 7,5]. \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi tanlamaning gistogrammasi bo'ladi va u 12.3-rasmda tasvirlangan.



12.3-rasm

Ba'zan asosi h balandligi esa p_i^* bo'lgan to'g'ri to'rt burchaklardan iborat diagramma ham gistogramma deb ataladi (12.4-Misolda yasalgan gistogrammada bu to'g'ri to'rt burchaklar ajratib ko'rsatilagan). Bunday diagrammani hosil qiluvchi barcha to'g'ri to'rt burchaklar yuzlarining yig'indisi birga teng bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^m \frac{p_i^*}{h} h = \sum_{i=1}^m p_i^* = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i = 1.$$

12.3. Tanlamaning sonli xarakteristiklari

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorlarga aniqlangan sonli xarakteristikalar tanlamalar uchun ham aniqlanishi mumkin.

n hajmli tanlamaning

x	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n	n_1	n_2	$\dots$	n_m

statistik taqsimoti berilgan bo'lsin.

12.8-Ta'rif. Tanlamaning $\bar{x}$ o'rtachasi deb, barcha variantalar va ularning mos chastotalari ko'paytmalari yig'indisining tanlama hajmi nisbatiga aytiladi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i, \quad (12.4)$$

bu yerda x_i – diskret qatorning variantalari yoki intervalli statistik qator intervallarining o'rtalari; n_i – mos chastotalar; m – takrorlanmaydigan

variantalar soni yoki intervallar soni: $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Tanlamaning o'rtachasini yana

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i p_i^* \quad (12.5)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu yerda $p_i^* = n_i/n$ — nisbiy chastota.

12.9-Ta'rif. *Tanlamaning s^2 dispersiyasi* deb, tanlama qiymatlarining tanlama $\bar{x}$ o'rtachasidan chetlanishlari kvadratlarining o'rta arifmetigiga aytiladi:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i \quad (12.6)$$

yoki (12.5) singari

$$s^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 p_i^* \quad (12.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Tasodifiy miqdorlarning dispersiyasidagi singari

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + (\bar{x})^2) n_i = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m 2\bar{x}x_i n_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\bar{x})^2 n_i = \\ &= \overline{x^2} - 2\bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i + (\bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i = \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \end{aligned}$$

tenglikdan tanlama dispersiyasini hisoblash uchun

$$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \quad (12.8)$$

formulani yozish mumkin.

Tanlama dispersiyasidan olingan kvadrat ildizning arifmetik qiymatiga, tanlamaning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deb ataladi:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i} \quad (12.9)$$

Ehtimollar nazariyasidagi tasodifiy miqdorlar uchun kiritilgan k -tartibli boshlang'ich va markaziy momentlar tanlama uchun ham mos ravishda

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^k n_i, \quad \dot{\bar{x}}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^k n_i \quad (12.10)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

12.10-Ta'rif. Variatsion qatorning o'rtasiga to'g'ri keluvchi qiymatga *tanlamaning medianasi* deb ataladi va M_e^* orqali belgilanadi.

Agar tanlamaning hajmi $n = 2k$, ya'ni variatsion qator juft sondagi $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(2k)}$ elementlardan iborat bo'lsa, $M_e^* = (x_{(k)} + x_{(k+1)})/2$; agar $n = 2k + 1$ bo'lsa, $M_e^* = x_{(k+1)}$ bo'ladi.

12.11-Ta'rif. Variatsion qatorning eng katta chastotaga ega bo'lgan elementiga *tanlamaning modasi* deb ataladi va M_o^* orqali belgilanadi.

12.5-Misol. 500 talabaning bo'ylari o'lchandi. O'lchash natijalaridan ushbu

$[x'_{i-1}, x'_i)$	[145, 150)	[150, 155)	[155, 160)	[160, 165)	[165, 170)
n_i	3	5	25	85	165
$[x'_{i-1}, x'_i)$	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)
n_i	142	55	16	3	1

intervalli statistik qator tuzildi (oraliqlar santimetrlarda). Bu statistik qatorning sonli xarakteristikalarini toping.

► Dastlab oraliqlarning o'rtalarini topamiz: $x_1 = (145 + 150)/2 = 147,5$, $x_2 = 152,5$, $x_3 = 157,5$, $x_4 = 162,5$, $x_5 = 167,5$, $x_6 = 172,5$, $x_7 = 177,5$, $x_8 = 182,5$, $x_9 = 187,5$, $x_{10} = 192,5$. Bu topilgan qiymatlardan va yuqoridagi jadvaldagi chastotalardan

x_i	147,5	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5
n_i	3	5	25	85	165	142	55	16	3	1

statistik taqsimotni tuzamiz.

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 500 \text{ ekanligini eslatib o'tamiz. U holda (12.4) formulaga}$$

ko'ra

$$\bar{x} = \frac{1}{500} (147,5 \cdot 3 + 152,5 \cdot 5 + 157,5 \cdot 25 + 162,5 \cdot 85 + \\ + 167,5 \cdot 165 + 172,5 \cdot 142 + 177,5 \cdot 55 + 182,5 \cdot 16 + \\ + 187,5 \cdot 3 + 192,5 \cdot 1) = \frac{1}{500} \cdot 84525 = 169,05$$

qiymatni hisoblab topamiz, ya'ni 500 talabani o'rtacha boyi 169,05 sm ekan.

Tanlamaning dispersiyasini (12.6) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

$$s^2 = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 169,05)^2 n_i = \frac{1}{500} ((-21,55)^2 \cdot 3 + (-16,55)^2 \cdot 5 + \\ + (-11,55)^2 \cdot 25 + (-6,55)^2 \cdot 85 + (-1,55)^2 \cdot 165 + 3,45^2 \cdot 142 + \\ + 8,45^2 \cdot 55 + 13,45^2 \cdot 16 + 18,45^2 \cdot 3 + 23,45^2 \cdot 1) = \\ = 20223,75/500 = 40,4475.$$

U holda tanlamaning o'rtacha kvadratik chetlanishi (12.9) formulaga ko'ra

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{40,4475} \approx 6,36$$

bo'ladi.

Variantalar soni juft bo'lganligi uchun tanlamaning medianasi

$$M_e^* = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{167,5 + 172,5}{2} = 170$$

va $x_5 = 167,5$ element eng katta $n_5 = 165$ chastotaga ega bo'lganligi uchun, tanlamaning modasi $M_o^* = 167,5$ bo'ladi. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday to'plamga bosh to'plam deb aytamiz?
2. Tanlama deb qanday to'plamga aytamiz?
3. Variatsion qator tanlamadan qanday hosil qilinadi?
4. Tanlamaning kengligi qanday aniqlanadi?
5. Tanlama elementining nisbiy chastotasi qanday aniqlanadi?
6. Qanday funksiyaga empirik taqsimot funksiyasi deb ataymiz?
7. Qanday hollarda intervalli statistik qator tuziladi?
8. Intervalli statistik qatorda intervalning uzunligi qanday olinadi?
9. Empirik zichlik funksiyaga ta'rif bering.
10. Tanlamaning o'rtachasi qanday topiladi?

11. Tanlamaning dispersiyasi qanday topiladi?
 12. Tanlamaning medianasi va modasiga ta'rif bering.

Mashqlar.

1. Kuzatilayotgan miqdorning $n = 25$ hajmli

11, 4, 3, 9, 12, 11, 7, 4, 6, 3, 5, 11, 7, 9, 8, 9, 4, 7, 8, 3, 6, 4, 6, 1, 5, 8
 tanlamasining variatsion qatorini tuzing va tanlama kengligini aniqlang.

2. Kuzatilayotgan miqdorning $n = 25$ hajmli tanlamasi berilgan:

6, -1, 3, 4, -2, 11, 7, 4, 6, 3, 5, -1, 7, 9, 8, 3, 4, 7, -2, 3, 7, 4, 6, 1, 5, 11

Uning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang.

3. $n = 10$ hajmli 1, -1, 3, 4, 3, 5, -1, 6, 4, 7 tanlama bo'yicha empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

4. X uzluksiz tasodifiy miqdor qiymatlarining $n = 30$ hajmli

0,5	0,9	-2,1	5,6	-2,9	6,6	-2,6	1,9	-3,8	2,8
-4,9	-4,2	1,3	-0,5	4,2	-0,7	4,8	2,1	-1,2	-4,5
0	0,8	3,8	1,7	7,1	-1,5	5,1	3,1	0,3	-1,7

tanlamasi berilgan. Bu tanlamaning intervalli statistik qatorini tuzing, empirik zichlik funksiyasini toping va gistogrammasini yasang.

5. X uzluksiz tasodifiy miqdor qiymatlarining $n = 550$ hajmli intervalli statistik qatori keltirilgan jadval bo'yicha qatorning sonli xarakteristikalarini toping.

$[x'_{i-1}, x'_i)$	[11, 16)	[16, 21)	[21, 26)	[26, 31)	[31, 36)
n_i	15	28	56	97	151
$[x'_{i-1}, x'_i)$	[36, 41)	[41, 46)	[46, 51)	[51, 56)	[56, 61)
n_i	96	54	32	18	3

6. Kuzatilayotgan miqdorning $n = 26$ hajmli

-1, 4, -7, 4, 6, 3, 5, 8, 3, 9, 4, 3, 7, 9, 8, 6, 4, 7, -2, 3, 6, 4, 6, 1, -5, 6

tanlamasining medianasi va modasini toping.

Javoblar.

$$1. R = 11; 3. F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,2, & -1 < x \leq 1, \\ 0,3, & 1 < x \leq 3, \\ 0,5, & 3 < x \leq 4, \\ 0,7, & 4 < x \leq 5, \\ 0,8, & 5 < x \leq 6, \\ 0,9, & 6 < x \leq 7, \\ 1, & 7 < x \end{cases}$$

$$4. f_{30}(x) = \begin{cases} 0,14, & x \in [-4,9; -2,9), \\ 0,4, & x \in [-2,9; -0,9), \\ 0,2, & x \in [0,9; 2,9), \\ 0,13, & x \in [2,9; 4,9), \\ 0,1, & x \in [4,9; 6,9), \\ 0,03, & x \in [6,9; 8,9], \\ 0, & x \notin [-4,9; 8,9]. \end{cases}$$

$$5. \bar{x} = 33,81; s^2 = 80,63; s = 8,98; M_e^* = 36; M_O^* = 33,5;$$

$$6. M_e^* = 4; M_O^* = 4, M_O^* = 6.$$

XIII BOB. BAHOLASH NAZARIYASINING ELEMINTLARI

Taqsimotning noma'lum parametrlarini baholash matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Bu holda taqsimotning turi ma'lum biroq uning parametrlari noma'lum bo'ladi. Masalan, X tasodifiy miqdor normal taqsimlanganligi ma'lum, uning m va σ parametrlari haqida hech qanday ma'lumot yo'q bo'ladi. Ana shu noma'lum parametrlarni tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlari asosida baholash kerak bo'ladi.

13.1. Taqsimotning parametrlarini nuqtaviy baholash

O'tkazilgan n ta tajriba natijasida olingan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlama bo'yicha noma'lum θ parametрни baholash talab qilinadi.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlardan X_1 – birinchi tajriba natijasi, X_2 – ikkinchi tajriba natijasi va hokazo. Shu bilan birga X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tasodifiy miqdorlar X tasodifiy miqdor singari taqsimlangan; aniq bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama o'zaro bog'liq bo'lamagan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning qiymatlari ekanligini eslatib o'tamiz.

13.1-Ta'rif. Qiymati θ qiymatiga taqriban teng bo'lgan kuzatishlar natijasining $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasiga taqsimotning noma'lum θ paramatrining *nuqtaviy bahosi* deb ataladi.

13.2-Ta'rif. Kuzatishlar natijasining ixtiyoriy funksiyasiga *statistika* deb ataladi.

Bosh to'planning o'rganilayotgan ixtiyoriy xarakteristikasi uchun nuqtaviy baholashlar ko'p sonda bo'ladi. Ularning taqsimotini kamdan-kam hollardagina olish mumkin bo'ladi. U holda $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika θ paramatrining qandaydir ma'nodagi “yaxshi” bahosi bo'lishi uchun u qanday xossalarga ega bo'lishi kerak degan tabiiy savol tug'iladi. Biz quyida ana shu xossalarga to'xtalib o'tamiz. Bu xossalar yuqorida aytilgan ko'p sonli nuqtaviy baholashlardan “yaxshilarini” tanlab olishga imkon beradi.

13.3-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1 \quad (13.1)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, θ parametrining $\hat{\theta}_n$ bahosi *asosli statistik baho* deb ataladi.

(13.1) tenglikni izohlaymiz. ε — juda kichik son bo‘lsin. U holda (13.1) tenglik kuzatishlar soni n qancha katta bo‘lsa, shuncha katta ishonch (ehtimol) bilan $\hat{\theta}_n$ bahoning noma‘lum θ bahodan chetlanishning mutlaq qiymati juda ham kichik bo‘ladi deb aytish mumkinligini anglatadi. Qisqa qilib aytadigan bo‘lsak, boshlang‘ich ma‘lumotning hajmi qancha katta bo‘lsa, “shuncha haqiqatga yaqin” bo‘lamiz.

“Yaxshi” baho albatta asosli bo‘lishi kerak. Aks holda baho amaliy ahamiyatga ega bo‘lmaydi: boshlang‘ich ma‘lumot hajmining oshishi “bizni haqiqatga olib bormaydi”. Shuning uchun bahoning asosliligini birinchi navbatda tekshirish kerak.

Asoslilik xossasi tanlamaning hajmi keskin oshganda bahoning asimptotik holatini tavsiflaydi. Biroq amalda ba‘zan noma‘lum parametрни kam hajmdagi tanlama asosida baholashga ham to‘g‘ri keladi.

13.4-Ta’rif. Ixtiyoriy hajmdagi tanlama uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng, ya’ni $M\hat{\theta}_n = \theta$ bo‘lgan statistika *siljimagan baho* deb ataladi.

13.1-Misol. Bernulli sxemasi bo‘yicha n tajribada A hodisa X marta yuz bersin. A hodisa yuz berishi p ehtimolining bahosi sifatida bu hodisaning X/n nisbiy chastotasini olamiz. Demak bu holda $\theta = p$, $\hat{\theta}_n = X/n$ bo‘ladi. X matematik kutilmasi np bo‘lgan binomial taqsimlangan tasodifiy miqdor, shuning uchun

$$M\hat{\theta}_n = M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}MX = \frac{1}{n}np = p = \theta.$$

Shunday qilib, hodisa yuz berishining nisbiy chastotasi bu hodisa ehtimoli uchun siljimagan baho bo‘lar ekan. ◀

(13.1) tenglik yordamida bahoning asosliligini tekshirish biroz noqulay. Shuning uchun asoslilik quyidagi teorema yordamida tekshiriladi:

13.1-Teorema. θ parametrning siljimagan $\hat{\theta}_n$ bahosi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} D\hat{\theta}_n = 0$ o‘rinli bo‘lsa, bu baho asosli ham bo‘ladi.

13.2. Matematik kutilma va dispersiyaning nuqtaviy bahosi

Matematik kutilmasi $m = MX$ va dispersiyasi DX bo‘lgan X tasodifiy miqdor o‘rganilayotgan bo‘lsin.

13.2-Teorema. Bosh to‘plamdan olingan n hajmli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaning

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

o‘rta arifmetigi $m = MX$ matematik kutilma uchun asosli va siljimagan baho bo‘ladi.

► $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar bitta taqsimot qonuniga ega (X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni bilan bir xil), shuning uchun

$$M\hat{m} = M\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot MX = m$$

va demak $\hat{m}$ baho siljimagan. Bu bahoning dispersiyasi

$$D\hat{m} = D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n Dx_i = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot DX = \frac{DX}{n},$$

ya’ni $n \rightarrow \infty$ bo‘lganda, $D\hat{m} \rightarrow 0$ bo‘ladi. Bu esa 13.1-Teoremaga ko‘ra $\hat{m}$ bahoning asosli ekanligini anglatadi. ◀

13.2-Misol. Tanlamaning $s^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$ dispersiyasi bosh dispersiya uchun siljigan baholash bo‘lishini ko‘rsating va bosh dispersiya uchun siljimagan baholash tuzing.

► $MX = m, DX = \sigma^2$ bo‘lsin. U holda X_i tasodifiy miqdor X bosh tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlanganligidan $MX_i = m, DX_i = \sigma^2$ kelib chiqadi. Shuning uchun

$$M\bar{x} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m$$

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

bo'ladi. Endi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n [(X_i - m) - (\bar{x} - m)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - 2(\bar{x} - m) \sum_{i=1}^n (X_i - m) + n(\bar{x} - m)^2 \end{aligned} \quad (13.2)$$

tenglikni yozib olamiz va

$$\sum_{i=1}^n (X_i - m) = \sum_{i=1}^n X_i - nm = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - nm = n\bar{x} - nm = n(\bar{x} - m)$$

bo'lganligi uchun (13.2) tenglik

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - n(\bar{x} - m)^2 \quad (13.3)$$

ko'rinishni oladi. (13.3) tenglikning ikkala tomonining matematik kutilmasini topamiz:

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) &= \sum_{i=1}^n M(X_i - m)^2 - nM(\bar{x} - m)^2 = \\ &= n\sigma^2 - nD\bar{x} = n\sigma^2 - n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2, \end{aligned}$$

bu yerda $DX_i = M(X_i - MX_i)^2 = M(X_i - m)^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ tenglik inobatga olingan. U holda tanlama dispersiyasining matematik kutilmasi uchun

$$\begin{aligned} Ms^2 &= M\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. Ko'rinish turibdiki tanlama dispersiyasi bosh dispersiyadan $-\sigma^2/n$ miqdorga farq qilar ekan, ya'ni shu miqdorga siljigan.

Shuning uchun

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

statistika dispersiya uchun siljimagan baho bo‘ladi. Chunki

$$\begin{aligned} M\hat{\sigma}^2 &= M\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \\ &= \frac{n}{n-1} M\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

bosh dispersiyani hosil qildik. ◀

Shunday qilib ushbu teorema o‘rinli:

13.3-Teorema. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$ statistika $DX = \sigma^2$ dispersiya uchun asosli siljimagan baho bo‘ladi.

Endi tanlama dispersiyasi va dispersiyaning siljimagan bahosi o‘rtasidagi bog‘liqlikni topamiz:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2\bar{x}X_i + \bar{x}^2) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{x}^2 \right) = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \bar{x}^2 \right) = \\ &= \frac{n}{n-1} (\overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2) = \frac{n}{n-1} (\overline{x^2} - \bar{x}^2) = \frac{n}{n-1} s^2. \end{aligned}$$

13.3. Nuqtaviy baholarni tuzish usullari

X bosh to‘plamning $P(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ taqsimotini aniqlovchi $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrlarning nuqtaviy baholovchilarini tuzish usullarini qaraymiz.

