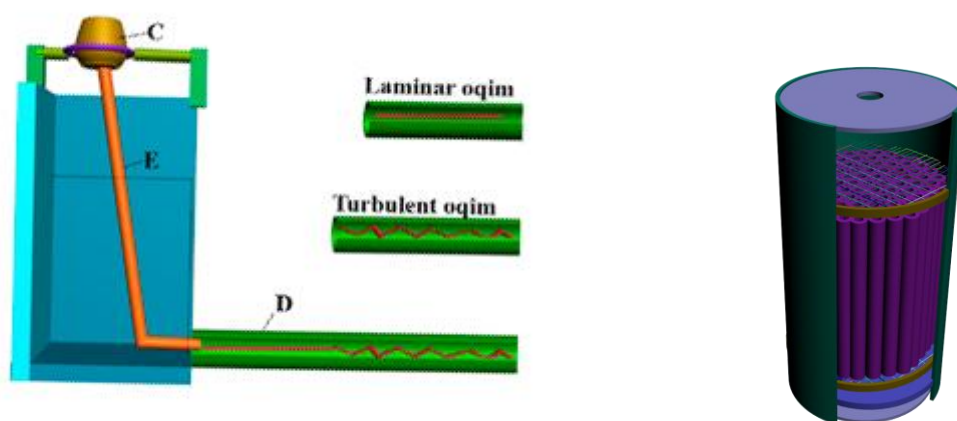


Ch.B. NORMURODOV, Sh.A. MENGLIYEV

SIQILMAYDIGAN YOPISHQOQ SUYUQLIK HARAKATINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH



Toshkent -2019

UDK: 519.711.3

BBK 25.253.3

Ch.B. Normurodov, Sh.A. Mengliyev. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatini matematik modellashtirish. –T.: “Fan va texnologiya”, 2019, 96 bet.

Monografiyada tutash muhitlar mexanikasida muhim ahamiyatga ega boʻlgan siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini matematik modellashtirish bilan bogʻliq masalalar qaraladi, toʻgʻri kanallar, bosim gradientining turli qiymatlarida chegaraviy qatlamda va quvurlardagi suyuqliklar oqimi tadqiq etiladi.

Oqimlarni xarakterlovchi matematik model sifatida Nave-Stoks tenglamalari tizimi qaralgan, kichik qoʻzgʻalishlar usuli yordamida ushbu Tizimdan gidrodinamik turgʻunlikni tavsiflovchi matematik model – Orr-Zommerfeld tenglamasi uchun xos qiymat muammosi qoʻyilgan. Differensial xos qiymat muammosini yechish uchun oʻta samarali va yuqori aniqlikka ega boʻlgan spektral-toʻr usuli tadbiq etilgan, muammoni yechish algoritmi ishlab chiqilgan, umumlashgan algebraik xos qiymat muammosi hosil qilingan. Muammoni xarakterlovchi parametrlarning keng koʻlamli qiymatlarida olingan hisoblash eksperimenti natijalari keltirilgan.

Monografiya amaliy matematika va informatika sohasida tadqiqotlar olib borayotgan katta ilmiy xodim izlanuvchilar, tayanch doktorantlar, magistrantlar, bakalavriat talabalari va faoliyati matematik modellashtirish bilan bogʻliq turli soha mutaxassislariga moʻljallangan.

Taqrizchilar: **N. Ravshanov** - t.f.d., professor, Toshkent axborot texnologiyalari universiteti huzuridagi “Murakkab tizimlarni modellashtirish” laboratoriyasi mudiri;
I. Allakov – f.-m.f.d., professor, Termiz davlat universiteti “Algebra va geometriya” kafedrası mudiri.

KIRISH

Jahonda ilmiy-innovatsion va zamonaviy axborot texnologiyalarini qo'llagan holda siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati dinamikasining gidrodinamik modeli asosida dolzarb masalalarni yechishga katta e'tibor qaratilmoqda. Birlashgan Millatlar Tashkiloti ma'lumotlarida keltirilishicha «insoniyat uchun yaqin 15 yil ichida ichimlik suvi tanqisligi darajasi 40% dan ortib ketadi, sayyoramizda ichimlik suvi zaxiralari halokatli holatda, hozirgi kungacha yer osti suvlari 20% gacha ishlatib bo'lingan, shu holatda 2050 yilda yer yuzi aholisi taxminan 9 milliardga etishi taxmin qilinmoqda, suvga ehtiyoj va iste'mol qilish nisbiy balansining doimiy ravishda o'sishi natijasida, jumladan, 2030 yilga borib shaxsiy hamda iqtisodiyot uchun suvga ehtiyojning 55% ga ortishi kutilmoqda»¹. Ushbu yo'nalishda, dunyoning rivojlangan mamlakatlari, jumladan AQSH, Angliya, Fransiya, Yaponiya, Koreya, Germaniya, Rossiya Federatsiyasi va boshqa mamlakatlarda iste'mol suvi zaxiralaridan samarali foydalanishni ta'minlaydigan matematik modellar yaratish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

Jahonda zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida yer usti va ostida joylashgan suv zaxiralarini topish, obyektlarni loyihalash va ulardan unumli foydalanish hamda bashoratlash maqsadida ushbu jarayonlarni ifodalovchi matematik modellar, hisoblash algoritmlari va dasturiy ta'minotlarni ishlab chiqishga yo'naltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, jumladan siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar oqimidagi kichik qo'zg'alishlarning tarqalishi, to'g'ri kanallarda, chegaraviy qatlamda va quvurlarda suyuqlik oqimlarining turg'unligi, oqimni xarakterlovchi gidravlik parametrlarning o'zgarish qonuniyati, bosim gradientining suv oqimlari asosiy tezlik profiliga ta'sirini aniqlash va ushbu oqimlarning turg'unligini tadqiq etish, oqimlarning turg'un sohasini uning turg'unmas sohasidan ajratadigan neytral turg'unlik egri chiziqlarini aniqlash, betartib suv oqimlarini, tartiblashgan (laminar) oqimlarga aylantirish muammolarining yechimi hamda ushbu faoliyatni amalga oshirish qurilmasini yaratish suvlardan samarali foydalanish va boshqarishdagi muhim vazifalardan hisoblanadi.

¹ <http://www.nat-geo.ru/planet/154204-pitevaya-voda-stanovitsya-defitsitom/>

Respublikada gidrodinamik tizimlarni matematik modellashtirish, to'g'ri kanallar, chegaraviy qatlamlar va quvurlardagi oqimlarda paydo bo'ladigan muammolarni tadqiq qilish, ularga oid dolzarb nazariy hamda amaliy natijalarga ega bo'lish, ularni amaliyotda qo'llanishga alohida e'tibor qaratilmoqda. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 apreldagi «Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi PQ-2909-son Qarori va 2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasida, jumladan «... ishlab chiqarishni modernizatsiya qilish, texnik va texnologik jihatdan yangilash, ishlab chiqarish, ... zamonaviy tejamkor va samarali texnologiyalarni bosqichma-bosqich joriy etish orqali qishloq joylarida aholini toza ichimlik suvi bilan ta'minlashni tubdan yaxshilash» vazifalari belgilangan. Ushbu vazifalarni bajarishda sohaga zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini qo'llanib kanallarda, chegaraviy qatlamda hamda quvurlardagi suv oqimlarini tadqiq etish suv va suv resurslaridan samarali foydalanishni ta'minlashga xizmat qiladigan muhim masalalardan biri hisoblanadi.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tavsiflovchi adekvat matematik modellar va ularni sonli hisoblash usullarini yaratish hamda takomillashtirish bir qator olimlar: M.A.Lavrentev, B.V.Shabat, L.D.Landau, E.M.Lifshits, S.S.Lin, G.Shlixting, M.A.Goldshtik, V.N.Shtern, F.Drazin, A.N.Tixonov, N.N.Yanenko, S.K.Godunov, O.A.Ladijenskaya, N.A.Jeltuxin, V.Ya.Levchenko, A.G.Slepsov, A.S.Solovev, F.B.Abutaliyev, Ch.B.Normurodov, S.A.Orszag, H.Salwen, C.E.Grosch, D.Gottlieb, E.Turkel, A.T.Patera, T.J.Bridjes, A.Zebib va boshqalarning ishlarida ko'rib chiqilgan.

Adekvat matematik modellar asosida olingan gidrodinamik turg'unlik muammosini ifodalovchi Orr-Zommerfeld tenglamasini sonli yechish usullari N.N.Yanenko, V.D.Liseykin, K.S.Baxvalov, A.Krilov, I.D.Malixina, B.Yu.Skobelev, A.G.Slepsov, B.P.Kolobov, S.K.Godunov, A.S.Solov'ev, V.Ya.Levchenko, V.A.Sapojnikov, N.A.Jeltuxin, V.M.Lutovinov, F.B.Abutaliyev, Ch.B.Normurodov, N.N.Thomas, St.Loer, D.F.Jankowski, D.J.Takluchi, J.M.Gersting, S.A.Orszag, C.E.Grosch, H.Salwen, D.Gottlieb, E.Turkel, A.T.Patera, L.Lustman, H.G.Ku, D.Hatziavramidis, S.R.Fulton, A.Zebib va boshqalarning tadqiqotlarida keltirilgan.

Hozirda siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatini kompleks tahlil etishga mo'ljallangan universal usullar mavjud emas, Orr-Zommerfeld tenglamasini xarakterli parametrlarning va bosim

gradientining turli qiymatlarida chegaraviy qatlamda approksimatsiyalash, chegaraviy qatlamdagi va quvurlardagi siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tahlil etish, kritik Reynolds sonini aniqlash, laminar oqimlarning turbulent oqimlarga aylanish jarayonlarini tadqiq qilish va bashorat qilish imkonini beradigan kompyuter modellarini yaratish muammolari yetarli darajada o'rganilmagan.

I BOB. SIQILMAYDIGAN YOPISHQOQ SUYUQLIKLAR HARAKATINI MATEMATIK MODELLASHTIRISHNING HOZIRGI HOLATI VA MUAMMOLARI

Ushbu bobda siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tavsiflovchi matematik modellashning hozirgi holati, rivojlanish istiqbollari va mavjud muammolar yoritilgan, matematik modellarni tuzishda reologik va fenomenologik yondashuvlar bayon qilingan. Ikki va uch o'lchamli Nave-Stoks tenglamalarini tadqiq etishda yuqoridagi yondashuvlar asosida olib borilgan tadqiqotlar keltirilgan. Nave-Stoks tenglamalarining ayrim xususiy yechimlarini tuzish, tenglamalarni yechishda mavjud qiyinchiliklar mohiyati yoritilgan. Hidrodinamik turg'unlik muammosini sonli yechish usullari, ularning moslashuvchanligi, aniqligi va samaradorligi jihatidan taqqoslangan.

1.1 §. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati nostatsionar jarayonlarini tadqiq etish bo'yicha asosiy adabiyotlar sharhi

Ilmiy-texnika taraqqiyotining hozirgi bosqichida suvlar va suv resurslaridan samarali foydalanish yetakchi ahamiyatga ega. Jahonda ichimlik suviga ehtiyojni qondirish uchun zamon talablariga mos suv inshootlarini loyihalash, yaratish va yangi suv zaxiralarini harakatga keltirish, xuddi shuningdek, eski suv havzalaridagi va boshqa oqar suvlarni filtrlash orqali ichimlik suv zaxirasini oshirish talab etiladi.

Yuqorida ko'rsatilgan maqsadlarga mos turli tabiiy va sun'iy sharoitlarda suv oqimlaridagi jarayonlarni kompleks tadqiq etishga yo'naltirilgan matematik modellar, yuqori aniqlikka ega bo'lgan samarali hisoblash usullari va dasturiy mahsulotlarini yaratmasdan erishib bo'lmaydi. Suvdan samarali foydalanish amaliyotini yo'lga qo'yishda suv oqimlari harakatiga bosim gradientining ta'siridan foydalanish keng qo'llanilmoqda. Boshqa tomondan, laminar oqimlarning turbulent (tartiblashmagan) oqimlarga aylanishi chegaralarini aniqlash muhim ahamiyat kasb etadi. Shunday qilib, siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatiga ikki toifadagi kuchlar ta'sir etadi: birinchidan - bosim gradienti, ikkinchidan - yopishqoqlik (ishqalanish) kuchi.

Suyuqliklar harakatiga bosim gradientining manfiy, nolga teng va musbat bo'lgan hollari ta'sirini aniqlash, ularning oqimlar harakatiga ijobiy va salbiy ta'sir etishiga mos qiymatlarini topish zarur bo'ladi.

Suyuqliklar harakatida bosim gradientini o'zgartirib oqimlarning laminar holatdan turbulent holatga o'tishini tezlashtirish yoki kechiktirish mumkin. Bu, o'z navbatida, tanlangan bosim gradientiga mos kritik Reynolds sonini aniqlash bilan bog'liq. Mazkur muammo esa qaralayotgan oqimni adekvat tavsiflovchi matematik modellarni ishlab chiqish va ularga mos algoritmlarni hamda hisoblash eksperimentini o'tkazish uchun dasturiy-instrumental vositalarni yaratish bilan bog'liq. Suyuqliklar harakatidagi ushbu murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish tutash muhit mexanikasi usullariga asoslanadi. Ular, odatda siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tavsiflovchi Nave-Stoks tenglamalari bilan bog'liq masalalar ko'rinishida talqin etiladi. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tavsiflovchi matematik model-nostatsionar uch o'lchamli Nave-Stoks tenglamalari G.Shlixting, L.G.Loysyanskiy va S.S.Lin ishlarida keltirilgan. Modelda uchta harakat tenglamalari va bitta uzluksizlik tenglamasi mavjud bo'lib, noma'lumlar sifatida tezlik vektorining uchta komponentasi va bosim qaraladi. Bunda bosim vaqtga bog'liq emas degan gipotezaga asoslaniladi. Olib borilgan tadqiqotlarda Nave-Stoks tenglamalari laminar chegaraviy qatlam masalalariga bog'liq ravishda qaralgan, chegaraviy qatlamda laminar formadagi oqimning turbulent oqimga aylanish mexanizmi bayon qilingan. Nave-Stoks tenglamalarining chegaraviy qatlamdagi ayrim xususiy yechimlarini tuzish masalalari hal etilgan. Ushbu ishlarda tadqiqotlar asimptotik usul asosida olib borilgan. Asimptotik usulni qo'llanish juda murakkab hisoblashlarni talab etadi va olinadigan asimptotik yechimlar qo'pol ko'rinishda bo'ladi.

Matematik modellashtirish va hisoblash eksperimentining tizimli konstruktiv texnologiyasini qo'llanish suyuqlik oqimlaridagi jarayonlarni batafsil va chuqur o'rganish uchun muhim ahamiyatga ega. Chunki, ularda qaralayotgan obyektning bir holatdan ikkinchi bir holatga o'tishi, xuddi shuningdek bosim gradientining o'zgarishi sodir bo'ladi.

[1] monografiyada kanallar, chegaraviy qatlam va quvurlardagi oqimlar harakatini matematik modellashtirishga bag'ishlangan ishlar tahlili keltirilgan va ular tanqidiy baholangan. Ta'kidlash lozimki, siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini gidrodinamik turg'unlik nuqtai-nazaridan modellashtirish muammolari bilan ko'p tadqiqotchilar shug'ullanishgan. Bu borada hozirgacha e'tiborga molik bir qator nazariy va amaliy natijalar [2] ishda olingan.

[3] monografiyada olib borilgan tadqiqotlarda Nave-Stoks tenglamalarini yechishga gidrodinamik turg'unlikni tadqiq etish nuqtai-

nazaridan yondashilgan. Ushbu ishda yechimning kichik qo'zg'alishlarga nisbatan turg'unligini tadqiq etishda asimptotik usul qo'llanilgan. Tadqiqotda uch o'lchamli qo'zg'alishlarga nisbatan kichik qo'zg'alishlar usuli bilan Nave-Stoks tenglamalaridan gidrodinamik turg'unlik tenglamalari hosil qilingan.

[4] maqolada ikki o'lchamli qo'zg'alishlar uchun kritik Reynolds soni uch o'lchamli qo'zg'alishlarning kritik Reynolds soniga nisbatan kichik bo'lish haqidagi teorema isbotlangan. Boshqacha qilib aytganda, uch o'lchamli qo'zg'alishlarning turg'unmaslik sohasi ikki o'lchamli qo'zg'alishlarning turg'unmaslik sohasi ichida yotishi ko'rsatilgan. Bundan o'z navbatida, ikki o'lchamli qo'zg'alishlar turg'un bo'lmaganda, uch o'lchamli qo'zg'alishlar ham turg'un bo'lmasligi kelib chiqadi. Shu sababli, gidrodinamik turg'unlik muammosini tadqiq etishda ikki o'lchamli qo'zg'alishlar bilan chegaralanish kifoya.

Hozirgacha Nave-Stoks tenglamalarini keskin soddalashtirishga va ularning amaliyot uchun juda dolzarb bo'lgan xususiy yechimlarini topishga bag'ishlangan ko'pgina [5-9] ishlar mavjud. Mazkur tadqiqotlar odatda yoki simmetriklik mulohazalariga yoki ayniqlik va o'lchamlar nazariyasiga asoslangan holda bajarilgan.

Nave-Stoks tenglamalarining xususiy yechimlaridan iborat bo'lgan hamda ularni aniqlagan olimlar nomlari bilan ataladigan bir qator asosiy oqimlar [5] ishda mavjud, masalan: Blazius oqimi, Puazeyl oqimi, Fokner-Sken oqimi, Xagen-Puazeyl oqimlari.

[9-11] tadqiqot ishlarida Blazius oqimi tekis (yupqa, yarim cheksiz) plastinkani siqilmaydigan yopishqoq suyuqlikning o'zgarmas tezlik bilan statsionar oqib o'tishidagi chegaraviy qatlam tenglamalarining yechimi sifatida aniqlangan. Puazeyl oqimi ikkita tekis parallel plastinka orasidagi parabolasiimon laminar oqim. Fokner-Sken oqimi (chegaraviy qatlam) laminar chegaraviy qatlam tenglamalarining statsionar avtomodel yechimi bo'lib, u bosim gradientiga bog'liq bo'ladi. Xagen-Puazeyl oqimi siqilmaydigan barqarorlashgan suyuqliklarning doiraviy kesimga ega bo'lgan yupqa silindrsimon naychada doimiy bosim farqi ta'sirida o'zgarmas yopishqoqlik bilan harakat qilishi natijasida paydo bo'ladi.

Turbulentlik nazariyasining hozirgi holati va zamonaviy gidrodinamikaning dolzarb muammolari [12-13] ishlarda bayon qilingan. Ularda turli ko'rinishdagi oqimlar tahlil qilinganda, ikkita turli oqimning mexanik ayniy bo'lish mezonini Reynolds soni Re dan iborat ekanligi ko'rsatilgan. Har bir tipdagi oqim geometriyasi uchun o'zining kritik Reynolds soni mos kelishi va ushbu son laminar rejimdagi suyuqlik

oqimining turbulent oqimga aylanishini xarakterlashi ko'rsatilgan. Kritik Reynolds soni Re_{krt} suyuqlik oqimi modelini tanlashda hal qiluvchi omil hisoblanadi. Ta'kidlash lozimki, oqimlarning tabiati, kritik Reynolds Re_{krt} sonining qiymatiga bog'liq bo'ladi.

Ushbu [13] tadqiqot natijasi shuni ko'rsatadiki, turbulent oqimlar gidrodinamikasi sohasidagi ilmiy tadqiqotlar, shu jumladan, fenomenologik yondashuv doirasida ham shu vaqtgacha yakunlanmay qolmoqda. Turbulentlikni tavsiflash muammosi notrivial va ko'p pog'onali hamda hozirgacha biror-bir ayrim yondashuv doirasida echib bo'lmaydigan muammodan iborat. Boshqa tomondan, unga har tomonlama yondashuv va tadqiqotning turli usullarini qo'llanish ancha ilgari borishga ishonch hosil qiladi. Shu sababli, siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tavsiflashda yangi yondashuvni qo'llanish foydali bo'lib, bu yondashuv oqim rejimiga bog'liq bo'lmagan reologik munosabatlarga asoslangan bo'lishi va har bir oqim Reynolds soni uchun soha chegaralarida ishqalanish va o'rtacha tezlik maydonlarini tavsiflab, tajriba natijalariga qoniqarli mutanosib bo'lishga imkon berishi lozim.

[14] maqolada ikki o'lchamli Nave-Stoks tenglamalarining aniq yechimlari ikkita parallel plastinka orasidagi masofa ixtiyoriy darajali qonuniyat bo'yicha o'zgarganda va chegarada yopishqoqlik shartlari qo'yilganda tadqiq etilgan. Reynolds sonining darajalari bo'yicha bir qator turli yechimlar olingan. Aniq yechimlar bilan taqqoslash natijasida qatorning Reynolds soni qiymati $Re=1 \div 10$ bo'lganda yuqori aniqlikni ta'minlashi ko'rsatilgan.

[15] monografiyada tutash muhit mexanikasi umumiy pozitsiyasiga tayangan holda barqarorlashgan turbulent oqimlarga oid nazariy va eksperimental natijalar keltirilgan. Unda turbulentlikning fenomenologik nazariyasi yopishqoqlikka asoslangan holda bayon qilingan hamda Reynolds tenglamalarini to'ldirish va turbulent pulsatsiyalarni hisoblash masalalari ko'rib chigilgan.

[16] maqolada uch o'lchamli Nave-Stoks tenglamalarining cheksizlikda qo'yilgan chegaraviy shartlari va $t=0$ dagi silliq boshlang'ich shartlari bilan yechimini olish keltirilgan. Olingan yechimning xususiyatlari aniqlangan va tahlil qilingan.

1.2 §. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tadqiq etishning matematik modellashtirish konstruktiv metodologiyasini ishlab chiqish

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tadqiq etishning matematik modellashtirish konstruktiv metodologiyasini ishlab chiqish ishning eng murakkab va mas'uliyatli bosqichlaridan biridir. Tajriba ko'rsatadiki, ko'p hollarda modelning to'g'ri tanlanishi—muammoning yarmidan ko'pini hal qilish demakdir. Bu bosqichning murakkabligi shundan iboratki, u matematik va sotsial bilimlarning uyg'unlashtirishi talab etadi. Shu sababli, siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini matematik modellashtirishda qaraladigan muammolar uchun mutaxassislarning bunday uyg'unlashishi muhim ahamiyatga ega. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini matematik modellashtirish ustida matematiklar hamda o'rganilayotgan obyektga tegishli bo'lgan sohaning mutaxassislari birlashib ishlaydilar. Ularning faoliyati muvaffaqiyatli bo'lishi uchun bir-birini tushunishi g'oyatda muhim. Bunday uyg'unlikka matematiklar obyekt haqida maxsus bilimlarga ega bo'lganda, ularning sheriklari esa ma'lum darajada matematik bilimga, o'z sohasiga tadqiqotning matematik modellashtirish usullarini qo'llash tajribasiga ega bo'lgandagina erishish mumkin.

Matematik model hech qachon qaralayotgan obyekt bilan aynan bir xil bo'lamaydi, uning barcha xossalarini va xususiyatlarini bera olmaydi. Soddalashtirishga, ideallashtirishga asoslangan model obyektning taxminiy tavsifidan iborat bo'ladi. Shuning uchun, modelni tahlil qilishdan olingan natijalar obyekt uchun doim taqribiy xarakterga ega bo'ladi.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati matematik modeli aniqligi va obyektning mosligi, ya'ni adekvatlik darajasiga bog'liqdir. Aniqlik haqidagi natijalarning ishonchliligi masalasi siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini matematik modellashtirishning eng nozik masalalaridan biridir. Obyekt holati va xossalarini aniqlaydigan qonunlar to'liq ma'lum va ularning qo'llanilishi bo'yicha katta amaliy tajribaga ega bo'linganda aniqlik masalasi osonlik bilan hal bo'ladi. Undan natijalarning qaralayotgan model ta'minlaydigan aniqligini ilgaridan (tajribagacha, ya'ni matematik modelni yechish boshlanguncha) baholash mumkin.

O'rganilayotgan obyekt haqida ma'lumotlar yetarli bo'lmaganda, yanada murakkabroq holat yuz beradi. Bu holda gipoteza xarakteriga ega bo'lgan qo'shimcha farazlar kiritishga to'g'ri keladi. Bu gipotetik modelni

tadqiq qilishdan olingan natijalar o'rganilayotgan obyekt uchun shartli xarakterga ega. Ularning o'rganilganligi boshlang'ich farazlar qanchalik to'g'ri ekanligiga bog'liq. Ularni tekshirish uchun modelni tadqiq qilish natijalarini o'rganilayotgan obyekt haqidagi barcha ma'lumotlar bilan taqqoslash lozim. Hisoblab topilgan va eksperimental ma'lumotlarning yaqinlik darajasi gipotetik modelning sifati haqida, boshlang'ich farazlarning to'g'riligi yoki xatoligi haqida fikr yuritishga imkon beradi. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati matematik modelini qaralayotgan obyektni o'rganishga tatbiq etish oddiy matematik masala emas va uni matematik usullar yordamida his etib bo'lmaydi. Haqiqatning asosiy me'zoni amaliyot, hisoblash eksperimenti o'tkazishdir.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini matematik modellashtirish amaliy xarakterga ega bo'lgan masalalarni yechishda o'ta muhim ahamiyatga ega. Amaliy masalalarda tabiat hodisasi, ishlab chiqarish jarayoni, konstruksiya, boshqarish tizimi, iqtisodiy reja va shu kabi "nomatematik" obyektlar bevosita beriladi. Tadqiqot obyektni formallashtirish, tegishli matematik modelni qurishdan boshlanadi. Obyektning eng muhim xususiyatlari va xossalari kiritiladi hamda matematik munosabatlar yordamida tavsiflanadi. Matematik model qurilgandan so'ng, ya'ni masalaga matematik forma berilgandan keyingina uni o'rganish uchun matematik usullardan foydalanish mumkin.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati matematik modellarining xarakterli qirralarini o'rganish «Gidrodinamik turg'unlik nazariyasi» deb ataluvchi fanda fanlararo bog'liqlikni tadqiq qilish zarurati bo'lganligi tufayli paydo bo'ldi. Murakkab matematik tizimlarni yaratish, yirik suv va suv ho'jaligi komplekslarini loyihalash hamda ularni boshqarish, ekologik holatlarni tahlil qilish va boshqa muhandislik, ilmiy va texnik sohalarda tadqiqotlarni tashkillashtirishni talab qiladi.

Axborot kommunikatsiya texnologiyalari va kompyuterlashtirish asriga kelib matematik modellashtirish uchun katta imkoniyatlar paydo bo'ldi, uning rivojlanishi kompyuterlarning zamonaviy imkoniyatlari va kelgusi taraqqiyoti bilan belgilanadi.

Murakkab dinamik tizimlarni matematik modellashtirish sohasidagi ilmiy-texnika taraqqiyoti rivojini, ularga siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati bilan bog'liq jarayonlarni kiritish mumkin mos axborot tizimlarini ishlab chiqish metodologiyasining nazariy va amaliy masalalarini yaratmasdan turib amalga oshirib bo'lmaydi.

Amaliy matematika va axborot texnologiyalari sohasida jadal rivojlanayotgan yo'nalishlar qatoriga murakkab dinamik obyektlar,

jarayonlar, texnik tizimlar va boshqalar faoliyati va boshqaruvini tahlil qilish uchun matematik modellash muammolari va hisoblash eksperimenti (HE) o'tkazishning jadal rivojlanishini kiritish mumkin. Tadqiq etilayotgan obyektlar va jarayonlarning adekvat matematik modellari (MM), HE o'tkazish mobaynida o'zining ichki va tashqi parametrlari, ularga ta'sir etuvchilarni aniqlashga va gidrodinamik hamda texnik tizimlar zahirida yashiringan yangi qonuniyatlarni aniqlashtirishga imkon beradi.

Matematik modellash nazariyasi konsepsiyasini ishlab chiqish, fundamental fanlar taraqqiyoti masalalarining muhim muammolaridan biri bo'lib, u algoritmash, ma'lumotlarni umumtuzim nuqtai-nazaridan yagona, yaxlit tuzim sifatida yig'ish, qayta ishlash va to'plash jarayonlarini birlashtiradi va muhim xalq xo'jaligi ahamiyatiga molik bo'lgan masalalarni amalda yechish imkonini beradi.

Modellash - tabiatda sodir bo'ladigan u yoki bu jarayonlar, obyektlar va hodisalarni bilishdagi asosiy usullardan biri hisoblanadi.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini matematik modellash asosida tadqiq etish murakkab muammolardan bo'lib, uning nazariy asoslari o'z ichiga mavjud tabiat (fizik, gidrodinamik, mexanik va boshqalar) qonunlarini oladi. Ushbu qonunlarni bilish va inobatga olish MM ni tuzish, jarayon va tadqiqot obyektni to'laqonli adekvat tavsiflashga imkon beradi.

Obyektning matematik modelini ishlab chiqishda, dastlab informatsion model (IM) tuziladi, u tadqiq etilayotgan jarayon to'g'risidagi to'liq ma'lumotni o'z ichiga oladi. IM ni tuzish va uning murakkablik darajasini aniqlashda eng muhim ma'lumotlarni tanlash MM ning maqsadiga bog'liq bo'ladi. IM ni tuzish tadqiqot obyektning matematik modelini ishlab chiqishdagi asosiy bosqich hisoblanadi. Tahlil qilish natijasida tanlab olingan obyektning barcha kirish parametrlari batafsil o'rganiladi va statik usullar asosida modellash maqsadiga moslab modelda soddalashtirishlar o'tkaziladi. Bunda obyektning MM da informativ ahamiyatga ega bo'lmagan omillar inobatga olinmaydi.

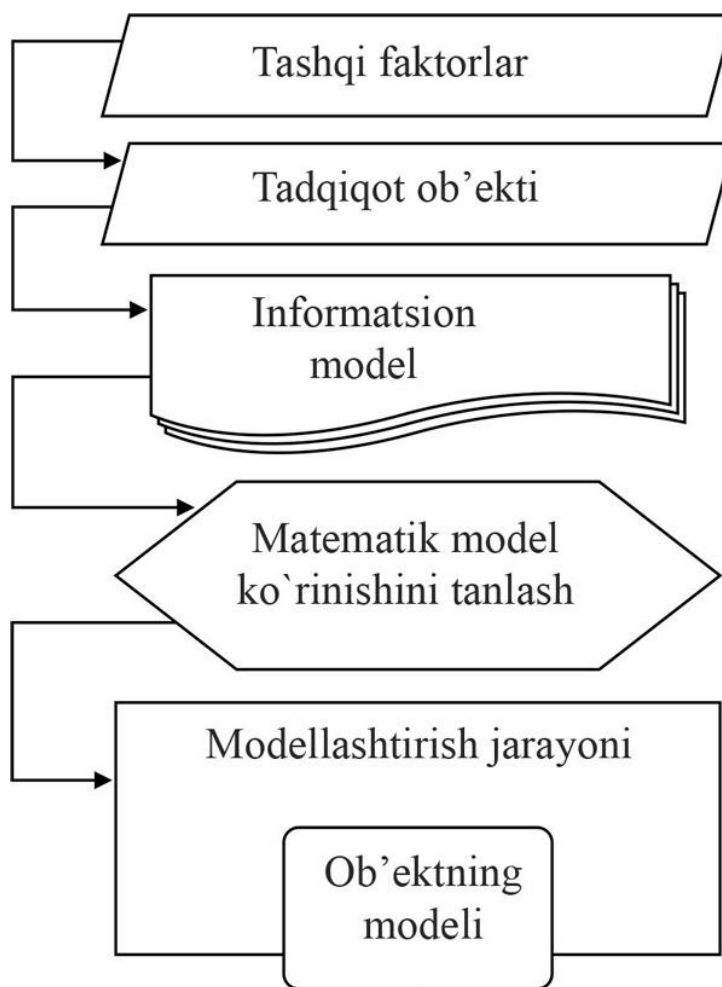
Tahlilda MM ni tuzishning barcha bosqichlari ierarxik nuqtai-nazardan strukturalarga ajratilgan bo'lishi lozim. IM da faqat rad etib bo'lmaydigan aloqalar va ma'lum harakatlar aks ettiriladi. Bunday model tadqiqotchiga modellashning keyingi yo'lini aniqlash uchun dastlabki imkoniyatni beradi. Ushbu qoidalarni bilish, obyekt haqida ma'lumotga ega bo'lish IM ni kompyuter modeliga aylantirishga imkon beradi, so'ngra EHM da unga mos eksperimentlarni o'tkazish mumkin bo'ladi. Bu holda

MM bazasida, EHM da hisoblash eksperimenti o'tkazish orqali tadqiqot maqsadi va vazifalariga bog'liq holda obyektning holatini bashorat qilish va faoliyatini turli vaziyatlarda optimal boshqarish uchun muhim bo'lgan omillar hamda asosiy parametrlarni aniqlash mumkin.

MM ni tuzish nazariyasi metodologiyasi - bu yangicha yondashuv va vosita bo'lib, uning yordamida obyekt yoki jarayon zahirida yashiringan yangi qonuniyatlarni ochish, bilish, tadqiq etish va boshqarish mumkin.

Hozirgi vaqtda MM metodologiyasi inson faoliyatining barcha jabhalari-murakkab texnik tizimlardagi dinamik jarayonlarni boshqarish, faoliyatini o'rganish va tahlil qilishdan tortib, to turli molekulyar masshtabdagi tirik organizmlarni tadqiq etish, bashorat qilish va ta'sir ko'rsatishgacha bo'lgan tadqiqotlar ko'lamini qamrab olmoqda.

Misol tariqasida, siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tadqiq va tahlil etish hamda bashoratlash va obyektning matematik modelini ishlab chiqishni ko'rsatuvchi 1.1-rasmni keltiramiz.



1.1-rasm. Obyektni matematik modellastirishning asosiy bosqichlari

1.1-rasmga asosan IM (ma'lumotlarni to'plash va tahlil qilish va asosiy parametrlarni hisoblash natijalariga bog'liq holda) ga turli tipdagi MM larni tuzish mumkin: a) determinarlangan, bu yerda tadqiq etilayotgan obyektning barcha parametrlari ma'lum va miqdoriy qiymatlarga ega; b) stoxastik, bunda obyektning ayrim parametrlari ehtimoliy xarakterga ega; v) yumshoq (aniq bo'lmagan), bu holda tadqiq etilayotgan obyektning parametrlari to'g'risidagi ma'lumotni olish va oshkor ko'rinishda bir qiymatli aniqlash qiyin kechadi; g) tadqiqot obyektini imitatsion modellash.

MM va HE ni ishlab chiqish metodologiyasidagi boshqa bir muammo - analitik [14], taqribiy-analitik [17,18] va sonli hisoblash algoritmlarini [13,20] tuzish va ularni kompyuterda amalga oshirishdan iborat.

MM qaralayotgan jarayon va obyektga nisbatan turli tartibli aniqlik va adekvatlikka ega bo'lishi mumkin. Boshqa tomondan, har bir MM, uni amalda oshirish ma'nosida, ya'ni, chiquvchi ma'lumotlarni olish uchun turli yondashuvlarni talab qiladi.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati MM ni amalga oshirishda tejamli spektral va spektral-to'r usullarini yaratish va rivojlantirish muhim ahamiyatga ega [21].

HE nuqtai-nazaridan masalani kompyuterda sonli yechish algoritmlari tejamli, universal hamda yaxlitlash xatoliklariga nisbatan turg'un bo'lishi lozim.

1.3 §. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar oqimining gidrodinamik turg'unlik muammosi masalalari va ularni yechish usullari

Siqilmaydigan ($\rho = const$) yopishqoq suyuqliklar harakati umumiy holda quyidagi Nave-Stoks tenglamalari bilan tavsiflanadi [1-3]:

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = X - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right) \quad (1.1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}\right) = Y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial z^2}\right) \quad (1.2)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{g} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) = Z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

Tenglamalar tizimi (1.1)-(1.3) da ρ -zichlik, μ -yopishqoqlik, $\bar{u}, \bar{g}, \bar{w}$ -tezlik vektori komponentalari, x, y, z - massaviy kuch komponentalari bo'lib, ular berilgan deb hisoblanadi, $\bar{t}$ -vaqt, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -koordinatalar, o'zgaruvchilar ustidagi chiziqli belgisi o'lchamli parametrlar bilan ish ko'rilayotganligini bildiradi. Tenglamalar (1.1)-(1.3) harakat tenglamalarini ifodalaydi, tenglama (1.4) esa uzluksizlik tenglamasidan iborat. Tizim (1.1)-(1.3) da to'rtta tenglama va to'rtta no'malum $\bar{u}, \bar{g}, \bar{w}, \bar{p}$ mavjud. Tizim (1.1)-(1.4) uchun xarakterli tezlik V va xarakterli uzunlik L kiritiladi hamda ular yordamida boshqa miqdorlar o'lchamsiz ko'rinishga keltiriladi, ya'ni:

$$u = \frac{\bar{u}}{V}, \quad g = \frac{\bar{g}}{V}, \quad w = \frac{\bar{w}}{V} \quad - \text{o'lchamsiz tezliklar},$$

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad z = \frac{\bar{z}}{L} \quad - \text{o'lchamsiz uzunliklar},$$

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho V^2} \quad - \text{o'lchamsiz bosim.} \quad t = \frac{V}{L} \bar{t} \quad - \text{o'lchamsiz vaqt}.$$

Ushbu o'lchamsiz parametrlar yordamida massaviy kuchlarni inobatga olmagan holda Nave-Stoks tenglamalari (1.1)-(1.4) quyidagi o'lchamsiz ko'rinishga keltiriladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial g}{\partial y} + w \frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + g \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklarning laminar holatdan turbulent holatga o'tishini tadqiq etish Nave-Stoks tenglamalari (1.5)-(1.8) asosida olib boriladi. Turbulentlikni tahlil qilishda V.A. Pavlovskiy [13] tomonidan tavsiya etilgan fenomenologik yondashuv muhim ahamiyatga ega. Ushbu yondashuvda, turbulent rejimdagi yopishqoq suyuqliklarning ko'plab eksperimental ma'lumotlari tahlil qilinadi, chunki laminar rejimdagi oqimlar uchun nazariya va tajriba yaxshi mutanosiblikka ega. Bunday fenomenologik yondashuv L. Prandtl [22] ning oqimlar aralashuvi yo'li gipotezasining muqobil variantidan iborat bo'lib, u V.A.Pavlovskiyning [13] ishida bayon qilingan. Ushbu tadqiqot ishi

asosida yopishqoq suyuqlik harakatining aynan fenomenologik nazariyasi asos qilib olingan. Ushbu model fenomenologik miqdor f tufayli turbulentlikning “ f -modeli” deb ataladi. Oqimning turbulentlik rejimi nazariy tavsiflash uchun favqulodda mushkul, oqimning gidrodinamik xarakteristikasi bo‘lgan fizik miqdorlar maydoni ham fazo bo‘yicha, ham vaqt bo‘yicha tasodifiy holatda o‘zgaradi. Ayni paytda ushbu o‘zgarishlarning chastotasi juda ham yuqori bo‘ladi. Shu sababli, turbulentlikni tavsiflash muammosi hozirgacha o‘zining yechimini oxirigacha topgan emas, chunki qaralayotgan miqdorlar (tezlik, zichlik, bosim va boshqalar) ning tabiatini koordinatalar va vaqtning funksiyasi sifatida sinchiklab tavsiflash mumkin emas.

[23-24] maqolada gidrodinamika tenglamalarining Kortevega qo‘shimcha kuchlanishlarni inobatga olgan holda aniq yechimlari sinfi olingan, ushbu kuchlanish tezlik komponentasi qismining bitta fazoviy o‘zgaruvchiga chiziqli bog‘liq ekanligini xarakterlaydi. Mazkur sinf doirasida binar suyuqlikning oqimiga mos ikkita masalaning aniq yechimi topilgan. Maxsus qonuniyat bo‘yicha bir-biriga yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lgan ikkita plastinka orasida oqayotgan yopishqoq suyuqlikning xususiy aniq yechimlari oilasi olingan.

[25] maqolada gidrodinamik turg‘unlik muammosining ayrim masalalarini yechishga mo‘ljallangan sonli usullar tahlili keltirilgan. Unda usullarning moslashuvchanligi va aniqligini tekshirish uchun turli sonli usullar tahlil etilgan.

[26-27] maqolalarda yopishqoq suyuqliklarning ikkita qattiq tekisliklar orasida ikki o‘lchamli nostatsionar oqimi qaraladi. Gidrodinamika tenglamalarining aniq yechimlari doirasida masalaning noavtomodel yechimi topilgan va qo‘zg‘aluvchan chegaraviy tekislik harakatining yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan qonuniyati tavsiflangan.

Tenglamalar tizimi (1.5)-(1.8) ning turg‘unligini tadqiq etish uchun uning yechimi asosiy laminar oqim va kichik qo‘zg‘alishlarning yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadi:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, z, t), \\ \vartheta(x, y, z, t) &= \tilde{\vartheta}(x, y, z, t), \\ w(x, y, z, t) &= \tilde{w}(x, y, z, t), \\ p(x, y, z, t) &= P(x, y, z) + \tilde{p}(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Tizim (1.5)-(1.8), munosabatlar (1.9) ni e‘tiborga olgan holda yoziladi va hosil bo‘lgan tenglamalarda kichik qo‘zg‘alishlarga nisbatan

faqat birinchi tartibli hadlar bilan cheklanilsa, quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + g \frac{dU}{dy} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) \\
 \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial z^2} \right) \\
 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) \\
 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Tizim (1.10) ni chiqarishda asosiy oqim $U(y)$ ning o'zi Nave-Stoks tenglamalarini qanoatlantirishi inobatga olingan, ya'ni:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

Tizim (1.10) quyidagi chegaraviy shartlar bilan qoraladi

$$\tilde{u} = \tilde{g} = \tilde{w} = 0, \text{ agar } y = \pm 1 \text{ bo'lganda.}$$

Skvayr [4] tomonidan isbotlangan teorema ko'ra, ikki o'lchamli qo'zg'alishlar uchun kritik Reynolds soni, uch o'lchamli qo'zg'alishlarning kritik Reynolds soniga nisbatan kichik bo'ladi. Shu sababli, uch o'lchamli qo'zg'alishlarning turg'unmaslik sohasi ikki o'lchamli qo'zg'alishlarning turg'unmaslik sohasi ichida yotadi va ikki o'lchamli qo'zg'alishlarni tadqiq etish maqsadga muvofiq.

Gidrodinamik turg'unlik nuqtai-nazaridan ikki o'lchamli qo'zg'alishlar muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Shu sababli, tenglamalar (1.10), bu holda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi [20]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{g} \frac{dU}{dy} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial y^2} \right),
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = 0. \tag{1.12}$$

Qo'zg'aluvchan harakat uchun tok funksiyasi kiritiladi

$$\Psi(x, y, t) = \psi(y) e^{i(kx - \omega t)}, \tag{1.13}$$

bu yerda: $\psi(y) = \psi_2 + i\psi_i$ - qo'zg'alishlarning kompleks amplitudasi, k - haqiqiy miqdor bo'lib, u to'lqin uzunligi l bilan quyidagi munosabat orqali bog'langan: $l = 2\pi/k$. Miqdor ω - kompleks, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, bu yerda ω_r - alohida olingan tebranishning doiraviy amplitudasi, ω_i - esa o'sish koefitsienti, ya'ni, tebranishlarning o'sishi yoki so'nishi to'g'risida mulohaza yuritishga imkon beradigan miqdor. Agar $\omega_i < 0$ bo'lsa, u holda, tebranishlar so'nadi va laminar oqim turg'un bo'ladi, agar $\omega_i > 0$ bo'lsa, u holda turg'unmaslik o'rinli bo'ladi. Miqdorlar k va ω dan tashqari ularning nisbati $\lambda = \frac{\omega}{k} = \lambda_r + i\lambda_i$ ni kiritish maqsadga muvofiq. Miqdor $\lambda_r - x$ yo'nalish bo'yicha to'lqinlarning tarqalish tezligini ifodalaydi (fazaviy tezlik), λ_i - esa yana tebranishlarning so'nishi yoki o'sishi haqida mulohaza yuritishga imkon beradigan miqdor.

Qo'zg'alishlar harakati amplitudasi $\psi(y)$ ni faqat y o'zgaruvchiga bog'liq deb qarash qabul qilingan, chunki asosiy oqim $U(y)$ ham faqat y o'zgaruvchiga bog'liq. Tok funksiyasi (1.13) qo'zg'alishlar tezlik vektorlari $\tilde{u}$ va $\tilde{v}$ bilan quyidagi munosabatlar orqali bog'langan:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \psi'(y)e^{i(kx - \omega t)} \\ \tilde{g} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\psi(y)e^{i(kx - \omega t)}\end{aligned}\quad (1.14)$$

bu bilan uzluksizlik tenglamasi (1.12) o'z-o'zidan integrallanadi va tizim (1.11) dan esa Orr-Zommerfeld tenglamasi uchun xos qiymat muammosi hosil qilinadi. Ushbu tenglama to'rtinchi tartibli hosila oldida kichik parametr bo'lgan chiziqli bo'lmagan oddiy differensial tenglamadan iborat. Orr-Zommerfeld tenglamasi uchun differensial xos qiymat muammosi quyidagicha qo'yiladi:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left((U(\eta) - \lambda)D + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \right) \psi = 0, \quad \eta_0 < \eta < \eta_1, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned}\psi(\eta_0) &= \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) = 0, \\ \psi(\eta_1) &= \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_1) = 0.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Chegaraviy shartlar (1.16) birjinsli bo'lib, ular o'tkazmaslik va yopishqoqlik shartlarini ifodalaydi. Bu yerda $D = \frac{d}{d\eta} - k^2$ - differensial operator, $U(\eta)$ - asosiy oqimning tezlik profili, η - asosiy oqimga

ko'ndalang yo'naltirilgan koordinata, k - to'lqin soni, Re - Reynolds soni, $\psi(\eta)$ -qo'zg'alishlar uchun tok funksiyasi amplitudasi, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ masalaning xos qiymatlari, bu yerda λ_r - to'lqinli qo'zg'alishlarning fazaviy tezligi, λ_i - o'sish koeffitsienti. Agar $\lambda_i > 0$, bo'lsa, u holda oqim turg'unmas, agar $\lambda_i < 0$ bo'lsa, oqim turg'un bo'ladi. Agar $\lambda_i = 0$ bo'lsa, u holda tebranishlar neytral turg'un bo'ladi.

Tenglama (1.15) da yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr $(kRe)^{-1}$ mavjud, shu sababli, aniq yechimga yaqin bo'lgan taqribiy yechimni topishda jiddiy murakkabliklar paydo bo'ladi. Tenglama (1.15) ni sonli modellashirishda qo'llaniladigan mavjud usullarni bir nechta guruhga bo'lish mumkin: 1) chekli ayirmali usullar, 2) qadamlab integrallash usuli, 3) o'zgaruvchilarni yo'qotish va differensial progonka, 4) spektral usullar, 5) spektral-to'r usuli.

1. Chekli ayirmali usullarning asosiy afzalliklari va kamchiliklari xususida to'xtalamiz, bunda asosiy e'tiborni so'nggi yillardagi tadqiqotlarga qaratamiz. Tenglama (1.15) ni yechishda chekli ayirmali usullarni qo'llanish [28] ishda tavsiya etilgan. Ushbu usullarning asosiy mohiyati tenglama (1.15) dagi hosilalarni chekli ayirmalar bilan almashtirish va hosil bo'lgan tizimni chiziqli algebra usullari bilan yechishdan iborat. Bunday sxemani qo'llanish, to'rning qadamini juda kichik qilib olishni talab qiladi. Bunda, masalan $kRe \sim 10^4$ bo'lganda, etarlicha aniq (uchta aniq raqam) natijalarni hosil qilish uchun 100 tugundan tashkil topgan teng oraliqli ayirmali to'rdan foydalanilgan. Bu usulning boshqa bir kamchiligi shundan iboratki, uning yordamida faqat bitta xos qiymat topiladi.

Tenglama (1.15) ni yechishda hisoblash tugunlari sonini kamaytirish uchun [29] ishda o'zgaruvchan qadamli ayirmali to'rlardan foydalanish tavsiya etiladi. Bunday to'rni tuzish bir nechta parametrlarga bog'liq bo'lib, ularni tanlash ma'lum qiyinchiliklarga bog'liq va natijalar shuni ko'rsatadiki, kRe parametr ortib borishi bilan to'r tugunlari soni ham oshib ketadi. Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo'lgan ikkinchi tartibli tenglamani sonli yechish uchun tengmas oraliqli to'rni tuzish metodikasi [30-31] ishlarda bayon qilingan. Ushbu metodika asosida [32-34] ishlarda tenglama (1.15) ning xos qiymatlarini topish uchun maxsus akslantirishlardan foydalanish orqali tengmas oraliqli to'r tuziladi. Bunday akslantirish shunday tuziladiki, izlanayotgan funksiya gradienti moduli kRe parametrlarga bog'liq bo'lmagan miqdor orqali baholansin. Ushbu akslantirishlar parametrlarini tanlash to'r tugunlari orasidagi masofani

chegaraviy qatlam o'tish zonasining o'lchami va kritik nuqtaga moslab boshqarishga imkon beradi. Tengmas oraliqli to'rni qo'llanish bitta xos qiymatni kam sonli to'r tugunlaridan foydalangan holda yuqori aniqlik bilan topishga imkon beradi.

Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo'lgan tenglamalarni yanada samarali yechish usuli – lokal kollokatsiya usuli [35-36] maqolalarda bayon qilingan. Uning mohiyati shundan iboratki, integrallash intervali qismlarga bo'linadi, ularning har birida kollokatsiya usuli yordamida taqribiy lokal yechim hisoblanadi. Natijada yechimni butun soha bo'yicha topish uchun lentasimon matritsaga ega bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar tizimi echiladi. Lokal kollokatsiya usulining yaqinlashishi isbotlangan va taqribiy yechimning aniq yechimga yaqinlashish tezligi baholangan. Bunda lokal kollokatsiya usuli yuqori aniqlikka ega bo'lgan chekli ayirmali usulga ekvivalent ekanligi ko'rsatilgan. Ushbu usul eng turg'un bo'lmagan (xavfli) xos qiymatlarni lokallash va aniqlash imkoniyatini beradi, ushbu usul ham bitta xos qiymatni samarali topadi.

2. Yuqorida bayon qilingan usullar bilan bir qatorda gidrodinamik turg'unlik muammolarini yechishga qadamlab integrallash usuli qo'llaniladi. Bu usulning mohiyati chegaraviy masalani Koshi masalasiga keltirish va uni ixtiyoriy o'zgaruvchan qadam bilan integrallashdan iborat. Ular orasida gidrodinamik turg'unlik masalasini yechishga o'tish usuli [37] ishda qo'llanilgan. Amalga oshirilgan hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, agar qaralayotgan matritsaning xos qiymatlarining haqiqiy qismi bir-biridan keskin farq qilsa, ushbu xususiyat tenglama (1.15) ga xos, u holda integrallash jarayonidagi xatoliklar tufayli xos qiymatlarda birorta ham to'g'ri raqam qolmaydi.

Ushbu qiyinchiliklarni bartaraf qilish uchun [38] ishda ortogonallashtirish usulini qo'llanish tavsiya etiladi. Bu usulda integrallash intervali yetarlicha kichik qismlarga bo'linadi, bu qismlar uzunligi turli xos qiymatlar miqdori orasidagi farq qanchalik ko'p bo'lsa, shunchalik kichik qilib olinadi. So'ngra har bir qismda ikkita yechim ortogonallashtiriladi va normallashtiriladi. Usulning noqulayligi shundaki, bitta xos qiymatni topish uchun katta hajmdagi hisoblashlar talab qilinadi.

3. Ushbu [39-40] ishlarda bazis yechimlarni o'zgaruvchilarni yo'qotish usuli bilan tuzish bayon qilingan, bu usul ortogonallashtirish usulidan kam farq qiladi, ammo, o'zgaruvchilarni yo'qotish usulida integrallash va ortogonallashtirish jarayonlari birlashtirilgan, bu arifmetik hisoblashlarning bir oz tejalishiga olib keladi. Usul yordamida

muammoning faqat bitta xos qiymati topiladi. Ayrim hollarda determinant usulni qo'llanish afzalligi [41] maqolada ko'rsatilgan. Chegaraviy qatlam turg'unligi muammosida hos qiymatlarini lokallashtirish uchun ushbu usul [42] ishda tatbiq etilgan. Ushbu usullarda ham faqat bitta xos qiymatni topish ko'zda tutilgan.

4. Spektral (Galerkin) [43-44] usullarning gidrodinamik turg'unlik muammosi (1.15) ga qo'llanilishi [45] maqolada bayon qilingan, bu yerda bazis funksiyalari sifatida birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari [46-57] qo'llanilgan. Ko'rsatilganki, bu holda bazis funksiyalari soniga qarab yaqinlashish eksponensial xarakterga ega bo'ladi. Bu usullarning asosiy afzalligi shundaki, ularda masalaning barcha xos qiymatlari topiladi va ular orasidan eng turg'unmas xos qiymatni tanlab olish mumkin bo'ladi. Ammo, tartibi yuqori bo'lgan to'liq matritsaning barcha xos qiymatlarini izlash juda murakkab jarayon bo'lib, u ko'p kompyuter xotirasi va vaqti sarflanishiga olib keladi. Bundan tashqari kRe parametr qiymatining ortib borishi bilan xos qiymatlarni yetarlicha aniqlikda topish uchun zarur bo'lgan kompleks matritsalarining tartibi keskin ortib ketadi, bu o'z navbatida kompyuter xotirasiga qo'shimcha talablar qo'yilishiga olib keladi.

Yuqoridagi ma'lumotlardan ko'rinadiki, Chebishev ko'phadlariga asoslangan spektral usullardan tashqari barcha usullar faqat bitta xos qiymatni topishga mo'ljallangan.

Ular orasida tengmas oraliqli to'rlar usuli va lokal kollokatsiya usuli samarali usullar hisoblanadi. Ular gidrodinamik turg'unlik muammosi (1.15) ni yechishda unchalik ko'p kompyuter resurslari talab qilmayadi. Ammo, barcha xos qiymatlarni topishga mo'ljallangan samarali usullar mavjud emas.

5. Gidrodinamik turg'unlik muammosi (1.15) ni samarali yechishga mo'ljallangan va uning barcha xos qiymatlarini aniqlashga imkon beradigan usul [58-63] ishlarda tavsiya etilgan. Bu spektral-to'r usulidir. Ushbu usul spektral usullarning yuqori aniqligini tengmas oraliqli to'rlar usuli yoki lokal kollokatsiya usulining tejamliligi bilan birlashtiradi va gidrodinamik turg'unlik muammosining barcha xos qiymatlarini aniqlashga imkon beradi. Spektral-to'r usulida integrallash intervalida to'r kiritiladi, to'rning har bir elementida taqribiy yechim birinchi to'rdagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida izlanadi. To'rning ichki tugunlarida turg'unlik tenglamalari yechimi va uning $(m-1)$ -tartibgacha bo'lgan hosilalarining uzluksizligi talab qilinadi, bu yerda m yuqori tartibli hosila tartibini ko'rsatadi.

Integrallash intervali chegaralarida gidrodinamik turg'unlik muammosi matematik modellarining mos chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi talab qilinadi. Barcha to'rt sohasi bo'yicha taqribiy yechim maxsus blokli-diagonalli ko'rinishga ega bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar tizimini [64-79] yechish orqali topiladi. Spektral-to'rt usuli yordamida murakkab chiziqli bo'lmagan masalalarni yechish imkoniyati paydo bo'ladi.