Berilgan tasodifiy tanlamalar asosida noma’lum parametrlarning nuqtaviy baholovchilarini tuzishning ko‘p usullari ishlab chiqilgan. Ulardan

- *momentlar usuli*;
- *maksimal ehtimollik usuli*;
- *eng kichik kvadratlar usuli*;
- *grafik usul (yoki nomogrammalar usuli)*.

Biz ulardan momentlar va eng kichik kvadratlar usullarida to‘xtalamiz.

Momentlar usuli. Taqsimotning noma'lum parametrlarini topishga mo'ljallangan bu usul *taqsimotning nazariy momentlarini tanlama asosida olingan mos empirik momentlarga tenglashtirishdan* iborat.

Taqsimoti $P(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ bo'lgan X bosh to'plamning $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy tanlamasi berilgan va bu tanlama bo'yicha $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrlarning bahosini topish talab qilingan bo'lsin.

X tasodifiy miqdorning dastlabki r ta boshlang'ich $m_k = MX^k, k = 1, 2, \dots, r$ momentlari mavjud deb faraz qilamiz. m_k miqdorlar noma'lum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrlarning funksiyasi bo'lishi ravshan: $m_k = m_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$.

Tanlamaning $\bar{x}_k$ boshlang'ich yoki $\dot{\bar{x}}_k$ markaziy momentlarini qaraymiz. Tanlamaning boshlang'ich va markaziy momentlari bosh to'plamning mos momentlariga asosli baholash bo'ladi. Shuning uchun katta hajmli tanlamalarda m_k va $\dot{m}_k, k = 1, 2, \dots, r$ momentlarni mos ravishda $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaning $\bar{x}_k$ va $\dot{\bar{x}}_k$ statistik momentlari bilan almashtirish mumkin.

Natijada r ta noma'lum parametrga nisbatan

$$\bar{x}_k = \bar{x}_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), k = 1, 2, \dots, r$$

yoki

$$\dot{\bar{x}}_k = \dot{\bar{x}}_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), k = 1, 2, \dots, r$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemaning yechimlarini noma'lum parametrlarning nuqtaviy bahosi sifatida qabul qilinadi.

Momentlar usuli parametrlarni baholashning eng sodda usuli hisoblanadi va u 1894 yili ingliz statisti K.Pirson tomonidan taklif qilingan.

13.3-Misol. Normal taqsimotning noma'lum m va σ parametrlarini momentlar usuli bilan baholang.

► Demak ikkita $\theta_1 = m, \theta_2 = \sigma$ parametrlarni baholaymiz va ularning bahosini $\hat{\theta}_1 = \hat{m}, \hat{\theta}_2 = \hat{\sigma}$ orqali belgilaymiz. Empirik matematik kutilma va dispersiyani

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

formulalarga ko'ra hisoblaymiz.

Normal taqsimot uchun m parametr matematik kutilma va σ o'rtacha kvadratik chetlanish, $\sigma^2 = m_2 - m^2$ esa dispersiyadan iborat bo'lganligi uchun momentlar usuli

$$\hat{m} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 + \hat{m}^2 = \bar{x}_2$$

tenglamalarni hosil qiladi. Ularning

$$\hat{m} = \bar{x}, \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}_2 - \bar{x}^2}$$

yechimi normal taqsimotning statistik baholari bo'ladi. Biroq 13.1-Misolda

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \bar{x}_2 - (\bar{x})^2$$

statistika dispersiya uchun siljigan baho ekanligini ko'rdik. Shuning uchun uni biz $n/(n-1)$ ifodaga ko'paytirib, ya'ni siljimagan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

statistikani olamiz. ◀

Eng kichik kvadratlar usuli. Tanlama xarakteristikalarining qidirilayotgan θ parametrdan chetlanishlari kvadratlarining yig'indisini minimallashtirishga asoslangan usul *eng kichik kvadratlar usuli* deb ataladi.

Boshqacha qilib aytganda eng kichik kvadratlar usuli

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \rightarrow \min$$

yig'indini minimallashtiradigan $\hat{\theta}$ qiymatni topishdan iborat.

13.4-Misol. Eng kichik kvadratlar usuli bilan Puasson taqsimotining a parametri uchun baho toping.

► $F(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ funksiyaning minimum nuqtasini $F'(\theta) = 0$

tenglamaning ildizi sifatida topamiz:

$$F'(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right)' = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = 0$$

yoki

$$\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \theta = 0, \text{ ya'ni } \sum_{i=1}^n x_i = n\theta, \theta = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Ikkinchi tartibli hosila bu nuqtada

$$F''(\theta) = \left(-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) \right)' = -2 \sum_{i=1}^n (-1) = 2n > 0$$

bo'lganligi uchun $\theta = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ nuqta $F(\theta)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi. Shunday qilib, eng kichik kvadratlar usuliga ko'ra Puasson taqsimotining a parametriga uchun $\hat{\theta}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ statistika siljimagan asosli baho bo'ladi. ◀

13.4. Taqsimotning parametrlari va sonli xarakteristikalarini oraliqli baholash

Noma'lum parametrlarni baholashda yuqorida qaralgan nuqtaviy baholash bilan bir qatorda oraliqli baholashdan ham foydalaniladi. Nuqtaviy baholashdan farqli ravishda oraliqli baholash noma'lum parametr bahosi aniqligining ehtimoliy xarakteristikasini olish imkonini beradi.

13.5-Ta'rif. Agar chegaralari $\theta_1 = \theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\theta_2 = \theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tasodifiy bo'lgan (θ_1, θ_2) oraliq uchun

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu oraliq bosh to'plam taqsimotining noma'lum θ parametri yoki sonli xarakteristikasi uchun γ ehtimolli ishonchlilik oralig'i, γ esa bu oraliqning ishonlilik ehtimoli yoki ishonchlilik darajasi deb ataladi.

Ko'pincha (ammo har doim emas) ishonchlilik oralig'i siljimagan $\hat{\theta}$ nuqtaviy bahoga nisbatan simmetrik ravishda olinadi, ya'ni $(\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon)$ ko'rinishdagi oraliqni

$$P\{\theta \in (\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon)\} = P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = \gamma$$

bo'ladigan qilib tanlanadi. $\varepsilon > 0$ son baholashning aniqliligini tavsiflaydi: $|\hat{\theta} - \theta|$ ayirma qanchalik kichik bo'lsa, baholash shunchalik aniq bo'ladi.

γ miqdor oldindan qo'yilgan masalaning xususiyatiga qarab tanlanadi. Masalan, bemorning muolaja uchun berilgan doriga nisbatan ishonchlilik darajasi xaridorning muzlatkichga bo'lgan ishonchlilik darajasidan albatta katta bo'lishi kerak. γ ishonchlilikni 0,9; 0,95; 0,99 yoki 0,999 qiymatlarga teng qilib olish qabul qilingan. Bu holda θ parametrning (θ_1, θ_2) ishonchlilik oralig'iga tushishi amalda muqarrar deb hisoblash mumkin.

Ko'pincha γ ishonchlilik ehtimoli o'rniga ahamiyatlilik darajasi deb ataluvchi $\alpha = 1 - \gamma$ ehtimol qaraladi.

θ parametrning ishonchlilik oralig'i yagona emasligi tabiiy. Turli xil usullar turli xil θ_1 va θ_2 statistikalariga olib keladi. Bundan tashqari har bir aniq tanlama o'zining ishonchlilik oralig'iga ega bo'ladi.

13.5. Normal taqsimotning parametrlari uchun ishonchlilik oralig'lari

Endi normal taqsimotning parametrlari uchun, ya'ni tanlama parametrlari m (matematik kutilma) va σ^2 (dispersiya) bo'lgan normal taqsimotli bosh to'plamdan olinganda ishonchlilik oralig'ini qurish masalasini qarab chiqamiz.

Bu masala ayniqsa o'lchash natijalarini tahlil qilishda katta amaliy ahamiyatga ega. Haqiqatdan ham, birorta m fizik kattalikni aniqlash uchun bir-biriga bog'liq bo'lmagan tajribalar o'tkazilmoqda deb faraz qilaylik. Nazariy mulohazalar asosida o'lchashdagi tasodifiy xatoliklar normal taqsimlangan deb faraz qilinadi. Shu sababli

$$x = m + \text{xatolik}$$

normal taqsimlangan bo'ladi. Agar o'lchashlarda tizimli xatoliklar bo'lmasa,

$$Mx = m$$

bo'ladi. Shu sababli o'lchash natijalariga matematik ishlov berishning asosiy masalasi – o'lchanayotgan miqdorning haqiqiy qiymatini baholashdan iborat bo'ladi deb hisoblash mumkin. Uni matematik tilda boshqacha ifodalasak –

matematik kutilmani yoki dispersiyani (yoki o'rtacha kvadratik chetlasinishni) baholash deb qarash mumkin.

Bu masalaning qisman yechimini

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

tanlama o'rtachasi,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

tanlama dispersiyasi, yoki to'g'irlangan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

dispersiya beradi. Biroq n o'lchash natijalari katta bo'lmaganda ishonchlilik oraliqlarini qurish muhim ahamiyatga ega.

Matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'i. m matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'ini qurish ikkita:

1. σ o'tacha kvadratik chetlanish ma'lum;
2. σ o'tacha kvadratik chetlanish noma'lum hol uchun alohida qaraladi.

1) σ parametr ma'lum bo'lganda m matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'ini qurish. Bu hol uchun quyidagi teorema qo'llaniladi.

13.4-Teorema. $X_1, X_2, \dots, X_n$ — parametrlari m va σ bo'lgan normal taqsimotli bosh to'plamdan olingan tanlama bo'lsin. U holda bu tanlamaning $\hat{m}$ o'rtachasi matematik kutilmasi m va dispersiyasi σ^2/n bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'ladi.

Endi bevosita ishonchlilik oralig'ini tuzamiz. Buning uchun

$$u = \frac{\hat{m} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (13.4)$$

tasodifiy miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdor 13.4-Teoremaga ko'ra standart normal taqsimlangan, ya'ni $u = N(0,1)$. Bundan foydalanib berilgan γ boyicha

$$P(-t < N(0,1) < t) = \gamma$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t sonni topish mumkin. Haqiqatdan ham (10.9) formulaga ko‘ra $-t < u < t$ hodisaning ehtimoli uchun

$$P(-t < u < t) = \Phi\left(\frac{t-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-t-0}{1}\right) = \Phi(t) - \Phi(-t)$$

tenglikni yozamiz. Laplas funksiyasining (9.32) xossasidan o‘ng tomondagi ayirma $2\Phi(t) - 1$ ifodaga teng. Shuning uchun t son $2\Phi(t) - 1 = \gamma$ tenglikdan yoki aniqrog‘i

$$\Phi(t) = \frac{1 + \gamma}{2} \quad (13.5)$$

tenglikdan topiladi, ya’ni t soni standart normal taqsimotning $(1 + \gamma)/2$ saviyali kvantili, ya’ni $t = t_{(1+\gamma)/2}$ bo‘ladi. $t_{(1+\gamma)/2}$ sonni topib, $-t_{(1+\gamma)/2} < u < t_{(1+\gamma)/2}$ hodisaning ehtimoli yoki batafsilroq yozadigan bo‘lsak

$$-t_{(1+\gamma)/2} < \frac{\hat{m} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < t_{(1+\gamma)/2} \quad (13.6)$$

hodisaning ehtimoli γ qiymatga teng bo‘ladi deb tasdiqlashimiz mumkin. (13.6) munosabatlar

$$\hat{m} - t_{(1+\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \hat{m} + t_{(1+\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (13.7)$$

munosabatlarga ekvivalent bo‘lganligi uchun (13.7) hodisaning ehtimoli γ qiymatga teng bo‘ladi. Bu esa

$$\left(\hat{m} - t_{(1+\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \hat{m} + t_{(1+\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (13.8)$$

m matematik kutilma uchun ishonchlilik ehtimoli γ bo‘lgan ishonchlilik oralig‘i ekanligini anglatadi. Ko‘rinib turibdiki oraliqning $2t_{(1+\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ uzunligi tajriba natijalariga bog‘liq emas va bu oraliqning markazi tasodifiy $\hat{m}$ nuqtada bo‘ladi.

13.5-Misol. m parametri noma'lum va $\sigma = 3$ bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 6 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	4	7	9	14	15

$\hat{m}$ nuqtaviy bahoni va uning uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,99$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini quring.

► Jadvaldagi qiymatlar asosida 13.2-Teoremaga ko'ra matematik kutilmaning nuqtaviy bahosini topamiz:

$$\hat{m} = \frac{1}{6}(0 + 4 + 7 + 9 + 14 + 15) \approx 8,2$$

$\Phi(t_{(1+\gamma)/2}) = (1 + 0,99)/2$ tenglamani yechib $t_{(1+\gamma)/2} = 2,58$ qiymatni topamiz. Bundan esa

$$t_{(1+\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58 \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} \approx 3,16$$

qiymatni hosil qilamiz. U holda qidirilayotgan ishonchlilik intervali

$$(8,2 - 3,16; 8,2 + 3,16) = (5,04; 11,36)$$

bo'ladi. ◀

13.6-Misol. 100 gramm eritma tarkibida mavjud bo'lgan ishqor miqdorini aniqlash uchun tajribalar o'tkazilmoqda. Tajribalar jarayonida tizimli xatoliklarga yo'l qo'yilmaydi, tasodifiy xatoliklar esa o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = 0,015$ gramm bo'lgan normal taqsimotdan iborat deb faraz qilinadi. Ishqor miqdorini aniqlash uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,9$ bo'lganda xatolik 0,01 grammdan oshmasligi uchun necha marta tajriba o'tkazilishi kerak.

► $\gamma = 0,9$ bo'lganligi uchun $\Phi(t_{(1+\gamma)/2}) = (1 + 0,9)/2$ tenglamaning yechimi $t_{(1+\gamma)/2} = 1,65$ bo'ladi. Masala shartiga ko'ra $t_{(1+\gamma)/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,01$ gramm, bundan esa

$$\sqrt{n} = 1,65 \cdot \frac{0,015}{0,01} = 2,475.$$

Demak, $n = 9$ marta tajriba o'tkazilganda 0,9 ehtimol bilan xatolik 0,01 grammdan oshmaydi deb tasdiqlash mumkin. ◀

2) σ parametr noma'lum bo'lganda m matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'ini qurish. σ parametr noma'lum bo'lgan holni (uning o'zi ham kuzatish natijalariga ko'ra baholanadi) qarab chiqamiz. Bu yerda u tasodifiy miqdorni ((13.4) formula) qarash hech qanday natija bermaydi. Chunki u miqdorning ifodasida bir emas ikkita (m va σ) noma'lum turibdi. Shuning uchun u miqdor o'rniga

$$T = \frac{\hat{m} - m}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}} \quad (13.9)$$

miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdor uchun quyidagi teorema o'rinli.

13.5-Teorema. $X_1, X_2, \dots, X_n$ – parametrlari m va σ bo'lgan normal taqsimotli bosh to'plamdan olingan tanlama bo'lsin. U holda (13.9) formula bilan aniqlanuvchi T tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $n - 1$ bo'lgan Styudent taqsimotiga ega bo'ladi va uning zichlik funksiyasi

$$f_{t(n)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi(n-1)}} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}; x \in (-\infty; \infty),$$

ko'rinishda bo'ladi.

13.5-Teoremani qo'llab matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'ini tuzamiz. Bu maqsadda

$$P(-t < T < t) = P\left(-t < \frac{\hat{m} - m}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}} < t\right) = \gamma$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t sonini topamiz.

$$-t < \frac{\hat{m} - m}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}} < t$$

munosabat

$$\hat{m} - t \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} < m < \hat{m} + t \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}$$

munosabatga ekvivalent. Shuning uchun m matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'i

$$\left(\hat{m} - t \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}; \hat{m} + t \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} \right) \quad (13.10)$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi t sonni topish bilan shug'ullanamiz. Bu yerda Student taqsimotining $f_{t(n-1)}(x)$ zichlik funksiyasining juftligini inobatga olsak

$$P(-t < T < t) = \int_{-t}^t f_{t(n-1)}(x) dx = 2 \int_0^t f_{t(n-1)}(x) dx$$

tenglikka ega bo'lamiz. U holda t soni

$$2 \int_0^t f_{t(n-1)}(x) dx = \gamma$$

tenglamaning yechimi sifatida topiladi. t o'zgaruvchining funksiyasi sifatida o'ng tomondagi ifodaganing qiymatlari jadvali tuzilgan (4-Ilova), undan foydalanib berilgan γ bo'yicha $t = t_\gamma$ sonni topish mumkin.

13.7-Misol. m va σ parametrlari noma'lum bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 9 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2	0	2	4	3	5	0	5	4

$\hat{m}$ nuqtaviy bahoni va uning uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,98$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini quring.

► Jadvaldagi qiymatlar asosida matematik kutilma va dispersiyaning nuqtaviy bahosini topamiz:

$$\hat{m} = \frac{1}{9}(2 + 0 + 2 + 4 + 3 + 5 + 0 + 5 + 4) = 2,78,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{8}((2 - 2,78)^2 + (0 - 2,78)^2 + (2 - 2,78)^2 + (4 - 2,78)^2 + (3 - 2,78)^2 + (5 - 2,78)^2 + (0 - 2,78)^2 + (5 - 2,78)^2 + (4 - 2,78)^2) \approx 3,69 \text{ va } \hat{\sigma} = 1,92.$$

$n - 1 = 8$ va $\gamma = 0,98$ uchun t_γ sonni 4-Ilovadan topamiz: $t_\gamma = 2,9$. Topilganlarni (13.10) formulaga qo'yib,

$$\left(2,78 - 2,9 \cdot \frac{1,92}{\sqrt{8}}; 2,78 + 2,9 \cdot \frac{1,92}{\sqrt{8}}\right) \approx (0,81; 4,75)$$

matematik kutilmaning ishonchlilik oralig'ini hosil qildik. ◀

O'rtacha kvadratik chetlanish va dispersiya uchun ishonchlilik oralig'i. σ^2 dispersiyasi noma'lum normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdor ustida n marta tajriba o'tkazilib, $X_1, X_2, \dots, X_n$ natijalar olingan. Ular asosida

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

tanlama o'rtachasi va dispersiyasini hisoblaymiz. Agar X tasodifiy miqdorning m matematik kutilmasi ma'lum bo'lsa, qo'shimcha ravishda

$$M^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \quad (13.11)$$

miqdorni kiritamiz.