Tutash muhit mexanikasining murakkab va ayni paytda dolzarb masalalaridan biri gidrodinamik turg'unlik muammosidir, ushbu muammo, Orr-Zommerfeld tenglamasini sonli integrallash masalasiga bog'liq bo'ladi. Orr-Zommerfeld tenglamasini sonli modellashtirish uchun spektral-to'rt usulini tatbiq etishning o'ziga xos jihatlari va ushbu usulning algoritmi o'ta samarali hamda qo'yilgan masalaning yechimini yuqori aniqlik bilan topishga imkon berishi ko'rsatiladi. Spektral-to'rt usulida bazis funksiyalar sifatida birinchi turdagi Chebishev ko'phadlaridan foydalaniladi. Barcha ortogonal ko'phadlar orasida faqat Chebishev ko'phadlarigina minimaks xususiyatiga ega bo'ladi, ya'ni bu ko'phadlar yordamida approksimatsiyalaganda yechimdan maksimal chetlanish minimal bo'ladi. Bundan tashqari, Chebishev ko'phadlari tugunlari integrallash intervali chegaralarida zichlashadi, ularning ushbu xususiyatidan samarali hisoblash algoritmlarini yaratishda foydalanish mumkin. Chebishev ko'phadlarining yana bir afzalligi, ularni hamda ularning turli tartibli hosilalarini hisoblash uchun samarali rekurrent formulalarining mavjudligidir. Chebishev ko'phadlarining tugunlari $[-1;1]$ kesmada simmetrik joylashgan va kesmaning chetki nuqtalarida zichlashgan bo'ladi.

Gidrodinamik turg'unlik muammolari matematik modellashtirilayotganda izlanayotgan yechim gradienti chegaraviy sohalarda yuqori bo'ladi. Shu sababli, ayirmali to'rt tugunlari yoki yechimni approksimatsiyalashda qo'llanilayotgan bazis funksiyalari (Chebishev ko'phadlari) tugunlari sonini aynan shu sohalarda zichlashtirish zarurati paydo bo'ladi. Xuddi ayirmali to'rt tugunlarini zichlashtirish kabi muammo mohiyatidan kelib chiqqan holda tegishli Chebishev ko'phadlari tugunlari sonini ham zichlashtirish imkoniyatini hosil qilish mumkin. Buning uchun spektral-to'rt usulidan foydalanish maqsadga muvofiq. Bu usulda integrallash intervalida to'rt kiritiladi, to'rt elementlarida taqribiy yechim turli sondagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida approksimatsiyalanadi. Integrallash intervali bo'yicha taqribiy yechim matritsasi blokli diagonalli

ko‘rinishga ega bo‘lgan umumlashgan xos qiymat muammosini yechishga olib keladi.

Gidrodinamik turg‘unlik muammosi yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglama Orr-Zommerfeld tenglamasi (1.15), (1.16)-uchun qo‘yilgan xos qiymat muammosiga olib keladi. Tenglama (1.15) va (1.16) tadqiq etilayotgan oqimga mos keluvchi birjinsli chegaraviy shartlarga ega bo‘ladi. Chegaraviy shartlar (1.16) chegaradan o‘tib ketmaslik va yopishqoqlik talablarini ifodalaydi.

Differensial masala (1.15)-(1.16) ni sonli modellashtirish uchun [20] spektral-to‘r usulini qo‘llaymiz. Spektral-to‘r usulida to‘rning elementlari soni N berilganda, hisoblashlarning talab qilingan aniqligiga erishish uchun to‘rning tugunlari sonini optimal joylashtirish va ulardagi ko‘phadlar soni p_j ni to‘g‘ri tanlash zarur. Bu masalalar uzviy bog‘liq, chunki, tugunlarni yaqinlashtirib, ulardagi ko‘phadlar sonini kamaytirish va aksincha tugunlar oralig‘ini kengaytirib, ulardagi Chebishev ko‘phadlari sonini ortirish mumkin. Amaliy nuqtai-nazardan teng oraliqli to‘rni tanlash va to‘r elementlarida turli p_j larni berish mumkin. Bu holda u yoki bu elementida zarur bo‘ladigan ko‘phadlar soni yechimning ushbu elementlaridagi gradienti miqdoriga qarab tanlanadi.

II BOB. GIDRODINAMIK TURG‘UNLIK MUAMMOSINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

Spektral va spektral-to‘r usullari Orr-Zommerfeld tenglamasining barcha xos qiymatlarini topishga imkon beradi. Ushbu usullarda bazis funksiyalari sifatida birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari olinadi. Barcha ortogonal ko‘phadlar orasida faqat Chebishev ko‘phadlarigina minimaks xususiyatiga ega bo‘ladi, ya’ni ushbu ko‘phadlar bilan approksimatsiyalanganda yechimdan maksimal chetlanish minimal bo‘ladi. Spektral usullarning asosiy kamchiligi shundan iboratki, ular orqali hosil bo‘lgan umumlashgan algebraik xos qiymat muammosidagi kompleks matritsalar to‘liq bo‘ladi va bazis funksiyalar soni ortib borishi bilan algebraik tizim matritsalar tartibi ham keskin ortib ketadi. Bular o‘z navbatida xos qiymat muammosini yechishga sarflanadigan kompyuter xotirasi, vaqti hamda arifmetik amallar sonining keskin ortib ketishiga olib keladi. Ushbu kamchiliklarni bartaraf etish uchun spektral-to‘r usulidan foydalanish maqsadga muvofiq. Ushbu usul o‘ta samarali, yuqori aniqlikka ega va gidrodinamik turg‘unlik muammosining barcha xos qiymatlarini topish imkonini beradi.

Spektral-to‘r usulining spektral usulga nisbatan yana bir afzalligi gidrodinamik turg‘unlik muammosidagi integrallash intervalida yechim gradienti yuqori bo‘lgan sohada ko‘phadlar sonini oshirishga, boshqa sohalarda esa ko‘phadlar sonini kamaytirishga imkon beradi.

2.1-§. Gidrodinamik turg‘unlik muammosining matematik modelini ishlab chiqish

Nave-Stoks tenglamalari–yopishqoq siqilmaydigan Nyuton qonuniga bo‘ysunadigan suyuqliklar harakatini tavsiflovchi xususiy hosilali differensial tenglamalar tizimidan iborat. Nave-Stoks tenglamalari gidrodinamikaning eng muhim tenglamalaridan bo‘lib, ushbu tenglamalar ko‘pgina tabiat va texnika masalalarini matematik modellash tirishda qo‘llaniladi. Nave-Stoks tenglamalari ularning asoschilari fransuz fizigi Anri Nave va Britaniya matematigi Djordj Stoks nomlari bilan ataladi. Nave-Stoks tenglamalari hozirgacha o‘z yechimini ku‘tayotgan «ming yillik muammo» lar toifasiga kiradi.

Turli oqimlarning gidrodinamik tabiatini tahlil qilishda jahon miqyosida matematik model sifatida Nave-Stoks tenglamalari asos qilib olinadi [3].

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right), \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

bu yerda: u, g - mos ravishda uzunasiga va ko'ndalangiga tezlik komponentalari, p - bosim, $\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$ - Reynolds soni, μ - yopishqoqlik, ρ - zichlik, U va L - mos ravishda tezlik va uzunlikning xarakterli masshtablari.

Oqimning turg'unligini tadqiq etish uchun tizim (2.1) ning yechimini asosiy laminar oqim $U(y)$ va kichik qo'zg'alishlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz [20]:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t) \\
g(x, y, t) &= \tilde{g}(x, y, t), \\
p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Tenglama (2.1) ni (2.2) ni e'tiborga olgan holda yozamiz va eng kichik qo'zg'alishlar usuliga asosan hosil bo'lgan tenglamalarda qo'zg'alishlarga nisbatan faqat birinchi tartibli hadlar bilan chegaralanamiz hamda ushbu tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta \tilde{u} \right) \\
\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{v}, \\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Endi asosiy oqimning o'zi Nave-Stoks tenglamalarining yechimi ekanligini e'tiborga olsak, ya'ni

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Tizim (2.3) ni quyidagi ko'rinishga yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{v} \end{aligned}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Qo'zg'aluvchan harakat uchun tok funksiyasini kiritamiz

$$\Psi(x, y, t) = \psi(y) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.6)$$

bu yerda $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$ - qo'zg'alishlarning kompleks amplitudasi, k - haqiqiy miqdor bo'lib, u to'lqin uzunligi l bilan quyidagi munosabat orqali bog'langan $l = 2\pi/k$. Miqdor ω - kompleks, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, bu yerda ω_r - alohida olingan tebranishning doiraviy amplitudasi, ω_i - esa o'sish koefitsienti, ya'ni, tebranishlarning o'sishi yoki so'nishi to'g'risida mulohaza yuritishga imkon beradigan miqdor. Agar $\omega_i < 0$ bo'lsa u holda, tebranishlar so'nadi va laminar oqim turg'un bo'ladi, agar $\omega_i > 0$ bo'lsa, u holda turg'unmaslik o'rinli bo'ladi. Miqdorlar k va ω dan tashqari ularning nisbati $\lambda = \frac{\omega}{k} = \lambda_r + i\lambda_i$ ni kiritish maqsadga muvofiq. Miqdor $\lambda_r - x$ yo'nalish bo'yicha to'lqinlarning tarqalish tezligini ifodalaydi (fazaviy tezlik), λ_i - esa yana tebranishlarning so'nishi yoki o'sishi haqida mulohaza yuritishga imkon beradigan miqdor.

Qo'zg'alishlar harakati amplitudasi $\psi(y)$ ni faqat y o'zgaruvchiga bog'liq deb qarash qabul qilingan, chunki asosiy oqim $U(y)$ ham faqat y o'zgaruvchiga bog'liq. Tok funksiyasi (2.6) qo'zg'alishlar tezlik vektorlari $\tilde{u}$ va $\tilde{v}$ bilan quyidagi munosabatlar orqali bog'langan:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \psi'(y) e^{i(kx - \omega t)} \\ \tilde{v} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\psi(y) e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

bu bilan uzluksizlik tenglamasi (2.5) o'z-o'zidan integrallanadi, uchta no'malum $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ ga bog'liq bo'lgan ikkita tenglama (2.4) ga ega bo'lamiz. Tenglama (2.4) dan bosim $\tilde{p}$ ni yo'qotamiz, buning uchun tizim (2.4) ning birinchi tenglamasini y o'zgaruvchi bo'yicha, ikkinchisini esa x o'zgaruvchi bo'yicha differensiallaymiz hamda ularning birinchisidan

ikkinchisini ayiramiz va munosabat (2.7) ni e'tiborga olib Orr - Zommerfeld tenglamasi uchun xos qiymat muammosiga ega bo'lamiz.

2.2-§. To'g'ri kanallardagi suyuqliklar oqimini matematik modellashtirish

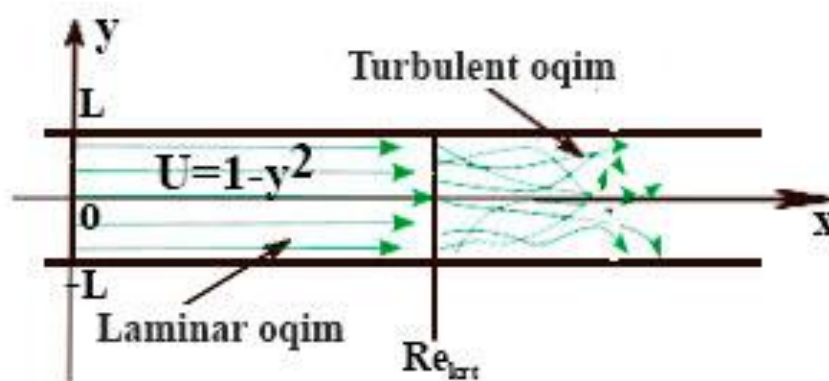
Real suyuqliklarning harakati ko'pincha laminar oqimlar harakatidan keskin farqlanadi. Ular ayrim maxsus xususiyatga ega bo'lib, ushbu xususiyat turbulentlik deb ataladi. Reynolds sonining ortib borishi bilan real suyuqliklarning quvurlardagi, kanallardagi va chegaraviy qatlamda laminar formadagi oqimning turbulentlikka o'tishi yaqqol kuzatiladi.

[1-3] ishda keltirilgan klassik natijalarga tayangan holda gidrodinamik turg'unlik muammosining mohiyatini bayon qilamiz. Yopishqoqlik suyuqlikning o'zaro qo'shni qatlamlarining bir-biriga nisbatan siljishiga qarshilik ko'rsatish xossasini akslantiradi. Boshqacha qilib aytganda, qatlamli (laminar) oqimlarda yopishqoqlik ichki ishqalanishni vujudga keltiradi, u qatlamlar chegaralaridagi urinma kuchlanishlar miqdorini, ya'ni, birlik yuzaga mos keluvchi urinma kuch miqdorini ifodalaydi. Suyuqlikning ayrim konsentrik qatlamlari bir-biriga nisbatan siljiydi hamda bu siljish shunday amalga oshadiki, tezlik hamma joyda o'q bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Bunday turdagi harakat laminar oqim deb ataladi (lotincha "lamina"- qatlam so'zidan olingan).

Laminar oqimning turbulent oqimga o'tishi turbulentlikning paydo bo'lishi deb ham ataladi, butun gidrodinamika sohasida muhim ahamiyatga ega. Dastlab bunday o'tish hodisasi quvur va to'g'ri kanallardagi oqimlarni kuzatishda sezilgan. Uzun o'zgarmas ko'ndalang kesimga ega bo'lgan silliq to'g'ri trubada suyuqlik zarrachalari Reynolds sonining unchalik katta bo'lmagan qiymatlarida o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chiziqli traektoriya bo'ylab harakatlanadi. Yopishqoqlik tufayli, suyuqlikning chegaraga yaqin joylashgan zarrachalari, undan uzoqda joylashgan zarrachalariga nisbatan sekin harakatlanadi. Bunda oqim bir-biriga nisbatan harakatlanadigan tartiblashgan holda (qatlamli yoki laminar oqim) oqadi. Ammo, kuzatishlar ko'rsatadiki, Reynolds sonining katta qiymatlarida oqim tartiblashmagan holatga o'tib qoladi. Bu shundan dalolat beradiki, turbulent oqimda truba o'qi bo'ylab harakatlanayotgan asosiy oqimga nisbatan ko'ndalang harakat, ya'ni truba o'qiga perpendikulyar yo'nalishdagi harakat paydo bo'ladi. Ana shu ko'ndalang harakat harakatlanayotgan suyuqlikning to'liq bo'yalishiga olib keladi. Mana shunday aralashtiruvchi harakat natijasida ko'ndalang yo'nalishda

impulslar almashinadi, ayni paytda uzunasiga yoʻnalishda suyuqlikning har bir zarrachasi asosan oʻz impulsini saqlaydi. Bu shunga olib keladiki, turbulent oqimlarda quvurning koʻndalang kesimi boʻylab tezlik laminar oqimga nisbatan ancha tekis taqsimlanadi. Turbulent oqimlarni yanada batafsil tahlil qilish shuni koʻrsatadiki, uning eng asosiy alomati quyidagidan iborat: tezlik va bosim fazoning har bir fiksirlangan nuqtasida vaqt boʻyicha oʻzgarmas boʻlib qolmaydi, balki, yuqori chastotali oʻta noregulyar pulsatsiyalarga duch keladi.

Suyuqlik oqimlarining bunday turli koʻrinishlari - laminar va turbulentlikni dastlab O.Reynolds tizimli tahlil qilgan [80-81]. Aynan u tomonidan yuqorida taʼkidlab oʻtilgan va uning nomi bilan ataladigan boʻyalgan suyuqlik tajribasi oʻtkazilgan. Oʻz tadqiqotlari natijasida O.Reynolds ayniylik qonunini kashf etdi, bu qonun keyinchalik uning nomi bilan ataldi. Reynoldsning ayniylik qonuniga koʻra, laminar formadagi oqimning turbulent formaga oʻtishi doimo aynan bir xil Reynolds soni $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ qiymatida amalga oshar ekan, bu yerda ρ -zichlik, μ -suyuqlikning yopishqoqligi, U -asosiy oqimning maksimal tezligi, L -uzunlikning xarakterli masshtabi. Laminar oqimning turbulent oqimga aylanishga mos keluvchi Reynolds soni kritik Reynolds soni deb ataladi va Re_{krt} orqali belgilanadi. Oʻz navbatida $Re < Re_{krt}$, boʻlganda oqim laminar, hamda $Re_{krt} < Re$ ga mos keluvchi oqimlar turbulent boʻladi.



2.1-rasm. Toʻgʻri kanaldagi oqim

Yuqorida bayon qilingan laminar oqimning turbulent oqimga aylanishini nazariy jihatdan tahlil etish boʻyicha tadqiqotlar oʻtgan asrda olib borilgan. Ushbu tadqiqotlar asosida laminar oqimga ayrim kichik qoʻzgʻalishlar taʼsir koʻrsatadi degan gʻoya yotadi. Har bir nazariya asosiy oqimga qoʻyilgan qoʻzgʻalishlarning vaqt boʻyicha rivojlanishini

kuzatishga asoslangan, bunda ushbu qo'zg'alishlarning formasi har bir holda o'ziga xos qilib tanlab olingan. Bunda yechilishi lozim bo'lgan asosiy masala kichik qo'zg'alishlar vaqt o'tishi bilan o'sadimi yoki kamayadimi degan savolni hal qilishdan iborat edi. Vaqt o'tishi bilan qo'zg'alishlarning so'nishi asosiy oqimning turg'un ekanligini va aksincha, vaqt o'tishi bilan qo'zg'alishlarning o'sishi asosiy oqimning turg'un emasligini va uning turbulent oqimga aylanishi mumkinligini anglatadi. Ana shu yo'l bilan laminar oqimning turg'unligi nazariyasini yaratishga harakat qilingan, bu yo'l berilgan laminar oqim uchun kritik Reynolds soni Re_{krt} ni nazariy jihatdan topishga imkon beradi.

Murakkab gidrodinamik tizimlar faoliyatini tahlil qilish, ularga siqilmaydigan yopishqoq suyuqlikning to'g'ri kanallar, chegaraviy qatlam va quvurlardagi harakati hamda ularni boshqarish ko'pgina soha mutaxassislarning, ham tutash muhit mexanikasi, ham gidrodinamik turg'unlik nazariyasi, matematik modellash, kompyuterlarning matematik va dasturiy ta'minoti sohasidagi mutaxassislarning e'tiborini jalb etib kelmoqda. Ushbu masalalar katta ilmiy va amaliy ahamiyatga ega, yaratilgan matematik va dasturiy ta'minot esa gidrodinamik jarayonlarni samarali boshqarish va optimallashtirish imkonini beradi [82-105].

Orr-Zommerfeld tenglamasi uchun quyidagi differensial xos qiymat muammosi qaraladi:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left((U(\eta) - \lambda) D + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \right) \psi = 0, \quad \eta_0 < \eta < \eta_1, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) &= 0, \\ \psi(\eta_1) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Chegaraviy shartlar (2.9) birjinsli bo'lib, ular o'tkazmaslik va yonishqoqlik shartlarini ifodalaydi. Bu yerda $D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2$ - differensial operator, $U(\eta)$ - asosiy oqimning tezlik profili, η - asosiy oqimga ko'ndalang yo'naltirilgan koordinata, k - to'lqin soni, Re - Reynolds soni, $\psi(\eta)$ - qo'zg'alishlar uchun tok funksiyasi amplitudasi, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ masalaning xos qiymatlari, bu yerda λ_r - to'lqinli qo'zg'alishlarning fazaviy tezligi, λ_i - o'sish koeffitsienti. Agar $\lambda_i > 0$, bo'lsa, u holda oqim

turg'unmas, agar $\lambda_i < 0$ bo'lsa, oqim turg'un bo'ladi. Agar $\lambda_i = 0$ bo'lsa, u holda tebranishlar neytral turg'un bo'ladi. Orr-Zommerfeld tenglamasi to'rtinchi tartibli hosila oldida kichik parametr bo'lgan chiziqli bo'lmagan oddiy differensial tenglamadan iborat. Shu sababli, bunday tenglamani integrallash intervalida yechim gradienti turlicha bo'lgan sohalar mavjud bo'ladi va bu o'z navbatida tenglamaning analitik yechimini topishga imkon bermaydi. Orr-Zommerfeld tenglamasini samarali yechish usuli, algoritmi va dasturiy vositasini yaratish nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega.

2.3-§. Chegaraviy qatlamdagi suyuqliklar oqimini bosim gradientining turli qiymatlarini hisobga olgan holda matematik modellash

XX asr boshlarida L.Prandtl suyuqliklar harakati haqidagi bir-biridan ancha uzoqlashgan ikkita ideal va real suyuqliklar haqidagi fanning o'zaro yaqinlashuviga asos soldi. Bundan tashqari, amaliyotni nazariya bilan bog'lagan holda L. Prandtl kutilmagan yutuqlarga ega bo'lgan yangi bir yo'nalish yaratdi. Ishqalanishga ega suyuqliklar harakatini tavsiflaydigan Nave-Stoks tenglamalari tuzildi. Ammo, ushbu tenglamalar o'ta murakkab bo'lganligi sababli, ba'zi xususiy hollarni inobatga olmaganda ulardan ishqalanishga ega suyuqlik harakatini nazariy jihatdan tadqiq etishga foydalanib bo'lmaydi. Shu bilan birga, suv va havo uchun, y'ani texnikada juda muhim bo'lgan suyuqliklar uchun yopishqoqlik koeffitsienti juda kichik ekanligi va o'z navbatida, yopishqoqlik bilan bog'liq ishqalanish kuchi boshqa kuchlar (og'irlik kuchi va bosim kuchlari) ga nisbatan umuman olganda unchalik katta emasligi, shu sababli, uzoq vaqt mobaynida juda kichik ishqalanish kuchlari suyuqlikning harakatiga hal qiluvchi ta'sir ko'rsatishini sezishmagan, bu kuchlarni klassik nazariyada juda kichik deb hisoblab, ularni inobatga olishmagan.

1904 yilda L.Prandtl o'zining Geydelberg shahrida matematiklar kongressida "Kichik ishqalanishga ega bo'lgan suyuqlik harakati haqida" deb nomlangan [22] ma'ruzasida ishqalanishga ega bo'lgan suyuqlik harakatining amaliy jihatdan muhim bo'lgan masalalarini nazariy jihatdan tadqiq etish yo'lini asoslab berdi. U nazariy mulohazalar va ba'zi sodda eksperiment natijalariga tayangan holda suyuqlikdagi jism atrofidagi oqimni ikkita sohaga bo'lish mumkin ekanligini ko'rsatdi: jism atrofidagi juda kichik qatlam sohasi (chegaraviy qatlam), bu yerda ishqalanish muhim rol o'ynaydi va bu qatlamdan tashqaridagi soha, bu sohada ishqalanishni inobatga olmaslik mumkin. Ushbu gipoteza, bir tarafdin,

qarshilik muammosida yopishqoqlikning rolini fizik jihatdan juda yaxshi tushuntirishga, boshqa tarafdin mavjud matematik qiyinchiliklarni bartaraf etishga va ishqalanishga ega suyuqliklarni nazariy tadqiq etishga yo'l ochib berdi.

Shunday qilib, L.Prandtl gipotezasi nazariya va amaliyot o'rtasida yo'qolib ketgan aloqani tikladi. Prandtlning chegaraviy qatlam nazariyasi o'ta sermahsul bo'lib, uning [22] maqolasi chop etilgandan keyin kelgusi nazariy tadqiqotlar uchun kuchli turtki vazifasini o'tadi.

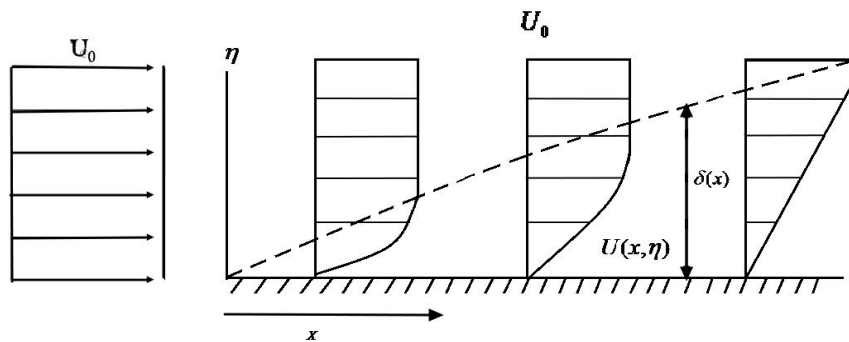
Chegaraviy qatlam nazariyasining tatbiq etish sohasi sifatida, suyuqlikda harakatlanayotgan jismga ta'sir etuvchi qarshilikni hisoblash, kema, qanot profili, samolyot fyuzellaji yoki turbina parraklarida ishqalanish qarshiliklarini hisoblashlarni eslatib o'tish kifoya. Chegaraviy qatlamning o'ziga xosligi shundaki, devorga (chegaraga) bevosita yaqin bo'lgan sohada teskari oqim paydo bo'ladi. Ushbu xossaga bog'liq ravishda chegaraviy qatlamning jismdan uzilishi va kuchsiz hamda kuchli uyurmalar hosil bo'lishi kuzatiladi. Ushbu hodisa suyuqlikdagi jism sirtida bosim taqsimoti turlicha bo'lishiga olib keladi, ayni shu paytda jismdan juda uzoq masofada oqimni ishqalanishsiz harakatlanayapti deb hisoblash mumkin, bu suyuqlikda harakatlanayotgan jismga nisbatan bosim qarshiligining paydo bo'lishiga sabab bo'ladi.

Chegaraviy qatlam nazariyasi ushbu qarshilikni hisoblash yo'lini ko'rsatadi. So'ngra chegaraviy qatlam nazariyasi shunday muhim savolga javob beradi: suyuqlik oqimining jismdan ajralib, uzilib ketmasligi uchun suyuqlikdagi jism qanday formaga ega bo'lishi lozim. Ammo, oqimning jismdan ajralib ketishini nafaqat suyuqlikdagi harakatlanayotgan jism, balki, kanallardagi suyuqlik oqimlarida ham kuzatish mumkin. O'z navbatida chegaraviy qatlam nazariyasi gidravlik va gazli mashinalarda (nasos va turbinalar) parraklararo kanallarda mavjud bo'ladigan oqimlarni tadqiq etish imkoniyatini beradi. Faqat chegaraviy qatlam nazariyasi orqaligina samolyot qanoti ko'tarish kuchining maksimal qiymatiga ega bo'lishi hamda oqimning qanotdan uzilishida paydo bo'ladigan hodisalarni tushuntirish imkoniyati bo'ladi.

Dastlab, chegaraviy qatlam nazariyasi asosan siqilmaydigan muhitdagi oqimga nisbatan ko'rib chiqilgan. Bunday oqimlarda ishqalanish kuchi Stoksning ishqalanish qonuni asosida hisoblangan. Bu yo'nalishdagi tadqiqotlar juda ko'p sonli izlanishlarda o'z ifodasini topgan va asosan ularni yakunlangan deb hisoblash mumkin.

Yuqorida keltirilgan Prandtl nazariyasiga asoslangan holda yarimcheksiz tekis plastinkada siqilmaydigan yopishqoq suyuqlikning

harakati tenglamasi qaraladi va asosiy oqim tezlik profilining bosim gradientiga bogʻliqligi tahlil etiladi. Tekis kanaldagi suyuqlik oqimidan farqli ravishda chegaraviy qatlamda oʻlchamsiz parametrlarni kiritish oʻziga xos xususiyatlarga ega. Shu sababli, chegaraviy qatlamda oʻlchamsiz parametrlarni kiritish masalasi hal etiladi va ushbu masala matematik nuqtai-nazardan asoslanadi. Chegaraviy qatlamda siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatini tavsiflovchi differensial xos qiymat muammosi deyiladi. Yarimcheksiz tekis plastinkadagi chegaraviy qatlamni qaraymiz, u 2.2- rasmda keltirilgan.



2.2-rasm. Yarimcheksiz plastinkadagi chegaraviy qatlamda asosiy oqimning tezlik profili

Oqib kelayotgan oqim tezligini U_0 - orqali belgilaymiz, x oʻqini plastinka boʻylab, η koordinatani plastinkaga perpendikulyar qilib yoʻnaltiramiz, koordinata boshini esa plastinkaning oldingi qismiga joylashtiramiz.

Ushbu masala chegaraviy qatlamda Orr-Zommerfeld tenglamasi uchun xos boʻlgan qiymat muammosiga olib keladi:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left((U(\eta) - \lambda) D + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \right) \psi = 0, \quad \eta_0 < \eta < \eta_l, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) &= 0, \\ \psi(\eta_l) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_l) &= 0, \quad \eta_l \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bunda chegaraviy shartlar birjinsli boʻlib, ular suyuqlikning chegaradan oʻtib ketmasligi va yopishqoqligini ham chegaradan uzoqda qoʻzgʻalishlar

soʻnishini ifodalaydi. Bu yerda $D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2$ - differensial operator, $U(\eta)$ - asosiy oqimning tezlik profili, η - asosiy oqimga koʻndalang yoʻnaltirilgan koordinata, $k = 2\pi/l$ - toʻlqin soni, l - toʻlqin uzunligi, k son 2π kesmada nechta toʻlqin borligini aniqlaydi, $Re = \rho UL/\mu$ - Reynolds soni, ρ , μ - tegishli suyuqlikning zichligi va yopishqoqligi, $\psi(\eta)$ - qoʻzgʻalishlar uchun tok funksiyasi amplitudasi, U, L - tegishli xarakterli tezlik va uzunlik masshtablari, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ - masalaning xos qiymatlari boʻlib, λ_r - toʻlqin tebranishlarining fazaviy tezligi, λ_i - oʻsish koefitsienti. Agar $\lambda_i > 0$ boʻlsa, oqim turgʻunmas, agar $\lambda_i < 0$ boʻlsa turgʻun. Agar $\lambda_i = 0$ boʻlsa, tebranishlar neytral turgʻun boʻladi. Tekislik (k, Re) da $\lambda_i = 0$ boʻladigan nuqtalar toʻplami egri chiziqni tashkil etadi, bu egri chiziq neytral turgʻunlik egri chizigʻi deyiladi. Tadqiqotda tekis plastinkadagi laminar oqim turgʻunligi bosim gradientining turli qiymatlarida tadqiq etiladi, neytral turgʻunlik egri chiziqlarining tekislikdagi oʻrni aniqlanadi. Shunday qilib, tenglama (2.10) dagi $U(\eta)$ funksiya chegaraviy qatlamdagi tezlik profilidan iborat boʻlsin.

Yopishqoq suyuqliklar plastinkaga yopishadi, bu plastinkaga yaqin sohada suyuqlikning plastinkaga ishqalanishi hisobiga yupqa qatlam hosil boʻlishiga olib keladi, bu qatlamning mavjudligi tok chiziqlari harakatini keskin oʻzgartirib yuboradi. Ushbu yupqa qatlamda oqimning tezligi plastinkadagi nol (yopishqoqlik) qiymatdan oʻzining tashqi oqimdagi toʻliq qiymatigacha yetadi, ushbu tashqi oqimda suyuqlikni ishqalanishsiz harakatlanayapti deb qarash mumkin. Hosil boʻlgan yupqa qatlam chegaraviy qatlam yoki ishqalanish qatlami deb ataladi. Chegaraviy qatlam qalinligini $\delta(x)$ orqali belgilaymiz. Ushbu qatlam plastinkaning bosh qismidan uzoqlashib borganda asta-sekin oʻsib (kengayib) boradi.

Koʻrinib turibdiki, bu holda tezlik profili ikkita koordinataga bogʻliq boʻladi, yaʼni x va η dan $U(x, \eta)$. Monografiya [1] da koʻrsatilishicha, tezlik $U(x, \eta)$ va η uchun mos masshtablarni shunday tanlash mumkinki, bunda tezlik profillari $U(x, \eta)$ plastinkaning oldingi qismidan ixtiyoriy x masofalarda affin-oʻxshash boʻladi. Tezlik profili $U(x, \eta)$ uchun xarakterli masshtab sifatida oqib kelayotgan oqim tezligi U_0 ni, koordinata η uchun xarakterli masshtab qilib chegaraviy qatlam qalinligi $\delta(x)$ ni olish mumkin. Bunday holda chegaraviy qatlamdagi tezlik profillari oʻzaro affin-oʻxshash boʻladi va faqat bitta η koordinata orqali xarakterlanadi, yaʼni $U = U(\eta)$.

Bunda tenglama (1.9) uchun xarakterli o'lchamsiz parametrlar to'plami ushbu formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$\text{Re} = U_0 \delta / \nu, \quad \delta = \sqrt{2\nu L / U_0}, \quad k\delta = (2\pi / l)\delta = G \text{Re}.$$

$$G_1 = 2\pi / R_1, \quad R_1 = lU_0 / \nu$$

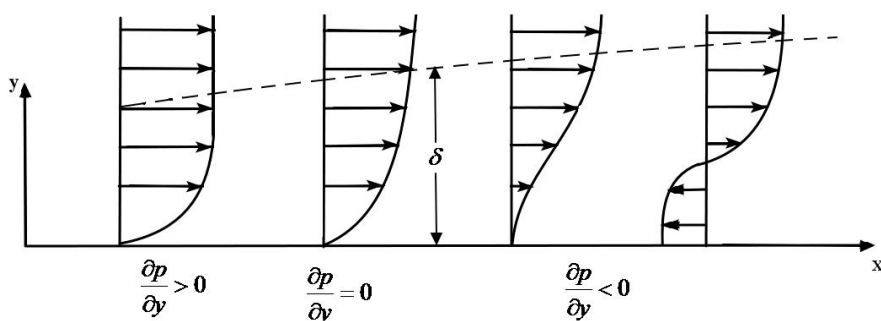
Bu yerda $\nu = \mu / \rho$ - kinematik yopishqoqlik, U_0 - chegaraviy qatlamlardan tashqaridagi xarakterli tezlik, L - plastinka bo'ylab xarakterli uzunlik, δ - chegaraviy qatlamning qalinligi, l - qo'zg'alishlarning to'lqin uzunligi, k , G - to'lqin soni, R_1 - to'lqin uzunligi bo'yicha Reynolds soni, Re - Reynolds soni. Chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\psi(\eta) = \frac{d\psi}{d\eta} = 0, \text{ agar } \eta = 0$$

$$\psi(\eta), \frac{d\psi}{d\eta} \rightarrow 0, \text{ agar } \eta \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Bu shartlardan birinchisi chegaradan o'tib ketmaslik va yopishqoqlik shartlaridir, ikkinchisi esa, chegaradan uzoqda qo'zg'alishlarning so'nishini bildiradi.

Chegaraviy qatlamda bosim gradienti o'zgarishi asosiy oqim profilining ham o'zgarishiga olib keladi, buni ushbu 2.3 rasmdan ko'rish mumkin.



2.3-rasm. Asosiy oqim profilining bosim gradientiga bog'liqligi

Chegaraviy qatlamda tormozlangan suyuqlikning qanday sharoitlarda tashqi oqimga ko'chib o'tishini aniqlashimiz lozim, boshqacha qilib aytganda, qanday sharoitlarda oqim chegaradan ajraladi. Agar jism konturi bo'yicha bosim ortib boradigan soha mavjud bo'lsa, u holda unchalik katta kinetik energiyaga ega bo'lmagan va chegarada tormozlangan suyuqlik,

bosim gradienti yuqori bo'lgan sohaga o'tish holatiga ega bo'lmaydi. Buning o'rniga tormozlangan suyuqlik yuqori bosim sohasidan chetlashadi va jismdan uziladi hamda plastinkadan tashqi oqimga tomon qisiladi. Bundan tashqari, plastinkaga yaqin sohada tormozlangan suyuqlik zarrachalari bosim gradienti ta'sirida odatda tashqi oqim yo'nalishiga teskari bo'lgan yo'nalishda harakatlanadi.

Chegaraviy qatlamda asosiy oqim profili $U(\eta)$ Fokner-Sken tenglamasi yechimining birinchi hosilasi sifatida aniqlanadi.

$$f''' + f'' + \beta[1 - (f')^2] = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (2.13)$$

tenglama (2.13) quyidagi boshlang'ich shartlar bilan qoraladi:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = f_0. \quad (2.14)$$

Formparametr β ning turli qiymatlariga turli oqim profillari $U(\eta)$ va boshlang'ich shart f_0 mos keladi. Parametr β ning musbat qiymatlariga bosim gradientining manfiy qiymatlari to'g'ri keladi. Formparametr β va boshlang'ich shart f_0 ning bog'lanishini ko'rsatuvchi 2.1-jadvalni keltiramiz [2]:

2.1-jadval

Chegaraviy qatlamda boshlang'ich qiymatni tanlash

β	f_0	$A(\beta)$
-0,19	0,086	2,007
-0,16	0,1905	1,708
0	0,4696	1,217
0,2	0,6869	0,984
0,4	0,8353	0,8342

Bundan tezlik profili $U(\eta) = f'$ ni topish uchun tizim (2.13), (2.14) ni birinchi tartibli uchta oddiy differensial tenglamalar tizimiga keltiramiz.

III BOB. SIQILMAYDIGAN YOPISHQOQ SUYUQLIKLAR OQIMI NOSTATSIONAR JARAYONLARINING SONLI ALGORITMLARI

Ushbu bobda spektral-to‘r usulining algoritmini qo‘llanish ketma-ketligi, xosmas almashtirishlar matritsasini tuzish texnologiyasi, usulning samaradorligini baholash, uning yuqori aniqlik tartibiga ega ekanligini asoslashga oid ma’lumotlar keltiriladi.

3.1-§. Hidrodinamik turg‘unlik muammosi uchun spektral-to‘r usuli sonli algoritmi

Xos qiymat muammosi (2.8), (2.9) ning barcha xos qiymatlari, ya’ni, xos qiymatlar spektrini topishga mo‘ljallangan usullar spektral usullar deb ataladi.

Ushbu paragrafda differensial xos qiymat muammosi (2.8), (2.9) ni spektral-to‘r usuli bilan modellashtirish va diskret xos qiymat muammosiga keltirish qaraladi. Differensial tenglama (2.8) da yuqori tartibli hosila to‘rtinchi tartibli bo‘lganligi uchun spektral-to‘r usulini yaratishda tenglama (2.8) ning yechimi va uning uchinchi tartibligacha bo‘lgan hosilalarining uzluksizligini hamda chegaraviy nuqtalarda mos chegaraviy shartlar (2.9) ning qanoatlantirilishi talab qilinadi. Spektral-to‘r usulini yaratishda xos qiymat muammosi (2.8), (2.9) ni integrallash intervali $[\eta_0, \eta_l]$ da to‘r kiritamiz $\eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_N = \eta_l$ va shunday qilib N ta turli elementlarga ega bo‘lamiz:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \dots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \dots, [\eta_{N-1}, \eta_N], \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Differensial tenglama (2.8) to‘rning har bir elementida quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$D^2\psi_j - ik \operatorname{Re}[(U_j(\eta) - \lambda)D - U_j''(\eta)]\psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

Chegaraviy shartlar (2.8) η_0 va η_N nuqtalarda qo‘yiladi:

$$\psi_1(\eta_0) = \frac{d\psi_1}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi_N(\eta_N) = \frac{d\psi_N}{d\eta}(\eta_N) = 0, \quad (3.2)$$

to‘rning ichki tugunlarida tenglama (3.1) ning yechimi va uning 3-tartibligacha bo‘lgan hosilalarining uzluksizligini talab etamiz. Bu shartlar ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\psi_j^{(t)}(\eta_j) = \psi_{j+1}^{(t)}(\eta_j), \quad t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

bu erda t –hosila tartibini ko‘rsatadi.

Tenglama (3.1) ning yechimi ψ_j ni birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori ko‘rinishida izlaymiz. Buning uchun har bir $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ to‘r elementni $[-1, 1]$ intervalga quyidagi o‘zgaruvchini almashtirish orqali akslantiramiz:

$$\eta = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y, \quad m_j = \eta_j + \eta_{j+1}, \quad l_j = \eta_j - \eta_{j+1},$$

bu yerda l_j –orqali, j –to‘r elementi uzunligi belgilangan. Ushbu almashtirishdan keyin tenglama (3.1) quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$D_j^2 \psi_j - ik_j \operatorname{Re}_j [(U_j(y) - \lambda) D_j - U_j''(y)] \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4)$$

bu yerda:

$$D_j = \frac{d^2}{dy_j^2} - k_j^2, \quad k_j = \frac{l_j}{2} k, \quad \operatorname{Re}_j = \frac{l_j}{2} \operatorname{Re}.$$

Shartlar (3.2), (3.3) dan

$$\psi_1(-1) = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dy}(-1) = 0,$$

$$l_j^{-t} \psi_j^{(t)}(+1) = l_{j+1}^{-t} \psi_{j+1}^{(t)}(-1), \quad t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \psi_N(+1) &= 0, \\ \frac{d\psi_N}{dy}(+1) &= 0. \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz.

Differensial masala (3.4)-(3.5) ning taqribiy yechimini to‘rning har bir elementida ushbu ko‘rinishda izlaymiz

$$\psi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y), \quad (3.6)$$

$$U_j(y_l^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_l^{(j)}),$$

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, 2, \dots, p_j; \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

bu yerda: $T_n(y)$ – birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari, $y_l^{(j)}$ – ularning tugunlari, p_j – esa yechimni to‘rning j – elementida approksimatsiyalash uchun foydalaniladigan ko‘phadlar soni.

Asosiy oqim $U_j(y)$ ning qatorga yoyilmasidagi $b_n^{(j)}$ koeffitsientlar quyidagi teskari Chebishev almashtirishi orqali aniqlanadi:

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n = 0, 1, \dots, p_j,$$

$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_m = 1, \text{ agar } m \neq 0, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Spektral-to‘r usulining bayon qilinishini yengillashtirish maqsadida tenglama (3.4) ni operatorli ko‘rinishda yozamiz, ya’ni:

$$L_j \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

bu yerda L_j ushbu formula bilan aniqlanadigan differensial operator

$$L_j = D_j^2 - ik_j \operatorname{Re}[(U_j(y) - \lambda) D_j - U_j''(y)].$$

Qatorlar (3.6) ni tenglama (3.7)ga qo‘yib, tenglamaning chap tarafining har bir to‘r elementida dastlabki $(p_j - 4)$ ta Chebishev ko‘phadlariga ortogonal bo‘lishini talab qilamiz, ya’ni:

$$(L_j \psi_j, T_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p_j - 4, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

bu yerda $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-1/2} dx$, $[-1, 1]$ kesmadagi skalyar ko‘paytma.

Bundan tashqari, Chebishev ko‘phadlari qatori (3.6) chegaraviy va uzluksizlik shartlari (3.5) ni aniq qanoatlantirishi talabini ham qo‘yamiz. Bu shartlar quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^n a_n^{(j)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(1)} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{p_1} a_n^{(j)} &= \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^n a_n^{(j+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{l_j} \sum_{n=0}^{p_j} n^2 a_n^{(j)} = \frac{1}{l_{j+1}} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(j+1)},$$

$$\frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) = \frac{1}{l_{j+1}^2} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n''(-1), \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{l_j^3} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n'''(+1) = \frac{1}{l_{j+1}^3} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n'''(-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\sum_{n=0}^{p_N} a_n^{(N)} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{p_N} n^2 a_n^{(N)} = 0.$$

Formula (3.9) da Chebishev ko'phadlarining hosilalari quyidagi rekurrent formulalar bo'yicha hisoblanadi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$T'_{n+1}(x) = 2xT'_n(x) + 2T_n(x) - T'_{n-1}(x), \quad T'_0(x) = 0, \quad T'_1(x) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.10)$$

$$T''_{n+1}(x) = 2xT''_n(x) + 4T'_n(x) - T''_{n-1}(x), \quad T''_0(x) = 0, \quad T''_1(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$T'''_{n+1}(x) = 2xT'''_n(x) + 6T''_n(x) - T'''_{n-1}(x), \quad T'''_0(x) = 0, \quad T'''_1(x) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Spektral-to'rt usuli (3.8) va (3.9) ni umumlashgan algebraik xos qiymat muammosi ko'rinishida yozish mumkin. Shunday qilib, spektral-to'rt usulini qo'llanish natijasida, $\bar{m} = N(p_j + 1)$ ta noma'lumlar $a_n^{(j)} (n = 0, 1, 2, \dots, p_j, j = 1, 2, \dots, N)$ ni topish uchun $\bar{m} = N(p_j + 1)$ ta tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar sifatida: $N(p_j - 3)$ ta ortogonallik tenglamalari (3.8) va munosabat (3.9) dagi $4(N-1)$ ta uzluksizlik shartlari va 4 ta chegaraviy shartlardir. Hosil bo'lgan tizimni matritsali ko'rinishda yozish qulay :

$$(A - \lambda B)x = 0, \quad (3.11)$$

bu yerda A va B kompleks matritsalar maxsus ko'rinishdagi blokli-diagonalli strukturaga ega bo'ladi, x vektor esa qator (3.6) dagi $a_n^{(j)}$ koeffitsientlarni o'z ichiga oladi, ya'ni:

$$x^T = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)}).$$

Tizim (3.11) ning xarakterli xususiyati shundaki, matritsa B - xos matritsa (chunki, (3.10) shartlar λ ga bog'liq emas) va $4N$ ta nol satrlarga ega, bu yerda N – to'ring elementlari soni. A va B kompleks matritsalar quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x \\ 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x & 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ 0 & 0 & 4 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & & & 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ & & & & & & 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

vektor x esa qator (3.6) dagi $a_N^{(j)}$ koeffitsientlardan tashkil topgan bo‘ladi, ya’ni :

$$x^T = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{P_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{P_2}^{(2)}, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots, a_{P_N}^{(N)}).$$

Matritsalar A va B da x orqali, ushbu matritsalarining nolmas elementlari belgilangan. Ko‘rinib turibdiki, B matritsa xos matritsa bo‘lib, uning $4N$ ta nol satrlari mavjud, ular chegaraviy shartlar va uzluksizlik shartlariga mos keladi, chunki ular parametr (xos qiymat) λ ga bog‘liq emas. Matritsa A ning ushbu satrlarga mos satrlari esa butun sonlardan iborat bo‘lib, ular Chebishev ko‘phadlari va ularning uchinchi tartiblariga bo‘lgan hosilalarining -1 va 1 nuqtalardagi qiymatlaridan tashkil topgan. Ushbu butun elementlarni kompleks A matritsa tarkibida saqlash maqsadga muvofiq emas, bundan tashqari B matritsaning bu elementlarga mos satrlari nollardan iborat. Shu sababli, kompyuter dasturi tuzishda, kompleks matritsalar A va B quyidagicha tavsiflanadi:

$A(\bar{m}-4N, \bar{m})$, $B(\bar{m}-4N, \bar{m})$, bu yerga $\bar{m}$ - algebraik tizim (3.11) dagi tenglamalarning umumiy soni, N -esa srektral-to‘r usulidagi to‘r elementlari sonidan iborat. Xos qiymat muammosi (3.11) ni standart xos qiymat muammosiga keltiramiz.

Algebraik tizim (3.11) da $4N$ ta tenglamalar tizimi avtonom holatda bo‘ladi, chunki ushbu tenglamalar tizimi xos qiymat muammosining chegaraviy hamda uzluksizlik shartlariga mos keladi va ular xos qiymatlar λ dan bog‘liq emas. Bu holda tizim (3.11) ga ustunlar almashtirishlar matritsasi bilan ta’sir qilish mumkin.

Natijada tenglama (3.11) quyidagi ko‘rinishga keladi :

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0 \quad (3.12)$$

yoki

$$(AQ - \lambda BQ)Y = 0 \quad (3.13)$$

bu yerda $Y = Q^{-1}x$,

$$Y^T = (y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{P_1}^{(1)}, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{P_2}^{(2)}, \dots, y_0^{(N)}, y_1^{(N)}, \dots, y_{P_N}^{(N)}),$$

Q – esa mos xosmas almashtirish matritsasi.

Algebraik tizimning qolgan tenglamalaridan ushbu tizimga ega bo‘lamiz:

$$(T - \lambda W)\bar{Y} = 0 \quad (3.14)$$

$$\bar{Y} = Q_x^{-1}, \quad \bar{Y} = (a_4^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)} a_4^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_4^{(N)}, \dots, a_{p_n}^{(n)})$$

bu yerda W – umumiy holda xosmas kvadrat matritsa. Bu holda T va W matritsalarining tartibi $(\bar{m} - 4N) \times (\bar{m} - 4N)$ ga teng bo‘ladi, bu yerda $\bar{m}$ –spektarl-to‘r usulidagi ko‘phadlarning umumiy soni, ya’ni $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$.

Yuqorida keltirilgan Q almashtirish algebraik tizimda chegaraviy shartlar va uzluksizlik shartlaridan hosil bo‘ladigan satrlardagi ayrim elementlarni nolga aylantirishga mo‘ljallangan. Chegaraviy shartlar va uzluksizlik shartlari ko‘rinarli bo‘lishi uchun A va B matritsalar tarkibida yozilgan, aslida ularni yozmaslik lozim. Almashtirish Q chegaraviy va uzluksizlik shartlari ustida amalga oshirilganligi uchun, ular kompleks matritsalar A va B dan bo‘lak holda shakllantirilib, so‘ngra A va B matritsalariga ta’sir ettiriladi. Almashtirish Q ga asosan chegaraviy shartlar va uzluksizlik shartlariga mos keluvchi tenglamalarni quyi uchburchakli blokli diogonalli ko‘rinishga keltirishga asoslangan.

Algebraik tizim (3.14) ni chapdan w^{-1} matritsaga ko‘paytiramiz va quyidagi tizimni hosil qilamiz:

$$(D - \lambda E)Y = 0, \quad D = TW^{-1}. \quad (3.15)$$

Tizim (3.15) ning xos qiymatlari standart usullar [104] yordamida topiladi. Ushbu ishda ular QR -algoritm yordamida topilgan.

Xos qiymat muammosini yechishda xosmas almashtirishlar matritsasini tuzish umumiy ko‘rinishda berilgan. Ushbu almashtirishni amalga oshirishning maxsus ketma-ketligiga rioya qilish lozim. Ushbu paragrafda xosmas almashtirishlarni amalga oshirish texnologiyasi yoritiladi.

Tizim (3.11) dan (3.14) ko‘rinishga o‘tishni batafsil bayon qilamiz. Kompleks matritsalar A va B ga nisbatan aynan bir Q almashtirish ta’sir ettirilayotganligi sababli, almashtirishni faqat A matritsaga nisbatan bayon qilamiz hamda aynan shu almashtirish B matritsaga nisbatan ham bajarilishini nazarda tutamiz.

Shunday qilib, A matritsaning faqat birinchi blokidagi birinchi ustunni juft ustunlarga qo‘shamiz va toq ustunlardan ayiramiz. U holda A matritsa quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & x \\ 1 & 2 & 0 & 2 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x & 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ 0 & 0 & 4 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & x \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x & 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x \\ 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x & 0 & 0 & 4 & 24 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x \end{bmatrix}$$

Soʻngra, xuddi shu tariqa, $a_{22}=1$ elementga nisbatan, A matritsaning birinchi blokidagi ikkinchi satrda joylashgan barcha elementlarni nolga aylantiramiz. Buning uchun birinchi blokidagi ikkinchi ustunni 4 ga koʻpaytiramiz va uchinchi ustunga qoʻshamiz, keyin, xuddi shu ustunni 9 ga koʻpaytiramiz va toʻrtinchi ustundan ayiramiz va hokazo. Shunday qilib, A matritsaning birinchi blokidagi ikkinchi satrda faqat $a_{22}=1$ element noldan farqli boʻladi, qolgan elementlari esa nolga aylantiriladi. Bu holda AQ matritsa ushbu koʻrinishni oladi:

$$AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & x \\ 1 & 2 & 8 & -16 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x \\ 0 & 1 & 8 & 0 & \dots & x & 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ 0 & 0 & 4 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & x \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x & 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x \\ 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x & 0 & 0 & 4 & 24 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x \end{bmatrix}$$

[illegible]
$$\begin{aligned} 1 \cdot y_0^{(1)} &= 0, 1 \cdot y_1^{(1)} = 0, 4 \cdot y_2^{(1)} = 0, 24 \cdot y_3^{(1)} = 0, \\ 1 \cdot y_0^{(2)} &= 0, 1 \cdot y_1^{(2)} = 0, 4 \cdot y_2^{(2)} = 0, 24 \cdot y_3^{(2)} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ 1 \cdot y_0^{(N)} &= 0, 1 \cdot y_1^{(N)} = 0, 4 \cdot y_2^{(N)} = 0, 24 \cdot y_3^{(N)} = 0, \end{aligned}$$

Bundan ko‘rinadiki, to‘rning har bir elementi uchun xos vektorning dastlabki to‘rtta komponentasi nolga teng bo‘ladi, ya’ni:

$$\begin{aligned} y_0^{(1)} &= 0, \quad y_1^{(1)} = 0, \quad y_2^{(1)} = 0, \quad y_3^{(1)} = 0, \\ y_0^{(2)} &= 0, \quad y_1^{(2)} = 0, \quad y_2^{(2)} = 0, \quad y_3^{(2)} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ y_0^{(N)} &= 0, \quad y_1^{(N)} = 0, \quad y_2^{(N)} = 0, \quad y_3^{(N)} = 0, \end{aligned}$$

Bu holda AQ va BQ matritsalarining har bir blokidagi dastlabki to'rtta satri va dastlabki to'rtta ustunini yo'qotish mumkin.

U yoki bu hisoblash usulining samaradorligini baholashda asosiy mezon sifatida arifmetik amallar soni olinadi. Shu nuqtai-nazardan spektral-to‘r usuli (STM) ning samaradorligiga to‘xtalamiz. Xosmas almashtirishlar matritsasi Q ni qo‘llagandan keyin A va B kompleks matritsalarining satr va ustunlari soni $4N$ ga kamayadi, bu yerda N – to‘r elementlari soni. Umumiy tenglamalar soni $\bar{m}$ ning qolgan $\bar{m} - 4N$ ta tenglamalar soniga nisbati

$$q = \frac{\bar{m}}{\bar{m} - 4N}$$

ga teng.

Shunday qilib, integrallash intervalini elementlarga bo'lish natijasida har bir kompleks matritsalar A va B ning tartibi q^2 marta kamayadi. Tartibning kamayishi har bir elementlarda kam sonli ko'phadlar olinganda yana ham sezilarli bo'ladi. Haqiqatan ham, j -elementdagi ko'phadlar soni $p_j + 1$ ga teng. Bu holda ko'phadlarning umumiy soni va algebraik tenglamalar soni $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$ ga teng. Ta'kidlash lozimki, p_j differensial tenglamadagi yuqori tartibli hosila tartibidan kam bo'lmasligi lozim, ya'ni $p_j \geq 4$. Agar $p_j \geq 4$ deb olsak, barcha j lar uchun $\bar{m} = 5N$, $q = 5$ bo'ladi. Bu shuni anglatadiki, tizimdagi tenglamalar soni 5 marta kamayadi, har bir A va B kompleks matritsalarining tartibi esa 25 marta kamayadi. Quyidagi 3.1-jadvalda spektral usul (SM), bunda integrallash intervalida to'rt kiritilmaydi, spektral-to'rt usuli (STM)da tizim (3.15) dagi T va W matritsalar tartibining o'zgarishini kuzatish mumkin.

3.1-jadval

SM va STM da kompleks matritsalar tartibi

$\bar{m}$	SM	N	STM
5	1x1	1	1x1
10	6x6	2	2x2
15	11x11	3	3x3
20	16x16	4	4x4
40	36x36	8	8x8
100	96x96	20	20x20

Jadvalda $\bar{m}$ orqali SM va STM da yechimni approksimatsiyalash uchun zarur bo'lgan ko'phadlar soni keltirilgan, N esa STM dagi to'r elementlari sonini ko'rsatadi. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, ko'phadlar umumiy soni $\bar{m}$ ning ortib borishi bilan STM ning samaradorligi juda sezilarli bo'ladi.