Bu yerda ham matematik kutilmadagi singari dispersiya uchun ishonchlilik oralig'ini qurish ikkita:

1. m matematik kutilma ma'lum;
2. m matematik kutilma noma'lum hol uchun alohida qaraladi.

1) *m parametr ma'lum bo'lganda σ^2 dispersiya uchun ishonchlilik oralig'ini qurish.*

13.6-Teorema. $X_1, X_2, \dots, X_n$ – parametrlari m va σ bo‘lgan normal taqsimotli bosh to‘plamdan olingan tanlama bo‘lsin. U holda nM^2/σ^2 formula bilan aniqlanuvchi tasdofiy miqdor erkinlik darajasi n bo‘lgan xi kvadrat taqsimotiga ega bo‘ladi:

$$\chi^2(n) = \frac{nM^2}{\sigma^2}. \quad (13.12)$$

$\chi^2(n)$ taqsimotning qiymatlari jadvalidan (5-ilova) $(1 + \gamma)/2$ saviyali, ya’ni $P(\chi^2(n) < t) = (1 + \gamma)/2$ tenglikni qanoatlantiruvchi $t = t_{(1+\gamma)/2}$ va $P(\chi^2(n) < t) = (1 - \gamma)/2$ tenglikni qanoatlantiruvchi $(1 - \gamma)/2$ saviyali $t = t_{(1-\gamma)/2}$ kvantillarni topamiz. Ushbu

$$t_{(1+\gamma)/2} < \frac{nM^2}{\sigma^2} < t_{(1-\gamma)/2}$$

munosabat

$$\frac{nM^2}{t_{(1-\gamma)/2}} < \sigma^2 < \frac{nM^2}{t_{(1+\gamma)/2}}$$

munosabatga ekvivalentligidan ularning ehtimollari ham teng bo‘ladi:

$$P\left(t_{(1+\gamma)/2} < \frac{nM^2}{\sigma^2} < t_{(1-\gamma)/2}\right) = P\left(\frac{nM^2}{t_{(1-\gamma)/2}} < \sigma^2 < \frac{nM^2}{t_{(1+\gamma)/2}}\right),$$

ya’ni

$$P\left(\frac{nM^2}{t_{(1-\gamma)/2}} < \sigma^2 < \frac{nM^2}{t_{(1+\gamma)/2}}\right) = \gamma.$$

Bu esa

$$\left(\frac{nM^2}{t_{(1-\gamma)/2}}; \frac{nM^2}{t_{(1+\gamma)/2}}\right) \quad (13.13)$$

oraliq σ^2 dispersiya uchun γ ishonchlik ehtimoliga ega bo‘lgan ishonchlik oralig‘i bo‘lishini anglatadi. (13.13) oralig‘ining chetki nuqtalari musbat sonlardan iborat bo‘lganligi uchun ulardan ildiz chiqarsak σ o‘rtacha kvadratik chetlanishga

$$\left(\sqrt{\frac{nM^2}{t_{(1-\gamma)/2}}}; \sqrt{\frac{nM^2}{t_{(1+\gamma)/2}}} \right) \quad (13.14)$$

ishonchlilik oralig'ni hosil qilamiz.

2) *m* parametr noma'lum bo'lganda σ^2 dispersiya uchun ishonchlilik oralig'ini qurish.

13.7-Teorema. $X_1, X_2, \dots, X_n$ – parametrlari *m* va σ bo'lgan normal taqsimotli bosh to'plamdan olingan tanlama bo'lsin. U holda ns^2/σ^2 formula bilan aniqlanuvchi tasdofiy miqdor erkinlik darajasi $n - 1$ bo'lgan xi kvadrat taqsimotiga ega bo'ladi:

$$\chi^2(n - 1) = \frac{ns^2}{\sigma^2}. \quad (13.15)$$

Bu yerda ham $\chi^2(n - 1)$ taqsimotning qiymatlari jadvalidan (5-ilova) $(1 + \gamma)/2$ saviyali $t_{(1+\gamma)/2}$ va $(1 - \gamma)/2$ saviyali $t_{(1-\gamma)/2}$ kvantillarni topamiz. Ushbu

$$t_{(1+\gamma)/2} < \frac{ns^2}{\sigma^2} < t_{(1-\gamma)/2}$$

munosabat

$$\frac{ns^2}{t_{(1-\gamma)/2}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{t_{(1+\gamma)/2}}$$

munosabatga ekvivalentligidan ularning ehtimollari ham teng bo'ladi:

$$P\left(t_{(1+\gamma)/2} < \frac{ns^2}{\sigma^2} < t_{(1-\gamma)/2}\right) = P\left(\frac{ns^2}{t_{(1-\gamma)/2}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{t_{(1+\gamma)/2}}\right),$$

ya'ni

$$P\left(\frac{ns^2}{t_{(1-\gamma)/2}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{t_{(1+\gamma)/2}}\right) = \gamma.$$

Bu esa

$$\left(\frac{ns^2}{t_{(1-\gamma)/2}}; \frac{ns^2}{t_{(1+\gamma)/2}} \right) \quad (13.16)$$

σ^2 dispersiya uchun ishonchlilik oralig‘i bo‘lishini anglatadi. Uning chetki nuqtalaridan ildiz chiqarib σ o‘rtacha kvadratik chetlanishga

$$\left(\sqrt{\frac{ns^2}{t_{(1-\gamma)/2}}}; \sqrt{\frac{ns^2}{t_{(1+\gamma)/2}}} \right) \quad (13.17)$$

ishonchlilik oralig‘ni hosil qilamiz.

13.8-Misol. m va σ parametrlari noma’lum bo‘lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 12 marta tajriba o‘tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	1,6	1,8	2	2,1	1,9	1,7	1,9	1,7	2	1,7	1,8	1,7

σ parametrning siljimagan $\hat{\sigma}$ bahosini toping va $\gamma = 0,98$ ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi ishonchlilik oralig‘ni quring.

► Tanlamaning $\bar{x}$ o‘rtachasini, s^2 dispersiyasini va dispersiyaning siljimagan bahosini hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{1}{12} (1,6 + 1,8 + 2 + 2,1 + 1,9 + 1,7 + 1,9 + 1,7 + 2 + 1,7 + 1,8 + 1,7) = 1,825;$$

$$s^2 = \frac{1}{12} (1,6^2 + 1,8^2 + 2^2 + 2,1^2 + 1,9^2 + 1,7^2 + 1,9^2 + 1,7^2 + 2^2 + 1,7^2 + 1,8^2 + 1,7^2) - (1,825)^2 = 0,021875.$$

Tanlama dispersiyasi va dispersiyaning siljimagan bahosi orasidagi $\hat{\sigma}^2 = ns^2/(n-1)$ bog‘liqlik asosida $\hat{\sigma}^2 = 12 \cdot 0,021875/11 = 0,023864$ qiymatni hosil qilamiz.

$n-1 = 11$ bo‘lganda $\chi^2(n-1)$ taqsimotning qiymatlari jadvalidan $(1+\gamma)/2 = 0,99$ saviyali $t_{(1+\gamma)/2} = 3,05$ va $(1-\gamma)/2 = 0,01$ saviyali $t_{(1-\gamma)/2} = 24,7$ kvantillarni topamiz.

Topilganlarni (13.16) formulaga qo'ysak

$$\left(\frac{12 \cdot 0,021875}{24,7}; \frac{12 \cdot 0,021875}{3,05} \right) = (0,010628; 0,086066)$$

σ^2 dispersiya uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,98$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini hosil qilamiz, ya'ni σ^2 dispersiyaning mazkur oraliqda yotish ehtimoli 0,98 ga teng. ◀

Nazorat savollari

1. Parametrni nuqtaviy baholash deganda nimani tushunasiz?
2. Qanday bahoga asosli statistik baho deyiladi?
3. Qanday bahoga siljimagan baho deyiladi?
4. Nuqtaviy baholashning qanday usullarini bilasiz?
5. Matematik kutilmaning nuqtaviy bahosi qanday topiladi?
6. Dispersiyaning siljimagan nuqtaviy bahosi qanday topiladi?
7. Parametrni eng kichik kvadratlar usuli bilan baholash qanday amalga oshiriladi?
8. Parametrni oraliqli baholash deganda nimani tushunasiz?
9. Matematik kutilma uchun oraliqli baho qaysi hollar uchun qaraladi?
10. Dispersiya uchun oraliqli baho qaysi hollar uchun qaraladi?

Mashqlar.

1. X tasodifiy miqdor ustida $n = 28$ marta o'tkazilgan tajriba natijalari quyidagicha: 3, -1, -2, 4, -2, 4, -5, 5, -3, 0, 1, 2, 2, 0, -3, -6, -8, 4, -6, 3, -6, -4, -3, -1, 1, 2, 2, 3. Bu tanlama bo'yicha X tasodifiy miqdor matematik kutilmasining $\hat{m}$ va dispersiyasining siljimagan $\hat{\sigma}^2$ bahosini toping.
2. X tasodifiy miqdor ustida o'tkazilgan $n = 28$ marta o'tkazilgan tajriba natijalari quyidagicha: 8, 7, 0, 1, -2, 4, -3, 5, 1, 0, 1, 3, 2, 0, -3, 3, 6, 4, 6, 3, 5, 2, -3, -1, 1, 2, 1, 6. Bu tanlama bo'yicha X tasodifiy miqdor matematik kutilmasining $\hat{m}$ va dispersiyasining siljimagan $\hat{\sigma}^2$ bahosini toping.
3. m parametri noma'lum va $\sigma = 2$ bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 7 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	9	7	4	3	8	-1

$\hat{m}$ nuqtaviy bahoni va uning uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,9$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini quring.

4. m parametri noma'lum va $\sigma = 1$ bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 8 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	0	-1	2	3	1	0	3

$\hat{m}$ nuqtaviy bahoni va uning uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,9$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini quring.

5. m va σ parametrlari noma'lum bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 10 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-1	3	-2	0	2	0	3	4	5	2

$\hat{m}$ nuqtaviy bahoni va uning uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,99$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini quring.

6. m va σ parametrlari noma'lum bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 12 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	2	5	7	3	4	3	6	1	2	1	3	4

$\hat{m}$ nuqtaviy bahoni va uning uchun ishonchlilik ehtimoli $\gamma = 0,98$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini quring.

7. m va σ parametrlari noma'lum bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 12 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	-1	2	0	3	6	1	2	4	3	2	5	2

σ parametrning siljimagan $\hat{\sigma}$ bahosini toping va $\gamma = 0,9$ ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi ishonchlilik oralig'ini quring.

8. m va σ parametrlari noma'lum bo'lgan normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida 26 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalri bo'yicha tanlamaning $\bar{x} = 4$ o'rtchasini va $s^2 = 0,56$ dispersiyasi hisoblandi. X tasodifiy miqdor dispersiyasining $\hat{\sigma}^2$ siljimagan bahosini va $\gamma = 0,98$ ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi ishonchlilik oralig'ini quring.

Javoblar.

1. $\hat{m} = -0,5, \hat{\sigma}^2 = 13,63$;
2. $\hat{m} = 2,1, \hat{\sigma}^2 = 14,04$;
3. $\hat{m} = 4,3, (3,05; 5,55)$;
4. $\hat{m} = 0,75, (-0,16; 1,66)$;
5. $\hat{m} = 1,6, (-0,86; 4,06)$;
6. $\hat{m} = 3,42, (1,88; 4,96)$;
7. $\hat{\sigma} = 1,97, (1,47; 3,07)$;
8. $\hat{\sigma}^2 = 0,58, (0,15; 0,59)$.

XIV BOB. STATISTIK GIPOTEZALARNI TEKSHIRISH

Statistik tadqiqotlarning maqsadi tasodifiy hodisalarni tavsiflovchi qonuniyatlarni izlab topishdan iborat. Bunday qonuniyatlar sonli, funksional, grafik va o'rganilayotgan tasodifiy miqdorning boshqa xarakteristikalarini bilan berilishi mumkin ekanligini ko'rdik. Ana shu qonuniyatlar o'tkazilgan tajribalar natijasi va nazariy mulohazalardan kelib chiqqan holda izlab topiladi. Biroq bu natijalar va nazariy mulohazalar asosida qilingan taxminlar (gipotezalar) har doim ham to'g'ri bo'lmaydi. Qilingan taxminning to'g'ri yoki noto'g'rligini *statistik gipotezalarni tekshirish usullari* aniqlab beradi.

14.1. Gipotezalarni tekshirishning asosiy tushunchalari

14.1-Ta'rif. Noma'lum taqsimotning turi yoki parametrlari haqidagi har qanday farazga *statistik gipoteza* deb ataymiz.

14.2.-Ta'rif. Tekshiriladigan gipoteza *asosiy* (yoki *nolinchi*) gipoteza deb ataladi va H_0 orqali belgilanadi. H_0 gipotezani mantiqiy inkor qiluvchi ikkinchi gipoteza *raqobatlashuvchi* (*muqobil*) gipoteza deb ataladi va H_1 orqali belgilanadi.

Nolinchi va muqobil gipotezalarni yozish uchun maxsus belgilardan foydalaniladi.

14.1-Misol. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlama bo'yicha X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi biror a o'zgarmas songa teng haqidagi H_0 asosiy gipoteza, H_1 esa matematik kutilma a songa teng emasligidan iborat yoki H_2 esa $m > a$ haqida bo'lsin. U holda gipotezalar

$$H_0: m = a,$$

$$H_1: m \neq a$$

$$H_2: m > a$$

ko'rinishda yoziladi.

Parametrning bitta qiymati haqida so'z borsa, ya'ni gipoteza

$$H: \theta = \theta_0$$

ko'rinishda bo'lsa, uni biz *oddiy gipoteza* deb ataymiz.

Agar gipoteza parametr qiymatlarining biror to'plami haqida, ya'ni u

$$H: \theta \in D$$

ko‘rinishda bo‘lsa, uni *murakkab gipoteza* deb ataymiz.

Yuqorida qaralgan 14.1-Misolda H_0 sodda gipoteza bo‘ladi. Chunki gipoteza matematik kutilmaning aniq bitta songa tengligini nazarda tutgan. H_1 va H_2 gipotezalar esa murakkab, chunki H_1 gipoteza tarkibida $H_i: m = a_i$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p taxminlar bor, bu yerda a_i sifatida a sonidan farqli ixtiyoriy sonni olish mumkin. H_2 gipotezada esa a_i son sifatida a sonidan katta har qanday sonni olish mumkin.

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri bu, H_0 gipotezada ko‘rsatilgan taxminning tajriba natijalariga mos kelishini tekshirishdan iborat. Shu maqsadda tekshiriladigan H_0 gipotezaga nisbatan bo‘lgan $F(z|H_0)$ shartli taqsimoti ma‘lum deb faraz qilinadihan $Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statistika tuziladi. Bu statistika yordamida gipotezani tekshirish qoidasi qabul qilinadi.

H_0 gipotezani qabul yoki inkor qilish (mos ravishda H_1 gipoteza inkor yoki qabul qilinadi) qoidasiga *kriteriya* deb ataymiz.

14.3-Ta’rif. Qiymatlari bo‘yicha H_0 gipoteza qabul yoki inkor qilinadigan $Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statistikaga *kriteriya statistikasi (muvofiglik kriteriyasi, muhimlik kriteriyasi yoki hal qiluvchi qoida)* deb ataladi.

Masalan, bizni qiziqtiradigan A hodisaning ehtimoli p qiymatga tengligi haqidagi $H_0: P(A) = p$ gipotezani tekshirish uchun A hodisaning ehtimolidan nisbiy chastotaning muqarrar chetlanishini ifodalovchi

$$Z = \left| \frac{m(A)}{n} - p \right| \quad (14.1)$$

statistikani olish mumkin.

Agar gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, n o‘sishi bilan nisbiy chastota p qiymatga ehtimol bo‘yicha intiladi va demak Z nolga intiladi. Katta n qiymatlarda Z statistikaning noldan sezilarli farq qilishi kam ehtimolli.

Barcha tanlamalar fazosi bir-birini to‘ldiruvchi ikkita – asosiy H_0 gipotezani inkor qildiruvchi S va qabul qildiruvchi $\bar{S}$ sohalarga ajratiladi

14.4-Ta’rif. Z kriteriya statistikasining H_0 gipotezani rad qildiradigan $\bar{S}$ qiymatlari to‘plamiga uning *kritik sohasi* deb ataladi.

14.5-Ta’rif. Z kriteriya statistikasining H_0 gipotezani qabul qildiradigan S qiymatlari to‘plamiga uning *ishonchlilik sohasi* deb ataladi.

Masalan, statistik kriteriya sifatida quyidagi qoidani qabul qilish mumkin:

1) agar $Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statistikaning $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymati $\bar{S}$ kritik sohada yotsa, H_0 gipoteza rad qilinadi va H_1 muqobil gipoteza qabul qilinadi;

2) agar $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymat S ishonchlilik sohasida yotsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi.

Bu qoidani amalga oshirish jarayonida ikki xil ko‘rinishdagi xatolikka yo‘l qo‘yilishi mumkin:

14.6-Ta’rif. H_0 gipoteza to‘g‘ri bo‘lishiga qaramasdan uning rad qilinishidan iborat hodisaga *birinchi tur xatolik* deb ataladi.

14.7-Ta’rif. H_1 gipoteza to‘g‘ri bo‘lib, biroq H_0 gipoteza qabul qilinishidan iborat hodisaga *ikkinchi tur xatolik* deb ataladi.

14.8-Ta’rif. Birinchi tur xatolikning $\alpha = P\{Z \in \bar{S} | H_0\}$ ehtimoliga statistik kriteriyaning *muhimlik darajasi* deb ataladi. Birinchi tur xatolikning α ehtimolini $F(z | H_0)$ shartli taqsimot bo‘yicha hisoblash mumkin.

Ikkinchi tur xatolikning $\beta = P\{Z \in S | H_1\}$ ehtimolini esa Z statistikaning $F(z | H_1)$ shartli taqsimoti bo‘yicha hisoblash mumkin.

Ikkala ehtimol uchun $\alpha = P(H_1 | H_0)$ va $\beta = P(H_0 | H_1)$ shartli ehtimolli tengliklar o‘rinli.

14.9-Ta’rif. $1 - \beta$ miqdor, ya’ni ikkinchi tur xatolikka yo‘l qo‘ymaslik (noto‘g‘ri H_0 gipoteza rad qilinib, to‘g‘ri H_1 gipoteza qabul qilinishi) ehtimoliga kriteriya quvvati deyiladi.

$1 - \beta = P(H_1 | H_1) = P\{Z \in \bar{S} | H_1\}$ tenglikning o‘rinli ekanligini osongina izohlash mumkin. Kriteiyaning quvvati qancha katta bo‘lsa, ikkinchi tur xatoga yo‘l qo‘yilish ehtimoli shuncha kichik bo‘ladi.

Birinchi tur xatolikning α ehtimolining kamayishi hisobiga ikkinchi tur xatolikning β ehtimoli o'sishi va aksincha bo'lishi ravshan, ya'ni kritik va ishonchlilik sohalarini tanlashda murosaga kelishilishi kerak. Shuning uchun birinchi tur xatolik α ehtimolining o'zgarmas qiymatida kritik sohani ikkinchi tur xato minimal bo'ladigan qilib tanlash kerak.

Ikkala turdagi xatolikni ham kamaytirish uchun tanlama hajmini ko'paytirish kerak. Shuning uchun berilgan α muhimlik darajasi uchun eng katta quvvatli kriteiya qidiriladi.

Aksar hollarda statistik kriteriyning α muhimlik darajasi sifatida $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ qiymatlar olinadi.

Statistik gipotezani tekshirishni quyidagi bosqichlarga bo'lish mumkin:

- 1) H_0 asosiy va unga muqobil bo'lgan H_1 gipotezalar shakllantiriladi;
- 2) α muhimlik darajasi tanlanadi;
- 3) H_0 gipotezani tekshirish uchun Z statistika tanlanadi;
- 4) Z kriteriya statistikasing ko'rinishiga va α muhimlik darajasi bo'yicha $\bar{S}$ kritik soha va S ishonchlilik sohasi aniqlanadi;
- 5) Kuzatishlarning $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamasi bo'yicha Z statistik kriteriyaning $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymati hisoblanadi;
- 6) $1 - \alpha$ ishonchlilik darajasida statistik qaror qabul qilinadi: agar $z \in \bar{S}$ bo'lsa, H_0 gipoteza tajriba natijalariga mos emas deb inkor qilinadi, agar $z \in S$ bo'lsa, H_0 gipoteza tajriba natijalariga zid emas deb qabul qilinadi.

Statistik gipotezalar ikki turga bo'linadi: *parametrik gipotezalar*, bunda ma'lum taqsimotning parametrlari haqida taxmin qilinadi va noma'lum taqsimotning turi haqidagi *noparametrik gipotezalar*.

Parametrik gipotezalar. $H_0: \theta = \theta_0$ gipotezani tekshiramiz, bu yerda θ_0 son θ parametr qiymatlari sohasidan olingan birorta o'zgarmas son.

H_1 muqobil gipotezadagi tasdiq va α muhimlik darajasi Z statistika qiymatlari to'plamidagi $\bar{S}$ kritik sohaning hajmini va joylashish o'rnini aniqlab beradi. $\bar{S}$ kritik sohani aniqlash uchun $\bar{S}$ va S sohalarni ajratib turuvchi t_{kn} —kritik nuqtani (yoki kvantilni) topish yetarli.

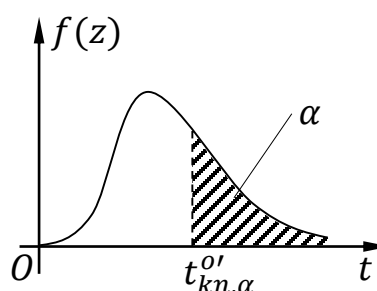
Masalan, muqobil gipoteza $H_1: \theta > \theta_0$ (yoki $H_1: \theta < \theta_0$) ko‘rinishda bo‘lsa, $\bar{S}$ o‘ng tomonli (14.1-rasm) (yoki chap tomonli (14.2-rasm)) soha bo‘ladi va kritik nuqta

$$P(z > t_{kn}) = \alpha \text{ (yoki } P(z < t_{kn}) = \alpha)$$

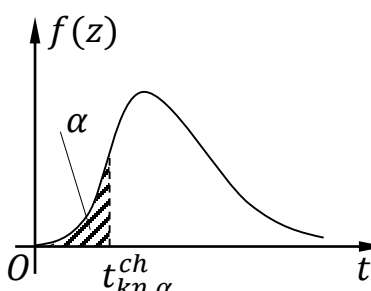
munosabatdan aniqlanadi. Agar muqobil gipoteza $H_1: \theta \neq \theta_0$ ko‘rinishda bo‘lsa, $\bar{S}$ kritik soha ikki tomonlama (14.3-rasm) bo‘ladi va chap va o‘ng kritik nuqtalar

$$P(z < t_{kn}^{ch}) = P(z > t_{kn}^{o'}) = \alpha/2$$

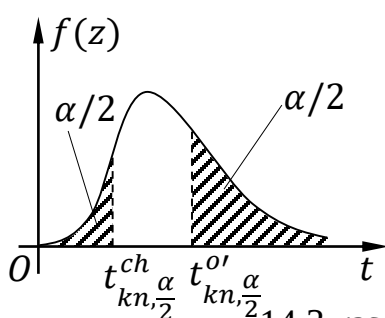
munosabatdan aniqlanadi.



14.1-rasm



14.2-rasm



14.3-rasm

14.2. Normal taqsimot parametrlarining qiymatlari haqidagi gipotezani tekshirish

X orqali parametrlari m va σ bo‘lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni belgilaymiz, ya’ni $X = N[m, \sigma]$, bunda parametrlardan bittasining yoki ikkalasining ham qiymati noma’lum bo‘lishi mumkin.

X bosh to‘plamdan olingan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlama matematik kutilmasi va dispersiyasining $\hat{m} = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ va $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ siljimagan baholarini hisoblaymiz. Hisoblangan bu qiymatlar m va σ^2 uchun gipotezalar shakllantirishda yordam beradi.

Normal taqsimotning dispersiyasi ma’lum bo‘lganda matematik kutilma haqidagi gipotezani tekshirish. Shunday qilib $X = N[m, \sigma]$ tasodifiy miqdorda m noma’lum va σ ma’lum.

Noma'lum m parametr m_0 qiymatga tengligi haqidagi asodiy H_0 gipotezani ilgari suramiz. Muqobil H_1 gipoteza uchun uch hol mavjud: 1) m parametr qiymati m_0 qiymatdan katta bo'lgan m_1 qiymatga teng; 2) m parametr qiymati m_0 qiymatdan kichik bo'lgan m_1 qiymatga teng; 3) m parametr qiymati m_0 qiymatga teng bo'lmagan m_1 qiymatga teng.

Har bir hol uchun H_0 gipotezani oldingi mavzuda keltirilgan bosqichlar ketma-ketligida alohida tekshiramiz.

1-hol. 1) H_0 asosiy va H_1 muqobil gipotezalsrni shakllantiramiz:

$$H_0: m = m_0 \quad (14.2)$$

$$H_1: m = m_1 > m_0 \quad (14.3)$$

2) α muhimlik darajasini tanlaymiz;

3) H_0 gipotezani tekshirish uchun Z statistikani

$$Z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (14.4)$$

ko'rinishda tanlaymiz.

Z miqdorning qiymati $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaga bog'liq, chunki $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ va bu qiymat bo'yicha "tanlamaning H_0 gipotezadan qanchalik darajada chetlangan"ligini aniqlash mumkin. Buni izohlaylik: tanlamaning $\bar{X}$ o'rtachasi H_0 gipotezada nazarda tutilgan m_0 qiymatga qancha yaqin bo'lsa, Z miqdorning modul bo'yicha qiymati shunchalik darajada kichik bo'ladi. Agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, 13.4-Teoremaga ko'ra Z miqdor matematik kutilmasi 0 va dispersiyasi 1 ga teng bo'lgan normal taqsimotga ega bo'ladi:

$$Z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} = N(0,1). \quad (14.5)$$

4) $\bar{S}$ kritik soha va S ishonchlilik sohasi aniqlaymiz. Agar asosiy va muqobil gipotezalar (14.2), (14.3), kriteriya statistikasi esa (14.4) ko'rinishda bo'lsa, $\bar{S}$ kritik soha o'ng tomonli bo'lib, $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ oraliq ko'rinishida

bo'ladi. Bu yerda $t_{kn}^{o'}$ nuqta $P(Z > t_{kn}^{o'}) = \alpha$ tenglikdan yoki (14.5) tenglikga ko'ra

$$P(N(0,1) > t_{kn}^{o'}) = \alpha \quad (14.6)$$

tenglikdan aniqlanadi.

$\gamma = 1 - 2\alpha$ deb olamiz va

$$P(|N(0,1)| < t) = \gamma$$

yoki

$$P(-t < N(0,1) < t) = 1 - 2\alpha \quad (14.7)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t nuqtani, ya'ni (13.5) formulaga ko'ra standart normal taqsimotning $(1 + \gamma)/2$ saviyali $t_{(1+\gamma)/2}$ kvantilini topamiz.

$-t_{(1+\gamma)/2} < N(0,1) < t_{(1+\gamma)/2}$ hodisaga qarama-qarshi hodisaning ehtimoli

$$P(N(0,1) < -t_{(1+\gamma)/2} \text{ yoki } N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2}) = 2\alpha \quad (14.8)$$

bo'ladi. $N(0,1)$ tasodifiy miqdor uchun

$$P(N(0,1) < -t_{(1+\gamma)/2}) = P(N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2})$$

bo'lganligi uchun (14.8) tenglikdan

$$P(N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2}) = \alpha \quad (14.9)$$

tenglikni yozish mumkin bo'ladi. (14.9) va (14.6) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{o'} = t_{(1+\gamma)/2}$ ekanligiga amin bo'lamiz.

5) $x_1, x_2, \dots, x_n$ aniq sonlarga ko'ra $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ o'tachani va uni (14.4)

tenglikga qo'yib Z_{son} qiymatni hisoblaymiz.

6) Agar $Z_{son} > t_{kn}^{o'}$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor qilinadi va H_1 gipotezani qabul qilamiz. Xuddi shu singari agar $Z_{son} < t_{kn}^{o'}$ bo'lsa H_0 gipoteza qabul qilinadi.

2-hol. 1) H_0 asosiy va H_1 muqobil gipotezalsrni shakllantiramiz:

$$H_0: m = m_0 \quad (14.10)$$

$$H_1: m = m_1 < m_0 \quad (14.11)$$

2) α muhimlik darajasini tanlaymiz;

3) Kriteriya statistikasi sifatida (14.4) miqdorni olamiz;

4) Asosiy va muqobil gipotezalar (14.10), (14.11), kriteriya statistikasi esa (14.4) ko‘rinishda bo‘lsa, $\bar{S}$ kritik soha chap tomonli bo‘lib, $(-\infty; t_{kn}^{ch})$ oraliq ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda t_{kn}^{ch} nuqta $P(Z < t_{kn}^{ch}) = \alpha$ tenglikdan yoki (14.5) tenglikga ko‘ra

$$P(N(0,1) < t_{kn}^{ch}) = \alpha \quad (14.12)$$

tenglikdan aniqlanadi. Bu yerda ham 1-holdagidek $\gamma = 1 - 2\alpha$ deb olamiz va

$$P(|N(0,1)| < t) = \gamma$$

yoki

$$P(-t < N(0,1) < t) = 1 - 2\alpha \quad (14.13)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t nuqtani, ya’ni (13.5) formulaga ko‘ra standart normal taqsimotning $(1 + \gamma)/2$ saviyali $t_{(1+\gamma)/2}$ kvantilini topamiz.

$-t_{(1+\gamma)/2} < N(0,1) < t_{(1+\gamma)/2}$ hodisaga qarama-qarshi hodisaning ehtimoli

$$P(N(0,1) < -t_{(1+\gamma)/2} \text{ yoki } N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2}) = 2\alpha \quad (14.14)$$

bo‘ladi. $N(0,1)$ tasodifiy miqdor uchun

$$P(N(0,1) < -t_{(1+\gamma)/2}) = P(N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2})$$

bo‘lganligi uchun (14.8) tenglikdan

$$P(N(0,1) < t_{(1+\gamma)/2}) = \alpha \quad (14.15)$$

tenglikni yozish mumkin bo‘ladi. (14.12) va (14.15) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{o'} = -t_{(1+\gamma)/2}$ ekanligiga amin bo‘lamiz.

5) $x_1, x_2, \dots, x_n$ aniq sonlarga ko‘ra $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ o‘tachani va uni (14.4)

tenglikga qo‘yib Z_{son} qiymatni hisoblaymiz.

6) Agar $Z_{son} < t_{kn}^{ch}$ bo‘lsa, H_0 gipoteza inkor va H_1 esa qabul qilinadi va agar $Z_{son} > t_{kn}^{ch}$ bo‘lsa H_0 gipoteza qabul qilinadi.

3-hol. 1) 1 va 2-holdagi singari H_0 asosiy va H_1 muqobil gipotezalsrni shakllantiramiz:

$$H_0: m = m_0 \quad (14.16)$$

$$H_1: m = m_1 \neq m_0 \quad (14.15)$$

2) α muhimlik darajasini tanlaymiz;

3) Kriteriya statistikasi sifatida (14.4) miqdorni olamiz;

4) Asosiy va muqobil gipotezalar (14.14), (14.15), kriteriya statistikasi esa (14.4) ko‘rinishda bo‘lsa, $\bar{S}$ kritik soha ikki tomonlama bo‘lib, $(-\infty; t_{kn}^{ch})$ va $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ oraliqlar ko‘rinishida bo‘ladi. t_{kn}^{ch} va $t_{kn}^{o'}$ nuqtalar

$$P(N(0,1) < t_{kn}^{ch}) = \alpha/2 \text{ va } P(N(0,1) > t_{kn}^{o'}) = \alpha/2 \quad (14.16)$$

tengliklar orqali aniqlanadi. Bu yerda $\gamma = 1 - \alpha$ deb olamiz va

$$P(|N(0,1)| < t) = \gamma$$

yoki

$$P(-t < N(0,1) < t) = 1 - \alpha \quad (14.17)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t nuqtani topamiz. Bu nuqta 1 va 2-holdagi singari standart normal taqsimotning $(1 + \gamma)/2$ saviyali kvantili: $t = t_{(1+\gamma)/2}$ U holda

$$P(N(0,1) < -t_{(1+\gamma)/2} \text{ yoki } N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2}) = \alpha \quad (14.18)$$

bo‘ladi.

$$P(N(0,1) < -t_{(1+\gamma)/2}) = P(N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2})$$

tenglik o‘rinli bo‘lganligi uchun (14.18) tenglikdan

$$P(N(0,1) < -t_{(1+\gamma)/2}) = \alpha/2 \text{ va } P(N(0,1) > t_{(1+\gamma)/2}) = \alpha/2 \quad (14.19)$$

tengliklarni hosil qilamiz. (14.16) va (14.19) tengliklarni taqqoslab

$$t_{kn}^{ch} = -t_{(1+\gamma)/2} \text{ va } t_{kn}^{o'} = t_{(1+\gamma)/2}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz, bu yerda $t_{(1+\gamma)/2}$ — standart normal taqsimotning $(1 + \gamma)/2$ saviyali kvantili.

5) $x_1, x_2, \dots, x_n$ aniq sonlarga ko‘ra $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ o‘tachani va uni (14.4)

tenglikga qo‘yib Z_{son} qiymatni hisoblaymiz.

6) Agar Z_{son} son $(-\infty; t_{kn}^{ch})$ yoki $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ oraliqlardan biriga tushsa H_0 gipoteza inkor, agar ikkalasiga ham tushmasa u qabul qilinadi.

14.2-Misol. Yangi yaratilgan dori vositasi $n = 16$ bemorda sinab ko‘rilmoqda. Dori vositasi qabul qilingandan 4 soat o‘tgach bemorlarning qoni tahlil qilinganda o‘rtacha $\bar{X} = 0,048\text{mg}$ dori qonga so‘rilganligi aniqlandi.

Dorining soʻrilish miqdori dispersiyasi $\sigma^2 = 0,09$ boʻlgan normal taqsimotga ega deb faraz qilib, $\alpha = 0,05$ muhimlik darajasida

a) 4 soat davomida yangi dori vositasining 0,047mg (matematik kutilmasi) qonga soʻriladi deb, uni normativ qiymat sifatida qabul qilish mumkinmi?

b) 4 soat davomida yangi dori vositasining 0,173mg (matematik kutilmasi) qonga soʻriladi deb, uni normativ qiymat sifatida qabul qilish mumkinmi?

► a) Masala shartiga koʻra asosiy gipoteza $H_0: m = 0,047\text{mg}$. Kuzatish natijasi $\bar{X} = 0,048 \text{ mg}$ boʻlganligi uchun muqobil gipotezani $H_1: m = 0,048 > 0,047\text{mg}$ deb olamiz. Shunday qilib, 1-holni qaraymiz, bunda $m_0 = 0,047\text{mg}$, $m_1 = 0,048\text{mg}$.

$\alpha = 0,05$ boʻlganligi uchun $\gamma = 1 - 2\alpha = 0,9$ va 2-ilovadan $(1 + \gamma)/2 = (1 + 0,9)/2 = 0,95$ saviyali $t_{0,95} = 1,65$ kvantilni topamiz. Demak $t_{kn}^{o'} = 1,65$ va kritik soha $\bar{S} = (t_{kn}^{o'}; +\infty) = (1,65; +\infty)$ boʻladi.

Berilganlarni (14.4) tenglikga qoʻyib, $Z_{son} = (0,048 - 0,047)\sqrt{16}/\sqrt{0,09} \approx 0,13$ qiymatni hisoblaymiz. Hisoblangan bu qiymat $\bar{S} = (1,65; +\infty)$ kritik sohaga tushmaydi. Shuning uchun 4 soat davomida yangi dori vositasining 0,047mg qonga soʻriladi deb, uni normativ qiymat sifatida qabul qilish mumkin.

b) Masala shartiga koʻra asosiy gipoteza $H_0: m = 0,049\text{mg}$. Kuzatish natijasi $\bar{X} = 0,048 \text{ mg}$ boʻlganligi uchun muqobil gipotezani $H_1: m = 0,048 < 0,173\text{mg}$ deb olamiz. Shunday qilib, 2-holni qaraymiz, bunda $m_0 = 0,173\text{mg}$, $m_1 = 0,048\text{mg}$.

$\alpha = 0,05$ boʻlganligi uchun $\gamma = 1 - 2\alpha = 0,9$ va 2-ilovadan $(1 + \gamma)/2 = (1 + 0,9)/2 = 0,95$ saviyali $t_{0,95} = 1,65$ kvantilni topamiz. Demak $t_{kn}^{ch} = -1,65$ va kritik soha $\bar{S} = (-\infty; t_{kn}^{ch}) = (-\infty; -1,65)$ boʻladi.