Xos qiymat muammosi (3.15) ni QR algoritmi bilan yechishda, haqiqiy D matritsa bilan algoritmnining bitta qadamini bajarish uchun taxminan $\sim (10/3)n^3$ arifmetik amal talab etiladi, bu yerda N miqdor D matritsadagi tenglamalar sonini ko'rsatadi, biz qarayotgan D kompleks matritsa bo'lgan holda QR algoritmnining bitta qadamini bajarishga tahminan

$$\bar{Q} = (20/3)n^3,$$

arifmetik amal talab etiladi, bu yerda N miqdor D matritsaning tartibini ko'rsatadi.

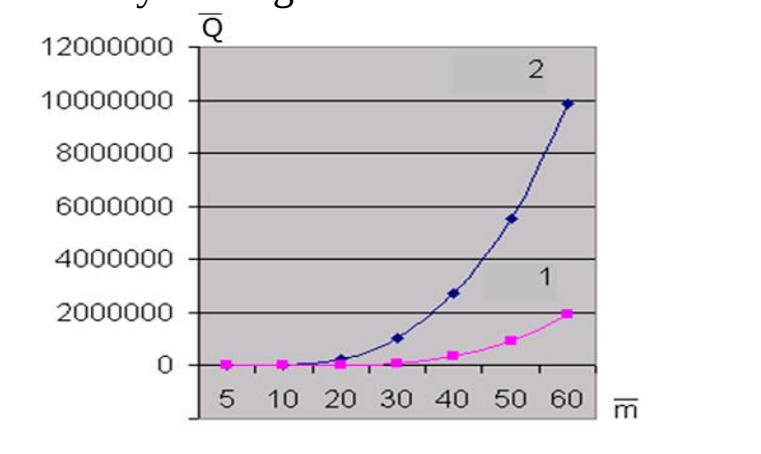
3.2-jadvalda QR-algoritmnining bitta qadami uchun sarflanadigan arifmetik amallar soni bo'yicha SM va STM taqqoslanadi.

3.2-jadval

SM va STM ning arifmetik amallar soni bo'yicha taqqoslanishi

$\bar{m}$	SM	STM	
	$\bar{Q}$	N	$\bar{Q}$
5	6	1	6
10	1440	2	53
20	27306	4	426
30	117173	6	1440
40	311040	8	3413
50	648906	10	6666
60	1170773	12	27306
70	1916640	14	70986
80	2926507	16	1463346
90	4240373	18	262026
100	5898240	20	426666

3.2-jadvaldan ko‘rinadiki, QR algoritmining bitta qadamida masalan, $\bar{m}=100$ da spektral usul (SM) 5898240 (besh million sakkiz yuz to‘qson sakkiz ming ikki yuz qirq) arifmetik amal, spektral - to‘r usuli (STM) esa atiga 426666 (to‘rt yuz yigirma olti ming olti yuz oltmish olti) amal talab etar ekan. Masalani yechish uchun QR algoritmi bilan o‘nlab va yuzlab qadamlar bajarishini e‘tiborga olsak STM ning samarali usul ekanligi ko‘rinadi. Jadvalda keltirilgan, STM ning samaradorligi 3.1-rasmda yanada yaqqol namoyish etilgan.



2.1-rasm. SM va STM ning arifmetik amallar soni bo‘yicha taqqoslanishi

Yuqorida keltirilgan 3.2-jadval va 2.1-rasmdan spektral-to‘r usulining arifmetik amallar soni bo‘yicha juda samarali usul ekanligini ko‘rish mumkin.

3.2-§. To‘g‘ri kanallardagi suyuqliklar harakati masalalarini yechish algoritmi

Ushbu paragrafda spektral-to‘r usulining aniqlik darajasi asoslanadi. Spektral-to‘r usuli bilan hisoblangan xos qiymat boshqa mualliflar tomonidan hisoblangan xos qiymatlar bilan taqqoslanadi va spektral-to‘r usulining yuqori aniqlikka ega ekanligi ko‘rsatiladi.

Spektral-to‘r usuli (STM) da to‘r elementlari soni N berilganda xos qiymatlarni yetarli aniqlik bilan topish uchun to‘r tugunlari o‘rnini to‘g‘ri joylashtirish va ko‘phadlar soni p_j ni to‘g‘ri tanlash lozim. Bu masalalar o‘zaro uzviy bog‘langan, chunki, to‘r elementlari uzunligini kichraytirish, undagi Chebishev ko‘phadlari sonini ham kamaytirishga imkon beradi va aksincha. Amalda teng oraliqli to‘rni tanlash va ularda turli sondagi ko‘phadlarni berish juda qulay. Bu holda u yoki bu to‘r elementidagi ko‘phadlar sonini tanlash ulardagi yechim gradientining qiymatlariga

bog'liq bo'ladi. Yechim gradientini ko'pincha asimptotik tahlildan kelib chiqqan holda baholash mumkin.

Chegaraviy qatlamning turg'unligi masalasida, yaxshi ma'lumki, plastinkaga (devorga) yaqin joyda – kritik qatlam deb ataluvchi qatlamda – yechimning tabiati yopishqoq yechimlarning tez o'zgarishi bilan aniqlanadi:

$$\psi \sim e^{-(k \operatorname{Re})^{1/3} y}, \quad k \operatorname{Re} \gg 1.$$

Chegaradan uzoqda qo'zg'alishlar quyidagi qonuniyat asosida sekin so'nadi

$$\psi \sim e^{-ky}, \quad k \sim 1.$$

Ko'rinib turibdiki, yechim gradientining nisbiy miqdori chegaraga yaqin joyda, chegaradan uzoqdagiga qaraganda $\sqrt[3]{\operatorname{Re}}$ marta ko'p. Shu sababli, tugunlar soni va, o'z navbatida, ko'phadlar soni chegaraga yaqin joyda $\sqrt[3]{\operatorname{Re}}$ marta ko'p bo'lishi lozim. Bu ko'phadlarni tanlashning yana ham aniq qiymatlari sonli hisoblashlar natijasida topiladi.

Tenglama (3.1) dagi parametrlar $\operatorname{Re}, k, \eta_l$ fiksirlangan $\operatorname{Re} = 580, k = 0.179, \eta_l = 20$. Ularning qiymatlari [43-45, 82-84] dagi natijalarga moslab tanlangan. Chebishev ko'phadlarining umumiy soni $\bar{m} = 46$ ga teng. 3.3-jadvalda $N = 1([0, \eta_l])$ bo'lgandagi natijalar keltirilgan. Ko'rinib turibdiki, tanlangan $\bar{m}$ uchun xos qiymat 10^{-3} absolyut aniqlik bilan topilgan.

3.3-jadval

$N = 1$	λ_r	λ_i
Spektral-to'r usuli	0.364168	0.007869
Natija[45]	0.364551	0.007781
Aniq natija[45]	0.364122	0.007959

Quyidagi 3.4-jadvalda keltirilgan natijalarda ikkita to'r elementi $[0, 10]$, $[10, \eta_l]$ ($N=2$) uchun p_1 va p_2 ko'phadlar turlicha tanlanganda aniqlikning qanday o'zgarishi ko'rsatilgan. Bunda p_1 orqali chegaraga yaqin bo'lgan elementdagi Chebishev ko'phadlari soni belgilangan. Bunda $p_1 + 1$ ($23 \div 33$) va $p_2 + 1$ ($13 \div 33$) bo'lganda aniqlik ayrim p_1 va p_2 lar uchun

bir oz past, bu $N=1$ dagiga nisbatan p_1 ning ortib borishi bilan, ya'ni $p_1+1=31$, $p_2+1=15$ da aniqlik yana 10^{-3} ga teng bo'ladi.

3.4–jadval

Ikkita to‘r elementi natijalari

p_1+1	p_2+1	λ_r	λ_i
23	23	0.371648	0.014456
25	21	0.364155	0.012028
27	19	0.362596	0.008805
29	17	0.363771	0.007890
31	15	0.3645588	0.007963
33	13	0.365354	0.008758

Xuddi shunday effektni to‘rning elementlari soni boshqacha, ya'ni $N=6$ bo‘lganda ham kuzatish mumkin (3.5–jadval). Bu holda elementlar uzunligi quyidagiga teng $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,8]$, $[8,12]$, $[12,16]$, $[16,20]$. Ko‘phadlarning to‘r elementlari bo‘yicha optimal taqsimlanishi 3.5–jadvalda keltirilgan hisoblashlarning 4-seriyasiga mos keladi. Ammo, ko‘phadlarning boshqa qiymatlarida p_j ($j=1,2,3,4,5,6$) ham dastlab berilgan aniqlik 10^{-3} sezilarli darajada kamaymasligi bu jadvaldan ko‘rinib turibdi.

3.5–jadval

Oltita to‘r elementi natijalari

p_1+1	p_2+1	p_3+1	p_4+1	p_5+1	p_6+1	λ_r	λ_i
14	12	5	5	5	5	0.363864	0.007290
15	11	5	5	5	5	0.363973	0.007762
16	10	5	5	5	5	0.364267	0.007792
17	9	5	5	5	5	0.364215	0.007883
18	8	5	5	5	5	0.364239	0.007841

Shunday qilib, hisoblashlar ko‘rsatadiki, spektral–to‘r usuli qo‘llaganda yuqori aniqlik turg‘un holatda saqlab qolinar ekan. Ayni paytda har bir A va B kompleks matritsalarining tartibi algebraik tizimda to‘r elementlari soni $N=6$ bo‘lganda to‘rt martadan ko‘proq kamayishini kuzatish mumkin, bu holda ($q^2=4,36$) bo‘ladi.

3.3-§. Chegaraviy qatlamda bosim gradientining turli qiymatlari uchun sonli algoritmnı takomillashtirish

Ushbu paragrafda chegaraviy qatlamda gidrodinamik turg'unlik muammosini yechish uchun spektral-to'rt usuli algoritmini qo'llash ketma-ketligi bayon qilinadi 3.2-§ da keltirilgan Fokner–Sken tenglamasini yechish orqali chegaraviy qatlamda asosiy oqim tezligi profilini aniqlash, so'ngra ushbu tezlik profilidan foydalangan holda chegaraviy qatlamda turg'unlik muammosini yechish uchun spektral-to'rt usuli algoritmini qo'llash bosqichlari keltiriladi.

Shunday qilib, Fokner–Sken tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasini ko'rib chiqaylik [2]:

$$f''' + f'' + \beta[1 - (f')^2] = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty \quad (3.16)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = f_0.$$

Ushbu tenglamani uchta tenglamalar tizimidan iborat bo'lgan oddiy differensial tenglamalar tizimi uchun Koshi masalasiga keltiramiz.

Quyidagi belgilashni kiritib

$$f = d_1,$$

Fokner-Sken tenglamasi (3.16) ni ushbu ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} d_1' &= d_2, \\ d_2' &= d_3, \\ d_3' &= -d_1 d_3 + \beta(d_2^2 - 1) \end{aligned}, \quad (3.17)$$

boshlang'ich shartlar (3.17) esa

$$d_1(0) = 0, \quad d_2(0) = 0, \quad d_3(0) = f_0. \quad (3.18)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu tizimni integrallash uchun to'rtinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan Runge-Kutta usulidan foydalanish mumkin.

Uchta birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar tizimi uchun Koshi masalasini yechishga mo'ljallangan Runge–Kutta usuli algoritmini bayon qilamiz. Dastlab Runge–Kutta usuli algoritmini umumiy ko'rinishda keltiramiz, so'ngra ushbu algoritmnı Fokner–Sken tenglamasi (3.17) – (3.18) ga tadbqiqini keltiramiz.

Shunday qilib, quyidagi umumiy ko‘rinishdagi tizimni yechish talab qilingan bo‘lsin:

$$\begin{aligned}x'(t) &= f_1(t, x, y, z), \\y'(t) &= f_2(t, x, y, z), \quad 0 < t \leq \eta_l \\z'(t) &= f_3(t, x, y, z)\end{aligned}\tag{3.19}$$

Tizim uchun boshlang‘ich shartlar

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \tag{3.20}$$

berilgan bo‘lsin. Integrallash intervali $[0, \eta_l]$ ga teng oraliqli to‘r kiritamiz, ya’ni

$$t_n = nh, \quad h=0,1,2,\dots,M, \quad \eta_l = Mh,$$

bu yerda: $h = \eta_l / M$ - to‘rning qadami.

Tizim (3.19), (3.28) ni yechish uchun Runge-Kutta usuli algoritmi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\begin{aligned}k_1 &= hf_1(t_n, x_n, y_n, z_n), \\b_1 &= hf_2(t_n, x_n, y_n, z_n), \\f_1 &= hf_3(t_n, x_n, y_n, z_n), \\k_2 &= hs_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{f_1}{2}\right), \\b_2 &= hs_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{f_1}{2}\right), \\f_2 &= hs_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{f_1}{2}\right), \\k_3 &= hs_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{f_2}{2}\right), \\b_3 &= hs_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{f_2}{2}\right), \\f_3 &= hs_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{f_2}{2}\right),\end{aligned}$$

$$k_4 = h s_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + f_3),$$

$$b_4 = h s_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + f_3),$$

$$f_4 = h s_3(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + f_3),$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4),$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4),$$

bu yerda $n=0,1,\dots,M-1$. Endi Runge - Kutta usuli algoritmini Fokner - Sken tenglamasi (3.17)-(3.18) ni yechishga tatbiq etamiz.

Asosiy oqimning tezlik profili $U(\eta) = f'$ ni aniqlash uchun tenglama (3.16) da quyidagi belgilashni kiritamiz

$$f = d_1, \quad d_1' = d_2, \quad d_2' = d_3.$$

va quyidagi Koshi masalasi ko'rinishida yozamiz

$$\begin{cases} d_1' = d_2 \\ d_2' = d_3 \\ d_3' = -d_1 d_3 + \beta(d_2^2 - 1) \end{cases} \quad (3.21)$$

Tizim (3.5) ushbu boshlang'ich shartlar bilan yechiladi

$$\begin{aligned} d_1(0) &= d_0^{(1)} = 0 \\ d_2(0) &= d_0^{(2)} = 0 \\ d_3(0) &= d_0^{(3)} = f_0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sonli hisoblashlar o'tkazish uchun integrallash intervali $(0, \infty)$ dagi, cheksizlikni katta, ammo chekli miqdor η_l bilan almashtiramiz. Shunday qilib, yangi integrallash intervali $[0, \eta_l]$ ga ega bo'lamiz.

Bu holda yuqorida keltirilgan Runge-Kutta usuli algoritmi tizim (3.21), (3.22) uchun quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h d_n^{(2)} \\
b_1 &= h d_n^{(3)} \\
f_1 &= h[-d_n^{(1)} d_n^{(3)} + \beta((d_n^{(2)})^2 - 1)] \\
k_2 &= h(d_n^{(2)} + \frac{b_1}{2}) \\
b_2 &= h(d_n^{(3)} + \frac{f_1}{2}) \\
f_2 &= h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_1}{2})(d_n^{(3)} + \frac{f_1}{2}) + \beta((d_n^{(2)} + \frac{b_1}{2})^2 - 1)] \\
k_3 &= h(d_n^{(2)} + \frac{b_2}{2}) \\
b_3 &= h(d_n^{(3)} + \frac{f_2}{2}) \\
f_3 &= h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_2}{2})(d_n^{(3)} + \frac{f_2}{2}) + \beta((d_n^{(2)} + \frac{b_2}{2})^2 - 1)] \\
k_4 &= h(d_n^{(2)} + b_3) \\
b_4 &= h(d_n^{(3)} + f_3) \\
f_4 &= h[-(d_n^{(1)} + k_3)(d_n^{(3)} + f_3) + \beta((d_n^{(2)} + b_3)^2 - 1)] \\
d_{n+1}^{(1)} &= d_n^{(1)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
d_{n+1}^{(2)} &= d_n^{(2)} + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) \\
d_{n+1}^{(3)} &= d_n^{(3)} + \frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\
n &= 0, 1, \dots, M-1
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$d_0^{(1)} = 0, \quad d_0^{(2)} = 0, \quad d_0^{(3)} = f_0.$$

Tizim (3.23) ni yechish natijasida teng oraliqli to‘r tugunlari $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, M-1$, $Mh = t_n = \eta_l$ da asosiy oqim tezlik profili $U(\eta)$ ning qiymatlari aniqlanadi. Bu qiymatlar quyidagilardan iborat bo‘ladi

$$U(0) = d_0^{(1)} = 0, \quad U(h) = d_1^{(1)} = 0, \quad U(2h) = d_2^{(1)}, \dots, U(\eta_l) = d_n^{(1)}.$$

Ko‘rinib turibdiki, asosiy oqimning tezlik profili teng oraliqli qadamlar bilan hisoblangan. Asosiy oqim tezlik profili $U(\eta)$ ni birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori ko‘rinishida ifodalash uchun tezlik profilining hisoblangan qiymatlarini Chebishev ko‘phadlari tugunlariga interpolatsiyalash lozim, ya’ni

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, \dots, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

tugunlarda tezlik profili $U_j(y_l^{(j)})$ ning qiymatlari aniqlanadi. So'ngra asosiy oqimning tezlik profilini quyidagi birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida ifodalaymiz

$$U_j(y_l^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_l^{(j)}),$$

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, \dots, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

bu yerda $T_n(y)$ - birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari, $y_l^{(j)}$ - ularning tugunlari, p_j - esa oqim profilini to'ring j - elementida approksimatsiyalash uchun zarur bo'lgan ko'phadlar soni. $U_j(y_l^{(j)})$ funksiyaning qatorga yoyilmasidagi $b_n^{(j)}$ koefitsientlar quyidagi teskari Chebishev almashtirishi yordamida aniqlanadi:

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n = 0, 1, \dots, p_j,$$

$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_m = 1 \text{ agar } m \neq 0, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Xos qiymat muammosi (3.1)-(3.2) ni yechishga spektral-to'r usulini qo'llanish bir qator afzalliklarga ega: bular birinchidan, Chebishev ko'phadlarini integrallash intervalida yechim gradientiga mos qilib taqsimlash, ikkinchidan yechilishi lozim bo'lgan algebraik tizim matritalari tartibini keskin kamaytirish, uchinchidan xos qiymat muammosining barcha xos qiymatlarini yuqori aniqlik bilan topishdan iborat.

Differensial masala (3.4)-(3.5)ni spektral-to'r usuli bilan yechishda olinadigan algebraik tizim qo'yidagi ko'rinishda bo'ladi, bunda Chebishev ko'phadlariga ortogonallik shartlaridan quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24ik_j \operatorname{Re}_j} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} [p^3(p^2-4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2-4)^2] a_p^{(j)} - \\ & - \frac{2k_j}{i \operatorname{Re}_j} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} p(p^2-n^2) a_p^{(j)} + \frac{k_j^3}{i \operatorname{Re}_j} c_n a_p^{(j)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=n+2}^{p_j} a_p^{(j)} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{2} \\ |m| < p-2 \\ |n-m| \leq p_j}} p(p^2 - n^2) \bar{b}_{n-m}^{(j)} - k_j^2 \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{a}_p^{(j)} \bar{b}_{n-m}^{(j)} - \right. \\
& \left. - \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{a}_p^{(j)} \sum_{\substack{p=(n=p)+2 \\ m \equiv p \pmod{2}}} m[m^2(n-p)^2] \bar{b}_{n-m}^{(j)} \right\} - \lambda \left[k_j^2 c_n a_p^{(j)} - \sum_{\substack{p=n-2 \\ p \equiv n \pmod{2}}} p(p^2 - n^2) a_p^{(j)} \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, p_j - 4, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

bu yerda $a_n^{(j)}, b_n^{(j)} (n = 0, 1, 2, \dots, p_j)$ lar mos ravishda ψ va U funksiyalarning Chebishev koeffitsientlari hamda $\bar{a}_n^{(j)} = c_n a_n^{(j)}$, $\bar{b}_n^{(j)} = c_n b_n^{(j)}$ bo'ladi, agar $-p_j \leq n \leq p_j$, $c_0 = 2$, $c_n = 1$ agar $n = 0$ da. Ushbu tizim quyidagi chegaraviy va uzluksizlik shartlari bilan birgalikda yechiladi:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^n a_n^{(j)} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(1)} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{p_1} a_n^{(j)} = \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^n a_n^{(j+1)} \\
& \frac{1}{l_j} \sum_{n=0}^{p_j} n^2 a_n^{(j)} = \frac{1}{l_{j+1}} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(j+1)}, \\
& \frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) = \frac{1}{l_{j+1}^2} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n''(-1), \\
& \frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) = \frac{1}{l_{j+1}^3} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n''(-1), j = 1, 2, \dots, N-1 \\
& \sum_{n=0}^{p_N} a_n^{(N)} = 0, \\
& \sum_{n=0}^{p_N} n^2 a_n^{(N)} = 0.
\end{aligned}$$

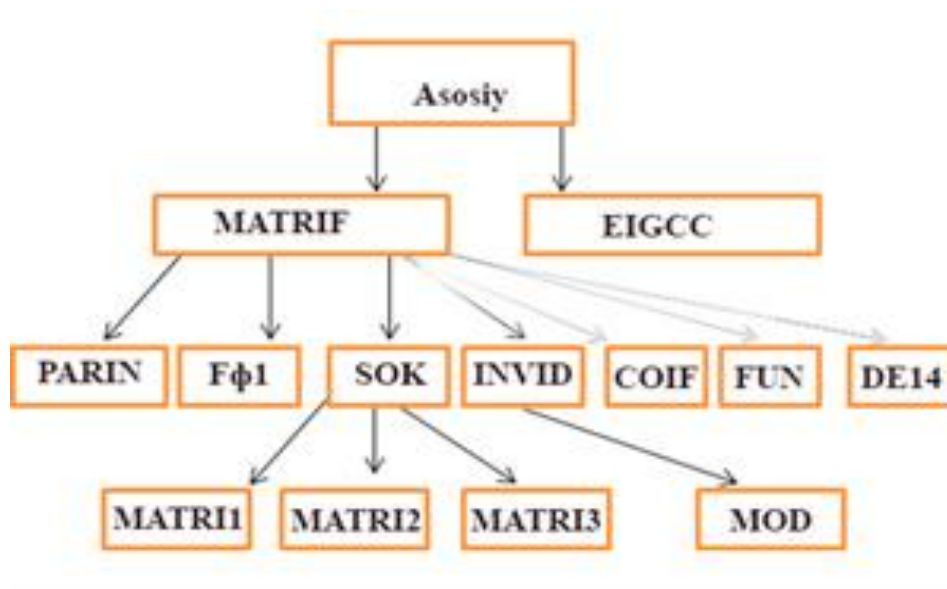
Natijada ushbu ko'rinishdagi $(A - \lambda B)x = 0$ tizim hosil bo'ladi, bu yerda A va B kompleks matritsalar.

IV BOB. SIQILMAYDIGAN YOPISHQOQ SUYUQLIKLARNING CHEGARAVIY QATLAM VA QUVURLARDAGI OQIMLARI UCHUN DASTURIY TA'MINOT VA HISOBLASH EKSPERIMENTI

Ushbu bobda yuqorida I, II, III boblarda bayon qilingan spektral-to'rt usuli algoritmini amalga oshirishga mo'ljallangan dasturiy vositalarni qo'llanib, keng qamrovli hisoblash eksperimenti o'tkazish yo'li bilan olingan natijalar keltiriladi. Gidrodinamik tizimlar turg'unligi muammosini yechishda matematik modellash, spektral-to'rt usuli, xuddi shuningdek, zamonaviy kompyuter texnologiyalarini qo'llanish qo'yilgan muammoni yechishni soddalashtiradi hamda kam kompyuter xotirasi va vaqti talab qiladi. Bu o'z navbatida siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tahlil qilish, bashoratlash va boshqarish imkonini beradi.

4.1-§. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar oqimini tadqiq etish uchun amaliy dasturlar majmuasini ishlab chiqish

Ushbu paragrafda gidrodinamik turg'unlik muammosini spektral-to'rt usuli bilan yechish algoritmi uchun amaliy dasturlar majmuasi strukturasi keltiriladi. Mazkur dastur asosida Fokner-Sken tenglamasi Runge-Kutta usuli bilan sonli yechiladi va chegaraviy qatlamda asosiy oqimning tezlik profili Fokner-Sken tenglamasi yechimining birinchi hosilasining teng oraliqlardagi qiymatlari ko'rinishida aniqlanadi hamda ushbu qiymatlar Chebishev ko'phadlari tugunlariga interpolatsiyalanadi. Spektral-to'rt usuli algoritmi to'liq amalga oshiriladi. Dasturning strukturasi 4.1-rasmda keltirilgan. Strukturadagi asosiy dastur dasturning boshqa tarkibiy qismlarini o'zaro bog'laydi. Dasturga kiritiladigan parametrlar sifatida Re - Reynolds soni, k - to'liq soni, N - spektral-to'rt usulidagi to'rt elementlari soni, p_j ($j=1,2,...,N$) har bir to'rt elementida Orr-Zommerfeld tenglamasi yechimini approksimatsiyalash uchun zarur bo'lgan Chebishev ko'phadlari soni, chegaraviy qatlamda bosim gradientining turli qiymatlariga mos keluvchi Fokner-Sken tenglamasi formparametri β ko'rib chiqiladi. Dastur ishlashi natijasida chegaraviy qatlamda gidrodinamik turg'unlik muammosining barcha xos qiymatlari $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ chop etiladi. Bosim gradientining turli qiymatlariga mos oqim, agar barcha xos qiymatlarning mavhum qismlari $\lambda_i < 0$ bo'lsa turg'un bo'ladi, agar $\lambda_i > 0$ bo'lsa, turg'unmas bo'ladi, $\lambda_i = 0$ bo'lsa, oqim neytral turg'un bo'ladi.



4.1-rasm. Spektral-to‘r usuli algoritmi uchun dasturiy ta‘minot sxemasi

```

program Asosiy
real wk(76)
complex A1(38,46),B1(38,46),EW(38)
common A1,B1,E1
common /W1/ DELTA,BETA,GN
common /W2/ ETA(2),EL(2),EM(2)
complex C(38,38),EV(38,38)
EQUIVALENCE (A1,C1),(B1,EV1)
equivalence (A1(1),C1(1)),(B1(1),EV(1))
call timestamp ( )
M1=18
M2=4
NC1=2*M+1
NC2=2*M2+1
N2=NC1+NC2-8
N3=NC1+NC2
IJOB=0
DELTA=10
BETA=0.0
GN=0.4696
PG=1.217
XN=0.
XF=DELTA
ETA(1)=XN
  
```

```

ETA(2)=7.5
ETA(3)=DELTA
KI=2
DO I=1,KI
EL(I)=ETA(I+1)-ETA(I)
EM(I)=ETA(I+1)+ETA(I)
END DO
write ( *, '(a)' ) ' EL='
write ( *, '(2x,5f10.2)' ) EL
write ( *, '(a)' ) ' DELTA='
write ( *, '(2f10.2)' ) DELTA
write ( *, '(a)' ) ' BETA='
write ( *, '(2f10.2)' ) BETA
write ( *, '(a)' ) ' GN='
write ( *, '(2f10.2)' ) GN
write ( *, '(a)' ) ' NC1='
write ( *, '(2g10.2)' ) NC1
write ( *, '(a)' ) ' NC2='
write ( *, '(2g10.2)' ) NC2
ALFA1=0.179
RE1=580.
write ( *, '(a)' ) ' RE1='
write ( *, '(2g10.2)' ) RE1
DEM=EL(1)/2.
Y8=sqrt ( 2. )
RE=RE1*Y8
ALFA=ALFA1*Y8
write ( *, * ) ' ALFA = ', ALFA
G=ALFA/(RE*DEM)
RE3=RE*PG
write ( *, * ) ' G = ', G
write ( *, * ) ' RE3 = ',RE3
DO I=1,N2
EW(I)=(0.,0.)
DO J=1,N3
A1(I, J)=(0.,0.)
B1(I, J)=(0.,0.)
call MATRIF (ALFA, RE, M1, M2)
END DO

```

```

END DO
DO I=1,N2
DO J=1,N2
C(I,J)=B1(I,J)
END DO
END DO
CALL EIGCC (C, N2, N2, IJOB, EW, EV, N2, WK, IER)
DO I=1,N2
write ( *, '(a)' ) EW(I)
STOP
END DO
end program

```

Qismdastur MATRIF umumlashgan xos qiymat muammosidagi kompleks matritsalar A va B ni shakllantiradi. Qismdastur Ff1 –Fokner-Sken tenglamasini uchta oddiy differensial tenglamalar tizimiga keltiradi. Qismdastur DE14 –uchta oddiy differensial tenglamalar tizimini to‘rtinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lgan Runge-Kutta usuli bilan yechish hamda asosiy oqim tezlik profilini Fokner-Sken tenglamasi yechimining birinchi hosilasi sifatida teng oraliqlarda aniqlashga imkon beradi. Qismdastur FUN–Chebishev ko‘phadlari tugunlarini o‘sish tartibida joylashtiradi. Qismdastur PARIN – asosiy oqim tezlik profilining teng oraliqda olingan qiymatlarini Chebishev ko‘phadlari tugunlariga interpolatsiyalaydi. Qismdastur COIF –asosiy oqim tezlik profilining Chebishev ko‘phadlari qatoriga yoyilmasining koeffitsientlarini aniqlaydi. Qismdastur MATRI1, MATRI2, MATRI3 – o‘z navbatida Orr-Zommerfeld tenglamasi yechimini Chebishev ko‘phadlari qatori bilan approksimatsiyalashda paydo bo‘ladigan maxsus yig‘indilarni samarali hisoblashga mo‘ljallangan. Qismdastur SOK – dastlab umumlashgan xos qiymat muammosidagi A va B kompleks matritsalariga xosmas almashtirishlar matritsasi Q bilan ta’sir etish hamda tartibi keskin kamaygan T va W matritsalarini shakllantiradi. Qismdastur MOD –ompleks sonlarning modulini hisoblash imkonini beradi. Qismdastur INVED – esa tartibi kichraygan umumlashgan xos qiymat muammosidagi teskari matritsa W^{-1} ni hisoblaydi va tizimni standart xos qiymat muammosi $(D - \lambda E)Y = 0$ ko‘rinishiga keltiradi, bu yerda $D = TW^{-1}$. EIGCC – esa standart xos qiymat muammosining barcha xos qiymatlarini aniqlaydi.