Berilganlarni (14.4) tenglikga qoʻyib, $Z_{son} = (0,048 - 0,173)\sqrt{16}/\sqrt{0,09} \approx -1,67$ qiymatni hisoblaymiz. Hisoblangan bu qiymat $\bar{S} = (-\infty, -1,65)$ kritik sohaga tushadi. Shuning uchun 4 soat davomida yangi dori

vositasining 0,173mg qonga soʻriladi deb, uni normativ qiymat sifatida qabul qilish mumkin degan gipoteza inkor qilinadi. ◀

Normal taqsimotning dispersiyasi nomaʼlum boʻlganda matematik kutilma haqidagi gipotezani tekshirish. Shunday qilib $X = N[m, \sigma]$ tasodifiy miqdorda m va σ nomaʼlum.

X bosh toʻplamdan olingan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaning $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ matematik kutilmasi va dispersiyaning siljimagan $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n - 1)$ bahosini hisoblaymiz.

Nomaʼlum m parametr m_0 qiymatga tengligi haqidagi asodiy H_0 gipotezani ilgari suramiz. Bu yerda ham muqobil H_1 gipoteza uchun uch hol mavjud: 1) m parametr qiymati m_0 qiymatdan katta boʻlgan m_1 qiymatga teng; 2) m parametr qiymati m_0 qiymatdan kichik boʻlgan m_1 qiymatga teng; 3) m parametr qiymati m_0 qiymatga teng boʻlmagan m_1 qiymatga teng.

Har bir hol uchun H_0 gipotezani oldingi mavzuda keltirilgan bosqichlar ketma-ketligida alohida tekshiramiz.

1-hol. 1) H_0 asosiy va H_1 muqobil gipotezalsrni shakllantiramiz:

$$H_0: m = m_0 \quad (14.20)$$

$$H_1: m = m_1 > m_0 \quad (14.21)$$

2) α muhimlik darajasini tanlaymiz;

3) H_0 gipotezani tekshirish uchun Z statistikani

$$Z = \frac{\bar{X} - m_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n - 1}} \quad (14.22)$$

koʻrinishda tanlaymiz.

Agar H_0 gipoteza oʻrinli boʻlsa, 13.5-Teoremaga koʻra Z miqdor erkinlik darajasi $n - 1$ boʻlgan Styudent taqsimotiga ega boʻladi

$$Z = \frac{\bar{X} - m_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n - 1}} = t(n - 1). \quad (14.23)$$

4) $\bar{S}$ kritik soha va S ishonchlilik sohasi aniqlaymiz. Agar asosiy va muqobil gipotezalar (14.20), (14.21), kriteriya statistikasi esa (14.22) ko'rinishda bo'lsa, $\bar{S}$ kritik soha o'ng tomonli bo'lib, $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ oraliq ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $t_{kn}^{o'}$ nuqta $P(Z > t_{kn}^{o'}) = \alpha$ tenglikdan yoki (14.5) tenglikga ko'ra

$$P(t(n-1) > t_{kn}^{o'}) = \alpha \quad (14.24)$$

tenglikdan aniqlanadi.

$\gamma = 1 - 2\alpha$ deb olamiz va

$$P(|t(n-1)| < t) = \gamma$$

yoki

$$P(-t < t(n-1) < t) = 1 - 2\alpha \quad (14.25)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t_γ nuqtani topamiz. $-t_\gamma < t(n-1) < t_\gamma$ hodisaga qarama-qarshi hodisaning ehtimoli

$$P(t(n-1) < -t_\gamma \text{ yoki } t(n-1) > t_\gamma) = 2\alpha \quad (14.26)$$

bo'ladi. $t(n-1)$ tasodifiy miqdor uchun

$$P(t(n-1) < -t_\gamma) = P(t(n-1) > t_\gamma)$$

bo'lganligi tufayli (14.26) tenglikdan

$$P(t(n-1) > t_\gamma) = \alpha \quad (14.27)$$

tenglikni yozish mumkin bo'ladi. (14.24) va (14.27) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{o'} = t_\gamma$ ekanligiga amin bo'lamiz.

5) $x_1, x_2, \dots, x_n$ aniq sonlarga ko'ra $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ o'tachani va $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ dispersiya bahosini, so'ngra ularni (14.22) tenglikga qo'yib Z_{son} qiymatni hisoblaymiz.

6) Agar $Z_{son} > t_{kn}^{o'}$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor qilinadi va H_1 gipotezani qabul qilamiz. Xuddi shu singari agar $Z_{son} < t_{kn}^{o'}$ bo'lsa H_0 gipoteza qabul qilinadi.

2-hol. 1) H_0 asosiy va H_1 muqobil gipotezalsrni shakllantiramiz:

$$H_0: m = m_0 \quad (14.28)$$

$$H_1: m = m_1 < m_0 \quad (14.29)$$

2) α muhimlik darajasini tanlaymiz;

3) Kriteriya statistikasi sifatida (14.22) miqdorni olamiz;

4) Asosiy va muqobil gipotezalar (14.28), (14.29), kriteriya statistikasi esa (14.22) ko'rinishda bo'lsa, $\bar{S}$ kritik soha chap tomonli bo'lib, $(-\infty; t_{kn}^{ch})$ oraliq ko'rinishida bo'ladi. Bu yerda t_{kn}^{ch} nuqta $P(Z < t_{kn}^{ch}) = \alpha$ tenglikdan yoki (14.23) tenglikga ko'ra

$$P(t(n-1) < t_{kn}^{ch}) = \alpha \quad (14.30)$$

tenglikdan aniqlanadi. Bu yerda ham 1-holdagidek $\gamma = 1 - 2\alpha$ deb olamiz va

$$P(|t(n-1)| < t) = \gamma$$

yoki

$$P(-t < t(n-1) < t) = 1 - 2\alpha \quad (14.31)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t nuqtani topamiz. $-t_\gamma < t(n-1) < t_\gamma$ hodisaga qarama-qarshi hodisaning ehtimoli

$$P(t(n-1) < -t_\gamma \text{ yoki } t(n-1) > t_\gamma) = 2\alpha \quad (14.32)$$

bo'ladi. $t(n-1)$ tasodifiy miqdor uchun

$$P(t(n-1) < -t_\gamma) = P(t(n-1) > t_\gamma)$$

bo'lganligi uchun (14.32) tenglikdan

$$P(t(n-1) < -t_\gamma) = \alpha \quad (14.33)$$

tenglikni yozish mumkin bo'ladi. (14.30) va (14.33) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{o'} = -t_\gamma$ ekanligiga amin bo'lamiz.

5) $x_1, x_2, \dots, x_n$ aniq sonlarga ko'ra $\bar{x}$ o'tachani va $\hat{\sigma}^2$ dispersiya bahosini (14.22) tenglikga qo'yib Z_{son} qiymatni hisoblaymiz.

6) Agar $Z_{son} < t_{kn}^{ch}$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor va H_1 esa qabul qilinadi va agar $Z_{son} > t_{kn}^{ch}$ bo'lsa H_0 gipoteza qabul qilinadi.

3-hol. 1) 1 va 2-holdagi singari H_0 asosiy va H_1 muqobil gipotezalsrni shakllantiramiz:

$$H_0: m = m_0 \quad (14.34)$$

$$H_1: m = m_1 \neq m_0 \quad (14.35)$$

2) α muhimlik darajasini tanlaymiz;

3) Kriteriya statistikasi sifatida (14.22) miqdorni olamiz;

4) Asosiy va muqobil gipotezalar (14.34), (14.35), kriteriya statistikasi esa (14.22) ko'rinishda bo'lsa, $\bar{S}$ kritik soha ikki tomonlama bo'lib, $(-\infty; t_{kn}^{ch})$ va $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ oraliqlar ko'rinishida bo'ladi. t_{kn}^{ch} va $t_{kn}^{o'}$ nuqtalar

$$P(t(n-1) < t_{kn}^{ch}) = \alpha/2 \text{ va } P(t(n-1) > t_{kn}^{o'}) = \alpha/2 \quad (14.36)$$

tengliklar orqali aniqlanadi. Bu yerda $\gamma = 1 - \alpha$ deb olamiz va

$$P(|t(n-1)| < t) = \gamma$$

yoki

$$P(-t < t(n-1) < t) = 1 - \alpha \quad (14.37)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t_γ nuqtani topamiz. U holda

$$P(t(n-1) < -t_\gamma \text{ yoki } t(n-1) > t_\gamma) = \alpha \quad (14.38)$$

bo'ladi.

$$P(t(n-1) < -t_\gamma) = P(t(n-1) > t_\gamma)$$

tenglik o'rinli bo'lganligi uchun (14.38) tenglikdan

$$P(t(n-1) < -t_\gamma) = \alpha/2 \text{ va } P(t(n-1) > t_\gamma) = \alpha/2 \quad (14.39)$$

tengliklarni hosil qilamiz. (14.36) va (14.39) tengliklarni taqqoslab

$$t_{kn}^{ch} = -t_\gamma \text{ va } t_{kn}^{o'} = t_\gamma$$

tengliklarga ega bo'lamiz, bu yerda t_γ – Styudent taqsimotining γ saviyali kvantili.

5) $x_1, x_2, \dots, x_n$ aniq sonlarga ko'ra $\bar{x}$ o'tachani va $\hat{\sigma}^2$ dispersiya bahosini (14.22) tenglikga qo'yib Z_{son} qiymatni hisoblaymiz.

6) Agar Z_{son} son $(-\infty; t_{kn}^{ch})$ yoki $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ oraliqlardan biriga tushsa H_0 gipoteza inkor, agar ikkalasiga ham tushmasa u qabul qilinadi.

14.3-Misol. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida $n = 20$ marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari bo'lgan tanlama asosida $\bar{X} = 77$ va $\hat{\sigma}^2 = 4$ qiymatlar hosil qilindi. $\alpha = 0,01$ ahamiyatlilik darajasida $H_0: MX = m_0 = 80$ gipotezani tekshiring.

► Muqobil gipoteza sifatida uchinchi holga mos keluvchi $H_1: MX \neq 80$ gipotezani olamiz. $\gamma = 1 - \alpha = 0,99, n - 1 = 19$ bo‘lganligi uchun $t_{0,99} = 2,86$ qiymatni va natijada kritik sohaning chegaralari uchun $t_{kn}^{ch} = -2,86$ va $t_{kn}^{o'} = 2,86$ qiymatlarni hosil qilamiz. Kritik soha $\bar{S} = (-\infty; -2,86) \cup (2,86; +\infty)$ to‘plamdan iborat bo‘lar ekan.

Endi (14.22) formulaga ko‘ra

$$Z_{son} = \frac{\bar{X} - m_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n-1}} = \frac{77 - 80}{2/\sqrt{19}} = -6,54$$

qiymatni hisoblaymiz. Hisoblangan bu qiymat $\bar{S}$ kritik sohaga tushadi. Shuning uchun matematik kutilmaning qiymati 80 ga teng degan gipoteza inkor qilinib, matematik kutilmaning qiymati 80 ga teng emas degan gipoteza qabul qilinadi. ◀

Normal taqsimot dispersiyasining qiymati haqidagi gipotezani tekshirish. Shunday qilib $X = N[m, \sigma]$ tasodifiy miqdorda m va σ noma'lum.

X bosh to‘plamdan olingan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaning $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$

matematik kutilmasi va $s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/n$ dispersiyasini hisoblaymiz.

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad (14.40)$$

gipotezani tekshiramiz, bu yerda σ_0^2 – berilgan son. Kriteriya statistikasi sifatida

$$Z = \frac{ns^2}{\sigma_0^2} \quad (14.41)$$

miqdorni olamiz. Agar (14.40) shart bajarilsa 13.7-Teoremaga ko‘ra bu tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $n - 1$ bo‘lgan xi kvadrat taqsimotga ega, ya’ni

$$Z = \frac{ns^2}{\sigma_0^2} = \chi^2(n - 1) \quad (14.42)$$

bo‘ladi.

α muhimlik darajasini tanlaymiz va $\bar{S}$ kritik sohani tuzib, (14.40) asosiy gipotezani H_1 muqobil gipotezaning uchta holi uchun tekshiramiz.

1-hol. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Bu holda $\bar{S}$ kritik soha $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ ko'rinishda bo'ladi va $t_{kn}^{o'}$ nuqta

$$P(\chi^2(n-1) > t_{kn}^{o'}) = \alpha \quad (14.43)$$

tenglikdan aniqlanadi. $\gamma = 1 - \alpha$ deb olib, 4-ilogadan

$$P(\chi^2(n-1) < t) = \gamma = 1 - \alpha$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t nuqtani topamiz. Bu nuqta erkinlik darajasi $n - 1$ bo'lgan xi kvadrat taqsimotning $\gamma = 1 - \alpha$ saviyali kvantili: $t = t_\gamma$. U holda

$$P(\chi^2(n-1) > t_\gamma) = \alpha. \quad (14.44)$$

(14.43) va (14.44) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{o'} = t_\gamma = t_{1-\alpha}$ tenglikka ega bo'lamiz.

(14.41) ifodaga n va tanlamaning qiymatlarini qo'yib Z_{son} qiymatni hisoblaymiz. Agar $Z_{son} > t_{kn}^{o'}$ bo'lsa, u $\bar{S}$ sohaga tushadi va H_0 gipoteza inkor qilinadi. Aaksincha $Z_{son} < t_{kn}^{o'}$ bo'lsa, Z_{son} son $\bar{S}$ sohaga tushmaydi va H_0 gipoteza qabul qilinadi.

2-hol. $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Bu holda $\bar{S}$ kritik soha chap tomonli bo'ladi va bunda kriteriya statistikasi nomanfiy bo'lganligi tufayli u $(0; t_{kn}^{ch})$ ko'rinishda bo'ladi. t_{kn}^{ch} nuqta esa

$$P(\chi^2(n-1) < t_{kn}^{ch}) = \alpha \quad (14.45)$$

tenglik orqali aniqlanadi. $\gamma = \alpha$ deb olib, 4-ilogadan

$$P(\chi^2(n-1) < t) = \gamma = \alpha \quad (14.46)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtani topamiz. U erkinlik darajasi $n - 1$ bo'lgan xi kvadrat taqsimotning γ saviyali kvantili bo'ladi: $t = t_\gamma$. (14.45) va (14.46) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{ch} = t_\gamma = t_\alpha$ tenglikka ega bo'lamiz.

Agar Z_{son} son $(0; t_{kn}^{ch})$ oraliqga tushsa H_1 gipoteza, aks holda H_0 gipoteza qabul qilinadi.

3-hol. $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Bu holda kritik soha $(0; t_{kn}^{ch})$ va $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ ko'rinishda bo'ladi. t_{kn}^{ch} va $t_{kn}^{o'}$ nuqtalar mos ravishda

$$P(\chi^2(n-1) < t_{kn}^{ch}) = \alpha/2 \quad (14.47)$$

$$P(\chi^2(n-1) > t_{kn}^{o'}) = \alpha/2 \quad (14.48)$$

tenglamalarning yechimlari sifatida aniqlanadi.

Dastlab t_{kn}^{ch} nuqtani topamiz. Buning uchun $\gamma = \alpha/2$ deb olamiz va 4-ildovadan

$$P(\chi^2(n-1) < t) = \gamma = \alpha/2$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t nuqtani topamiz. Bu nuqta erkilik darajasi $n-1$ bo'lgan xi kvadrat taqsimotning $\gamma = \alpha/2$ saviyali kvantili: $t = t_\gamma$. U holda

$$P(\chi^2(n-1) < t_\gamma) = \alpha/2. \quad (14.49)$$

(14.47) va (14.49) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{ch} = t_\gamma = t_{\alpha/2}$ tengliukga ega bo'lamiz.

Endi $t_{kn}^{o'}$ nuqtani topamiz. Bunda $\gamma = 1 - \alpha/2$ deb olamiz va 4-ildovadan

$$P(\chi^2(n-1) < t) = \gamma = 1 - \alpha/2$$

tenglikni qanoatlantiruvchi t nuqtani topamiz. Bu nuqta erkilik darajasi $n-1$ bo'lgan xi kvadrat taqsimotning $\gamma = 1 - \alpha/2$ saviyali kvantili: $t = t_\gamma$. U holda

$$P(\chi^2(n-1) > t_\gamma) = \alpha/2 \quad (14.50)$$

va (14.48) hamda (14.50) tengliklarni taqqoslab $t_{kn}^{o'} = t_\gamma = t_{1-\alpha/2}$ tenglikni hosil qilamiz.

(14.41) formula bo'yicha topilgan Z_{son} qiymat $(0; t_{kn}^{ch})$ yoki $(t_{kn}^{o'}; +\infty)$ oarliqlardan biriga tushsa, H_0 gipoteza inkor, aks holda qabul qilinadi.

14.4-Misol. Nazariy formulalarga ko'ra eritmaning tarkibida a miqdorda ishqor bor. Buni amalda tekshirish uchun yangi usul qo'llanilmoqda va bu usul bilan tekshirilganda xatolik dispersiyasi 0,15 qiymatdan oshmasligi kerak. Yangi usul bilan 25 marta tajriba o'tazildi va natijada yo'l qo'yilgan xatoliklar dispersiyasi (tanlama sifatida) $s^2 = 0,25$ qiymatni tashkil qildi. $\alpha = 0,05$

ahamiyatlilik darajasida yangi usul xatolik dispersiyasi 0,15 qiymatdan oshmaslik kerak degan talabga javob beradimi? Bu yerda o'lchashdagi xatolik normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

► Masala shartiga ko'ra agar bosh dispersiya uchun $\sigma^2 \leq 0,15$ bo'lsa, yangi usul talabga javob beradi. Tanlama dispersiyasi $s^2 = 0,25 > 0,15$ bo'lganligi uchun, asosiy gipotezani $H_0: \sigma^2 = 0,15$, muqobil gipotezani esa $H_1: \sigma^2 > 0,15$ ko'rinishda olamiz, bunda $\sigma_0^2 = 0,15$, ya'ni masalani 1-hol bo'yicha yechamiz.