4.2-§. Chegaraviy qatlamdagi oqimlar uchun bosim gradientining turli qiymatlarida o'tkazilgan hisoblash eksperimenti

Bosim gradientining ixtiyoriy qiymatlarida xos qiymat muammosini yechish masalasi III bobda ko'rib o'tildi. Xos qiymatlar $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ ning mavhum qismiga qarab, tadqiq etilayotgan oqimning turg'un yoki turg'un emasligi to'g'risida xulosa qilish mumkin. Agar $\lambda_i > 0$ bo'lsa oqim turg'unmas, $\lambda_i < 0$ bo'lsa oqim turg'un, agar $\lambda_i = 0$ bo'lsa tebranishlar neytral turg'un bo'ladi. Oqimni xarakterlovchi parametrlar Reynolds soni Re va to'lqin soni k larning tekislikda shunday qiymatlari kombinatsiyasini topish talab qilinadiki, bu qiymatlarda $\lambda_i = 0$ bo'lsin. Ana shu $\lambda_i = 0$ bo'ladigan (Re, k) nuqtalarni tutashtirish orqali, (Re, k) koordinatalar tekisligida egri chiziq, neytral turg'unlik egri chizig'i chiziladi. Chegaraviy qatlamda asosiy oqim $U(\eta)$ Fokner-Sken tenglamasi yechimining birinchi hosilasi sifatida aniqlanadi:

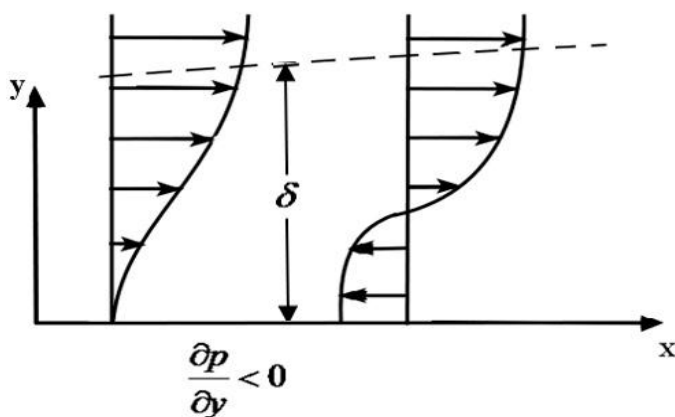
$$f''' + ff'' + \beta[1 - (f')^2] = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty,$$

tenglama quyidagi boshlang'ich shartlar bilan qaraladi

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = f_0.$$

Parametr β ning turli qiymatlariga turli oqim profillari $U(\eta)$ va turli boshlang'ich qiymatlar f_0 mos keladi. Bunda parametr β ning musbat qiymatlariga bosim gradientining manfiy qiymatlari mos keladi.

Chegaraviy qatlamda bosim gradienti ta'siri 4.2– rasmda keltirilgan, bu yerda δ – chegaraviy qatlam qalinligi.



4.2-rasm. Chegaraviy qatlamda bosim gradientining manfiy qiymatlarida asosiy oqim profili

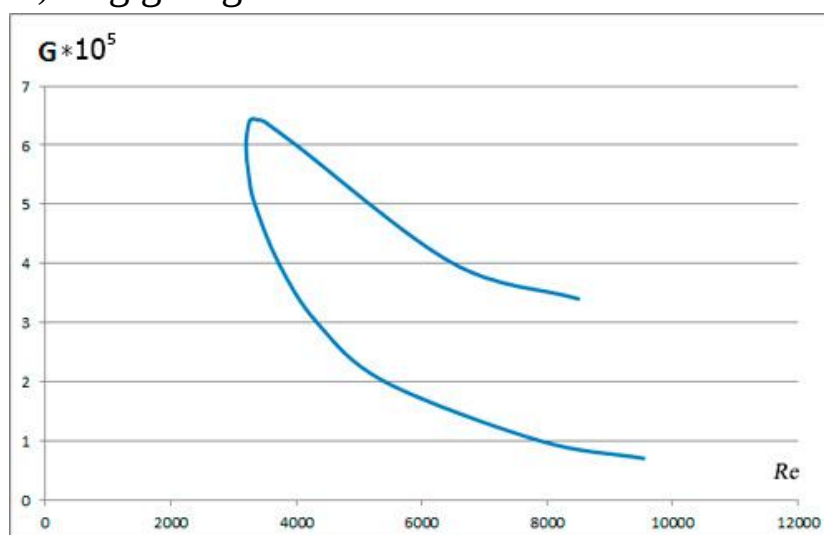
Masalan, $\beta = 0,2$; $f_0 = 0,6869$ qiymatda bosim gradienti manfiy bo‘ladi. Ana shu holga mos keluvchi neytral turg‘unlik egri chizig‘ini hisoblash natijalarini keltiramiz.

4.1-jadval

Bosim gradientining manfiy qiymatlarida ($\beta = 0,2$) neytral turg‘unlik egri chizig‘ini hisoblash natijalari

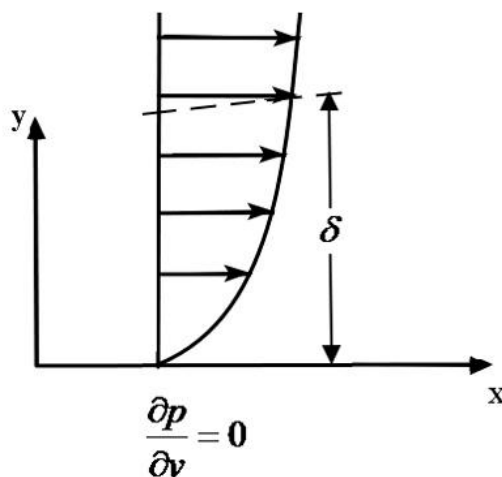
$G \cdot 10^5$	Re^*	λ_r	$\lambda_l \cdot 10^4$
0,7	9540	0,2406	0,4
1,0	7880	0,2449	-0,1
2,0	5410	0,2563	1,5
3,0	4330	0,2658	0,8
4,0	3720	0,2732	1,5
5,0	3340	0,2795	0,6
5,5	3240	0,2817	1,8
6,0	3200	0,2834	1,4
6,4	3250	0,2833	0,1
6,45	3320	0,2824	0,0
6,43	3360	0,2819	0,0
6,4	3490	0,2804	-0,0
6,0	4000	0,2745	1,3
4,0	6500	0,2594	1,1
3.4	8500	0,2298	1,2

Endi ($G \cdot 10^5, Re^*$) tekisligida 4.1-jadvalda keltirilgan neytral turg‘unlik egri chizig‘i ($\lambda_l = 0$) ning grafigini keltiramiz.



4.3-rasm. Bosim gradientining manfiy qiymatlarida ($\beta = 0,2$) neytral turg‘unlik egri chizig‘i

Yuqorida III bobning 3.3-paragrafida ko‘rib o‘tilgan Fokner-Sken tenglamasidagi formparametr β ning nolga teng qiymati bosim gradientining nolga teng bo‘lgan qiymatiga mos keladi.



4.4-rasm. Chegaraviy qatlamda bosim gradientining nolga teng ($\beta = 0$) qiymatlarida asosiy oqim profili.

Bu holda Fokner-Sken tenglamasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$f''' + ff'' = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (4.1)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = f_0 = 0,4696. \quad (4.2)$$

Ushbu paragrafda oddiy differensial tenglamalar tizimi (4.1), (4.2) ni yechish algoritmini keltiramiz. Buning uchun tizim (4.1), (4.2) ni (3.5) ko‘rinishda yozamiz

$$\begin{cases} d_1' = d_2, \\ d_2' = d_3, \\ d_3' = -d_1 \cdot d_3, \end{cases} \quad (4.3)$$

uning boshlang‘ich shartlari quyidagicha bo‘ladi

$$\begin{aligned} d_1(0) &= d_0^{(1)} = 0, \\ d_2(0) &= d_0^{(2)} = 0, \\ d_3(0) &= d_0^{(3)} = g_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sonli hisoblashlar o'tkazish uchun integrallash intervali $[0, \infty)$ da cheksizlikni katta, ammo chekli miqdor η_l bilan almashtiramiz. Shunday qilib, yangi integrallash intervali $[0, \eta_l]$ ga ega bo'lamiz.

Bu holda Runge-Kutta usuli algoritmi tizim (4.3), (4.4) uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h d_n^{(2)}, \\
 b_1 &= h d_n^{(3)}, \\
 f_1 &= h[-d_n^{(1)} \cdot d_n^{(3)}], \\
 k_2 &= h(d_n^{(2)} + \frac{b_1}{2}), \\
 b_2 &= h(d_n^{(3)} + \frac{f_1}{2}), \\
 f_2 &= h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_1}{2})(d_n^{(3)} + \frac{f_1}{2})], \\
 k_3 &= h(d_n^{(2)} + \frac{b_2}{2}), \\
 b_3 &= h(d_n^{(3)} + \frac{f_2}{2}), \\
 f_3 &= h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_2}{2})(d_n^{(3)} + \frac{f_2}{2})], \\
 k_4 &= h(d_n^{(2)} + b_3), \\
 b_4 &= h(d_n^{(3)} + f_3), \\
 f_4 &= h[-(d_n^{(1)} + k_3)(d_n^{(3)} + f_3)], \\
 d_{n+1}^{(1)} &= d_n^{(1)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 d_{n+1}^{(2)} &= d_n^{(2)} + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4), \\
 d_{n+1}^{(3)} &= d_n^{(3)} + \frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4), \quad n = 0, 1, \dots, M-1.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tizim (4.5) ni yechish natijasida asosiy oqim profili $U(\eta)$ ning qiymatlari to‘r tugunlari $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, M$, $Mh = t_n = \eta_l$ da aniqlanadi. Bu qiymatlar sifatida quyidagilar olinadi.

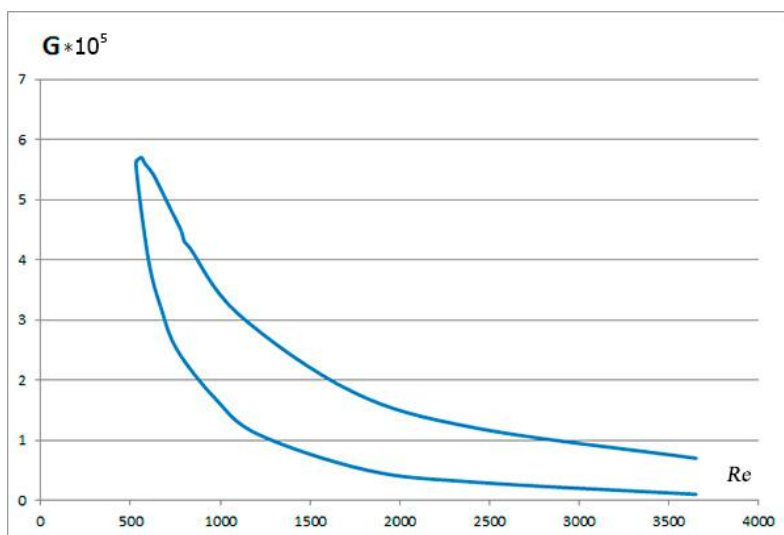
Chegaraviy qatlam turg‘unlik tenglamalarida asosiy oqim $U(\eta) = f'(\eta)$ deb olinadi va turg‘unlik tenglamalari spektral-to‘r usuli bilan echiladi. Xos qiymatlar $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ aniqlanadi va xos qiymatlarning mavhum qismi $\lambda_i = 0$ bo‘lganda, tekislikda (k, Re^*) sonlar juftligi topiladi. Koordinatalar tizimi (k, Re^*) da $\lambda_i = 0$ bo‘lgan nuqtalar ketma-ketligi hisoblanadi. Ushbu nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziq bosim gradienti nolga teng bo‘lgandagi neytral turg‘unlik egri chizig‘ini beradi. Neytral turg‘unlik egri chizig‘ini hisoblash natijalari quyidagi 4.2–jadvalda keltirilgan, bunda $\text{Re}^* = \text{Re } A(\beta)$ bo‘lib, $A(\beta)$ ning qiymati 1.1–jadvalda keltirilgan.

4.2-jadval

Bosim gradientining nolga teng bo‘lgan qiymatlarida ($\beta = 0$) neytral turg‘unlik egri chizig‘ini hisoblash natijalari

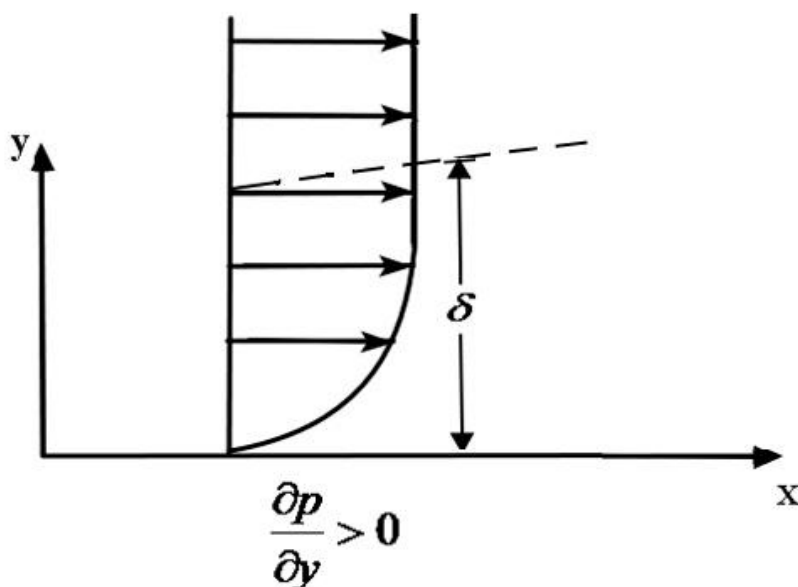
$G \cdot 10^5$	Re^*	λ_r	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,1	3650	0,3065	8,3
0,3	2430	0,3135	0,4
0,5	1820	0,3204	3,6
1,1	1210	0,3357	3,2
1,7	970	0,3471	1,9
2,5	760	0,3521	1,5
3,2	670	0,3721	3,2
4,0	600	0,3816	3,0
5,6	530	0,3988	1,1
5,7	560	0,3990	2,7
5,6	580	0,3988	2,7
5,4	630	0,3963	1,2
4,8	730	0,3897	0,7
4,5	780	0,3864	0,1
4,3	800	0,3847	0,1
4,2	830	0,3831	0,1
3,1	1100	0,3663	1,5
1,8	1740	0,3419	1,4
1,2	2430	0,3239	2,4
0,7	3650	0,3022	1,2

Parametr $\beta = 0$ bo'lganda, ya'ni chegaraviy qatlamda bosim gradienti $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$ da neytral turg'unlik egri chizig'i ($\lambda_i = 0$) quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



4.5-rasm. Bosim gradientining nolga teng bo'lgan qiymatlarida ($\beta = 0$) neytral turg'unlik egri chizig'i

Fokner-Sken formparametr β ning manfiy qiymatlari bosim gradientining musbat bo'lgan holatiga mos keladi.



4.6-rasm. Chegaraviy qatlamda bosim gradientining musbat qiymatlarida asosiy oqim profili.

Fokner-Sken tenglamasini bu holda quyidagicha yozish mumkin:

$$f''' + ff'' - 0,19[1 - (f')^2] = 0,$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = f_0 = 0,086$$

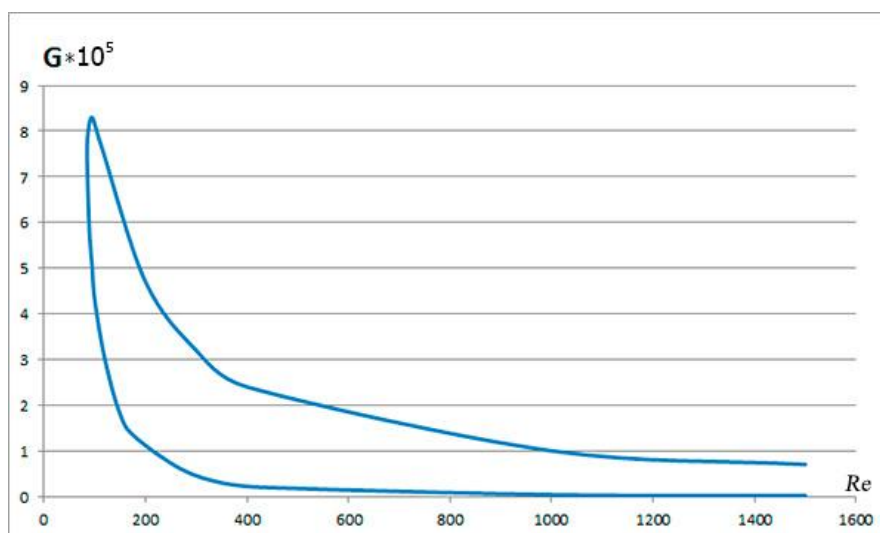
Bu tizim ham 3.3-paragrafda bayon qilingan Runge-Kutta usuli (3.23) bilan echiladi va oqim profili $U(\eta)$ ning qiymatlari topiladi. Asosiy oqim profilini 3.3-paragrafda bayon qilinganidek birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida ifodalash uchun teng qadamlarda berilgan qiymatlarni Chebishev ko'phadlari tugunlari $\cos(\pi l / p_j)$, $l = 0, 1, 2, \dots, p_j$; $j = 1, 2, \dots, N$ ga interpolyasiyalaymiz, bu yerda p_j asosiy oqim $U(\eta)$ ni j -to'r elementida approksimatsiyalash uchun zarur bo'lgan Chebishev ko'phadlari soni. Endi bosim gradienti musbat bo'lgan holda spektral-to'r usuli bilan hisoblangan neytral turg'unlik egri chizig'ining qiymatlarini keltiramiz.

4.3-jadval

Bosim gradientining musbat qiymatlarida ($\beta = -0.19$) neytral turg'unlik egri chizig'ini hisoblash natijalari

$G \cdot 10^3$	Re*	λ_r	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,02	1500	0,3376	0,3
0,04	1000	0,3382	8,0
0,2	430	0,3442	1,0
0,3	350	0,3472	0,4
0,6	270	0,3548	-0,0
1,3	180	0,3742	-0,1
1,8	150	0,3853	2,0
3,0	120	0,4090	0,5
4,3	100	0,4323	3,0
5,0	95	0,4434	1,0
5,7	90	0,4537	1,0
6,9	86	0,4717	1,0
7,4	85	0,4794	0,4
7,9	86	0,4859	0,3
8,3	95	0,4985	2,0
7,6	115	0,4999	0,1
4,7	200	0,4906	-0,1
3,2	300	0,4883	-0,0
2,4	400	0,4894	0,4
1,0	1000	0,4921	1,3
0,7	1500	0,4914	1,3

Ushbu qiymatlar asosida neytral turg'unlik egri chizig'i ($\lambda_i = 0$) ni chizamiz.



4.7-rasm. Bosim gradientining musbat qiymatlarida neytral turg'unlik egri chizig'i

Neytral turg'unlik egri chiziqlari qaralayotgan oqimning turg'unlik sohasi ($\lambda_i < 0$) ni, uning turg'unmaslik sohasi ($\lambda_i > 0$) dan ajratib turadi. Neytral turg'unlik egri chizig'iga nisbatan Reynolds soni Re ning qayerda joylashishiga qarab, oqimning turg'un yoki turg'un emasligi to'g'risida xulosaga kelishimiz mumkin.

Chegaraviy qatlamda bosim gradientining turli qiymatlarida kritik Reynolds soni Re_{kr} va kritik to'lqin soni G_{kr} ning bog'liqligini ko'rsatuvchi umumlashtirilgan jadval keltiramiz, bu yerda $Re_{kr}^* = Re_{kr} \cdot A(\beta)$.

4.4-jadval

Chegaraviy qatlamda bosim gradientining turli qiymatlarida kritik Reynolds soni

β	f_0	$A(\beta)$	Re_{kr}^*	$G_{kr} \cdot 10^5$
-0.19	0.086	2.007	85	0.074
0	0.4696	1.217	530	5.6
0.2	0.6869	0.984	3200	6.0

4.3-§. Quvurdagi suyuqlik oqimi uchun quvurning qarshilik ko'effitsientini tadqiq etish bo'yicha hisoblash tajribalarini o'tkazish

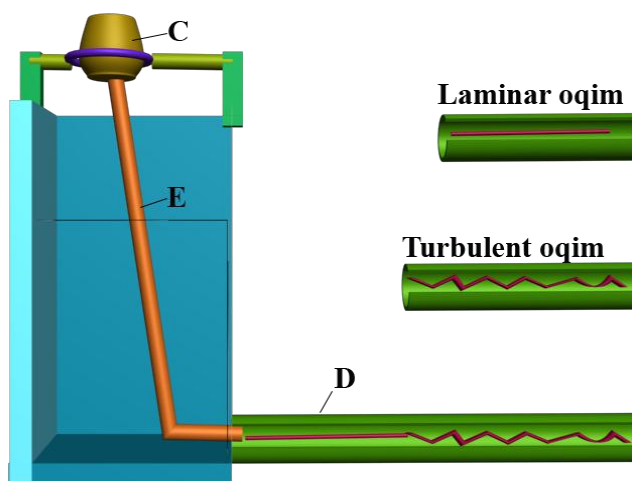
Suyuqliklarda yopishqoqlikning mavjudligi suyuqlik qatlamlarining bir-biriga nisbatan siljishiga qarshilik ko'rsatadi. Boshqacha qilib aytganda, laminar (qatlamli) oqimlarda yopishqoqlik hisobiga ichki

ishqalanish paydo bo‘ladi, u qatlamlar chegaralaridagi urinma kuchlanishlar miqdori bilan ifodalanadi, ya’ni birlik yuzaga to‘g‘ri keladigan urinma kuch miqdori bilan xarakterlanadi. Suyuqlikning ayrim konsentrik qatlamlari bir-biriga nisbatan shunday harakatlanadiki, bunda suyuqlik tezligi asosiy o‘q bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi. Bunday turdagi suyuqlik harakati laminar oqim deyiladi.

1883 yilda Osborn Reynolds quvurdagi suv harakatini kuzatishda suv oqimi tezligining ortishi bilan harakatdagi oqimning turg‘un laminar xarakteri buzilishini aniqladi. Qo‘zg‘alishlar paydo bo‘ladi, ular shunda bilinadiki, ilgari to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan suyuqlik zarrachalarining laminar harakati ayrim qismlarda betartib holatga o‘tadi, bunda harakatning umumiy yo‘naltirilganligi saqlanib qoladi. Oqim tezligining yanada o‘zgarishi butun oqim bo‘ylab betartib harakat paydo bo‘lishiga olib keladi. Ushbu holatni laminar oqim turg‘unmas, qo‘zg‘atilgan-turbulent oqimga aylangan deb ataladi [2].

Bu tajribani amalda kuzatish dastlab O. Reynolds (1883-1912) o‘tkazgan bo‘lib, unda oqim tarkibiga rang kiritilgan [2]. Oqim laminar bo‘lganda bo‘yoq qat’iy chegaralangan chiziqlar bo‘ylab harakatlanadi va oqim turbulentlikka aylanishi bilan suyuqlikdagi rang butun quvur bo‘ylab tarqalib ketadi va quvurdagi oqim rang bilan to‘liq bo‘yaladi. Bu shuni ko‘rsatadiki, turbulent oqimda quvur o‘qi bo‘ylab harakatlanayotgan asosiy oqimda ko‘ndalang harakat paydo bo‘ladi, ya’ni quvur o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan harakat vujudga keladi. Ana shu ko‘ndalang harakat bo‘yoq rangining oqimda aralashib ketishiga olib keladi [80-81].

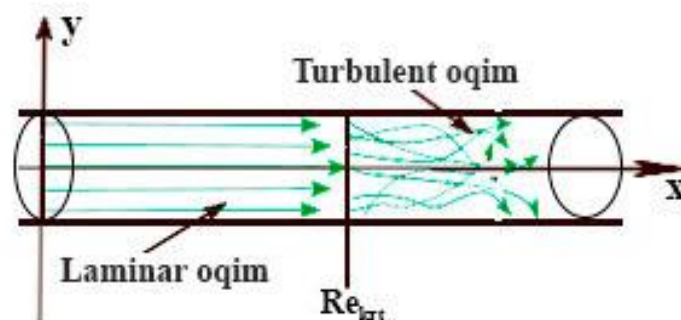
Ushbu tajriba qurilmasi 1.4-rasmda keltirilgan.



1.4-rasm. Oqimga qo‘shilgan rangli suyuqlik tajribasi.

Dastlab tajriba D quvurga past tezlikka ega suyuqlikni kiritishdan boshlanadi. Aynan bir vaqtda C idishdan rangli bo'yoq E naycha orqali qo'shiladi. Bunda quyidagi holat sodir bo'ladi: bo'yalgan oqim to'g'ri gorizontal ko'rinishda, suyuqlikning qolgan barcha massasi esa bo'yalmagan holatda bo'ladi. O'z navbatida, bo'yalgan suyuqlik zarrachalari qolgan suyuqlik bilan aralashib ketmaydi va D quvurdagi oqim harakati laminar rejimda bo'ladi. Suyuqlik tezligining asta-sekin ortib borishi bilan D quvurda shunday holat yuzaga keladiki, tekis harakatlanayotgan rangli bo'yoq yo'qoladi va butun harakatlanayotgan suyuqlik tekis bo'yalgan holatga o'tadi. Rang oqimga aralashib ketadi, bu shundan dalolat beradiki, D quvurda oqimning turbulent rejimi paydo bo'ladi.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatida Reynolds soni $Re = \frac{\rho U D}{\mu}$, ning aynan bitta qiymatidan boshlab, laminar oqim turbulent oqimga aylanadi, Reynolds sonining ana shu qiymati kritik Reynolds soni deb ataladi, bunda ρ - zichlik, μ - suyuqlikning yopishqoqligi, U - asosiy oqimning maksimal tezligi, D - uzunlikning xarakterli masshtabi.