Shunday qilib, $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$, $n - 1 = 25 - 1 = 24$. Xi kvadrat taqsimotning qiymatlar jadvalidan erkinlik darajasi 24 va $\gamma = 0,95$ saviyali kvantil $t_{0,95} = t_{kn}' = 36,4$ bo'ladi. U holda kritik soha $\bar{S} = (36,4; +\infty)$ oraliqdan iborat bo'ladi. Endi (14.41) formulaga ko'ra Z_{son} qiymatni: $Z_{son} = 25 * 0,25 / 0,15 = 41,7$ hisoblaymiz. Bu qiymat $\bar{S}$ kritik sohaga kiradi, shuning uchun H_0 gipoteza inkor qilinadi, ya'ni o'lchashning yangi usuli xatolik dispersiyasi 0,15 qiymatdan oshmasligi kerak degan talabga javob bermaydi. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday tasdiqlarga statistik gipoteza deb aytamiz?
2. Gipotezani tekshirish deganda nimani tushunasiz?
3. Sodda va murakkab gipootezalarning farqi nimada?
4. Kriteriya nima?
5. Kriteriya statistikasi nima?
6. Qanday to'plamga gipotezaning kritik sohasi deb ataymiz?
7. Gipotezalarni tekshirishda qanday xatolarga yo'l qo'yilishi mumkin?
8. Normal taqsimotning dispersiyasi ma'lum bo'lganda matematik kutilma haqidagi gipotezani tekshirishda qanday statistikadan foydalaniladi?
9. Normal taqsimotning dispersiyasi noma'lum bo'lganda matematik kutilma haqidagi gipotezani tekshirishda qanday statistikadan foydalaniladi?
10. Normal taqsimotning dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirishda qanday statistikadan foydalaniladi?

Mashqlar.

1. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida $n = 28$ marta tajribalar o'tkazildi. Tajriba natijalari bo'yicha $\bar{X} = 6,1$ o'rtacha hisoblandi. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi $\sigma^2 = 0,16$ deb faraz qilib, $\alpha = 0,05$ ahamiyatlilik darajasida X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi haqidagi:

a) $H_0: MX = 6$; b) $H_0: MX = 5,9$ gipotezalarni tekshiring.

2. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida $n = 20$ marta tajribalar o'tkazildi. Tajriba natijalari bo'yicha $\bar{X} = 8,9$ o'rtacha hisoblandi. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi $\sigma^2 = 0,25$ deb faraz qilib, $\alpha = 0,04$ ahamiyatlilik darajasida X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi haqidagi:

a) $H_0: MX = 9$; b) $H_0: MX = 9,1$ gipotezalarni tekshiring.

3. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida $n = 22$ marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari bo'lgan tanlama asosida $\bar{X} = 7,1$ va $s^2 = 1,2$ qiymatlar hisoblandi. $\alpha = 0,01$ ahamiyatlilik darajasida

a) $H_0: MX = m_0 = 7$; b) $H_0: MX = m_0 = 7,8$ gipotezalarni tekshiring.

4. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida $n = 26$ marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari bo'lgan tanlama asosida $\bar{X} = 3,9$ va $s^2 = 3,2$ qiymatlar hisoblandi. $\alpha = 0,05$ ahamiyatlilik darajasida

a) $H_0: MX = m_0 = 3,8$; b) $H_0: MX = m_0 = 4$ gipotezalarni tekshiring.

5. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor ustida $n = 20$ marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari bo'lgan tanlama asosida $\bar{X} = 5,7$ va $s^2 = 2,2$ qiymatlar hisoblandi. $\alpha = 0,05$ ahamiyatlilik darajasida

a) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2,1$; b) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2,3$ gipotezalarni tekshiring.

Javoblar.

1. a) qabul qilinadi; b) inkor qilinadi; 2. a) qabul qilinadi; b) inkor qilinadi; 3. a) qabul qilinadi; b) inkor qilinadi; 4. a) inkor qilinadi; b) qabul qilinadi; 5. a) inkor qilinadi; b) inkor qilinadi.

XV BOB. REGRESSION VA KORRELYATSION TAHLIL

Inson faoliyatining turli sohalaridagi amaliy masalalarni yechishda, xususan tibbiyot faoliyatida tadqiqotchi tasodifiy miqdorlar orasidagi funksional yoki boshqa ko'rinishdagi bog'liqliklarni aniqlash zaruriyatiga duch keladi. Bunday bog'liqliklarning ayrimlarini regression va korrelyatsion tahlil o'rganadi.

15.1. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'liqliklar haqida tushuncha. Regressiya funksiyasi

X o'zgaruvchining har bir qiymatiga Y o'zgaruvchining bitta qiymati mos kelsa, bu bog'liqlikni funksional bog'liqlik deb ataymiz. Bu bog'liqlikda agar X o'zgaruvchi determinirlangan (ya'ni aniq bir qiymatlarni qabul qiluvchi) bo'lsa, unga funksional bog'liq Y o'zgaruvchi ham determinirlangan bo'ladi; agarda X tasodifiy miqdor bo'lsa, Y miqdor ham tasodifiy bo'ladi.

Biroq atrofimizdagi olamda funksional bog'liqlikga nisbatan boshqa turdagi: statistik (yoki stoxastik, ehtimoliy) bog'liqliklar ko'proq uchraydi. Bu bog'liqliklarda X o'zgaruvchining bitta o'zgarmas qiymatiga Y o'zgaruvchining bitta emas, balki chekli yoki cheksiz sonli qiymatlari to'plami mos keladi va Y o'zgaruvchi ulardan qaysisini qabul qilishi oldindan ma'lum bo'lmaydi. Bunday bog'liqliklarga misol sifatida erkak yoki ayol vaznining bo'yiga bog'liqligini ko'rsatish mumkin.

15.1-Ta'rif. Agar bitta miqdorning o'zgarishi ikkinchisi taqsimotining o'zgarishiga olib kelsa, bu miqdorlar orasidagi bog'liqlik *statistik bog'liqlik* deyiladi.

15.2-Ta'rif. Agar bitta miqdorning o'zgarishi ikkinchisi o'rtachasining o'zgarishiga olib kelsa, bu miqdorlar orasidagi statistik bog'liqlik *korrelyatsion bog'liqlik* deyiladi.

X va Y o'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar bo'lsin va ularning $x_1, x_2, \dots, x_n$ va $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymatlari bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X miqdordan bog'liqligi haqida asosli xulosa chiqarish talab etilgan bo'lsin.

15.3-Ta'rif. Agar $\varphi^*(X) = M[Y|X]$ bog'liqlik o'rtacha kvadratik ma'noda Y tasodifiy miqdorga eng yaxshi taqribiy yaqinlashish bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $\varphi(X)$ funksiya uchun

$$M \left[(Y - \varphi^*(X))^2 \right] \leq M \left[(Y - \varphi(X))^2 \right]$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\varphi^*(X)$ funksiya *nazariy regressiya* deb ataladi.

Shartli matematik kutilmani hisoblash uchun X va Y tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasini bilish kerak bo'ladi. Aksariy hollarda tadqiqotchi bunday ma'lumotga ega bo'lmaydi. Bu qiyinchilikni bartaraf qilish uchun $x_1, x_2, \dots, x_n$ va $y_1, y_2, \dots, y_n$ tanlamalar bo'yicha baholanadigan $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ noma'lum parametrlarga bog'liq bo'lgan $\varphi(x) = \varphi(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ funksiyalar sinfini qarash bilan chegaralanish mumkin.

y funksiyaning kuzatilayotgan qiymati ikkita hadning

$$y = \varphi(x) + \varepsilon \quad (15.1)$$

yig'indisi ko'rinishida bo'ladi deb faraz qilamiz, bu yerda $\varphi(x)$ kuzatilayotgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarning funksiyasi, ε esa (15.1) regressiv modelning xatoligi deb ataluvchi tasodifiy miqdor. ε tasodifiy xatolik tasodifiy faktorlarning ta'sirini ham, tasodifiy o'zgarishning o'ziga xos xususiyatini ham, o'lchashlardagi xatoliklarni ham ifoda etishi mumkin.

Shunday qilib, o'zaro

$$y_i = \varphi(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (15.2)$$

tengliklar bilan bog'langan (x_i, y_i) juftliklar tanlamasi bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga funksional bog'liqligining $\hat{y} = \hat{\varphi}(x)$ bahosini topish talab qilinadi.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan, matematik kutilmasi $M\varepsilon_i = 0$ va dispersiyasi $D\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$ bo'lgan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, $\varphi(x)$ esa yuqorida aytib o'tganimizdek, noma'lum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ parametrlarning funksiyasidan iborat deb faraz qilinadi:

$$y_i = \varphi(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15.3)$$

Bu holda $\hat{\varphi}$ regressiya bahosini tuzish bu funksiyaning noma'lum parametrlarining bahosini topishga keltiriladi.

15.2. Oddiy chiziqli regressiya

Biz quyida noma'lum parametrlar soni ikkita va $\varphi(x_i, \theta_1, \theta_2)$ funksiya noma'lum parametrlarga nisbatan chiziqli bo'lgan holda batafsil to'xtalamiz.

15.4-Ta'rif. Agar regressiv model

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (15.4)$$

ko'rinishda bo'lsa, u *oddiy chiziqli regressiya* deb ataladi, bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama X tasodifiy miqdorning aniq qiymatlari, ya'ni ular tasodifiy emas, $y_1, y_2, \dots, y_n$ esa Y tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlari, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan, matematik kutilmasi $M\varepsilon_i = 0$ va dispersiyasi $D\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$ bo'lgan normal taqsimlangan $N[0, \sigma]$ tasodifiy miqdorlar va nihoyat θ_0, θ_1 baholanishi lozim bo'lgan noma'lum parametrlar.

ε_i tasodifiy miqdorlarning normal taqsimlangan deb talab qilishdan maqsad, u regressiya tenglamasini va uning parametrlarining aniqligini baholashda kerak.

(15.4) oddiy chiziqli regressiyaning bahosi $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$ regressiya tenglamasi bo'ladi. Bu tenglamaning $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ koeffitsiyentalrini topish masalasini qaraymiz.

Regressiv modelning parametrlarini baholashda turli xil usullardan foydalaniladi. Bu masalaga keng tarqalgan yondashuvlardan biri, bu quyidagicha: kuzatilayotgan va regressiv funksiya qiymatlarining muvofiqlashmaganlik o'lchovi (kriteriy) kiritladi va noma'lum parametrlar muvofiqlashmaganlik o'lchovi eng kichik bo'ladigan qilib aniqlanadi. Kriteriy kuzatilayotgan qiymatlarning va regressiv funksiya qiymatlaridan chetlanishlari kvadratlarining yig'indisi

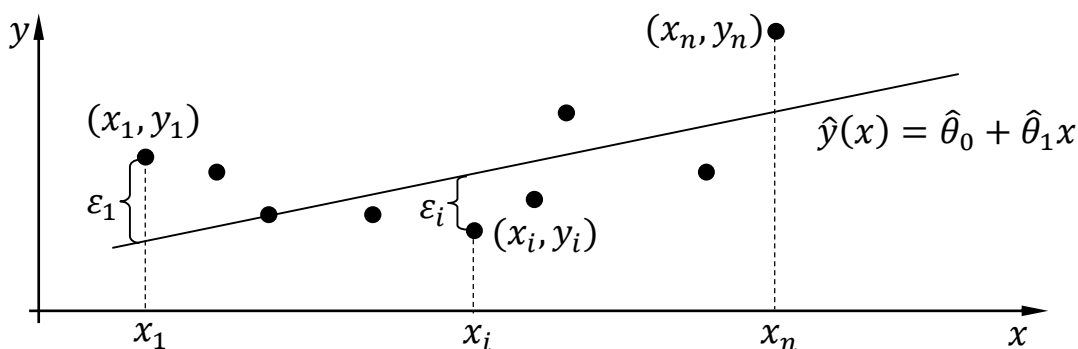
$$Q(\theta_0, \theta_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 \quad (15.5)$$

ko'rinishda tanlanilsa, hisoblash formulalari sodda bo'ladi.

15.5-Ta'rif. (15.5) kvadratik kriteriyani minimallashtirish

$$Q(\theta_0, \theta_1) \rightarrow \min_{\theta_0, \theta_1} \quad (15.6)$$

masalasiga *eng kichik kvadratlar usuli masalasi* deb yuritiladi, θ_0, θ_1 paramaterlarning (15.5) kriteriyni minimallashtiruvchi $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ bahosi esa *eng kichik kvadratlar usuli bahosi* deb ataladi.



15.1-rasm

Eng kichik kvadratlar usuli bilan qidirilayotgan bahoning grafik tasviri $\hat{y}(x) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, u tanlama nuqtalari orasidan ko'rsatilgan ma'noda o'tadi (15.1-rasm).

Eng kichik kvadratlar usulining $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ bahosini topish uchun (15.5) kriteriyga ekstremumning zaruriy shartini yozamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \theta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) x_i = 0. \end{cases} \quad (15.7)$$

Kerakli almashtirishlardan so'ng (15.7) sistemani

$$\begin{cases} n\theta_0 + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \theta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

ko'rinishda yozib olamiz va hosil qilingan sistemaning ikkala tenglamasini ham n ga bo'lsak

$$\begin{cases} \theta_0 + \theta_1 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i \\ \theta_0 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \right) + \theta_1 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (15.8)$$

sistemani hosil qilamiz. Tanlamaning birinchi va ikkinchi tartibli boshlang'ich momentlari uchun

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

belgilashlardan foydalanib, (15.8) sistemani

$$\begin{cases} \theta_0 + \bar{x}\theta_1 = \bar{y} \\ \bar{x}\theta_0 + \overline{x^2}\theta_1 = \overline{xy} \end{cases} \quad (15.9)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamaning elementlari orasida turli qiymatlilari mavjud deb faraz qilamiz. U holda bu sistemaning bosh determinanti

$$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2 > 0,$$

noldan farqli. Shuning uchun (15.9) sistema yagona

$$\hat{\theta}_0 = \frac{1}{s^2} (\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}), \quad \hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) \quad (15.10)$$

yechimga ega bo'ladi. Bu kritik nuqtada $Q(\theta_0, \theta_1)$ funksiya minimumga erishishi uchun ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumining yetarli shartining bajarilishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_0} &= 2n, & \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_1} &= 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2n\overline{x^2}, & \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_0 \partial \theta_1} &= 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2n\bar{x}. \\ \Delta &= \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_0} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_1} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_0 \partial \theta_1} \right)^2 = 4n^2 \overline{x^2} - 4n^2 (\bar{x})^2 = 4n^2 (\overline{x^2} - (\bar{x})^2) = \\ &= 4n^2 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) = 4n^2 s^2 > 0, \end{aligned}$$

hamda

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_0} = 2n > 0$$

ekanligi, $Q(\theta_0, \theta_1)$ funksiya $(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$ nuqtada minimumga erishishini ta'minlaydi.

15.1-Misol. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlama bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining nuqtaviy bahosini toping.

x_i	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12	13,4	14,7	15,2
y_i	17	16,2	13,3	13	9,7	8,1	6,2	5,8	5,7	4,6

► Tanlamaning (15.10) formulaga kerak bo'ladigan $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{xy}$, s^2 sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$\bar{x} = \frac{2,7 + 4,6 + 6,3 + 7,8 + 9,2 + 10,6 + 12 + 13,4 + 14,7 + 15,2}{10} = 9,96;$$

$$\bar{y} = \frac{17 + 16,2 + 13,3 + 13 + 9,7 + 8,1 + 6,2 + 5,8 + 5,7 + 4,6}{10} = 9,65;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 109,67; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 78,654;$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 16,545.$$

(15.10) formulalar bo'yicha θ_0 va θ_1 parametrlarning bahosini topamiz:

$$\hat{\theta}_0 = \frac{1}{s^2} (\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}) = 20,144; \quad \hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = -1,0553.$$

Demak, $\hat{y} = 20,144 - 1,0553x$ bo'ladi. ◀

O'lchashdagi xatoliklar dispersiyasini baholash. (15.4) oddiy chiziqli regressiya modelida noma'lum θ_0, θ_1 parametrlardan boshqa yana bitta noma'lum bor, u ε_i xatoliklarning σ^2 dispersiyasidan iborat. Regressiyaning olingan baholarining aniqligi bu parametrning qiymatlariga bog'liq. Shuning uchun bu dispersiyaga ham baho tuzish kerak. σ^2 dispersiya uchun baho sifatida

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)}{n-2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i)^2 \quad (15.11)$$

ifodani olamiz va $\hat{\sigma}^2$ qoldiq dispersiya, $\hat{\sigma}$ esa qoldiq o'rtacha kvadratik chetlanish deb ataladi.

15.3. Regressiya funksiyasini oraliqli baholash

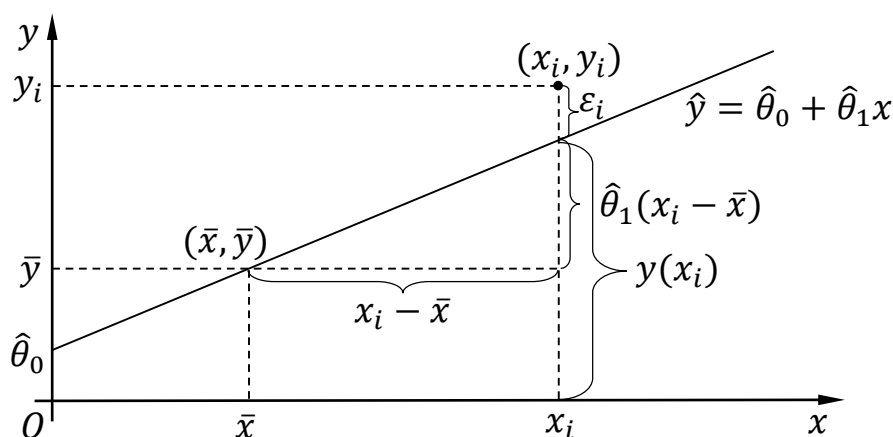
Regressiya funksiyasi, ya'ni noma'lum $M[Y|X]$ shartli matematik kutilma uchun γ ehtimolli ishonchlilik oralig'ini tuzamiz. Dastlab yuqorida topilgan $(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$ baho uchun (15.9) sistemani qaytadan yozamiz:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_0 + \bar{x}\hat{\theta}_1 = \bar{y} \\ \bar{x}\hat{\theta}_0 + \overline{x^2}\hat{\theta}_1 = \overline{xy} \end{cases}$$

va bu sistemaning birinchi tenglamasidan $\hat{\theta}_0$ bahoni topib, uni $\hat{y}(x) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$ regressiya tenglamasiga qo'yamiz. Natijada regressiya tenglamasi

$$\hat{y}(x) = \bar{y} + \hat{\theta}_1(x - \bar{x}) \quad (15.12)$$

ko'rinishni oladi. (15.12) tenglamadagi $\hat{\theta}_1$ koeffitsiyent Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdor bo'yicha *regressiya koeffitsiyenti* deb ataladi. Shunday qilib, (15.12) funksiya $M[Y|X]$ shartli matematik kutilmaning tanlama bahosi bo'ladi. 15.2-rasmda regressiya chizig'i tasvirlangan. Rasmda kuzatilayotgan ixtiyoriy y_i qiymat uchun $\bar{y}$ o'rtacha, $\hat{\theta}_1(x_i - \bar{x})$ orttirma va ε_i xatolik ko'rsatilgan.