1.5-rasm. Quvurda laminar oqimning turbulent oqimga o'tishi.

1.5-rasmdan ko'rinadiki, $Re < Re_{krt}$, bo'lganda oqim laminar, $Re_{krt} < Re$ bo'lganda esa oqim turbulent rejimga o'tadi.

Diametri butun uzunligi bo'yicha o'zgarmaydigan quvurda suyuqlik oqimi va suyuqlik ichiga joylashtirilgan uzunligi L ga va radiusi y ga teng bo'lgan, o'qi quvur o'qi bilan mos tushadigan silindrni qaraylik. Yopishqoqlik hisobiga quvur devorlaridagi tezlik nolga teng, quvurning o'rtasida tezlik o'zining eng katta qiymatiga etadi. Asosiy o'qi quvur o'qi bilan mos keluvchi silindrsimon sath nuqtalarida oqim tezligi o'zgarmas bo'ladi. Ayrim konsentrik qatlamlar o'zaro shunday harakatlanadiki, tezlik hamma joyda o'q bo'yicha yo'naltirilgan va oqim laminar rejimda bo'ladi. Quvurning boshlang'ich nuqtasidan yetarlicha uzoq masofada quvurdagi

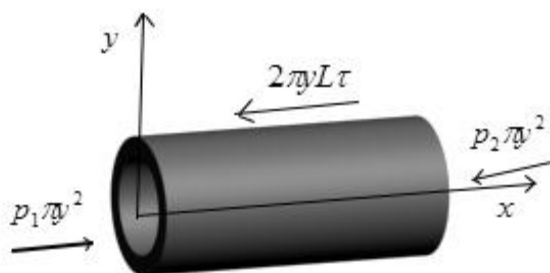
oqimning tezlik taqsimoti radius bo'ylab, uzunasiga yo'naltirilgan koordinataga bog'liq bo'lmaydi [106-108].

Quvurdagi suyuqlik harakati quvur o'qi bo'ylab bosimning pasayishi, ammo har bir quvur o'qiga perpendikulyar ko'ndalang kesimda bosimni o'zgarmas deb qarash mumkinligi hisobiga sodir bo'ladi. Suyuqlikning har bir elementi harakati bosimning pasayishi hisobiga tezlashadi va ishqalanish hisobiga paydo bo'ladigan siljish kuchlanishi sababli sekinlashadi [109-123].

Asosiy o'q bo'ylab silindrga bosim kuchlari $p_1\pi y^2$ va $p_2\pi y^2$ ta'sir etadi, ular tegishli silindrning kirish va chiqish asoslariga mos keladi hamda silindrning yon sirti bo'yicha ta'sir etadigan urinma kuch $2\pi y L \tau$ mavjud bo'ladi. Ushbu silindrdagi oqimning eng yuqori tezligini, quvurning ko'ndalang kesimi orqali oqib o'tadigan suyuqlik hajmini, oqim uzunligi bo'yicha quvurning ishqalanishga qarshilik koeffitsientini hamda urinma kuchlanishning eng yuqori qiymatini aniqlash talab etiladi.

Silindrdagi suyuqlikka ta'sir etuvchi kuchlarni tenglashtirib (4.8-rasm), harakat yo'nalishi bo'yicha muvozanat sharti sifatida ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$p_1\pi y^2 = p_2\pi y^2 + 2\pi y L \tau . \quad (4.6)$$



4.8-rasm. Silliqsilindrsimon quvur

Ichki ishqalanish kuchi proeksiyasi musbat ishora bilan olingan, chunki tezlik gradienti manfiy (qatlamning oqim tezligi radius r ning ortib borishi bilan kamayadi).

Formula (4.6) dan urinma kuchlanish τ ni aniqlab olamiz:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L} \cdot \frac{y}{2} . \quad (4.7)$$

Qaralayotgan holda tezlik u koordinata y ning ortishi bilan kamayadi va u yopishqoqlik hisobiga $y = r$ bo'lganda nolga aylanadi. Shu

sababli, Nyuton ishqalanish qonuniga asosan $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$ deb olamiz. Ushbu ifodani (4.7) ga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$-\mu \frac{du}{dy} = \frac{p_1 - p_2}{L} \cdot \frac{y}{2},$$

bundan

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_1 - p_2}{\mu L} \cdot \frac{y}{2}. \quad (4.8)$$

ekanligini ko'rish mumkin.

Endi $y = r$ bo'lganda $u(y) = 0$ bo'lishini e'tiborga olib, ushbu boshlang'ich shart bilan tenglama (4.8) ni integrallab quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$u(y) = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu L} y^2 + C, \quad (4.9).$$

Tenglama (4.9) dagi o'zgarmas konstanta C ni topish uchun $y = r$ bo'lganda tezlik $u(r) = 0$ bo'lish shartidan foydalanamiz, ya'ni

$$u(r) = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2 + C = 0,$$

bundan

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2. \quad (4.10)$$

ekanligini aniqlaymiz. O'zgarmas C ning bu qiymatini (4.9) ga qo'yib

$$u(y) = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu L} y^2 + \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2,$$

tenglamani olamiz va bundan, o'z navbatida

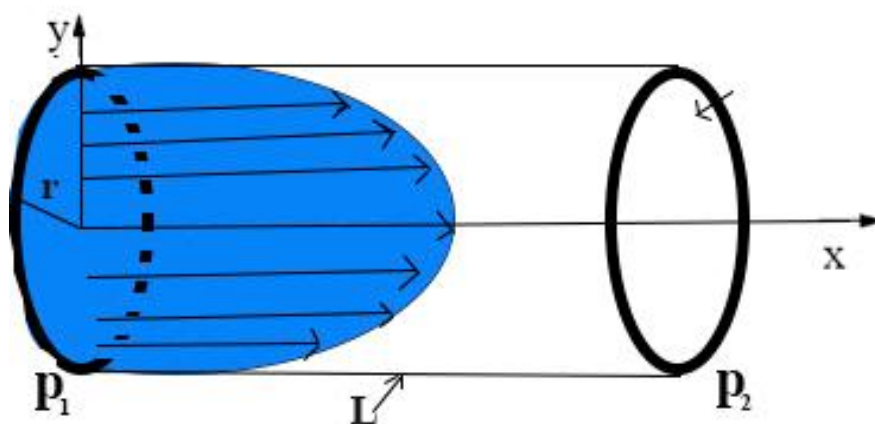
$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (r^2 - y^2). \quad (4.11)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, quvur radiusi bo'ylab tezlikning parabolik taqsimotiga ega bo'lamiz (4.9-rasm). Ushbu tezlik o'zining eng katta

qiymatiga quvurning o'rtasida ($y=0$) erishadi va u quyidagi eng yuqori qiymatga ega bo'ladi:

$$u_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2. \quad (4.12)$$



4.9-rasm.

Quvur kesimi bo'ylab oqib o'tadigan to'liq suyuqlik miqdori Q (suyuqlik sarfi) aylanma paraboloid hajmi sifatida aniqlanadi (4.9-rasm) va o'z navbatida quyidagicha aniqlanadi. Tenglama (4.6) ni r^2 ko'paytiramiz va bo'lamiz:

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (r^2 - y^2) \cdot \frac{r^2}{r^2},$$

bundan

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2 \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2} \right) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right), \quad (4.13)$$

ekanligini ko'rish mumkin.

Kesimi doiraviy bo'lgan quvur orqali o'tadigan suyuqlikning umumiy oqimi uchun Gagen–Puazeyl formulasidan foydalanib, quyidagini aniqlaymiz:

$$Q = \int_0^r u(y) 2\pi y dy = 2\pi u_{\max} \int_0^r \left(y - \frac{y^3}{r^2} \right) dy = 2\pi u_{\max} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4r^2} \right]_0^r,$$

ya'ni oqim sarfi uchun ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)r^4}{8\mu L}. \quad (4.14)$$

Quvurning ko'ndalang kesimi bo'yicha qiymati quyidagicha aniqlanadigan oqimning o'rtacha tezligini kiritamiz:

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi r^2}. \quad (4.15)$$

Formula (4.14) ni e'tiborga olgan holda (4.15) ni quyidagicha yozamiz

$$\bar{u} = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{8\mu L},$$

Funksiya $\bar{u}(y)$ ni formula (4.12) bilan aniqlanadigan $u_{\max}$ bilan taqqoslab, $\bar{u}(y) = \frac{1}{2}u_{\max}$ ekanligini ko'rish mumkin, ya'ni quvurdagi laminar oqim harakatida o'rtacha tezlik eng yuqori tezlikning yarmiga teng (4.9-rasm) bo'ladi.

Bosim farqi $(p_1 - p_2)$ ni aniqlaymiz;

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2},$$

bundan

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2} = \frac{32\mu \bar{u}}{2r} \cdot \frac{L}{2r} = \frac{32\mu \bar{u}}{D} \cdot \left(\frac{L}{D}\right) \quad (4.16)$$

buy erda $D = 2r$ quvur diametri.

Oqim uzunligi bo'ylab yo'qotilgan bosim Darsi–Veysbax tenglamasi orqali topiladi:

$$\lambda = \frac{(p_1 - p_2)}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}^2} \cdot \left(\frac{D}{L}\right), \quad (4.17)$$

Formula (4.16) dan $p_1 - p_2$ ning qiymatini (4.17) ga qo'yish natijasida quyidagi formulaga ega bo'lamiz

$$\lambda = \frac{32\mu \bar{u}}{D} \cdot \left(\frac{L}{D}\right) \cdot \frac{2}{\rho \bar{u}^2} \cdot \left(\frac{D}{L}\right) = \frac{64\mu}{\rho \bar{u} D}$$

yoki bundan

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (4.18)$$

ekanligini ko'rish mumkin, bu yerda $Re = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu}$.

Formula (4.16) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2. \quad (4.19)$$

Urinma kuchlanish o'zining eng katta qiymatiga quvur devorida erishadi, bu yerda ushbu kuchlanish quyidagiga teng bo'ladi:

$$\tau_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{L} \cdot \frac{r}{2}, \quad (4.20)$$

hamda ushbu formula oqim qanday rejimda bo'lishidan qat'iy nazar (laminar yoki turbulent) o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, quvur devoridagi urinma kuchlanish bosimning pasayishini o'lchash yo'li bilan eksperimental aniqlanishi mumkin.

Formula (4.19) dan $\frac{p_1 - p_2}{L}$ ning qiymatini (4.20) ga qo'yish natijasida quyidagi formulaga ega bo'lamiz :

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho \bar{u}^2. \quad (4.21)$$

Bu quvurdagi urinma kuchlanishning eng katta qiymatini hisoblash formulasidan iborat.

Turbulent oqimni hisoblashdagi usullardan biri bu empirik formulalardan yoki yarim empirik nazariyalarga asoslangan formulalardan foydalanishdan iborat. Aytilgan fikrlarning namoyishi sifatida silliq quvurlar uchun eksperimental ma'lumotlarning ikkita eng yaxshi approksimatsiyasini keltiramiz hamda ularning Reynolds soni Re bo'yicha qo'llanilishi mumkin bo'lgan chegaralarini ko'rsatamiz.

1911 yilda Blazius tomonidan silliq quvurlarda qarshilik koeffitsienti uchun empirik formula olingan bo'lib, ($2320 < Re < 4 \cdot 10^5$ gacha o'rinli):

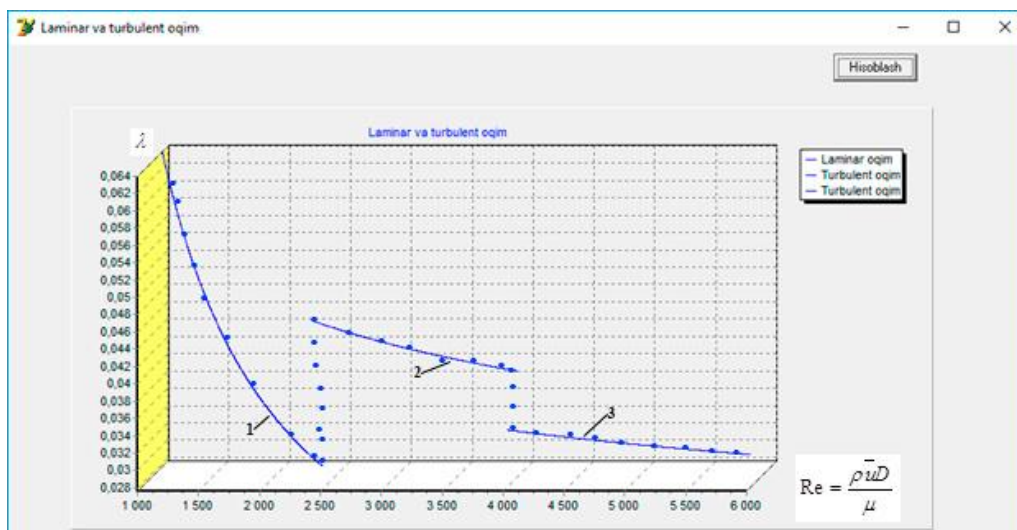
$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}. \quad (4.22)$$

bu formula Blaziusning qarshilik qonuni sifatida ma'lum.

Nikuradze formulasi ($1 \cdot 10^5 < Re < 1 \cdot 10^6$ intervalda qo'llaniladi):

$$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.237}}. \quad (4.23)$$

Yuqorida keltirilgan (4.18), (4.22), (4.23) formulalar asosida olingan natijalar 4.10-rasmda keltirilgan.



4.10-rasm. Silliqliq quvurda qarshilik koeffitsienti. 1–laminar oqim(Puazeyl), 2–turbulent oqim (Blazius), 3–turbulent oqim (Nikuradze), •– eksperimental ma’lumot

4.10-rasmda silliqliq quvur uchun quvurning qarshilik koeffitsienti λ ning Reynolds soni Re ga bog‘liqligini ko‘rsatuvchi eksperimental va hisoblash natijalari keltirilgan. Olingan natijalarni taqqoslash shuni ko‘rsatadiki, Re sonining kichik qiymatlarida nazariy formula (4.18) eksperiment orqali tasdiqlanadi. Hisoblash va eksperimental natijalarning mosligi $Re = 2000 \div 2320$ gacha bo‘lganda kuzatiladi. Re sonining yanada katta qiymatlarida turbulentlik mexanizmlarining faol ishga tushishi hisobiga, qarshilik ortadi. Parametr λ ning Re sonidan kelgusidagi bog‘liqligi laminar oqim uchun olingan natijadan keskin farqlanadi.

4.4 §. Quvurlardagi betartib suyuqliklar oqimini laminar holatga keltirish qurilmasini yaratish texnologiyasi

Silindrsimon quvurdagi oqim uchun suyuqlikka ta’sir etuvchi kuchlar to‘g‘risidagi ma’lumot [112-118] maqolalarda keltirilgan.

Diametri butun uzunligi bo‘yicha o‘zgarmas quvur va quvur ichiga joylashtirilgan uzunligi L ga va radiusi r ga teng bo‘lgan n ta naycha orqali oqib o‘tadigan suyuqlik harakatini ko‘rib chiqamiz. Real suyuqliklarda suyuqlik naychalar devorlariga yopishadi va oqib o‘tadigan sirt sathiga urinma kuchlanish beradi. Bu yerda ichki ishqalanish deb ataluvchi kuch paydo bo‘ladi, suyuqliklarda ushbu kuch yopishqoqlikdan

iboratdir. Yopishqoqlik - gazlar va suyuqliklarning xususiyati bo'lib, u suyuqlikning harakatiga olib keluvchi tashqi kuchlar ta'siriga qarshilik ko'rsatishidan iborat. Urinma kuchlanishlarning mavjudligi va suyuqlikning qattiq chegaralarga yopishishi harakatlanayotgan real suyuqliklarning ideal suyuqliklardan sifat jihatdan farqlanishiga olib keladi. Endi quvurdagi suyuqlik harakatiga ta'sir etuvchi kuchlarni n ta naychani e'tiborga olgan holda hisoblaymiz. Yopishqoqlik hisobiga naychalar devorlaridagi tezlik nolga teng, naychalarning o'rtasida tezlik o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Ayrim konsentrik qatlamlar o'zaro shunday harakatlanadiki, tezlik hamma joyda o'q bo'yicha yo'naltirilgan va oqim laminar rejimda bo'ladi. Naychalarning boshlang'ich nuqtasidan yetarlicha uzoq masofada naychadagi oqimning tezlik taqsimoti radius bo'ylab, uzunasiga yo'naltirilgan koordinataga bog'liq bo'lmaydi.

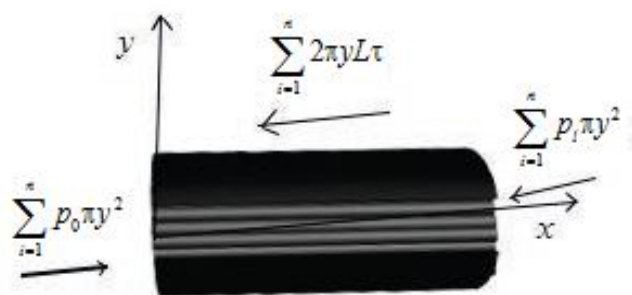
Naychadagi suyuqlik harakati naycha o'qi bo'ylab bosimning pasayishi, ammo har bir naycha o'qiga perpendikulyar ko'ndalang kesimda bosimni o'zgarmas deb qarash mumkinligi hisobiga sodir bo'ladi. Suyuqlikning har bir elementi harakati bosimning pasayishi hisobiga tezlashadi va ishqalanish hisobiga paydo bo'ladigan siljish kuchlanishi sababli sekinlashadi [116;60-68-b.].

Bosim p o'zgarmas deb qaraladi, ya'ni butun naycha kesimi bo'yicha $p_0, p_l = \text{const}$ deb faraz qilinadi [118;36-38-b.].

Asosiy o'q bo'ylab silindrga bosim kuchlari $p_0 n \pi y^2$ va $p_l n \pi y^2$ ta'sir etadi, ular tegishlicha silindrning kirish va chiqish asoslariga mos keladi hamda silindrning yon sirti bo'yicha ta'sir etadigan urinma kuch $2\pi y n L \tau$ mavjud bo'ladi. Ushbu silindrdagi oqimning maksimal tezligini, quvurning ko'ndalang kesimi orqali oqib o'tadigan suyuqlik hajmini, oqim uzunligi bo'yicha quvurning ishqalanishga qarshilik koeffitsientini hamda urinma kuchlanishning maksimal qiymatini aniqlash talab etiladi.

Naychalardagi suyuqlikka ta'sir etuvchi kuchlarni tenglashtirib (4.11-rasm), harakat yo'nalishi bo'yicha muvozanat sharti sifatida ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\sum_{i=1}^n p_0 \pi y^2 = \sum_{i=1}^n p_l \pi y^2 + \sum_{i=1}^n 2\pi y L \tau \quad (4.24)$$



4.11-rasm. Quvur ichiga n ta naycha joylashtirilgan

Ichki ishqalanish kuchi proeksiyasi musbat ishora bilan olingan, chunki tezlik gradienti manfiy (qatlamning oqim tezligi koordinata y ning ortib borishi bilan kamayadi).

Formula (4.24) dan urinma kuchlanish τ ni aniqlab olamiz:

$$\tau = \frac{p_0 - p_1}{L} \cdot \frac{y}{2} \quad (4.25)$$

Qaralayotgan holda oqim tezligi u koordinata y ning ortishi bilan kamayadi va u yopishqoqlik hisobiga $y=r$ bo'lganda nolga aylanadi. Shu sababli, Nyuton ishqalanish qonuniga asosan $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$ deb olamiz. Ushbu ifodani (4.25) ga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-\mu \frac{du}{dy} = \frac{p_0 - p_1}{L} \cdot \frac{y}{2}$$

bundan

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_0 - p_1}{\mu L} \cdot \frac{y}{2} \quad (4.26)$$

Endi $y=r$ bo'lganda $u(y)=0$ bo'lishini e'tiborga olib, ushbu boshlang'ich shart bilan tenglama (4.26) ni integrallab quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$u(y) = -\frac{p_0 - p_1}{4\mu L} y^2 + C, \quad (4.27)$$

tenglama (4.27) dagi o'zgarmas konstanta C ni topish uchun $y=r$ bo'lganda tezlik $u(r)=0$ bo'lish shartidan foydalanamiz, ya'ni:

$$u(r) = -\frac{p_0 - p_l}{4\mu L} r^2 + C$$

bundan:

$$C = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} r^2 \quad (4.28)$$

ekanligini aniqlaymiz. O'zgarma C ning bu qiymatini (4.27) ga qo'yib

$$u(y) = -\frac{p_0 - p_l}{4\mu L} y^2 + \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} r^2$$

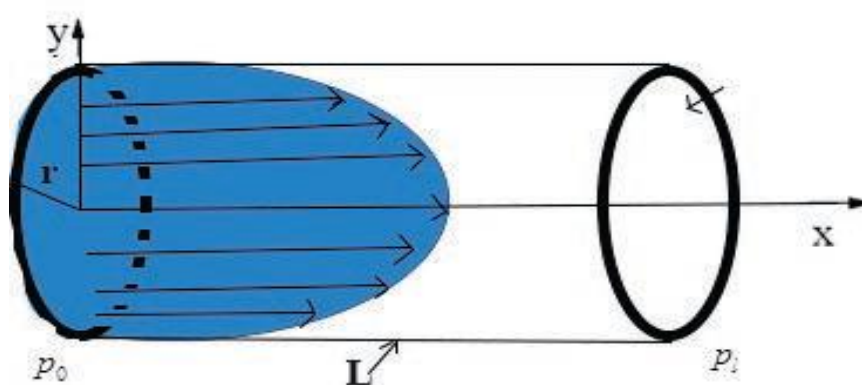
tenglamani va bundan o'z navbatida

$$u(y) = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} (r^2 - y^2) \quad (4.29)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, naychalar radiusi bo'ylab tezlikning parabolik taqsimotiga ega bo'lamiz (4.12-rasm). Ushbu tezlik o'zining eng katta qiymatiga naychanning o'rtasida ($y=0$) erishadi va u quyidagi eng yuqori qiymatga ega bo'ladi:

$$u_{\max} = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} r^2 \quad (4.30)$$



4.12-rasm. Bitta naycha uchun oqim harakati.

Naycha kesimi bo'ylab oqib o'tadigan to'liq suyuqlik miqdori Q (suyuqlik sarfi) aylanma paraboloid hajmi sifatida aniqlanadi (4.12-rasm) va o'z navbatida quyidagicha aniqlanadi.

Tenglama (4.29) quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$u(y) = \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} r^2 \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2} \right) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \quad (4.31)$$

Doiraviy kesimga ega bo'lgan naycha orqali o'tadigan suyuqlikning umumiy oqimi uchun Gagen – Puazeyl formulasidan foydalanib, quyidagini aniqlaymiz:

$$Q = \int_0^r u(y) 2\pi y dy = 2\pi u_{\max} \int_0^r \left(y - \frac{y^3}{r^2} \right) dy = 2\pi u_{\max} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4r^2} \right]_0^r$$

ya'ni oqim sarfi uchun ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$Q = \frac{\pi(p_0 - p_l)r^4}{8\mu L} \quad (4.32)$$

Naychaning ko'ndalang kesimi bo'yicha oqimning o'rtacha tezligini kiritamiz:

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi r^2} \quad (4.33)$$

Formula (4.32) ni e'tiborga olgan holda (4.33) ni quyidagicha yozamiz:

$$\bar{u} = \frac{(p_0 - p_l)r^2}{8\mu L}$$

Funksiya $\bar{u}(y)$ ni formula (4.30) bilan aniqlanadigan $u_{\max}$ bilan taqqoslab, $\bar{u}(y) = \frac{1}{2} u_{\max}$ ekanligini ko'rish mumkin, ya'ni naychadagi laminar oqim harakatida o'rtacha tezlik eng yuqori tezlikning yarmiga teng bo'ladi.

Bosim farqi $(p_0 - p_l)$ ni aniqlaymiz:

$$p_0 - p_l = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2}$$

bundan

$$p_0 - p_l = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2} = \frac{32\mu \bar{u}}{2r} \cdot \frac{L}{2r} = \frac{32\mu \bar{u}}{D} \cdot \left(\frac{L}{D} \right) \quad (4.34)$$

bu yerda $D = 2r$ naycha diametri.

Oqim uzunligi bo'ylab yo'qotilgan bosim Darsi-Veysbax tenglamasi orqali topiladi. Endi n -ta naycha uchun quyidagi formulani hosil qilamiz.

$$p_0 - p_l = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \cdot \overline{\rho u^2} \left(\frac{L}{D} \right) \quad (4.35)$$

Formula (4.34) dan $p_0 - p_l$ ning qiymatini (4.35) ga qo'yish natijasida quyidagi formulaga ega bo'lamiz

$$\lambda_n = \frac{32\mu\bar{u}}{D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{2}{\overline{\rho u^2}} \cdot \frac{D}{n \cdot L} = \frac{64\mu}{\overline{\rho u D} \cdot n}$$

yoki bundan

$$\lambda = \frac{64}{n \cdot \text{Re}} \quad (4.36)$$

ekanligini ko'rish mumkin, bu yerda n - naychalar soni, naychalar soni ortishi bilan qarshilik koeffitsienti kamayadi, bunda $\text{Re} = \frac{\overline{\rho u D}}{\mu}$.

Quyidagi munosabat bilan aniqlanadigan o'lchamsiz qarshilik koeffitsienti λ ni kiritamiz.

$$\frac{p_0 - p_l}{L} = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \cdot \overline{\rho u^2} \left(\frac{1}{D} \right) \quad (4.37)$$

Formula (4.25) ga asosan urinma kuchlanish o'zining eng katta qiymatiga naychalar devorida erishadi, bu yerda ushbu kuchlanish quyidagiga teng bo'ladi:

$$\tau_0 = \frac{p_0 - p_l}{L} \frac{r}{2} \quad (4.38)$$

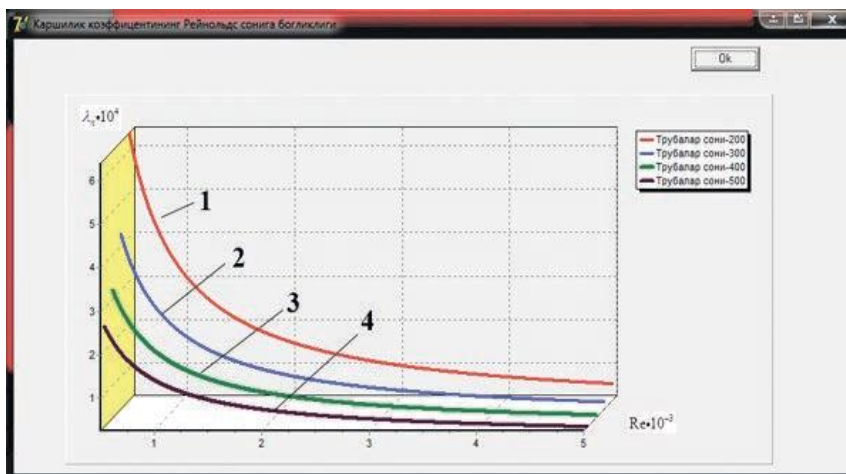
hamda ushbu formula oqim qanday rejimda bo'lishidan qat'iy nazar (laminar yoki turbulent) o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, quvur devoridagi urinma kuchlanish bosimning pasayishini o'lchash yo'li bilan eksperimental aniqlanishi mumkin.

Formula (4.37) dan $\frac{p_0 - p_l}{L}$ ning qiymatini (4.38) ga qo'yish natijasida quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\tau_0 = n \cdot \frac{\lambda_n}{8} \overline{\rho u^2}.$$

Bu naychalardagi urinma kuchlanishning maksimal qiymatini hisoblash formulasidan iborat.

Yuqorida (4.36), formula asosida olingan natijalarni keltiramiz (4.13-rasm).



4.13-rasm. Silliqliq quvurda qarshilik koeffitsientining naychalar soni n ga va Re ga bog‘liqligi: 1) $n=200$, 2) $n=300$, 3) $n=400$, 4) $n=500$.

4.13-rasmda silliq n ta naycha uchun quvurning qarshilik koeffitsienti λ_n ning Re Reynolds soniga bog‘liqligini ko‘rsatuvchi hisoblash natijalari keltirilgan. Olingan natijalarni taqqoslash shuni ko‘rsatadiki, Re sonining barcha qiymatlarida nazariy formula (4.36) o‘rinli bo‘ladi. Re sonining yanada katta qiymatlarida turbulentlik mexanizmlarining faol ishga tushishi hisobiga, qarshilik kamayadi.

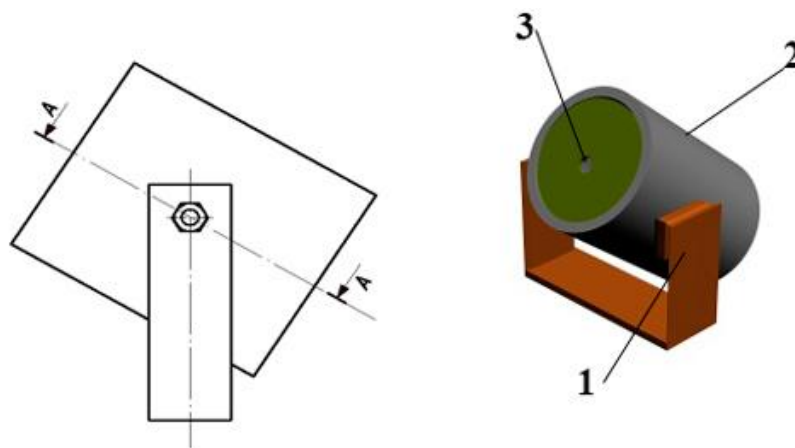
Hisoblash ekperimentida xarakterli parametrlar Reynolds soni Re va qarshilik koeffitsientining λ_n quyidagi ko‘lamlardagi o‘zgarishlar tadqiq etilgan: $Re = 500 \div 5000$, $\lambda_n = 0.0001 \div 0.0007$. Rasmdan ko‘rinadiki, naychalar soni ortishi bilan qarshilik koeffitsienti kamayadi.

Yuqoridagi natijalarga asoslanib, suv oqimlarini tartiblashtirishga imkon beradigan qurilma yasash imkoniyati mavjud. Qurilmani ishlab chiqarish jarayoniga tatbiq etish mumkin, undan suv favvoralaridagi oqimlarni tartiblashtirishda foydalanish mumkin. Taklif etilayotgan qurilma favvoralarni chiroyli ko‘rinishga keltirish, turli ranglar bilan boyitish imkoniyatini beradi.

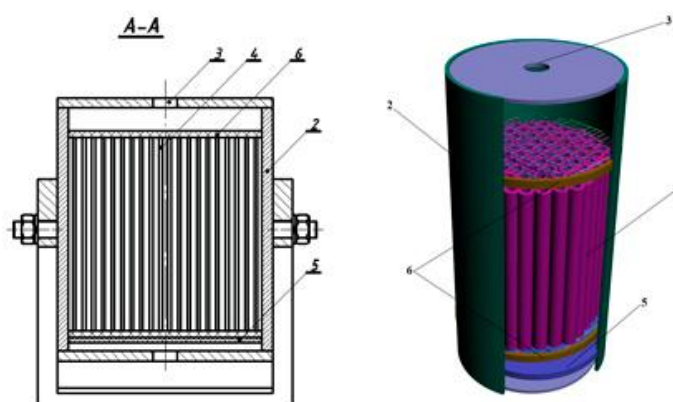
Qurilmaning asosiy maqsadi uning ishchi organlari yordamida suv oqimlarini bir xilda laminar oqim ko‘rinishda saqlab qolishdan iborat.

Qurilmani quyidagi chizmalar orqali tushuntirish mumkin, bu yerda 4.14-rasmda qurilma va uning ishchi elementlari ko‘rsatilgan. 4.15-rasmda qurilmaning ichki kesimi ko‘rsatilgan, bunda 1- qurilmani o‘tkir burchak ostida ushlab turuvchi tayanch oyoqlar, unga qurilma qattiq mahkamlangan, 2 - quvur shaklidagi korpus, 3 - vertikaliga pastdan yuqoriga qarab o‘rnatilgan kirish va chiqish teshikchalariga ega bo‘lgan silindrsimon qism, 4 - kichik diametrli naychalar, ular turbulent oqimni laminar oqimga aylantirishga xizmat qiladi va 5 - oqimning tezligini

pasaytirib kichik diametrli naychalarga oqimni teng taqsimlashga xizmat qiluvchi taqsimlagich, 6 - kichik diametrli naychalarni tutib turuvchi to‘r, u o‘z navbatida oqimning tartibli harakatlanishiga xizmat qiladi.



4.14-rasm. Qurilmaning tashqi ko‘rinishi



4.15-rasm. Qurilmaning ichki ko‘rinishi

Oqimni laminar ko‘rinishga keltiruvchi qurilma quyidagicha ishlaydi: kirish qismi 3 dan suyuqlik oqimi 5 ga yo‘naltiriladi, bu oqimning tezligini pasaytiradi va kichik diametrli naychalarda oqim teng taqsimlab beriladi, 4 dan kichik diametrli naychalardan o‘tayotgan oqim laminar ko‘rinishga keladi va 3 chiqish teshikchasi orqali laminar ko‘rinishda otilib chiqadi.

Foydalanish sohasi: ishlab chiqarishga taalluqli bo‘lib, undan favvoralarni qurishda foydalanish mumkin.

Vazifasi: taklif etilayotgan qurilma quvurda siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatida paydo bo‘ladigan laminar oqimni chuqur tahlil etish texnika sohasidagi tadbirlarda muhim ahamiyatga ega, undan turbulent (betartib) oqimlarni, laminar (qatlamli, tartiblangan) oqimlarga aylantirish zarurati paydo bo‘lganda, jumladan, saylgohlarda, istirohat

bog'larida suv oqimlarini samarali boshqarish zarurati tug'ilganda, ya'ni o'rnatiladigan favvoralarda suvdan turli yoqimli va rangli tartiblashgan oqimlarni tashkil etishda, insonlarga estetik zavq beradigan ko'rinishga keltirishda foydalanish mumkin. Quvurdagi suv oqimlarini laminar holatga keltirish o'ta foydali bo'lib, iqtisodiy samaradorlikka ega, ya'ni, suv tejamkorligiga olib keladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. –М.: Наука, 1974, 571 с.
2. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. –М: Физматгиз, 1962, 479 с.
3. Лин Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости. –М.: Иностр. лит., 1958, 195 с.
4. Squire H.B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc.Roy. Soc., 1933. -A.142, p. 621-628.
5. Ершков С.В. Нестационарные решения уравнений гидродинамики с постоянной функцией Бернулли. – Дис. ... канд. физ-мат. наук. - Нижний Новгород, 2018, 100 с.
6. Ершков С.В., Щенников В.В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001, Т.41, №7, с. 1117-1124.
7. Ershkov S.V. On existence of general solution of the Navier-Stokes equations for 3D Non-Stationary Incompressible Flow // International Journal of Fluid Mechanics Research, 2015 V.06, №42(3), pp. 206-213.
8. Ershkov S.V. Non-stationary Riccati-type flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations // Computers and Mathematics with Applications, 2016, Vol.71, no.7, pp. 1392–1404.
9. Ershkov S.V. Non-stationary creeping flows for incompressible 3D Navier-Stokes equation // European Journal of Mechanics, B/Fluids. 2017. -Vol.61(1), p.154-159.
10. Сыровой В.А. Инвариантно - групповые решения уравнений пространственного и стационарного пучка заряженных частиц. // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1963, № 3, с. 26-35.
11. Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие движения со свободной границей. // ДАН СССР 202. 1972, №2, с. 302-305.
12. Павловский В.А. Краткий курс механики сплошных сред. // СПб.: Изд. СПбГТУ РП, 1993, 209 с.
13. Павловский В.А., Шестов К.В. Применение f-модели турбулентности для расчета внутренних задач гидродинамики и тепло-массообмена // Актуальные проблемы морской

энергетики: материалы третьей Всероссийской межотраслевой научно-технической конференции. – СПб.: изд-во СПбГМТУ, 2014, 181 с.

14. Петров А.Г. Построение решений уравнений Навье-Стокса для слоя жидкости между движущимися параллельными пластинами при малых и умеренных числах Рейнольдса // Прик. мех. и тех. физ. –Т., 2013, №1, с. 51-57.
15. Новожилов В.В., Павловский В.А. Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости: 2-е изд., испр. - СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2012, 453 с.
16. Коптев А.В. Решение начально-краевой задачи для 3D уравнений Навье-Стокса и его особенности // Известие Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. Серия: Естественные и точные науки. 2014, №165, с. 7-18.
17. Самарский А.А. Введение в численные методы. –М.: Наука, 2005, 288 с.
18. Mengliyev Sh. A. Trubada qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini laminar oqimga keltirish // Таълим ва технология илмий-услубий мақолалар тўплами, 3-қисм, 2018 йил январь, 432-436-б.
19. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных и двухфазных потоков // Современные проблемы и перспективы механики: Материалы Межд. конф. Ташкент, 17-18 мая 2006 г., с. 73-75.
20. Абуталиев Ф. Б., Нармурадов Ч. Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости –Т.: «Fan va texnologiya», 2011, 188 с.
21. Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра–Зоммерфельда // Математическое моделирование. Москва, 2005, №.9(17), с. 35-42.
22. Prandtl L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandlung d. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904.-P.484-491.
23. Аристов С.Н., Князев Д.В. Течения вязкой жидкости между двумя подвижными параллельными плоскостями // Известия Российской Академии Наук. Механика жидкости и газа. 2012, № 4, с. 55-61.

24. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009, Т.43, №5, с. 547-566.
25. Harfash A.J. Numerical methods for solving some hydrodynamic stability problems // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2015, vol.1, pp.293-326.
26. Malekzadeh R., Belfroid S.P.C., Mudde R.F. Transient drift flux modelling of severe slugging in pipeline-riser systems // Int. J. Multiphase Flow. 2012, Vol.46, pp. 32-37.
27. Koptev A.V. The structure of solution of the Navier-Stokes equations. // Вестник национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт», 2014, №3(6), с. 656-660.
28. Thomas H.H. The stability of plane Poiseuille flow. Phys.rev. 1953, №.4(91), p.780-783.
29. Бахвалов К.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. Вычисл. матем. и матем. физ. 1969, №4(9), с. 841-854.
30. Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О равномерно сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной // Числен. методы механики сплошной среды. -Новосибирск, 1981, №2(12), с.45-56.
31. Крылов А.А., Малыхина И.Д. Решение задачи о собственных значениях для уравнения Орра-Зоммерфельда разностным методом // Вычисл. методы и программирование. -Москва, 1968, Вып.11, с. 44-45.
32. Жарилкасинов А., Лисейкин В.Д., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н. Применение неравномерной сетки для численного решения задачи Орра-Зоммерфельда // Числен. методы механики сплошной среды. -Новосибирск, 1983, №5(14), с. 45-54.
33. Жарилкасинов А., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н. Эффективная неравномерная сетка для уравнения Орра-Зоммерфельда и спектр течения Пуазейля // Препринт. РАН. Сиб. Отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. мех. -Новосибирск, 1984, №21, 35 с.
34. Loer St. Examination of the stability of disturbed boundary-layer flow by a numerical method Phys fluids. 1969, №.12(12), p.139-143.

35. Слепцов А.Г. Проекционно-сеточные методы решения задачи Орра-Заммерфельда // Числен. методы. механики сплошной среды. -Новосибирск, 1983, №5(14), с.111-126.
36. Слепцов А.Г. Метод локальной коллокации и его применение к задачам гидродинамической устойчивости. Дис. ...канд. физ-мат.наук. ВЦ СО РАН. -Новосибирск, 1975, 128 с.
37. Brown W.B. A stability criterion for there-dimensional laminar boundary layers // In: Boundary layer and flow control. –London, 1961.-vol.2.-P.913-923.
38. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. -Москва, 1961, №3(16), с.171-174.
39. Гольдштик М.А., Сапожников В.А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии массовых сил // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. –Москва, 1968, №5, с. 42-46.
40. Jankowski D.F., Takeuchi D.J., Gersting J.M. Jr. The Riccati transformation in the numerical solution off Orr-Sommerfeld problems // Trans. ASME. E.-1972, №1(39), p. 280-281.
41. Желтухин Н.А. Детерминантный метод решения уравнения Орра-Зоммерфельда // Аэрогазодинамики: Тр. I Сиб. конф. по аэродинамики. Июль-август, Новосибирск, 1969, с. 70-73.
42. Лутовинов В.М. О методе локализации собственных значений и одной задаче линейной теории гидродинамической устойчивости // Уч. зап. ЦАГИ, Москва, 1971, №2(2), с.76-80.
43. Orszag S.A. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries I. Calerkin (spectral) representations // Stud. appl. Math. 1971, №4(50), p. 293-327.
44. Orszag S.A. Galerkin approximations to flows within slabs, spheres and cylinders // Phys. rev. lett. 1971, №18(26), p.1100-1103.
45. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. fluid mech. 1971, №4(50), p. 689-701.
46. Дармаев Т.Г. Решение задачи Орра-Зоммерфельда псевдоспектральным методом по полиномам Чебышева // Вычислительные технологии, 2008, Т.13, №3, с. 38–44.
47. Grosch C.E., Salwen H. The stability of steady and timedevlopment plane Poiseuille flow // J. fluid mech. 1968, №1(34), p.177-205.
48. Gottlied D., Turkel E. On time discretization for spectral methods // Stud. appl. math. 1980, №1(63), p. 67-86.

49. Kleiser L. Spectral simulation of laminar-turbulent transition in plane Poiseuille flow and comparison with experiments // Lect.notes phys. 1982, №170, p. 280-285.
50. Orszag S.A., Patera A.T. Secondary instability of wall bounded shear flows // J. fluid mech. 1983, №128, p. 347-385.
51. Gottlieb D., Lustman L. The Dufort-Francler Chebyshev method for parabolic initial boundary value problems // Computers and fluids. 1983, №2(11), p.107-120.
52. Bridges T.J., Morris P.J. Spectral calculations of the spatial stability of nonparallel boundary layers // AIAA paper. 1984, №487, p.1-8.
53. Ku H.G., Hatzivramidis D. Solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equations by Chebyshev expansion methods // Computers and fluids. 1985, №1(13), p. 99-113.
54. Fulton S.R., Taylor G.D. On the Gottlieb-Turkel time filter for Chebyshev spectral methods // J. comput. phys. 1984, №2(55), p. 302-312.
55. Gottlieb D. The stability of pseudospectral-Chebyshev methods // Math. comput. 1981, №153(36), p.107-118.
56. Fox L., Parker I.B. Chebyshev polynomials in numerical analysis. Oxford university press. –London, 1968, 205 p.
57. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. –М.: Наука, 1983, 384 с.
58. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Спектрально-сеточный метод для исследования гидродинамической устойчивости двухфазного течения в пограничном слое // Математическое моделирование экологических систем: Тез. докл. Межд.науч. конф. 9-12 сентября. Алмааты, 2003, с. 131.
59. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Численное решение задачи гидродинамической устойчивости с помощью спектрально-сеточного метода // Инновация – 2003: Тез. докл. Межд. науч.-практ. конф. Ташкент, 2003, с. 60-62.
60. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Исследование пространственной зависимости характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля // Проблемы механики и сейсמודинамики сооружений: Материалы Межд. конф. 27-28 мая. Ташкент, 2004, с. 361-363.
61. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Спектрально-сеточная аппроксимация уравнений гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Современные проблемы

- математической физики и информационных технологий: Тр. Межд. конф. 18-27 апреля, Ташкент, 2005, Т.2, с. 102-104.
62. Нармурадов Ч.Б. Спектр собственных значений для двухфазного течения Пуазейля и пространственная зависимость характерных параметров // Техника и технология. –Москва, 2007, №.5(23), с. 55-57.
 63. Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений // Математическое моделирование. –Москва, 2007, №.6(19), с. 53-60.
 64. Коновалов А.Н. Введение в вычислительные методы линейной алгебры. -Новосибирск: Наука, 1983, 84 с.
 65. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. –М.: Мир, 1980, 616 с.
 66. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. –М.–Л.: Физматгиз, 1963, 734 с.
 67. Gary J., Helgason R. A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems // J. comput. phys. 1970, №5, p.169-187.
 68. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. –М.: Наука, 1970, 564 с.
 69. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. –М.: Наука, 1982, 320 с.
 70. Турчак Л.И. Основы численных методов. -М.: Наука, 1987, 320 с.
 71. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. -М.: Мир, 1988, 352 с.
 72. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. –М.: Наука, 1966, 576 с.
 73. Ланкастер П. Теория матриц. -М.: Наука, 1982, 272 с.
 74. Беллман Р. Введение в теорию матриц. -М.: Наука, 1976, 352 с.
 75. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1972, 392 с.
 76. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. –М.: Наука, 1977, 304 с.
 77. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. –М.: Наука, 1988, 192 с.
 78. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. -М.: Мир, 1977, 192 с.
 79. Волков Е.А. Численные методы. -М.: Наука, 2007, 256 с.
 80. Reynolds O. On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans.roy.soc. 1883, № 174, p. 935-982.

81. Reynolds O. On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil. Trans.royal.soc. 1894, –Vol. 186, pp. 123-163.
82. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. –М.: Мир, 1971, 350 с.
83. Кочен Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. –М.: Физматлит, 1963, 728 с.
84. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1977, 366 с.
85. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. -М.: Физматлит, 2005, 88 с.
86. Шарфарец Б.П., Дмитриев С.П. Моделирование турбулентного движения жидкости на основе гипотезы Буссинеска // Научное приборостроение, 2018, Т.28, №3, с. 101–108.
87. Сидорова Т.В., Зыкова Т.В., Сафонов К.В. О модификации быстрого одномерного преобразования Фурье по алгоритму кули-тьюки // Вестник СибГАУ, 2018, Т.16, №2, с. 360-363.
88. Flynn J.E., GPS coarse acquisition using the monobit FFT algorithm in a broadband receiver // J.E.Flynn.-Wrighte state university, 2008, 97 p.
89. Николаев А.Н. Выбор поворачивающих множителей в алгоритме монобитного быстрого преобразования Фурье // Compyuter Technologies Automatic Control, Radio Electronics 2013, V.13, no.3, pp. 137-140.
90. Patera A.T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion.Comp. Phys., 1984. -Vol.54, p. 468-488.
91. Моисеенко Б.Д., Рождественский Б.Л., Сидорова В.К. Спектральные характеристики разностных схем и условия численного моделирования предельных режимов течений вязкой жидкости // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - Москва, 1974. -№6(14), с.1499-1515.
92. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х.т. –М.: Мир, 1985,Т.1, 264 с.
93. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х.т. –М.: Мир, 1985, Т.2, 400 с.
94. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х т. –М.: Наука, 1984,Т.2, 600 с.

95. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. -М.: Физматгит, 1961, 204 с.
96. Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. -М.: Физматлит, 1959, 916 с.
97. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. -М.: Мир, 1981, 408 с.
98. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. В 4-х т. –М.: Наука, 1986, Т.4, 736 с.
99. Иосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. –М.: Мир, 1983, 301 с.
100. Бутенин Н. В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1976, 384 с.
101. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. -М.: Мир, 1981, 640 с.
102. Шашин В. М. Гидромеханика. –М.: Высшая школа, 1990, 384 с.
103. Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. -М.: Наука, 1985, 312 с.
104. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. –М.: Наука, 1977, 408 с.
105. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. –М.: Наука, 1981, 368 с.
106. Гордин В.А. Дифференциальные и разностные уравнения. -М.: «Высшая школа экономики», 2016, 517 с.
107. Кантакузен В.А. К вопросу вычисления коэффициента Дарси методом регрессионного анализа. Материалы XXI Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" имени А.Г. Горшкова, 16-20 февраля 2015, Вятчи. Том 1. /МАИ.: ООО "ТРП", 2015. с. 59-60.
108. Лебедева Н.А., Жибаядов В.Д., Синьков К.Ф. Исследование гиперболичности одномерных нестационарных моделей газожидкостных течений в трубопроводе // VII международная конференция “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”. -Новосибирск: 2015, 7-11 сентября, с. 135.
109. Нормурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А., Джураева Н.Т. Математические модели проблемы гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2015, №2, с. 6-11.

110. Нормурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А., Джураева Н.Т. О методах решения проблемы гидродинамической устойчивости // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2015, №2, с. 58-64.
111. Менглиев Ш.А. Спектрально-сеточный метод // Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых, II часть. Термез, “Тафаккур”, 29-30-января, 2016, с. 287-290.
112. Менглиев Ш.А., Холтўраев Х.Ф. Orr-Zomerfeld tenglamalarni uychish uchun amaliy dasturlar paketi //Алгебра, амалий математика ва ахборот технологиялари масалалари республика илмий конференцияси, Наманган, 20-21 декабрь, 2016, 125-127-б.
113. Нормурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А. О методах решения проблемы гидродинамической устойчивости // Актуальные научные исследования в современном мире: IX Международная научно-практическая интернет-конференция. Выпуск 9, Часть 6, Украина, Переяслав-Хмельницкий, 26-27 января, 2016, с. 42-51.
114. Нормурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А. Спектрально-сеточный метод и пакет прикладных программ для решения уравнения Орра-Зоммерфельда // Актуальные научные исследования в современном мире: IX Международная научно-практическая интернет-конференция. Выпуск 9, Часть 6, Украина, Переяслав-Хмельницкий, 26-27 января, 2016, с. 52-64.
115. Менглиев Ш.А., Юлдашев, М.Ж., Шаймуратова М. Математические модели проблемы гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // XLIII Международная научно-практическая конференция «Наука и современность»,– Новосибирск: Издательство ЦРНС, 11 февраль, 2016, с. 205-212.
116. Нормурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А., Гуломкодилов К.А. Математические модели проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных потоков // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2017, №1(7), с.41-47.
117. Normurodov Ch. B., Mengliyev Sh. A., Holliyev F. B. “Gidrodinamik turg'unlik muammolarini matematik modellash tirish” Mathematical Analysis and its Application to Mathematical Physics: international scientific conference, Samarkand, 17-20 September 2018, p.121-123.
118. Нормурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А. Трубадаги суюкликлар ҳаракатини математик моделлаштириш // Ҳисоблаш ва амалий математика муаммолари. 2018, №2(14), 36-47-б.

119. Mengliyev Sh.A. Trubada qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini laminar oqimga aylantirish // Хоразм Маъмун академияси ахборотномаси. 2018, №2, 105-110-б.
120. Mengliyev Sh.A., Abdullayev Sh. A. Mathematical modeling of fluid motion in pipes // European Journal of Research. 2018, № 1(3-4), p.97-106.
121. Нормурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А., Менглиев И.А. Исследование зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса в несжимаемых вязких жидкостях // Проблемы вычислительной и прикладной математики”, 2018, №2(17), с. 60-68.
122. Mengliyev Sh.A., Gulomkodirov K. A., Yuldoshev Sh. M. Laminary fluid flow in a pipe and dimensional number of reynolds // TRANS Asian Journal of Marketing Management Research. Vol. 7, Issue 11, November 2018, p. 20-28.
123. Менглиев Ш.А. Трубадаги суюқликлар харакатини ламинар ҳолатга келтириш курилмаси // Фан ва таълимни ривожлантиришда ёшларнинг ўрни. ЎзФА нинг 75 йиллик юбилейига бағишланган Республика миқёсидаги илмий ва илмий-техник конференция материаллари, 1-қисм, Тошкент-Навоий, 2018 йил 23 ноябрь, 36-38-б.

MUNDARIJA

KIRISH.....	4
I BOB. SIQILMAYDIGAN YOPISHQOQ SUYUQLIKLAR HARAKATINI MATEMATIK MODELLASHTIRISHNING HOZIRGI HOLATI VA MUAMMOLARI.....	7
1.1. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati nostatsionar jarayonlarini tadqiq etish bo'yicha asosiy adabiyotlar sharhi.....	7
1.2. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tadqiq etishning matematik modelashtirish konstruktiv metodologiyasini ishlab chiqish.....	11
1.3. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar oqimining gidrodinamik turg'unlik muammosi masalalari va ularni yechish usullari.....	15
II BOB. GIDRODINAMIK TURG'UNLIK MUAMMOSINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH.....	25
2.1. Gidrodinamik turg'unlik muammosining matematik modelini ishlab chiqish.....	25
2.2. To'g'ri kanallardagi suyuqliklar oqimini matematik modelashtirish	28
2.3. Chegaraviy qatlamdagi suyuqliklar oqimini bosim gradientining turli qiymatlarini hisobga olgan holda matematik modelashtirish.....	31
III BOB. SIQILMAYDIGAN YOPISHQOQ SUYUQLIKLAR OQIMI NOSTATSIONAR JARAYONLARINING SONLI ALGORITMLARI.....	37
3.1. Gidrodinamik turg'unlik muammosi uchun spektral-to'r usuli	

sonli algoritmi.....	37
3.2. To‘g‘ri kanallardagi suyuqliklar harakati masalalarini yechish algoritmi.....	48
3.3. Chegaraviy qatlamda bosim gradientining turli qiymatlari uchun sonli algoritmi takomillashtirish.....	50
IV BOB. SIQILMAYDIGAN YOPISHQOQ SUYUQLIKLAR- NING CHEGARAVIY QATLAM VA QUVURLARDAGI OQIMLARI UCHUN DASTURIY TA‘MINOT VA HISOBLASH EKSPERIMENTI.....	57
4.1. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar oqimini tadqiq etish uchun amaliy dasturlar majmuasini ishlab chiqish.....	57
4.2. Chegaraviy qatlamdagi oqimlar uchun bosim gradientining turli qiymatlarida o‘tkazilgan hisoblash eksperimenti natijalari.....	61
4.3. Quvurdagi suyuqlik oqimi uchun quvurning qarshilik ko‘rsatish koeffitsientini tadqiq etish bo‘yicha hisoblash tajribalarini o‘tkazish.....	68
4.4. Quvurlardagi betartib suyuqliklar oqimini laminar holatga keltirish qurilmasini yaratish texnologiyasi	76
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	85



Normurodov Chori Begaliyevich 1953 yilda Surxondaryo viloyati Jarqo'rg'on shahrida tug'ulgan. 1976 yilda Samarqand davlat universitetini Amaliy matematika ixtisosligi bo'yicha tugatgan. 1977-1979 yillarda Novosibirsk davlat universitetida stajyor-tadqiqotchi, 1979-1981 yillarda esa shu universitetning Ilmiy-tadqiqot sektorida ilmiy xodim sifatida faoliyat yuritgan. 1981-1984 yillarda Rossiya Fanlar akademiyasi Sibir bo'limi Nazariy va amaliy mexanika instituti aspiranturasida o'qigan.

1987 yilda RFA Sibir bo'limi Hisoblash markazida nomzodlik dissertatsiyasini, 2008 yilda O'zR FA Matematika va information texnologiyalar institutida doktorlik dissertatsiyasini himoya qilgan. Fizika-matematika fanlari doktori.

Hozirda Termiz davlat universiteti "Amaliy matematika va informatika" kafedrasida mudiri lavozimida faoliyat yuritmoqda.



Mengliyev Shaydulla Abdusalomovich 1981 yilda Surxondaryo viloyati Jarqo'rg'on tumanida tug'ilgan. 2003 yilda Termiz davlat universiteti amaliy matematika va informatika ta'lim yo'nalishini tamomlagan. 2003-2005 yillarda - O'zbekiston Milliy universiteti Amaliy matematika va axborot texnologiyalari mutaxassisligi bo'yicha magistraturada o'qigan. 2004-2006 yillar mobaynida dastlab Toshkent radiotexnika kasb-hunar kolleji o'qituvchisi, so'ngra Toshkent davlat

iqtisodiyot universiteti "Oliy matematika" kafedrasida assistent- o'qituvchisi lavozimida ishlagan.

Hozirda Termiz davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti "Amaliy matematika va informatika" kafedrasida katta o'qituvchi lavozimida faoliyat yuritmoqda.