15.2-rasm

(15.10) tengliklarning ikkinchisida $\hat{\theta}_1$ baho formulasini statistik tahlil uchun qulayroq ko'rinishga keltiramiz:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2}(\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) = \frac{1}{ns^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i.$$

Endi y_i , $\bar{y}$, $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_0$ tasodifiy miqdorlarning va regressiya funksiyasi $\hat{y}$ bahosining matematik kutilmalari va dispersiyalarini topamiz:

$$\begin{aligned}
My_i &= M(\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i) = \theta_0 + \theta_1 x_i + M\varepsilon_i = \theta_0 + \theta_1 x_i; \\
M\bar{y} &= M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n My_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta_0 + \theta_1 x_i) = \\
&= \frac{1}{n} \left(n\theta_0 + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_i \right) = \theta_0 + \theta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \theta_0 + \theta_1 \bar{x}; \\
M\hat{\theta}_1 &= M\left(\frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i\right) = \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})My_i = \\
&= \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\theta_0 + \theta_1 x_i) = \\
&= \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(\theta_0 + \theta_1 \bar{x} + \theta_1(x_i - \bar{x}))] = \frac{\theta_1}{S^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \\
&\quad + \frac{\theta_0 + \theta_1 \bar{x}}{S^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{\theta_1}{S^2} \cdot S^2 = \theta_1, \\
M\hat{\theta}_0 &= M(\bar{y} - \bar{x}\hat{\theta}_1) = M\bar{y} - \bar{x}M\hat{\theta}_1 = \theta_0 + \theta_1 \bar{x} - \bar{x}\theta_1 = \theta_0, \\
M\hat{y} &= M(\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x) = M\hat{\theta}_0 + xM\hat{\theta}_1 = \theta_0 + \theta_1 x = y(x) \\
\sigma_{y_i}^2 &= D(\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i) = D(\theta_0 + \theta_1 x_i) + D\varepsilon_i = \sigma^2, \quad (15.13) \\
\sigma_{\bar{y}}^2 &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Dy_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (15.14) \\
\sigma_{\hat{\theta}_1}^2 &= D\left(\frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i\right) = \frac{1}{n^2 S^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 Dy_i = \\
&= \frac{\sigma^2}{nS^4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{nS^4} S^2 = \frac{\sigma^2}{nS^2}, \quad (15.15) \\
\sigma_{\hat{\theta}_0}^2 &= D(\bar{y} - \bar{x}\hat{\theta}_1) = D\bar{y} + \bar{x}^2 D\hat{\theta}_1 = \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{nS^2} = \frac{\sigma^2}{nS^2} (S^2 + \bar{x}^2) \quad (15.16)
\end{aligned}$$

keyin kerak bo‘ladigan yana foydali ikkita tenglikni keltirib o‘tamiz:

$$M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) = M\varepsilon_i = 0, \quad M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2.$$

(15.11) tenglikdagi

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i)$$

va

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i)$$

tasodifiy miqdorlar normal taqsimlangan ε_i tasodifiy miqdorning chiziqli kombinatsiyalari bo'lganligi uchun ular ham normal taqsimlangan. Endi ularning korrelyatsiylanmaganligini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\bar{y}, \hat{\theta}_1) &= M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) \cdot \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) \right] = \\ &= \frac{1}{n^2 S^2} \left[M \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. M \left(\sum_{i \neq j} (x_i - \bar{x})(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)(y_j - \theta_0 - \theta_1 x_j) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n^2 S^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} (x_i - \bar{x}) M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) M(y_j - \theta_0 - \theta_1 x_j) \right] = \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2 S^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\bar{y}$ va $\hat{\theta}_1$ tasodifiy miqdorlar korrelyatsiylanmagan va ular normal taqsimlangan, shuning uchun ular o'zaro bog'liq emas.

(15.11) tenglikning o'ng tomonidagi $\bar{y}$ va $\hat{\theta}_1$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmaganligi va $(x - \bar{x})$ ko'paytuvchining notasodifiy miqdor bo'lganligi uchun bu tenglikdan dispersiya olsak

$$\sigma_{\hat{y}(x)}^2 = \sigma_{\bar{y}}^2 + \sigma_{\hat{\theta}_1}^2 (x - \bar{x})^2 \quad (15.17)$$

tenglik hosil bo'ladi (bu yerda $(x - \bar{x})$ o'zgarmas son dispersiya belgisidan tashqariga kvadrati bilan chiqdi). Bu tenglikdagi $\sigma_{\bar{y}}^2$ va $\sigma_{\hat{\theta}_1}^2$ dispersiyalar o'rniga (15.13) va (15.14) tengliklarni qo'yamiz:

$$\sigma_{\hat{y}(x)}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{nS^2} (x - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{S^2 n} (S^2 + (x - \bar{x})^2). \quad (15.18)$$

15.1-Teorema. Ushbu tenglik bilan aniqlanuvchi

$$t = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{y} - M\hat{y}}{\sqrt{\sigma_{\hat{y}(x)}^2}} = \frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{y} - M\hat{y}}{\sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2}},$$

$$z = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\theta}_1 - M\hat{\theta}_1}{\sqrt{\sigma_{\hat{\theta}_1}^2}} = \frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot (\hat{\theta}_1 - M\hat{\theta}_1),$$

$$u = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0}{\sqrt{\sigma_{\hat{\theta}_0}^2}} = \frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0}{\sqrt{s^2 + \bar{x}^2}}$$

tasodifiy miqdorlar erkinlik darajasi $n - 2$ bo'lgan Styudent taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan.

15.1-Teoremani qo'llab regressiya funksiyasi va uning parametrlari uchun ishonchlilik oralig'ini tuzamiz.

15.2-Teorema. $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiya uchun ishonchlilik darajasi γ bo'lgan ishonchlilik oralig'ining chegaralari

$$\hat{y} \pm t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2} \quad (15.19)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$ – erkinlik darajasi $(n-2)$ bo'lgan Styudent taqsimotining $(1 + \gamma)/2$ saviyali kvantili.

► 15.1-Teoremaga ko'ra $P\{|t| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)\} = \gamma$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan esa γ ehtimol bilan

$$\frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{|\hat{y} - M\hat{y}|}{\sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2}} < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda kerakli almashtirishlardan so'ng

$$|\hat{y} - M\hat{y}| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz, ya'ni γ ehtimol bilan

$$\hat{y} - t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2} < y(x) < \hat{y} + t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. ◀

15.3-Teorema. $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiya θ_0 va θ_1 parametrlari uchun ishochlilik darajasi γ bo‘lgan ishonchlilik oralig‘ining chegaralari mos ravishda

$$\hat{\theta}_0 \pm t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2} \quad (15.20)$$

$$\hat{\theta}_1 \pm t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \quad (15.21)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

► 15.2-Teoremaga ko‘ra $P\{|u| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)\} = \gamma$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa γ ehtimol bilan

$$\frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{|\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0|}{\sqrt{s^2 + \bar{x}^2}} < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda kerakli almashtirishlardan so‘ng

$$|\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz, ya‘ni γ ehtimol bilan

$$\hat{\theta}_0 - t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2} < \hat{\theta}_0 < \hat{\theta}_0 + t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. (15.20) tasdiq isbot bo‘ldi. (15.21) tasdiq ham xuddi shu singari isbot qilinadi. ◀

15.2-Misol. Yangi dori vositasining butun organizmga ta'sirini o'rganish maqsadida bemor organizmimning (A) va (B) ko'rsatkichlari 24 ta bemorda o'rganildi. (A) va (B) ko'rsatkichlarning tasodifiy qiymatlari mos ravishda X va Y orqali belgilangan va quyidagi jadvalda keltirilgan.

x_i	3,3	10,5	4,5	14,4	13,1	15,4	17,8	18,2	13,5	12,3	2,23	5,48
y_i	5,8	18,4	8,2	26,3	25,8	29,2	30,9	37,8	23,9	25,3	4,9	9,8
x_i	2,87	2,14	4,35	11,9	10,6	39,1	2,1	23,3	10,5	3,3	19,03	11,8
y_i	6,3	4,7	9,6	24,3	21,4	75,8	4,5	48,3	23	7,2	34,3	22,1

Bu tanlama bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining bahosini, chiziqli regressiya va uning parametrlari uchun ishonchlilik darajasi 0,95 bo'lgan ishonchlik oraliqlarini toping.

► Jadval bo'yicha tanlamaning sonli xarakteristikalarini topamiz: $\bar{x} = 11,3$, $\bar{y} = 21,99$, $\overline{xy} = 389,33$, $\overline{x^2} = 200,84$, $s^2 = 78,7$. Topilgan bu qiymatlarni (15.10) formulalarga qo'yib, θ_0 va θ_1 parametrlarning bahosini topamiz:

$$\hat{\theta}_0 = \frac{1}{s^2} (\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}) = 0,217; \hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = 1,79.$$

Shunday qilib, $\hat{y} = 0,217 + 1,79x$.

ε_i xatoliklar σ^2 dispersiyasining bahosini (15.11) formulaga ko'ra topamiz:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i)^2 = 7,12.$$

Tanlamaning hajmi $n = 24$ bo'lganligi uchun erkinlik darajasi $n - 2 = 22$ bo'lgan Styudent taqsimotining jadvalidan $\gamma = 0,95$ qiymatda $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(22) = 2,07$ kvantilni hosil qilamiz. U holda regressiya uchun ishonchlilik darajasi 0,95 bo'lgan ishonchlik oralig'ining chegaralarini (15.19) formulaga ko'ra topamiz:

$$0,217 + 1,79x - 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= 0,217 + 1,79x - 0,13\sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2} \\
0,217 + 1,79x + 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2} &= \\
&= 0,217 + 1,79x + 0,13\sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2}.
\end{aligned}$$

Chiziqli regressiya θ_0 va θ_1 parametrlari uchun ishonchlilik darajasi $\gamma = 0,95$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ining chegaralari mos ravishda (15.20) va (15.21) formulalarga ko'ra topamiz: θ_0 parametr uchun

$$\begin{aligned}
0,217 - 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + 11,3^2} &= -1,65 \\
0,217 + 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + 11,3^2} &= 2,09
\end{aligned}$$

ya'ni θ_0 parametr 0,95 ehtimol bilan $(-1,65, 2,09)$ oraliqda yotadi. θ_1 parametr uchun

$$1,79 - 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} = 1,66, \quad 1,79 + 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} = 1,92,$$

ya'ni θ_1 parametr 0,95 ehtimol bilan $(1,66, 1,92)$ oraliqda yotadi. ◀

15.4. Korrelyatsiya koeffitsiyentining nuqtaviy bahosi

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ tanlama qiymatlari bo'yicha

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

korrelyatsiya koeffitsiyentini baholash talab qilingan bo'lsin. $r(X, Y)$ uchun tanlamaning korrelyatsiya koeffitsiyenti ko'rinishidagi K. Pirson taklif qilgan

$$\hat{r} = r(X, Y) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right)}} = \frac{K_{XY}}{s_X s_Y} \quad (15.22)$$

bahoni olish mumkin, bu yerda K_{XY} , s_X^2 , s_Y^2 o'rganilayotgan X va Y tasodifiy miqdorlarning tanlama kovariatsiyasi va dispersiyalari. Uni yana ham qulayroq

$$\hat{r} = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2\right) \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2\right)}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y} \quad (15.23)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

15.3-Misol. 15.2-Misolda keltirilgan jadval bo'yicha tanlama korrelyatsiya koeffitsiyentining $\hat{r}$ bahosini hisoblang.

► Yuqorida tanlamaning ayrim $\bar{x} = 11,3$, $\bar{y} = 21,99$, $\overline{xy} = 389,33$, $s_x^2 = 78,7$ sonli xarakteristikalarini hisoblagan edik. Endi s_y qiymatini hisoblaymiz:

$$s_y^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = 57,5178 - 483,5601 \approx 273,96.$$

U holda (15.23) formulaga ko'ra

$$\hat{r} = \frac{389,33 - 11,3 \cdot 21,99}{\sqrt{78,7} \cdot \sqrt{273,96}} \approx 0,96.$$

15.5. Tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'qligi haqidagi gipotezani tekshirish

Amaliy tadqiqotlarda o'rganilayotgan miqdorlar orasidagi bog'liqlik haqida bosh to'plamning r korrelyatsiya koeffitsiyenti bo'yicha emas (aksariy hollarda bu koeffitsiyent noma'lum bo'ladi), balki tanlama bo'yicha (15.23) formulaga ko'ra hisoblangan $\hat{r}$ bahoga qarab xulosa chiqariladi.

Hisoblangan qiymat $\hat{r} \neq 0$ bo'lsin. Bu qiymat bosh to'plamda mavjud bo'lgan X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi korrelyatsion bog'liqlikning mavjudligini anglatadimi, yoki tanlamani tanlashdagi tasodifiylikning natijasimi (ya'ni, boshqa tanlamada $\hat{r} = 0$ yoki $\hat{r}$ o'z ishorasini o'zgartiradimi) degan savol tug'iladi.

Bunday hollarda bosh to‘planning miqdorlari orasida korrelyatsion bog‘liqlik yo‘qligi haqidagi $H_0: r = 0$ gipoteza $H_1: r \neq 0$ muqobil gipotezada tekshiriladi.

15.4-Teorema. Agar bosh to‘planning X va Y tasodifiy miqdorlari orasida korrelyatsion bog‘liqlik mavjud bo‘lmasa, ya’ni $r = 0$ bo‘lsa,

$$t = \frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}}$$

statistika erkinlik darajasi $(n-2)$ bo‘lgan Styudent taqsimotiga ega bo‘ladi.

Gipotezani tekshirish uchun γ ishonchlik darajasi tanlanadi va u bo‘yicha Styudent taqsimotining $t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$ kvantili, hamda tanlama bo‘yicha $\hat{r}$ koeffisiyrtnt hisoblanadi. Kritik soha $|t| > t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$ tengsizlik bilan aniqlanadi. Bu tengsizlik esa

$$|\hat{r}| > \frac{t_{(1+\gamma)/2}(n-2)}{\sqrt{n-2 + t_{(1+\gamma)/2}^2(n-2)}} \quad (15.24)$$

tengsizlikka teng kuchli. Agar bu tengsizlik o‘rinli bo‘lsa H_0 gipoteza qabul qilinmaydi va γ ehtimol bilan X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog‘liqlik mavjud degan H_1 muqobil gipoteza qabul qilinadi.

15.4-Misol. Quyidagi jadvalda keltirilgan

x_i	3,5	4,1	5,4	3,2	6	7,3	7,5	7,6	7,8	7,9	8
y_i	1,7	5,7	3,2	4,7	1,3	9,2	3,8	-0,6	7,7	1,1	5,8
x_i	8,1	8,2	8,5	8,7	11,2	13,3	11,9	12,1	12,5	13	13,1
y_i	-7,4	2,5	0,9	7,2	3,8	4,8	6,4	5,7	3,1	2,8	6,3

tanlama bo‘yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog‘liqlik yo‘q degan H_0 asosiy gipotezani tasodifiy miqdorlar orasida bog‘liqlik mavjud degan H_1 muqobil gipotezada tekshiring.

► Jadvaldagi qiymatlar bo‘yicha tanlamaning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 8,586, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 3,623, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 83,05,$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 32,53, \quad s_x^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 9,32,$$

$$s_y^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 11,64, \quad \hat{r} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y} = 0,137.$$

$\gamma = 0,95$ ishonchlilik darajasini tanlaymiz va bu daraja bo'yicha Stydent taqsimoti jadvalidan $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(20) = 2,09$ kvantilni topamiz. Kvantilning bu qiymatini (15.24) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifodaga qo'yib hisoblaymiz:

$t_{0,975}(20)/\sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)} \approx 0,4234$. Ko'rinib turibdiki (15.24) tengsizlik o'rinli emas ekan, ya'ni $\hat{r} = 0,137 < 0,4234 \approx$

$$\approx t_{0,975}(20)/\sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)}$$

. Shuning uchun H_0 asosiy gipoteza qabul qilinadi, ya'ni $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'q deb tasdiqlashimiz mumkin. ◀

Normal taqsimlangan X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas degan $H_0: r = 0$ gipotezani tekshirishda erkinlik darajasi $(n-2)$ bo'lgan Stydent qonuni bo'yicha taqsimlangan

$$t = \frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} \quad (15.25)$$

statistikadan foydalanish mumkin. Agar

$$\frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$$

bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, ya'ni qaralayotgan tasodifiy miqdorlar γ ehtimol bilan o'zaro bog'liq emas tasdiqlash mumkin.

15.5-Misol. 15.4-Misolda qaralgan X va Y tasodifiy miqdorlar normal taqsimlangan deb faraz qilib, jadvalda keltirilgan tanlama uchun $H_0: r = 0$ gipotezani tekshiramiz. Styudent taqsimotining kvantillari jadvalidan $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(20) = 2,09$ qiymatni topamiz va

$$\frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} = 0,137 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1-0,137^2}} = 0,619$$

qiymat bilan taqqoslaymiz. $0,619 < 2,09$ bo'lganligi uchun $r = 0$ gipotezani qabul qilamiz. ◀

15.6. Korrelyatsiya koeffitsiyentining oraliqli bahosi

$\hat{r}$ korrelyatsiya koeffitsiyenti uchun r bosh korrelyatsiya koeffitsiyentini γ ehtimol bilan qoplaydigan ishonchlilik oralig'ini tuzish maqsadga muvofiq. Bunday oraliqni tuzish uchun $\hat{r}$ korrelyatsiya koeffitsiyentining tanlama taqsimotini bilish kerak. $r \neq 0$ bo'lganda bu taqsimot nosimmetrik bo'lib, n tanlama hajmining o'sishi bilan normal taqsimotga sekinlik bilan yaqinlashadi.

Topilgan baho normal taqsimlangan hol uchun ishonchlilik oralig'ini tuzishning umumiy usulidan foydalanib, ishonchlilik ehtimoli γ bo'lganda oraliqli baholashning quyi va yuqori chegaralari uchun mos ravishda

$$\underline{r} = \hat{r} + \frac{\hat{r}(1-\hat{r}^2)}{2n} - \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \frac{1-\hat{r}^2}{\sqrt{n}} \quad (15.26)$$

$$\bar{r} = \hat{r} + \frac{\hat{r}(1-\hat{r}^2)}{2n} + \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \frac{1-\hat{r}^2}{\sqrt{n}} \quad (15.27)$$

tengliklarni yozish mumkin.

Biroq (15.26) va (15.27) baholardan tanlama hajmi katta (kamida 500) bo'lgandagina foydalanish mumkin.

Kichik hajmli tanlamalarda ishonchlilik oralig'ini tuzishning R.Fisherning

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} \quad \text{yoki} \quad z = \text{arcth } \hat{r} \quad (15.28)$$

almashtirishiga asoslangan usulidan foydalanish mumkin, bu yerda $\operatorname{arctg} x$ – giperbolik arctangens.

Kichik hajmli tanlamalarda (15.28) formula bilan aniqlangan tasodifiy miqdor taqriban

$$M_z \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-1)}, \quad \sigma_z^2 \approx \frac{1}{n-3}$$

parametrli normal taqsimotga ega bo‘lar ekan. Bundan esa

$$\underline{r} = \operatorname{th} \underline{z}, \quad \bar{r} = \operatorname{th} \bar{z} \quad (15.29)$$

tenglikni yozish mumkin, bu yerda

$$\underline{z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{2(n-1)} - \Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (15.30)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{2(n-1)} + \Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (15.31)$$

(15.30) va (15.31) formulalardan bosh to‘plamning taqsimoti normal bo‘lmaganda ham foydalanish mumkinligini ta’kidlab o‘tish kerak. Bu holda baholashning sifati pasayadi, ya’ni $(\underline{z}, \bar{z})$ oraliq kengayadi va demak baholashning aniqligi pasayadi.

15.5-Misol. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlama bo‘yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog‘liqlik yo‘q degan H_0 asosiy gipotezani tasodifiy miqdorlar orasida bog‘liqlik mavjud degan H_1 muqobil gipotezada tekshiring va agar H_1 gipoteza qabul qilinsa, $\gamma = 0,95$ ishonchlilik darajasida $\hat{r}$ korrelyatsiya koeffitsiyenti uchun ishonchlilik oralig‘ini tuzing:

x_i	1,2	1,8	2,1	2,5	2,9	3	3,5	3,9	4,7	5,6	6,2
y_i	23,2	22,2	19,9	19,7	18,1	17	17	17	15,3	13,1	12
x_i	6,3	7,5	8,4	8,8	8,9	9	9,3	9,5	9,9	10,1	10,5
y_i	11,2	9,2	7,1	5,2	4,9	4,2	3,6	3,1	2,4	2,3	1,2

Jadvaldagi qiymatlar bo‘yicha tanlamaning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 6,164, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 11,291,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 47,421,$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 47,955, \quad s_x^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 9,431,$$

$$s_y^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 50,061, \quad \hat{r} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y} = -0,996.$$

$\gamma = 0,95$ ishonchlilik darajasini tanlaymiz va bu daraja bo'yicha Stydent taqsimoti jadvalidan $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(20) = 2,09$ kvantilni topamiz. Kvantilning bu qiymatini (15.24) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifodaga qo'yib hisoblaymiz: $t_{0,975}(20)/\sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)} \approx 0,4234$. Ko'rinib turibdiki (15.24) tengsizlik o'rinli ekan, ya'ni $|\hat{r}| = 0,996 > 0,4234 \approx t_{0,975}(20)/\sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)}$. Shuning uchun H_0 asosiy gipoteza rad qilinadi, ya'ni $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud deb tasdiqlashimiz mumkin.

Endi bosh to'plamning r korrelyatsiya koeffitsiyentini $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan qoplaydigan $(\underline{r}, \bar{r})$ ishonchlilik oralig'ini tuzamiz. Dastlab $\Phi^{-1}((1 + \gamma)/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$ qiymatni topamiz. Endi (15.30) va (15.31) formulalarga ko'ra Fisher almashtirishi ichun $(\underline{z}, \bar{z})$ oraliqni $\underline{z} = -3,5160435$, $\bar{z} = -2,6167338$ topamiz. Topilgan bu qiymatlarni (15.29) formulalarga qo'yib, $\underline{r} = -0,9982354$ va $\bar{r} = -0,9893866$ qiymatlarni topamiz. Demak, $(-0,9982354, -0,9893866)$ oraliq $\gamma = 0,95$ ehtimol qilan bosh to'plamning r korrelyatsiya koeffitsiyentini qoplaydi. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday bog‘liqliklarga funksional bog‘liqlik deb aytamiz?
2. Qanday bog‘liqliklarga statistik bog‘liqlik deb aytamiz?
3. Qanday bog‘liqliklarga korrelyatsion bog‘liqlik deb aytamiz?
4. Qanday funksiyaga regressiya funksiyasi deb ataymiz?
5. Chiziqli regressiya funksiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
6. Chiziqli regressiya parametrlarining bahosi qanday topiladi?
7. Chiziqli regressiya parametrlarining oraliqli bahosi qanday topiladi?
8. Korrelyatsiya koeffitsiyentining nuqtaviy bahosi qanday topiladi?
9. Tasodifiy miqdorlar orasida bog‘liqlik yo‘qligi haqidagi gipotezaqni tekshirishda foydalaniladigan statistika qanday taqsimlangan?
10. Kichik hajmli tanlamalar bo‘yicha korrelyatsiya koeffitsiyentini oraliqli baholashda qanday almashtirishdan foydalaniladi?

Mashqlar.

1. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlama bo‘yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining nuqtaviy bahosini toping.

x_i	2,9	1,5	1,1	3,8	2,6	5,5	3,4	5,1	4,3	4,7	3,2	2,3
y_i	16,7	9,1	7,5	20,9	15,5	29,7	19,9	27,9	25,1	26,8	18,6	14,7

2. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlama bo‘yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining nuqtaviy bahosini toping.

x_i	1,3	-2,1	4,1	0	0,3	-2,5	1,7	2,1	-1,6	3,2	3,4	2,8
y_i	10,9	-17,9	34,5	-0,1	2,4	-21,3	14,2	17,6	-13,7	26,9	28,6	23,5

3. (X, Y) – ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor ustida 24 marta tajriba o‘tkazildi. Tajriba natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan

x_i	3,5	0	0,1	7,3	2,9	1,6	-0,3	2,1	4,3	2,8	6,7	3,1
y_i	-1	3,1	2,9	-5,3	-0,3	1,2	3,4	0,6	-1,9	-0,2	-4,7	-0,5
x_i	3,3	0,9	3,8	4,2	5,8	4,7	5,4	1,8	6,3	0,4	6,9	2,2
y_i	-0,7	2,0	-1,3	-1,8	-3,6	-2,4	-3,2	1	-4,2	2,6	-4,9	0,5

Bu tanlama bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining bahosini va ularning ishonchlilik darajasi 0,98 bo'lgan ishonchlilik oraliqlarini toping.

4. (X, Y) –ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ustida 24 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan

x_i	8,7	1,7	7,6	0,3	0,9	7,7	2,6	4,9	3,2	6,8	3,8	8,5
y_i	15,3	1,3	13,1	-1,6	-0,4	13,3	3,1	7,7	4,3	11,5	5,5	14,9
x_i	4,3	2,9	1,2	5,1	5,7	6,3	4,5	7,4	3,3	4,2	1,9	2,4
y_i	6,5	3,7	0,3	8,1	9,3	10,5	6,9	12,7	4,5	6,3	1,7	2,7

Bu tanlama bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining bahosini va ularning ishonchlilik darajasi 0,9 bo'lgan ishonchlilik oraliqlarini toping.

5. (X, Y) –ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ustida 24 marta tajriba o'tkazildi. Tajriba natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan

x_i	1,9	4,2	6,3	1,6	-1,1	-0,7	5,7	0,1	0,7	1,1	-1,9	6,9
y_i	7,5	8,6	10,7	5,3	4,3	4,1	13,1	5,1	5,5	6	2,8	10,7
x_i	2,3	2,5	3,2	4,9	-2,3	4,6	-2,1	5,5	3,7	-0,3	6,8	-1,6
y_i	8	7,1	7,9	10,8	2,4	11,3	2,9	12,3	8,2	5,2	11,6	3,1

Bu tanlama bo'yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlik darajasini ifodalovchi korrelyatsiya koeffitsiyentining $\hat{r}$ nuqtaviy bahosini toping.

6. Quyidagi jadvalda keltirilgan

x_i	1,5	-3	-1,8	-2,6	-3,1	3,3	-1,5	4,1	-0,9	0,6	-0,1
y_i	4,5	4,1	1,1	-4,8	5,2	-4,8	-0,7	4,1	2,6	2,1	8,9
x_i	-1,4	4,8	1,1	-2,8	2,2	2,7	0,8	3,7	-2,1	4,5	-0,7
y_i	7,8	3,9	-5,7	3,8	3,1	-3,2	3,1	6,3	3,9	5,2	4,7

tanlama bo'yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'q degan H_0 asosiy gipotezani tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud degan H_1 muqobil gipotezada $\gamma = 0,9$ ishonchlilik darajasida tekshiring.

7. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlama bo'yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'q degan H_0 asosiy gipotezani tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud degan H_1 muqobil gipotezada tekshiring va agar H_1 gipoteza qabul qilinsa, $\gamma = 0,95$ ishonchlilik darajasida $\hat{r}$ korrelyatsiya koeffitsiyenti uchun ishonchlilik oralig'ini tuzing:

x_i	0,3	4,4	6,9	1,3	2,1	1,8	7,5	2,4	2,9	3,2	1,5	5,5
y_i	6,9	10,3	11,2	5,8	5,6	4,7	8,2	4,9	7,3	6,8	4,3	10,4
x_i	4,1	6,6	4,6	5,3	0,7	5,7	5,9	6,3	3,5	3,8	7,3	0,9
y_i	11,3	9,8	5,7	6,8	8,1	8,1	4,3	6,9	7,1	3,6	10,3	5,7

Javoblar.

1. $y = 2,016 + 5,154x$; 2. $y = -0,147 + 8,451x$;
3. $y = 3,049 - 1,151x$, $\theta_0 \in (0,6903; 5,407)$, $\theta_1 \in (-1,739; -0,563)$;
4. $y = -2,142 + 2,007x$, $\theta_0 \in (-4,318; 0,0336)$, $\theta_1 \in (1,5751; 2,4384)$;
5. $\hat{r} = 0,964$; 6. H_0 gipoteza inkor qilinadi, ya'ni X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud. 7. 0,9 ehtimol bilan X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud va korrelyatsiya koeffitsiyenti shu ehtimol bilan $(0,1989; 0,7267)$ oraliqga tushadi.

ILOVALAR

1-Ilova $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ Puasson funksiyasining qiymatlari

$\lambda \backslash m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2223	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1216	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0,0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0007	0012	0020	0031
6	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0005
7	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001
$\lambda \backslash m$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
0	0,1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0001	0000
1	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005	0002
2	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023	0010
3	1805	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076	0037
4	0902	1681	1954	1755	1339	0912	0572	0337	0189	0102
5	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378	0224
6	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631	0411
7	0034	0216	0595	1045	1377	1490	1396	1171	0901	0646
8	0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126	0888
9	0002	0027	0132	0363	0689	1014	1241	1318	1251	1085
10	0000	0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251	1194
11	0000	0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137	1194
12	0000	0001	0006	0034	0113	0264	0481	0728	0948	1094
13	0000	0000	0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729	0926
14	0000	0000	0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521	0728
15	0000	0000	0000	0002	0009	0033	0090	0194	0347	0534
16	0000	0000	0000	0000	0003	015	0045	0109	0217	0367
17	0000	0000	0000	0000	0001	0006	0021	0058	0128	0237
18	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0009	0029	0071	0145

19	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004	0014	0037	0084
20	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0006	0019	0046

2-Ilova $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ funksiyaning qiymatlari

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001

3-Ilova. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$ standart normal taqsimot funksiyasining qiymatlari

jadvali

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753

0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

4-Ilova. Stydent taqsimotining t –kvantillari
(k –erkinlik darajasi)

k	γ ishonchlilik darajasi (ikki tomonlama kritik soha)					
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,31	637,00
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,47
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	7,09	8,29

5-Ilova. χ^2 Pirson taqsimotining $\chi^2_{\alpha,k}$ kvantillari
(k – erkinlik darajasi)

k	α – muhimlik darajasini					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,004	0,001	0,0002
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,12	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,85	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,59	10,28	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,34	10,98	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,09	11,69	10,20
24	43,0	39,4	36,4	13,85	12,40	10,86
25	44,3	40,6	37,7	14,61	13,12	11,52
26	45,6	41,9	38,9	15,38	13,84	12,20
27	47,0	43,3	40,1	16,15	14,57	12,88
28	48,3	44,5	41,3	16,93	15,31	13,56
29	49,6	45,7	42,6	17,71	16,05	14,26
30	50,9	47,0	43,8	18,49	16,79	14,95
35	57,3	53,2	49,8	22,47	20,57	18,51
40	63,7	59,3	55,8	26,51	24,43	22,16
45	70,0	65,4	61,7	30,61	28,37	25,90
50	76,2	71,4	67,6	34,76	32,36	29,71
75	106,4	100,8	96,2	56,05	52,94	49,48
100	135,8	129,6	124,3	77,93	74,22	70,06

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI	3
I BOB. DETERMINANTLAR. CHIZIQLI TEGLAMALAR SISTEMASI.	4
1.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.....	4
1.2. Yuqori tartibli determinantlar.....	7
1.3. Chiziqli tenglamalar sistemasi.....	15
II. BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI.....	19
2.1. Funksiya tushunchasi. Funktsiyalarning berilish usullari.	19
2.2. Funksiyaning limiti.	28
2.3. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.	33
2.4. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari.....	36
2.5. Funksiyaning uzluksizligi.	43
III BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI.....	53
3.1. Hosila.....	53
3.2. Hosila hisoblash qoidalarlari	58
3.3. Differensial	62
3.4. Yuqori tartibli hosilalar	64
3.5. Aniqmasliklarni ochishning Lopitall qoidasi.....	66
IV BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANI TEKSHIRISH	71
4.1. Funksiyaning o‘shish va kamayish shartlari.....	71
4.2. Funksiyaning ekstremumi	73
4.3. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi	82

4.4. Funksiya grafigining asimptotalari	85
4.5. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi va funksiya grafigini yasash	90
V BOB. ANIQMAS INTEGRAL	94
5.1. Boshlang'ch funksiya tushunchasi	94
5.2. Aniqmas integral va uning xossalari	94
5.3. Integrallashning asosiy usullari	98
VI BOB. ANIQ INTEGRAL	105
6.1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqida masala	105
6.2. Aniq integral	106
6.3. Aniq integralning asosiy xossalari.....	108
6.4. Aniq integralni hisoblash	113
6.5. Xosmas integrallar	116
6.6. Aniq integralning geometrik tadbirlari	120
VII BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR	126
7.1. Ikki o'zgaruvchili funksiya tushunchasi	126
7.2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti	129
7.3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi	130
7.4. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari	131
7.5. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy va to'la differensial.....	133
7.6. Murakkab funksiyaning hosilalari	134
VIII BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.....	137
8.1. Differensial tenglama tushunchasiga olib keladigan masalalar	137
8.2. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari	138

8.3. O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar ..	141
8.4. Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar	144
8.5. Yuqori tartibli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar	149
8.6. O‘zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar	151
IX BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI.....	158
9.1. Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar.....	158
9.2. Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi va statistik ehtimoli	160
9.3. Ehtimolning klassik ta’rifi.....	162
9.4. Kombinatorika elementlari.....	163
9.5. Geometrik ehtimol	167
9.6. Ehtimollarni qo‘shish	168
9.7. Hodisalarning bog‘liqligi. Shartli ehtimol	169
9.8. Hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli	171
9.9. To‘la ehtimol va Bayyes formulalari.....	172
9.10. Bernulli sxemasi.....	174
9.11. Bernulli sxemasida taqribiy formulalar	178
X BOB. TASODIFIY MIQDORLAR	186
10.1. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari.....	186
10.2. Diskret tasodifiy miqdorlar	188
10.3. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar	192
10.4. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar	202
XI BOB. IKKI O‘LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR	220

11.1. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlar	220
11.2. Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorlar	223
11.3. Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar	227
11.4. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari	233
11.5. Tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi va korrelyatsiya koeffitsiyenti	246
11.6. Tasodifiy miqdorlarning shartli taqsimot qonunlari va sonli xarakteristikalarini	250
XII BOB. TANLAMA NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI	262
12.1. Bosh va tanlama to‘plam.....	262
12.2. Variatsion va statistik qator. Taqsimotning empirik funksiyasi ...	264
12.3. Tanlamaning sonli xarakteristikalarini	270
XIII BOB. BAHOLASH NAZARIYASINING ELEMINTLARI	276
13.1. Taqsimotning parametrlarini nuqtaviy baholash	276
13.2. Matematik kutilma va dispersiyaning nuqtaviy bahosi.....	278
13.3. Nuqtaviy baholarni tuzish usullari.....	280
13.4. Taqsimotning parametrlari va sonli xarakteristikalarini oraliqli baholash	283
13.5. Normal taqsimotning parametrlari uchun ishonchlilik oraliqlari .	284
XIV BOB. STATISTIK GIPOTEZALARNI TEKSHIRISH.....	297
14.1. Gipotezalarni tekshirishning asosiy tushunchalari.....	297
14.2. Normal taqsimot parametrlarining qiymatlari haqidagi gipotezani tekshirish.....	301
XV BOB. REGRESSION VA KORRELYATSION TAHLIL	316

15.1. Funktsional, statistik va korrelyatsion bog‘liqliklar haqida tushuncha. Regressiya funksiyasi.....	316
15.2. Oddiy chiziqli regressiya.....	318
15.3. Regressiya funksiyasini oraliqli baholash.....	322
15.4. Korrelyatsiya koeffitsiyentining nuqtaviy bahosi	328
15.5. Tasodifiy miqdorlar orasida bog‘liqlik yo‘qligi haqidagi gipotezani tekshirish.....	329
15.6. Korrelyatsiya koeffitsiyentining oraliqli bahosi	332
ILOVALAR.....	338

R.N.Shamsiyev

MATEMATIKA

OLIY O‘QUV YURTLAR BAKALAVR TALABALARI UCHUN DARSLIK

«ALFRAGANUS UNIVERSITY»
NODAVLAT TA’LIM TASHKILOTI

Manzil: Toshkent shahar, Yunusobod tumani,
Qoraqamish ko‘chasi, 2A-uy.

Bosishga ruxsat etildi 29.06.2023-yil.
Bichimi 60x84 $\frac{1}{16}$. Ofset qog‘ozi.
“Temes New Roman” garniturası.
Hisob-nashr tabog‘i. 21,8. Adadi 50 dona.
Buyurtma № 25. Bahosi kelishilgan narxda.

“DAVR MAXSIMUM MEDIA”
МЧЖ матбаа корхонасида чоп этилди.
Корхона манзили: Тошкент шаҳар
Олмазор тумани Шифокорлар шаҳарчаси, 15 уй.